ОДНОЗНАЧНОСТЬ СЛОЖЕНИЯ В ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

И. В. Аржанцев

В теории ассоциативных колец активно исследуется задача об однозначности сложения. Напомним, что ассоциативное кольцо A называется *кольцом с однозначным сложением* или кратко *UA-кольцом*, если каждый автоморфизм мультипликативной полугруппы $\alpha\colon (A,\,\cdot\,) \cong (A,\,\cdot\,)$ является кольцевым изоморфизмом. Одним из наиболее ярких результатов здесь является теорема Стефенсона об однозначности сложения в кольце матриц размера $n \geqslant 2$ над произвольным ассоциативным кольцом с единицей [1].

В настоящей заметке доказана однозначность сложения для полупростых алгебр Ли. Этот результат можно рассматривать как аналог теоремы Стефенсона в категории алгебр Ли. Наиболее интересный частный случай – алгебра sl_n: если ϕ – биекция на множестве матриц со следом ноль, и для любой пары матриц $\phi(AB-BA)=\phi(A)\phi(B)-\phi(B)\phi(A)$, то $\phi(A+B)=\phi(A)+\phi(B)$.

Определение. Кольцо Ли R называется *кольцом Ли с однозначным сложением*, или кратко *UA-кольцом Ли*, если для каждой биекции $\phi\colon R\to R$, удовлетворяющей условию

$$\phi([a,b])=[\phi(a),\phi(b)] \quad \forall\, a,b\in R, \tag{$*$}$$

выполнено условие $\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)\ \forall\, a,b\in R$.

Далее буквой ϕ будем обозначать биекцию кольца Ли R, удовлетворяющую условию $(*)$. Заметим, что $\phi(0)=0$, так как $\phi([0,0])=[\phi(0),\phi(0)]$.

Обозначим через $Z(a)=\{a_1\in R\mid [a_1,a]=0\}$ централизатор элемента $a\in R$.

Лемма 1. *Если $a,b\in R$ и $Z(a)\cap Z(b)=\{0\}$, то $\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)$.*

Доказательство. Пусть $\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)+\phi(c)$. Тогда

$$\begin{aligned}[\phi(a),\phi(b)]&=\phi([a,b])=\phi([a+b,b])=[\phi(a+b),\phi(b)]\\&=[\phi(a)+\phi(b)+\phi(c),\phi(b)]=[\phi(a),\phi(b)]+[\phi(c),\phi(b)],\end{aligned}$$

откуда $0=[\phi(c),\phi(b)]=\phi([c,b])$. Следовательно, $c\in Z(b)$. Аналогично, $c\in Z(a)$, и, значит, $c=0$.

Пусть $\mathscr G$ – конечномерная алгебра Ли над бесконечным полем k.

Теорема 1. *Если для любого $a\in\mathscr G$, $a\neq 0$, найдется $b\in\mathscr G$ такой, что $Z(a)\cap Z(b)=\{0\}$, то $\mathscr G$ является UA-кольцом Ли.*

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 подмножество $U(a)=\{b\in\mathscr G\mid Z(a)\cap Z(b)=\{0\}\}$ плотно и открыто по Зарискому в $\mathscr G$.*

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\mathscr G\to\mathscr G\oplus\mathscr G$, $x\to([x,a],[x,y])$. В точке $y=b$ ранг этого отображения максимален. Значит, он максимален на открытом плотном подмножестве в $\mathscr G$.

Лемма 3. *В условиях теоремы 1 для любых ненулевых $a_1,a_2\in\mathscr G, a_1+a_2\neq 0$, найдется $c\in\mathscr G$ такой, что выполнены следующие условия*:

$$Z(a_1+a_2)\cap Z(c)=\{0\},\qquad Z(a_1)\cap Z(a_2+c)=\{0\},\qquad Z(a_2)\cap Z(c)=\{0\}.$$

Доказательство. Пересечение открытых по Зарискому множеств $U(a_1+a_2)\cap(U(a_1)-a_2)\cap U(a_2)$ непусто.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00598).

Доказательство теоремы 1. Для произвольной пары элементов $a_1, a_2 \in \mathscr{G}$ из леммы 3 выберем соответствующий элемент c и применим несколько раз лемму 1: $\phi(a_1)+\phi(a_2)+\phi(c) = \phi(a_1)+\phi(a_2+c) = \phi(a_1+a_2+c) = \phi(a_1+a_2)+\phi(c)$. Если $a_1+a_2=0$, то выберем c таким, что $Z(a_1)\cap Z(c)=0$. Тогда $\phi(c)=\phi(a_1+a_2+c)=\phi(a_1)+\phi(a_2+c)=\phi(a_1)+\phi(a_2)+\phi(c)$.

Далее считаем k алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики.

Теорема 2. *Если алгебра $\mathscr{G}$ полупроста, то $\mathscr{G}$ – UA-кольцо Ли.*

Доказательство. (1) Пусть $\mathscr{G}$ проста. Покажем, что выполнено условие теоремы 1. Централизатор регулярного полупростого элемента есть подалгебра Картана алгебры $\mathscr{G}$. Докажем, что найдется подалгебра Картана, пересекающаяся с $Z(a)$ тривиально. Пусть G – алгебраическая группа, отвечающая $\mathscr{G}$, T – максимальный тор в G и Ga – орбита элемента a в присоединенном представлении. Достаточно доказать, что размерность орбиты общего положения для действия $T : Ga$ равна $\dim T$. Пусть T_0 – стабилизатор точки общего положения для этого действия [2; 7.2]. В силу коммутативности T подгруппа T_0 лежит в ядре неэффективности действия (нормальной подгруппы в G) и поэтому конечна.

(2) Для полупростой алгебры зафиксируем ее разложение в сумму простых идеалов. Будем называть элемент *полным*, если его проекции на каждый из простых идеалов ненулевые. Если элементы a, b и $a+b$ полны, то для пары a, b рассуждения такие же, как и в случае простой алгебры.

(3) Пусть a и b полны. Тогда для почти любого c имеем $\phi(a)+\phi(b)+\phi(c)=\phi(a)+\phi(b+c) = \phi(a+b+c)=\phi(a+b)+\phi(c)+\phi(d)$, $d\in Z(c)$, или $\phi(a)+\phi(b)-\phi(a+b)=\phi(d)$. Варьируя c, получаем $d=0$.

(4) Пусть b полный. Найдутся $a_1, a_2 \in \mathscr{G}$ такие, что $a_1+a_2=a$ и элементы a_1, a_2 a_2+b полны. Тогда $\phi(a)+\phi(b)=\phi(a_1)+\phi(a_2)+\phi(b)=\phi(a_1)+\phi(a_2+b)=\phi(a_1+a_2+b)=\phi(a+b)$.

(5) Если a и b не полны, то запишем $b=b_1+b_2$ и применим рассуждения предыдущего пункта.

Можно рассматривать более сильное требование на однозначность сложения в алгебрах Ли.

Определение. Назовем алгебру Ли $\mathscr{G}$ *UA-алгеброй Ли*, если для любой биекции ϕ с условием $(*)$ существует базис $\{e_i\}$ в $\mathscr{G}$ такой, что ϕ есть композиция некоторого автоморфизма $\mathscr{G}$ и отображения $\sum k_i e_i \to \sum \alpha(k_i)e_i$ для некоторого автоморфизма α поля k.

Гипотеза. *Каждая полупростая алгебра Ли является UA-алгеброй Ли.*

В работе [3] эта гипотеза доказана для алгебры Ли sl_2 над произвольным полем характеристики отличной от двух.

Отметим также, что в работе [4] однозначность сложения доказана для широкого класса комплексных алгебр Ли при условии непрерывности биекции.

Автор благодарен К. И. Бейдару и А. В. Михалёву, обратившим его внимание на данную задачу, А. В. Титову, указавшему на частный случай леммы 1, и Д. А. Тимашеву за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] W. Stephenson // Canad. J. Math. 1969. V. 21. №6. P. 1455–1461. [**2**] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов // Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 55. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 137–309. [**3**] I. V. Arzhantsev // Lie Algebras, Rings and Related Topics. Papers of the 2nd Tainan–Moscow International Algebra Workshop. Tainan, Taiwan, January 11–17, 1997 / ed. F. Yuen, A. A. Mikhalev, E. Zelmanov. Hong Kong: Springer-Verlag, 2000. P. 1–4. [**4**] И. В. Аржанцев, А. В. Титов. Однозначность сложения в алгебрах Ли // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. (в печати).

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: `arjantse@mccme.ru`

Принято редколлегией
29.03.2001