УДК 512.745

И. В. Аржанцев, О. В. Чувашова

Классификация аффинных однородных пространств сложности один

Сложностью действия редуктивной алгебраической группы G на многообразии X называют коразмерность типичной орбиты для индуцированного действия борелевской подгруппы $B \subset G$ на X. В работе классифицированы аффинные однородные пространства G/H сложности один. Эти результаты являются естественным продолжением полученной ранее классификации сферических аффинных однородных пространств, т.е. пространств сложности нуль.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение

Пусть G – связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики и H – алгебраическая подгруппа в G. С однородным пространством G/H связан важный целочисленный инвариант $c(G/H)$ – его сложность. Понятие сложности однородного пространства возникло в работе [1], а для произвольного G-многообразия сложность была введена в [2]. Как показали исследования последующих десятилетий, сложность играет ключевую роль при изучении геометрии однородного пространства, в теории его эквивариантных вложений, в теории инвариантных гамильтоновых систем на кокасательном расслоении $T^*(G/H)$ и в других разделах математики, связанных с однородными пространствами.

Напомним определение сложности. Пусть алгебраическая группа G действует на неприводимом алгебраическом многообразии X и B – борелевская подгруппа в G. *Сложностью* $c_G(X)$ *G-многообразия* X называют минимальную коразмерность B-орбиты на X для индуцированного действия $B : X$. (Мы будем обозначать сложность через $c(X)$, когда это не может привести к недоразумениям.) По теореме Розенлихта сложность равна степени трансцендентности поля $\mathbb{K}(X)^B$ рациональных B-инвариантных функций на X. Кроме сложности имеется еще одна важная характеристика действия – его ранг. *Рангом* $\mathrm{rk}(X)$ *неприводимого G-многообразия* X называют ранг решетки весов B-полуинвариантных рациональных функций на X.

Нормальное G-многообразие X называют *сферическим*, если $c(X) = 0$, или, эквивалентно, $\mathbb{K}(X)^B = \mathbb{K}$. Пространство G/H и подгруппа $H \subseteq G$ называются

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00756), МАС (гранты № № 02-01-06401, 03-01-06252) и гранта Президента РФ (№ МК-1279.2004.1).

сферическими, если G/H является сферическим G-многообразием. Теория сферических многообразий является одним из наиболее разработанных разделов теории алгебраических групп преобразований (см., например, обзор [3]). В частности, для сферических однородных пространств построена замечательная теория вложений [1], [4], обобщающая теорию торических многообразий. В работе [5] получено аналогичное (но существенно более сложное) описание вложений однородных пространств сложности один.

Пространства малой сложности естественно возникают при изучении вопроса о конечности числа орбит во вложениях данного однородного пространства. Так, в произвольном вложении сферического однородного пространства число орбит конечно, в то время как любое однородное пространство сложности большей или равной 1 допускает проективное вложение с бесконечным числом орбит [6]. Более общо, наибольшее значение G-модальности (т.е. максимума числа параметров в непрерывном семействе G-орбит) по всем вложениям пространства G/H равно $c(G/H)$ [2], [7].

Если ограничиться аффинными однородными пространствами и их вложениями в аффинные многообразия, то известно, что каждое аффинное вложение пространства G/H сложности большей или равной 2 содержит лишь конечное число орбит тогда и только тогда, когда G/H аффинно замкнуто, т.е. каждое аффинное вложение G/H состоит ровно из одной орбиты [8]. Аффинное однородное пространство сложности один допускает аффинное вложение с бесконечным числом орбит тогда и только тогда, когда подгруппа H может быть расширена одномерным централизующим ее тором так, что сложность получившегося однородного пространства остается равной единице [8]. Среди однородных пространств простых групп этим свойством обладают только пространства, отвечающие п. 3 таблицы 2 настоящей работы. В случае полупростой группы таких пространств существенно больше – они соответствуют пп. 9, 10, 15, 17 и 26 таблицы 4. О связи сложности и модальности аффинных вложений см. [9].

Другой причиной интереса к однородным пространствам малой сложности служат задачи симплектической геометрии и теории интегрируемых гамильтоновых систем. Пусть G – связная вещественная редуктивная группа Ли и K – ее связная замкнутая редуктивная подгруппа. Кокасательное расслоение $T^*(G/K)$ несет естественную структуру симплектического многообразия, и действие $G : G/K$ левыми сдвигами индуцирует симплектическое действие $G : T^*(G/K)$. Обозначим буквой P связанное с этим действием отображение моментов $P\colon T^*(G/K) \to \mathfrak{g}^*$. Алгебры вещественно-аналитических функций $C(T^*(G/K))$ и $C(\mathfrak{g}^*)$ канонически наделяются скобками Пуассона, причем для любых $h_1, h_2 \in C(\mathfrak{g}^*)$ имеем

$$\{h_1 \circ P,\ h_2 \circ P\} = \{h_1, h_2\} \circ P.$$

Функции на $T^*(G/K)$ вида $h \circ P$ называют *коллективными*. По теореме Нётер коллективные функции являются интегралами для любого потока на $T^*(G/K)$ с G-инвариантным гамильтонианом. Другими словами, $\{h \circ P, f\} = 0$ для любой $f \in C(T^*(G/K))^G$. Говорят, что G-инвариантная гамильтонова система $\dot{x} = \operatorname{sgrad} f$ *интегрируема в классе интегралов Нётер*, или *коллективно вполне интегрируема*, если найдется набор $\{h_i\}$, $i = 1, \ldots, \dim G/K$, вещественно-аналитических функций на $\mathfrak{g}^*$ такой, что функции $h_i \circ P$ функционально независимы и находятся попарно в инволюции. Известно, что всякая G-инвариантная гамильтонова система на $T^*(G/K)$ интегрируема в классе интегралов Нётер тогда и только тогда, когда комплексифицированное однородное пространство $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ сферично [10]. Если подгруппа K компактна, то указанные условия эквивалентны обращению в нуль скобки Пуассона на любой паре функций из $C(T^*(G/K))^G$ [11] (см. также [12; предложение 9]).

Исследованию свойств гамильтоновых систем на кокасательных расслоениях однородных пространств положительной сложности посвящены работы [13], [14]. Там показано, что для компактной подгруппы K число независимых G-инвариантных вещественно-аналитических функций на $T^*(G/K)$, которые независимы также от коллективных функций, равно $2c(G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$. (В работе [12] доказано, что это же число равно корангу симплектического действия $G^{\mathbb{C}} : T^*(G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$.) В свою очередь, максимальное число независимых коллективных функций в инволюции равно $\dim G/K - c(G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$. В случае однородных пространств сложности один[1], добавив к максимальной независимой системе коллективных функций в инволюции независимую от них инвариантную функцию F, мы получим полную систему функций в инволюции. Выбирая F коммутирующей с гамильтонианом, можно показать, что на кокасательном расслоении к однородному пространству сложности один любая G-инвариантная гамильтонова система интегрируема [14; предложение 12].

Таким образом, однородные пространства малой сложности редуктивной группы G являются весьма естественным и важным для приложений объектом. Поэтому хотелось бы иметь полный список таких пространств G/H. Классификацию естественно начать со случая, когда подгруппа H редуктивна. (Согласно критерию Мацусимы это условие эквивалентно аффинности пространства G/H.) При таком ограничении списки однородных пространств сложности меньшей или равной 1 имеют разумный объем. Это подтверждает предположение, высказанное в конце работы [2], где задача классификации пространств сложности один была поставлена впервые.

Хорошо известно, что сложность пространства G/H определяется парой касательных алгебр $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (предложение 1). Это позволяет свести классификацию к перечислению пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ – ее редуктивная подалгебра, для которых типичная коразмерность в алгебре $\mathfrak{g}$ подпространств вида $\mathfrak{h} + \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{b}$, $g \in G$, равна единице. Без ограничения общности можно считать алгебру $\mathfrak{g}$ полупростой (предложение 2).

Цель настоящей работы – классифицировать все аффинные однородные пространства сложности один редуктивных групп в терминах касательных алгебр. Результаты классификации приведены в таблице 4. Ранее была получена классификация сферических редуктивных подгрупп в простых группах [15], классификация сферических редуктивных подгрупп в произвольных редуктивных группах (см. [10] и, независимо, [16]), а также классификация редуктивных подгрупп сложности один в простых группах [17] (см. также [13]). Для удобства читателя результаты этих классификаций включены в текст работы (см. таблицы 1, 3 и 2 соответ-

[1] В работе [14] они названы *почти сферическими* (almost spherical spaces).

ственно). Отметим, что классификация проводится с точностью до автоморфизма объемлющей алгебры $\mathfrak{g}$. Так, сферические пары $(\mathfrak{so}_8, \mathfrak{spin}_7)$ и $(\mathfrak{so}_8, \mathfrak{sp}_4 \oplus \mathfrak{sl}_2)$ переводятся внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{so}_8$ в пары, отвечающие п. 10 таблицы 1 при $(n,m) = (7,1)$ и $(5,3)$ соответственно, поэтому отдельно в таблице 1 не фигурируют. В таблицах 1 и 2 мы указали также $\mathfrak{h}$-модуль $\mathfrak{m}$, отвечающий представлению изотропии. В таблицах 3 и 4 представление изотропии не указано, однако его легко найти, поскольку пары из этих таблиц получены описанной ниже операцией сцепки пар из таблиц 1 и 2, после которой представление изотропии есть прямая сумма представлений изотропии сцепливаемых пар и одного экземпляра присоединенного представления той компоненты, по которой проводилась сцепка. В таблицах 3 и 4 указаны стационарные подалгебры общего положения для представления изотропии и ранги соответствующих однородных пространств (заметим, что ранг пространства G/H также определяется парой $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, см. [19]).

Использованный нами метод классификации близок к методу работы И. В. Микитюка [10]. В частности, операция, которую мы называем сцепкой, в [10] называлась “расширением пар”. Отметим, что использование операции сцепки двух пар алгебра-подалгебра позволяет избежать рассмотрения глубины подалгебры (М. Брион) и проводить индукцию лишь по числу простых компонент объемлющей алгебры $\mathfrak{g}$. Вычисление сложности однородного пространства основано на изучении стационарной подалгебры общего положения для представления изотропии (здесь используются таблицы Элашвили [18]) и применении формул Панюшева (теоремы 1 и 2).

Авторы благодарны Д. А. Тимашёву, который обратил их внимание на принципиальную возможность полученной в настоящей работе классификации, а также сделал ряд ценных замечаний.

§ 2. Необходимые сведения о сложности и ранге однородных пространств

Всюду в тексте алгебры Ли алгебраических групп будем обозначать соответствующими строчными готическими буквами. Исключение сделано только для особых простых алгебр Ли – по традиции они обозначены большими латинскими буквами. В этом параграфе мы приведем некоторые хорошо известные факты о сложности однородных пространств.

Лемма 1. *Пусть F – редуктивная подгруппа в G и H – алгебраическая подгруппа в F. Тогда*
1) $c_G(G/F) \leqslant c_G(G/H)$;
2) $c_F(F/H) \leqslant c_G(G/H)$.

Доказательство. Согласно [2] сложность G-многообразия X равна модальности для индуцированного действия B на X. В случае, когда X есть однородное пространство G/H, указанная модальность совпадает с модальностью двустороннего действия $B \times H$ на G и правого действия H на $B \setminus G$. Отсюда следует неравенство 1). Эти же соображения доказывают 2), если выбрать борелевскую B в G так, чтобы пересечение B и F было борелевской подгруппой B_F в F, и реализовать $B_F \setminus F$ как F-орбиту точки Be в $B \setminus G$.

Предложение 1. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $c(G/H)=m$;
2) *существует открытое подмножество* $W\subset G$ *такое, что для любого* $g\in W$ $\operatorname{codim}_{\mathfrak g}(\mathfrak h+\operatorname{Ad}(g)\mathfrak b)=m$.

Доказательство. Условие 1) эквивалентно тому, что для точек g из открытого подмножества $V\subset G$ подмножество BgH (или $g^{-1}BgH$) имеет в G коразмерность m. Последнее эквивалентно условию 2) для $W=V^{-1}$.

Будем говорить, что пара $(\mathfrak g,\mathfrak h)$ *имеет сложность* m, если выполнено условие 2). Далее для сложности пары $(\mathfrak g,\mathfrak h)$ используем обозначение $c(\mathfrak g,\mathfrak h)$. Предложение 1 позволяет свести классификацию однородных пространств сложности один к классификации соответствующих пар $(\mathfrak g,\mathfrak h)$.

Предложение 2. *Пусть* $\mathfrak g=\mathfrak g^s\oplus\mathfrak z$ – *разложение редуктивной алгебры* $\mathfrak g$ *в сумму максимального полупростого идеала и центра. Тогда сложность пары* $(\mathfrak g,\mathfrak h)$ *равна сложности пары* $(\mathfrak g^s,\operatorname{pr}_1(\mathfrak h))$, *где* $\operatorname{pr}_1\colon\mathfrak g\to\mathfrak g^s$ – *проекция вдоль* $\mathfrak z$.

Доказательство. Нужно заметить, что $\mathfrak z$ лежит в $\operatorname{Ad}(g)\mathfrak b$ для всех $g\in G$. Поэтому $\mathfrak h+\operatorname{Ad}(g)\mathfrak b=\operatorname{pr}_1(\mathfrak h)+\operatorname{Ad}(g)\mathfrak b$.

Предложение 2 позволяет считать алгебру $\mathfrak g$ полупростой. Всюду далее подгруппа H и подалгебра $\mathfrak h$ предполагаются редуктивными.

Рассмотрим ограничение присоединенного представления $\operatorname{Ad}\colon G\to\operatorname{GL}(\mathfrak g)$ на подгруппу H. Подалгебра $\mathfrak h$ является инвариантным подпространством для такого представления и в силу редуктивности H в $\mathfrak g$ можно найти H-инвариантное подпространство $\mathfrak m$, дополнительное к $\mathfrak h$. Заметим, что H-модуль $\mathfrak m$ может быть отождествлен с касательным пространством в точке eH к аффинному однородному пространству G/H. Линейное представление $\rho\colon H\to\operatorname{GL}(\mathfrak m)$ называют *представлением изотропии для пары* (G,H). Его дифференциал $d\rho\colon\mathfrak h\to\mathfrak{gl}(\mathfrak m)$ однозначно определяется парой $(\mathfrak g,\mathfrak h)$. Для представления $d\rho$ обозначим через $\mathfrak s$ стационарную подалгебру общего положения (с.п.о.п.). Известно, что $\mathfrak s$ редуктивна [19; теорема 3]. Пусть $\mathfrak b$ – подалгебра Бореля в $\mathfrak g$, $\mathfrak b_{\mathfrak s}$ – подалгебра Бореля в $\mathfrak s$ и $N(\mathfrak g)$ – число положительных корней в системе корней, отвечающей алгебре $\mathfrak g$. Следующая теорема показывает, в частности, что ранг пространства G/H определяется парой $(\mathfrak g,\mathfrak h)$, что оправдывает обозначение $\operatorname{rk}(\mathfrak g,\mathfrak h)$.

Теорема 1 [19; теорема 3]. *Имеют место соотношения*:

$$c(G/H)=c(\mathfrak g,\mathfrak h)=\dim\mathfrak b-\operatorname{rk}\mathfrak g-\dim\mathfrak h+\dim\mathfrak b_{\mathfrak s}=N(\mathfrak g)-\dim\mathfrak h+N(s)+\operatorname{rk}\mathfrak s,$$
$$\operatorname{rk}(G/H)=\operatorname{rk}(\mathfrak g,\mathfrak h)=\operatorname{rk}\mathfrak g-\operatorname{rk}\mathfrak s.$$

Также для наших вычислений будет нужна

Теорема 2 [20; теорема 1.2]. *Предположим, что подалгебра* $\mathfrak h$ *вложена в подалгебру Леви* $\mathfrak l$ *параболической подалгебры* $\mathfrak p$ *алгебры* $\mathfrak g$ *и* S_1 – *стабилизатор общего положения для действия* H *на факторе* $\mathfrak l/\mathfrak h$. *Тогда*

$$c(\mathfrak g,\mathfrak h)=c(\mathfrak l,\mathfrak h)+c_{S_1}(\mathfrak p^u),$$

где $\mathfrak{p}^u$ *– унипотентный радикал алгебры* $\mathfrak{p}$*. В частности, если* $c(\mathfrak{l},\mathfrak{h})=0$*, то*

$$c(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\dim\mathfrak{p}^u-\dim\mathfrak{b}_{\mathfrak{s}_1}+\dim\mathfrak{b}_1,$$

где $\mathfrak{b}_1$ *– с.п.о.п. для действия* $\mathfrak{b}_{\mathfrak{s}_1}$ *на* $\mathfrak{p}^u$*.*

§ 3. Редуктивные подалгебры полупростых алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_s$ – разложение редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму простых идеалов. Будем называть $\mathfrak{g}_i$ *компонентами алгебры* $\mathfrak{g}$. Для полупростой $\mathfrak{g}$ все $\mathfrak{g}_i$ являются простыми (некоммутативными) алгебрами Ли, а для редуктивной $\mathfrak{g}$ некоторые из $\mathfrak{g}_i$ могут быть одномерны.

Пусть $\mathfrak{h}$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}(i)$ – проекция $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{g}_i$ вдоль остальных компонент. Тогда $\mathfrak{h}(i)$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}_i$. Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{h}$ *вполне разложима*, если $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}(1)\oplus\dots\oplus\mathfrak{h}(s)$. В общем случае $\mathfrak{h}$ содержится во вполне разложимой подалгебре $\mathfrak{h}^r=\mathfrak{h}(1)\oplus\dots\oplus\mathfrak{h}(s)$ и $\mathfrak{h}^r$ – минимальная вполне разложимая подалгебра, содержащая $\mathfrak{h}$.

Из сказанного следует, что описание редуктивных подалгебр в $\mathfrak{g}$ состоит из двух этапов: описание вполне разложимых подалгебр (что сводится к описанию редуктивных подалгебр в простых алгебрах) и описание редуктивных подалгебр, для которых проекция на каждую компоненту алгебры сюръективна.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_s$ *– полупростая алгебра Ли и* $\mathfrak{h}$ *– редуктивная подалгебра в* $\mathfrak{g}$*, для которой проекция на каждую компоненту* $\mathfrak{g}_i$ *сюръективна. Тогда* $\mathfrak{h}$ *полупроста и любая ее компонента* $\mathfrak{h}_j$ *вкладывается в* $\mathfrak{g}_1\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_s$ *как* $x\mapsto(\mathrm{pr}_{j1}(x),\dots,\mathrm{pr}_{js}(x))$*, где* $\mathrm{pr}_{ji}\colon\mathfrak{h}_j\to\mathfrak{g}_i$ *– либо изоморфизм, либо нулевое отображение (т.е.* $\mathfrak{h}_j$ *диагонально вкладывается в произведение некоторых изоморфных между собой* $\mathfrak{g}_i$*). Для фиксированного* i *ровно одно отображение* pr_{ji} *отлично от нуля.*

Доказательство. Из сюръективности проекции $\mathrm{pr}_i\colon\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}_i$ следует, что идеалы $\mathfrak{h}$ переходят в идеалы $\mathfrak{g}_i$. В силу простоты алгебры $\mathfrak{g}_i$ образ любого $\mathfrak{h}_j$ есть либо 0, либо $\mathfrak{g}_i$. Отсюда следует, что в $\mathfrak{h}$ нет коммутативных идеалов (т.е. $\mathfrak{h}$ полупроста). Более того, во втором случае из простоты $\mathfrak{h}_j$ следует, что pr_{ji} – изоморфизм. Наконец, ядро проекции $\mathrm{pr}_i\colon\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}_i$ – это идеал в $\mathfrak{h}$, и, значит, он есть сумма некоторых компонент алгебры $\mathfrak{h}$. Тем самым pr_i определяет изоморфизм $\mathfrak{g}_i$ и суммы тех компонент $\mathfrak{h}_j$, которые не попали в ядро pr_i. Это доказывает последнее утверждение леммы.

Нетрудно обобщить лемму 2 на случай редуктивной $\mathfrak{g}$. В этой ситуации центры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ будут совпадать.

Пусть $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_1\oplus\dots\oplus\mathfrak{v}_t$ – редуктивная алгебра Ли, и пусть $\varphi_{i,j}\colon\mathfrak{v}_i\to\mathfrak{v}_j$ – изоморфизм между некоторыми компонентами. Будем говорить, что подалгебра

$$\mathfrak{h}=\{(x_1,\dots,x_i,\dots,x_{j-1},\varphi_{ij}(x_i),x_{j+1},\dots,x_t)\mid x_i\in\mathfrak{v}_i,\ i\neq j\}$$

получена *операцией сцепки из алгебры* $\mathfrak{v}$. Более общо, $\mathfrak{h}$ получена из $\mathfrak{v}$ *кратной сцепкой*, если она получена из $\mathfrak{v}$ последовательным применением (конечного числа) сцепок.

Вывод. Каждая редуктивная подалгебра $\mathfrak{h}$ полупростой алгебры Ли

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$$

может быть получена из вполне разложимой подалгебры $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{w}(s)$ $(= \mathfrak{h}^r)$, где $\mathfrak{w}(i)$ – редуктивные подалгебры в $\mathfrak{g}_i$, кратной сцепкой некоторых компонент алгебры $\mathfrak{w}$.

§ 4. Метод классификации

Будем говорить, что пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *разложима*, если найдется нетривиальное разложение $\mathfrak{g}$ в прямую сумму идеалов $\mathfrak{g}^1$ и $\mathfrak{g}^2$, для которого $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^1 \oplus \mathfrak{h}^2$, где $\mathfrak{h}^i = \mathfrak{g}^i \cap \mathfrak{h}$. Из предложения 1 следует, что для разложимой подалгебры $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^1 \oplus \mathfrak{h}^2$ в $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ сложность аддитивна: $c(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = c(\mathfrak{g}^1, \mathfrak{h}^1) + c(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{h}^2)$. Это позволяет в классификации ограничиться только неразложимыми парами.

Будем вести классификацию, используя индукцию по числу s компонент алгебры $\mathfrak{g}$. При $s = 1$ алгебра $\mathfrak{g}$ проста, и все пары сложности 0 (соответственно 1) собраны в таблице 1 (соответственно таблице 2). Предположим, мы нашли все пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ сложности меньшей или равной 1 для всех алгебр $\mathfrak{g}$, у которых $s = k$ (список k). Тогда мы найдем все интересующие нас пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ для $s = k + 1$, производя кратную сцепку в подалгебре $\mathfrak{h}^1 \oplus \mathfrak{h}^2$, где $(\mathfrak{g}^1, \mathfrak{h}^1)$ – пара из списка k, а пара $(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{h}^2)$ содержится в таблице 1 или 2. При этом хотя бы одна из пар $(\mathfrak{g}^1, \mathfrak{h}^1)$ или $(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{h}^2)$ должна быть сферической (из первого пункта леммы 1 следует, что $c(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \geqslant c(\mathfrak{g}^1, \mathfrak{h}^1) + c(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{h}^2)$). Заметим также, что в $\mathfrak{h}^1 \oplus \mathfrak{h}^2$ достаточно рассматривать сцепки только между простыми компонентами, лежащими в разных слагаемых.

Пару $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ будем называть *насыщенной*, если центр алгебры $\mathfrak{h}$ – вполне разложимая подалгебра в $\mathfrak{g}$ (в работе [10] использовался термин “главные пары”). Это соответствует тому, что $\mathfrak{h}$ получена из вполне разложимой подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$ сцепками неодномерных компонент. Мы классифицируем насыщенные неразложимые пары сложности один. Отсюда будет следовать и классификация всех неразложимых пар (см. замечание 2 ниже).

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ – пара сложности меньшей или равной 1 и $\mathfrak{h}_i$ – компонента $\mathfrak{h}$. Будем говорить, что $\mathfrak{h}_i$ *валентна* (соответственно 1-*валентна*), если $\mathfrak{h}_i$ не является одномерной и подалгебра, полученная сцепкой по компоненте $\mathfrak{h}_i$ в подалгебре $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}_i$, сферична в $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}_i$ (соответственно имеет сложность 1). Указанную сцепку мы будем называть *элементарной*.

Понятие валентности позволяет существенно сократить число сцепок, подлежащих рассмотрению. А именно, при неэлементарной сцепке все искомые пары получаются сцепкой двух валентных компонент или валентной и 1-валентной компоненты (используя теорему 1, несложно показать, что сложность прямой суммы двух элементарных сцепок $(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{h})$ не больше сложности неэлементарной сцепки $(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}_2))$ и дальнейшей кратной сцепкой в полученных алгебрах.

Этап 1. Начнем с того, что определим все валентные и 1-валентные компоненты для пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{g}$ проста. Из определения сложности вытекает, что

$$c(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \geqslant N(\mathfrak{g}) - \dim \mathfrak{h}.$$

Отсюда для валентности (соответственно 1-валентности) компоненты $\mathfrak{h}_i$ необходимо, чтобы $N(\mathfrak{g}) + N(\mathfrak{h}_i) - \dim \mathfrak{h} \leqslant 0$ (соответственно меньше или равно 1). При помощи этого условия из пар, перечисленных в таблицах 1 и 2, мы получаем следующий список кандидатов на валентные или 1-валентные компоненты (они подчеркнуты):

$$(\mathfrak{sl}_3, \underline{\mathfrak{so}_3}), \quad (\mathfrak{sl}_{n+m}, \underline{\mathfrak{sl}_m} \oplus \mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{c})^2, \quad (\mathfrak{sl}_{n+m}, \underline{\mathfrak{sl}_m} \oplus \mathfrak{sl}_n)^3,$$
$$(\mathfrak{so}_{n+m}, \underline{\mathfrak{so}_m} \oplus \mathfrak{so}_n)^4, \quad (\mathfrak{so}_7, \underline{G_2}), \quad (\mathfrak{sp}_4, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{c})^5, \quad (\mathfrak{sp}_{2(n+m)}, \underline{\mathfrak{sp}_{2m}} \oplus \mathfrak{sp}_{2n})^6,$$
$$(G_2, \underline{\mathfrak{sl}_3}), \quad (G_2, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_2), \quad (F_4, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sp}_6), \quad (E_6, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_6),$$
$$(E_7, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{so}_{12}), \quad (E_8, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus E_7), \quad (\mathfrak{sp}_{2n}, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sp}_{2n-4}).$$

Для того чтобы выяснить, какие из этих компонент в самом деле валентны или 1-валентны, воспользуемся теоремами 1 и 2.

Замечание 1. Рассмотрим пары $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{h}_1)$ ($\mathfrak{s}_1$ – с.п.о.п. представления изотропии, сложность равна c_1), $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{h}_2)$ ($\mathfrak{s}_2$ – с.п.о.п., сложность равна c_2) и сцепку подалгебры по компоненте $\mathfrak{sl}_2$: $(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ ($\mathfrak{s}$ – с.п.о.п., сложность равна c). Из теоремы 1 вытекает, что $c = c_1 + c_2$ в точности тогда, когда в одной из пар ($i = 1, 2$) проекция $\mathfrak{s}_i$ на компоненту $\mathfrak{sl}_2$ сюръективна, а в другой паре аналогичная проекция ненулевая. Условие $c = c_1 + c_2 + 1$ равносильно тому, что либо одна из проекций сюръективна, а другая нулевая, либо обе проекции одномерны (их образами служат подалгебры Картана в $\mathfrak{sl}_2$). В остальных случаях $c \geqslant c_1 + c_2 + 2$. У алгебры $\mathfrak{s}$ проекция на компоненту $\mathfrak{sl}_2$ нулевая за исключением одного случая – и в $\mathfrak{s}_1$, и в $\mathfrak{s}_2$ проекции на компоненту $\mathfrak{sl}_2$ сюръективны. В последнем случае проекция $\mathfrak{s}$ на компоненту $\mathfrak{sl}_2$ одномерна.

Из замечания 1 следует, что при элементарной сцепке по компоненте $\mathfrak{sl}_2$ сложность возрастает не более чем на единицу и $\mathfrak{sl}_2$-компонента сферической пары всегда валентна или 1-валентна (в первом случае пара содержится в таблице 3). Методом исключения из сферических пар получаем 1-валентные компоненты:

$$(\mathfrak{sl}_3, \underline{\mathfrak{so}_3}), \quad (G_2, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_2), \quad (F_4, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sp}_6), \quad (E_6, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_6),$$
$$(E_7, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{so}_{12}), \quad (E_8, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus E_7), \quad (\mathfrak{sp}_4, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{c}), \quad (\mathfrak{sl}_3, \underline{\mathfrak{sl}_2}), \quad (\mathfrak{so}_{n+3}, \underline{\mathfrak{so}_3} \oplus \mathfrak{so}_n).$$

Нетрудно показать, что кандидаты, возникшие из пар сложности один, доставляют 1-валентные компоненты:

$$(\mathfrak{sp}_{2n}, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sp}_{2n-4}), \quad (\mathfrak{sl}_4, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_2).$$

Перейдем к вопросу о валентности компонент, отличных от $\mathfrak{sl}_2$. Применим теорему 2 к сцепкам $(\mathfrak{sl}_{n+m} \oplus \mathfrak{sl}_m, \underline{\mathfrak{sl}_m} \oplus \mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{c})$ и $(\mathfrak{sl}_{n+m} \oplus \mathfrak{sl}_m, \underline{\mathfrak{sl}_m} \oplus \mathfrak{sl}_n)$. В первом

[2] При некоторых условиях на m, n.
[3] При некоторых условиях на m, n.
[4] При некоторых условиях на m, n.
[5] Вложение соответствует строке 17 таблицы 1.
[6] При некоторых условиях на m, n.

случае $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{b}^{n-m}$ (здесь $\mathfrak{b}^{n-m}$ – борелевская подалгебра в $\mathfrak{sl}_{n-m}$) при $m < n$ и $\mathfrak{b}_1 = 0$ при $m \geqslant n$. Во втором случае $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}^{n-m}$ при $m < n$ и $\mathfrak{b}_1 = 0$ при $m \geqslant n$. Получаем валентные компоненты:

$$(\mathfrak{sl}_{n+2}, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{sl}_{m+1}, \underline{\mathfrak{sl}_m} \oplus \mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{sl}_{n+2}, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_n,\ n \geq 3)$$

и 1-валентные компоненты

$$(\mathfrak{sl}_{n+3}, \underline{\mathfrak{sl}_3} \oplus \mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{c},\ n \geq 2), \quad (\mathfrak{sl}_{n+3}, \underline{\mathfrak{sl}_3} \oplus \mathfrak{sl}_n,\ n \geq 4), \quad (\mathfrak{sl}_{m+1}, \underline{\mathfrak{sl}_m}), \quad (\mathfrak{sl}_4, \underline{\mathfrak{sl}_2} \oplus \mathfrak{sl}_2).$$

Рассмотрим пару $(\mathfrak{so}_{n+m} \oplus \mathfrak{so}_m, \underline{\mathfrak{so}_m} \oplus \mathfrak{so}_n)$. Здесь представление изотропии имеет вид $m = \pi_1 \otimes \pi_1' \oplus \mathrm{ad}(\mathfrak{so}_m)$. Отсюда, $\mathfrak{s} = \mathfrak{so}_{n-m} \subset \mathfrak{so}_n$ при $n > m$ и $\mathfrak{s} = 0$ при $n \leqslant m$. Таким образом, получаем валентную компоненту $(\mathfrak{so}_{m+1}, \underline{\mathfrak{so}_m})$ и 1-валентную компоненту $(\mathfrak{so}_{n+3}, \underline{\mathfrak{so}_3} \oplus \mathfrak{so}_n)$.

Рассмотрим пару $(\mathfrak{sp}_{2(n+m)} \oplus \mathfrak{sp}_{2m}, \underline{\mathfrak{sp}_{2m}} \oplus \mathfrak{sp}_{2n})$. Представление изотропии имеет вид $m = \pi_1 \otimes \pi_1' \oplus \mathrm{ad}(\mathfrak{sp}_{2m})$. Получаем $\mathfrak{s} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{sp}_{2n-2}$ при $m = 1$ и $\mathfrak{s} = \mathfrak{sp}_{2(n-m)} \subseteq \mathfrak{sp}_{2n}$ при $m \geqslant 2$ ($\mathfrak{s} = 0$ при $n \leqslant m$). Отсюда, имеем валентные компоненты $(\mathfrak{sp}_{2(n+2)}, \underline{\mathfrak{sp}_4} \oplus \mathfrak{sp}_{2n})$, $(\mathfrak{sp}_{2(n+1)}, \underline{\mathfrak{sp}_2} \oplus \mathfrak{sp}_{2n})$ и 1-валентную компоненту $(\mathfrak{sp}_8, \underline{\mathfrak{sp}_6} \oplus \mathfrak{sp}_2)$.

В сцепке $(\mathfrak{so}_7 \oplus G_2, \underline{G_2})$ представление изотропии имеет вид $m = \pi_1 \oplus \mathrm{ad}(G_2)$. Здесь $\mathfrak{s} = 0$ и компонента 1-валентна.

Рассмотрим пару $(G_2 \oplus \mathfrak{sl}_3, \underline{\mathfrak{sl}_3})$. Здесь $\mathfrak{sl}_3$ вложена в G_2 “по длинным корням”, следовательно, короткие корни линейно независимы на подалгебре Картана в $\mathfrak{sl}_3$, $\mathfrak{s} = 0$ и компонента 1-валентна.

Тем самым найдены все валентные и 1-валентные простые компоненты для пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ сложности меньшей или равной 1, где $\mathfrak{g}$ проста.

Этап 2. Сейчас нам будет удобно несколько отступить от стандартного ведения индукции по параметру s. Мы укажем все неразложимые насыщенные пары сложности один, полученные из пар, отвечающих простым алгебрам, сцепками по компонентам, изоморфным $\mathfrak{sl}_2$.

Из замечания 1 и списка всех валентных и 1-валентных компонент, изоморфных $\mathfrak{sl}_2$ (или из явного вида представления изотропии), следует, что во всех парах списка кандидатов (этап 1), где подалгебра $\mathfrak{h}$ имеет компоненту, изоморфную $\mathfrak{sl}_2$, проекция на нее подалгебры $\mathfrak{s}$ нулевая за исключением пар

1) $(\mathfrak{sl}_{n+2}, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{c}), n \geqslant 1$, $(\mathfrak{sl}_{n+2}, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_n), n \geqslant 2$, $(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sp}_{2n-4})$, $n \geqslant 3$, – здесь проекция одномерна;
2) $(\mathfrak{sp}_{2(n+1)}, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sp}_{2n})$ – здесь проекция сюръективна.

Замечание 1 и только что указанная информация о проекциях позволяют найти все пары сложности 1, полученные из пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ с простой $\mathfrak{g}$ сцепками по компонентам $\mathfrak{sl}_2$, – получаем пп. 1–22 таблицы 4.

Этап 3. Несложные вычисления, основанные на соображениях размерности и явном виде представления изотропии, показывают, что все неэлементарные сцепки по валентным и 1-валентным компонентам, отличным от $\mathfrak{sl}_2$, приводят к парам сложности больше единицы.

В заключение вносим в таблицу 4 пп. 24–29, отвечающие найденным ранее 1-валентным компонентам.

Этап 4. Перейдем к перечислению валентных и 1-валентных компонент, отличных от $\mathfrak{sl}_2$, в парах сложности меньшей или равной 1 при $s = 2$. Здесь нужно рассматривать лишь те компоненты, которые были валентны либо 1-валентны в парах, отвечающих простым алгебрам, сцепкой которых была получена данная пара.

Начнем с п. 9 таблицы 3. Компонента $\mathfrak{h}$ в этой паре 1-валентна тогда и только тогда, когда $N(\mathfrak{h}) - \mathrm{rk}\,\mathfrak{h} = 1$, а это имеет место только для $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_3$ (получаем п. 30 таблицы 4). Из п. 2) леммы 1 следует, что в паре сложности один никакая компонента $\mathfrak{h}$, кроме изоморфных $\mathfrak{sl}_2$ или $\mathfrak{sl}_3$, не может вкладываться более чем в две простые компоненты алгебры $\mathfrak{g}$.

Остается проверить на валентность либо 1-валентность подчеркнутые компоненты в парах следующего типа:

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{sp}_{2n+4}, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{sp}_{2n} \oplus \underline{\mathfrak{sp}_4}), && n = 1, 2,\\
&(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{sp}_8, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \underline{\mathfrak{sp}_6}), &&\\
&(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{sl}_{n+3}, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{sl}_n \oplus \underline{\mathfrak{sl}_3}), && n = 2, 3,\\
&(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{sl}_{n+3}, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{gl}_n \oplus \underline{\mathfrak{sl}_3}), && n = 2, 3,\\
&(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1 \oplus \underline{\mathfrak{sl}_3} \oplus \mathfrak{h}_2), &&
\end{aligned}$$

где первая компонента $\mathfrak{h}$ вложена только в $\mathfrak{g}_1$, третья – только во вторую компоненту $\mathfrak{g}$, а вторая – в обе компоненты $\mathfrak{g}$.

Теорема 1 показывает, что для валентности либо 1-валентности подчеркнутой компоненты необходимо, чтобы проекция на нее алгебры $\mathfrak{s}$ для указанной пары содержала борелевскую подалгебру размерности не менее 3, 8, 2, 2 и 2 соответственно. Используя явный вид подалгебры $\mathfrak{s}$, вычисленный для всех пар таблицы 4 при $s = 2$, получаем, что это условие выполнено только для $(\mathfrak{sp}_{2n+2} \oplus \mathfrak{sp}_6, \mathfrak{sp}_{2n} \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sp}_4)$. Нетрудно показать, что компонента $\mathfrak{sp}_4$ здесь 1-валентна (таблица 4, п. 23).

Этап 5. Нетривиальную сцепку для $s = 3$ по компоненте, отличной от $\mathfrak{sl}_2$, имеет смысл рассматривать только между п. 16 таблицы 1 при $m = 2$ и п. 3 таблицы 3 при $m = 2$ по компоненте $\mathfrak{sp}_4$. Такая сцепка имеет сложность не ниже 4.

Этап 6. Аналогично этапу 4 проверяется, что у пар с $s = 3$ нет валентных и 1-валентных компонент, отличных от $\mathfrak{sl}_2$.

Остается заметить, что для всех пар из таблицы 4 два различных выбора изоморфизма вдоль отрезка, определяющего вложение компоненты подалгебры в компоненту алгебры, задают подалгебры, которые переводятся друг в друга автоморфизмом объемлющей алгебры. Тем самым доказана

Теорема 3. *Все неразложимые насыщенные пары* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *сложности один, где* $\mathfrak{g}$ *– полупростая алгебра Ли, а* $\mathfrak{h}$ *– ее редуктивная подалгебра, перечислены в таблице* 4 *с точностью до автоморфизма алгебры* $\mathfrak{g}$.

Интересно отметить, что в таблице 4 нет пар четного ранга большего 8, а нечетного ранга большего 7 имеется лишь одна серия – п. 27.

Замечание 2. Покажем, как описать все неразложимые пары сложности один, если описаны все такие насыщенные пары. Идея излагаемого здесь метода была предложена Д. А. Тимашёвым. Каждой неразложимой паре $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ отвечает насыщенная (возможно, разложимая) пара $(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}})$, где полупростые части $\mathfrak{h}$ и $\widetilde{\mathfrak{h}}$ совпадают (обозначим их $\mathfrak{h}^s$), а центр $\widetilde{\mathfrak{h}}$ (обозначим его $\widetilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{z}_s$) является наименьшей вполне разложимой подалгеброй, содержащей центр $\mathfrak{h}$ (обозначим последний $\mathfrak{z}$). Если $c(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = 1$, то $c(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}) \leqslant 1$. В алгебре $\widetilde{\mathfrak{z}}$ имеется наибольшая подалгебра $\mathfrak{p}$ такая, что

$$c(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^s) = c(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^s+\mathfrak{p}) = c(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}) - (\dim\widetilde{\mathfrak{z}} - \dim\mathfrak{p}).$$

В самом деле, подалгебра $\mathfrak{p}$ является касательной алгеброй к максимальному подтору в центре группы $\widetilde{H}$, который сохраняет типичные H^s-орбиты на G/B. Заметим, что $\mathfrak{p}$ разлагается в прямую сумму подалгебр в соответствии с разложением пары $(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}})$ на неразложимые компоненты. Поэтому достаточно вычислить подалгебру $\mathfrak{p}$ для каждой насыщенной неразложимой пары. Из таблиц 1–4 непосредственно следует, что подалгебра $\mathfrak{p}$ нулевая во всех случаях, кроме

1) таблица 1: п. 2 при $n \neq m$; п. 6; п. 7 при n нечетном; п. 25;
   таблица 3: п. 1 при $n \geqslant 3$;
   таблица 4: п. 8 при $n \geqslant 3$, $m \geqslant 3$; п. 9 при $n \geqslant 3$; п. 16 при $n \geqslant 3$; п. 25 при $n \geqslant 4$,
   во всех этих случаях $\mathfrak{p} = \widetilde{\mathfrak{z}}$;
2) таблица 2, п. 2: здесь $\mathfrak{p}$ – одномерная подалгебра, описанная в п. 3;
3) таблица 4, п. 8 при $n = 1, 2$, $m \geqslant 3$ и $m = 1, 2$, $n \geqslant 3$: здесь $\mathfrak{p}$ одномерна и соответствует большей компоненте.

Остается заметить, что пара $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ имеет сложность 1 тогда и только тогда, когда либо $c(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}) = 1$ и подалгебра $\mathfrak{z}$ при ограничении на нее проекции $\widetilde{\mathfrak{z}} \to \widetilde{\mathfrak{z}}/\mathfrak{p}$ отображается на образ сюръективно, либо $c(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}) = 0$ и образ $\mathfrak{z}$ при указанной проекции является гиперплоскостью.

Обозначения и соглашения, использованные в таблицах. Индексы n, m в таблицах 1 и 2 предполагаются бо́льшими или равными 1, а индексы n, m, k, l в таблицах 3 и 4 предполагаются бо́льшими или равными 0, если не оговорено противное. Если индекс классической алгебры принимает неположительное значение (например, $\mathfrak{sp}_{2n-2}$ при $n = 0, 1$), соответствующая алгебра считается нулевой. Символ Кронекера δ_i^j равен 1 при $i = j$ и 0 в противном случае. В таблицах 1 и 2 столбец “$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$” определяет вложение подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебру $\mathfrak{g}$ посредством описания ограничения на $\mathfrak{h}$ первого фундаментального представления алгебры $\mathfrak{g}$. (Нумерация фундаментальных весов простых алгебр Ли соответствует нумерации из [21].)

Символами π_i и π_i' обозначены фундаментальные веса первой и второй простых компонент алгебры $\mathfrak{h}$ соответственно. Символ ε обозначает фундаментальный вес одномерной центральной подалгебры $\mathfrak{c}$. Для весов использована мультипликативная запись, т.е. π_1^2 – это старший вес, у которого первая отметка равна 2, а прочие отметки нулевые. Знак “+” обозначает прямую сумму представлений. Символом 1 обозначено одномерное тривиальное представление, символом 2 – двумерное тривиальное и т.д. В таблицах 3 и 4 вложение подалгебры в алгебру обозначено отрезками. Если отрезок может быть неоднозначно истолкован, вложение обозначено на отрезке, подобно таблицам 1 и 2.

Таблица 1

	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$	$\mathfrak{m}$
1	$\mathfrak{sl}_n,\ n\geqslant 2$	$\mathfrak{so}_n$	π_1	$\pi_1^2,\ n\neq 2,4$
2	$\mathfrak{sl}_{n+m}$	$\mathfrak{sl}_n\oplus\mathfrak{sl}_m\oplus\mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon^m+\pi_1'\varepsilon^{-n}$	$\pi_1\otimes\pi_{m-1}'\varepsilon^{m+n}$ $+\pi_{n-1}\otimes\pi_1'\varepsilon^{-m-n}$
3	$\mathfrak{sl}_{n+m},\ m\neq n$	$\mathfrak{sl}_n\oplus\mathfrak{sl}_m$	$\pi_1+\pi_1'$	$\pi_1\otimes\pi_{m-1}'+\pi_{n-1}\otimes\pi_1'+1$
4	$\mathfrak{sl}_{2n},\ n\geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	π_1	π_2
5	$\mathfrak{sl}_{2n+1}$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	π_1+1	$\pi_1^2+\pi_2+1$
6	$\mathfrak{sl}_{2n+1}$	$\mathfrak{sp}_{2n}\oplus\mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon+\varepsilon^{-2n}$	$\pi_1\varepsilon^{2n+1}+\pi_1\varepsilon^{-2n-1}+\pi_2$
7	$\mathfrak{so}_{2n}$	$\mathfrak{sl}_n\oplus\mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon+\pi_{n-1}\varepsilon^{-1}$	$\pi_2\varepsilon^2+\pi_{n-2}\varepsilon^{-2}$
8	$\mathfrak{so}_{4n+2}$	$\mathfrak{sl}_{2n+1}$	$\pi_1+\pi_{2n}$	$\pi_2+\pi_{2n-1}+1$
9	$\mathfrak{so}_{2n+1}$	$\mathfrak{sl}_n\oplus\mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon+\pi_{n-1}\varepsilon^{-1}+1$	$\pi_1\varepsilon+\pi_2\varepsilon^2+\pi_{n-2}\varepsilon^{-2}$ $+\pi_{n-1}\varepsilon^{-1}$
10	$\mathfrak{so}_{n+m}$	$\mathfrak{so}_n\oplus\mathfrak{so}_m$	$\pi_1+\pi_1'$	$\pi_1\otimes\pi_1'$
11	$\mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{so}_7$	π_3+1	$\pi_1+\pi_3$
12	$\mathfrak{so}_7$	G_2	π_1	π_1
13	$\mathfrak{so}_8$	G_2	π_1+1	π_1^2
14	$\mathfrak{so}_{10}$	$\mathfrak{so}_7\oplus\mathfrak{c}$	$\pi_3+\varepsilon+\varepsilon^{-1}$	$\pi_1+\pi_3\varepsilon+\pi_3\varepsilon^{-1}$
15	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\mathfrak{sl}_n\oplus\mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon+\pi_{n-1}\varepsilon^{-1}$	$\pi_1^2\varepsilon^2+\pi_{n-1}^2\varepsilon^{-2}$
16	$\mathfrak{sp}_{2(n+m)}$	$\mathfrak{sp}_{2n}\oplus\mathfrak{sp}_{2m}$	$\pi_1+\pi_1'$	$\pi_1\otimes\pi_1'$
17	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\mathfrak{sp}_{2(n-1)}\oplus\mathfrak{c}$	$\pi_1+\varepsilon+\varepsilon^{-1}$	$\pi_1\varepsilon+\pi_1\varepsilon^{-1}+\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}$
18	G_2	$\mathfrak{sl}_3$	$\pi_1+\pi_2+1$	$\pi_1+\pi_2$
19	G_2	$\mathfrak{sl}_2\oplus\mathfrak{sl}_2$	$\pi_1^2+\pi_1\otimes\pi_1'$	$\pi_1^3\otimes\pi_1'$
20	F_4	$\mathfrak{so}_9$	$\pi_1+\pi_4+1$	π_4
21	F_4	$\mathfrak{sp}_6\oplus\mathfrak{sl}_2$	$\pi_2+\pi_1\otimes\pi_1'$	$\pi_3\otimes\pi_1'$
22	E_6	$\mathfrak{sp}_8$	π_2	π_4
23	E_6	F_4	π_1+1	π_1
24	E_6	$\mathfrak{so}_{10}$	$\pi_1+\pi_5+1$	$\pi_4+\pi_5+1$
25	E_6	$\mathfrak{so}_{10}\oplus\mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon^2+\pi_5\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}$	$\pi_4\varepsilon^6+\pi_5\varepsilon^{-6}$
26	E_6	$\mathfrak{sl}_6\oplus\mathfrak{sl}_2$	$\pi_4+\pi_1\otimes\pi_1'$	$\pi_3\otimes\pi_1'$
27	E_7	$E_6\oplus\mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon+\pi_5\varepsilon^{-1}$ $+\varepsilon^3+\varepsilon^{-3}$	$\pi_1\varepsilon^4+\pi_5\varepsilon^{-4}$
28	E_7	$\mathfrak{sl}_8$	$\pi_2+\pi_6$	π_4

Таблица 1 (продолжение)

	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$	$\mathfrak{m}$
29	E_7	$\mathfrak{so}_{12} \times \mathfrak{sl}_2$	$\pi_6 + \pi_1 \otimes \pi_1'$	$\pi_5 \otimes \pi_1'$
30	E_8	$\mathfrak{so}_{16}$	$\pi_2 + \pi_8$	π_7
31	E_8	$\mathfrak{sl}_2 \times E_7$	$\pi_1 \otimes \pi_1' + \pi_1^2 + \pi_6'$	$\pi_1 \otimes \pi_1'$

Таблица 2

	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$	$\mathfrak{m}$
1	$\mathfrak{sl}_{2n}$	$\mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{sl}_n$	$\pi_1 + \pi_1'$	$\pi_1 \otimes \pi_1'$ $+ \pi_{n-1} \otimes \pi_{n-1}' + 1$
2	$\mathfrak{sl}_n$ $n \geqslant 3$	$\mathfrak{sl}_{n-2} \oplus \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{2-n} + \varepsilon_2^{2-n}$	$\pi_1\varepsilon_1^{n-1}\varepsilon_2 + \pi_1\varepsilon_1\varepsilon_2^{n-1}$ $+ \varepsilon_1^{2-n}\varepsilon_2^{n-2}$ $+ \varepsilon_1^{n-2}\varepsilon_2^{2-n}$ $+ \pi_{n-3}\varepsilon_1^{1-n}\varepsilon_2^{-1}$ $+ \pi_{n-3}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{1-n}$
3	$\mathfrak{sl}_n$ $n \geqslant 5$	$\mathfrak{sl}_{n-2} \oplus \mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon + \varepsilon^{d_1} + \varepsilon^{d_2}$ $d_1 \neq d_2$ $d_1 + d_2 = 2 - n$	$\pi_1\varepsilon^{1-d_1} + \pi_1\varepsilon^{1-d_2}$ $+ \varepsilon^{d_1-d_2} + \varepsilon^{d_2-d_1}$ $+ \pi_{n-3}\varepsilon^{d_1-1}$ $+ \pi_{n-3}\varepsilon^{d_2-1}$
4	$\mathfrak{sl}_6$	$\mathfrak{sp}_4 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon + \pi_1'\varepsilon^{-2}$	$\pi_1 \otimes \pi_1'\varepsilon + \pi_2$ $+ \pi_1 \otimes \pi_1'\varepsilon^{-1}$
5	$\mathfrak{so}_n$ $n \geqslant 5$	$\mathfrak{so}_{n-2}$	$\pi_1 + 2$	$\pi_1 + \pi_1 + 1$
6	$\mathfrak{so}_{2n+1}$ $n \geqslant 3$	$\mathfrak{sl}_n$	$\pi_1 + \pi_{n-1} + 1$	$\pi_1 + \pi_2 + \pi_{n-1}$ $+ \pi_{n-2} + 1$
7	$\mathfrak{so}_{4n}$ $n \geqslant 2$	$\mathfrak{sl}_{2n}$	$\pi_1 + \pi_{2n-1}$	$\pi_2 + \pi_{2n-2}$
8	$\mathfrak{so}_9$	$G_2 \oplus \mathfrak{c}$	$\pi_1 + \varepsilon + \varepsilon^{-1}$	$\pi_1 + \pi_1\varepsilon + \pi_1\varepsilon^{-1}$
9	$\mathfrak{so}_{11}$	$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_7$	$\pi_1^2 + \pi_3'$	$\pi_1^2 \otimes \pi_3' + \pi_1'$
10	$\mathfrak{so}_{10}$	$\mathfrak{so}_7$	$\pi_3 + 2$	$\pi_1 + \pi_3 + \pi_3 + 1$
11	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\mathfrak{sl}_n$	$\pi_1 + \pi_{n-1}$	$\pi_1^2 + \pi_{n-1}^2 + 1$
12	$\mathfrak{sp}_{2n}$ $n \geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2n-2}$	$\pi_1 + 2$	$\pi_1 + \pi_1 + 3$
13	$\mathfrak{sp}_{2n}$ $n \geqslant 3$	$\mathfrak{sp}_{2n-4} \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$	$\pi_1 + \pi_1' + \pi_1''$	$\pi_1 \otimes \pi_1' + \pi_1 \otimes \pi_1''$ $+ \pi_1' \otimes \pi_1''$
14	$\mathfrak{sp}_4$	$\mathfrak{sl}_2$	π_1^3	π_1^6
15	E_6	$\mathfrak{so}_9 \oplus \mathfrak{c}$	$\pi_1\varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \pi_4\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4}$	$\pi_1 + \pi_4\varepsilon + \pi_4\varepsilon^{-1}$
16	E_7	E_6	$\pi_1 + \pi_5 + 2$	$\pi_1 + \pi_5 + 1$
17	F_4	$\mathfrak{so}_8$	$\pi_1 + \pi_3 + \pi_4 + 2$	$\pi_1 + \pi_3 + \pi_4$

Таблица 3

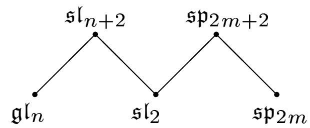
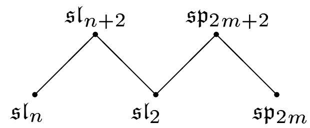
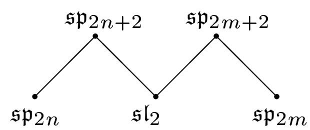
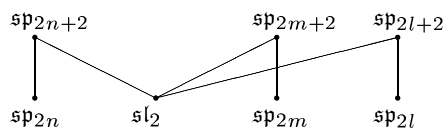
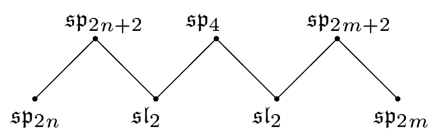
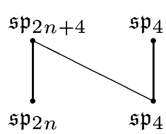
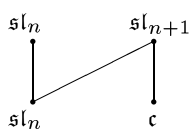
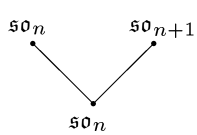
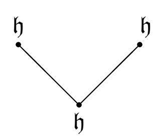
	$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$	$\mathfrak{s}$	rk
1	 $n \geqslant 1$	$\mathfrak{gl}_{n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$5 - \delta_m^0 - \delta_n^1$
2	 $n \geqslant 3$	$\mathfrak{sl}_{n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$6 - \delta_m^0$
3		$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2} \oplus \mathfrak{c}$	$3 - \delta_m^0 - \delta_n^0$
4		$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2l-2}$	$6-\delta_m^0-\delta_n^0-\delta_l^0$
5		$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$6 - \delta_m^0 - \delta_n^0$
6	 $n \geqslant 1$	$\mathfrak{sp}_{2n-4}$	$6 - \delta_n^1$
7	 $n \geqslant 2$	0	$2n - 1$
8	 $n \geqslant 3$	0	n
9	 $\mathfrak{h}$ проста	подалгебра Картана	$\mathrm{rk}\, \mathfrak{h}$

Таблица 4

	$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$	$\mathfrak{s}$	rk
1	$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sp}_{2n+2} & & \mathfrak{sl}_3 \\ & & \pi_1^2 \\ \mathfrak{sp}_{2n} & & \mathfrak{sl}_2 \end{array}$	$\mathfrak{sp}_{2n-2}$	$4-\delta_n^0$
2	$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{sp}_{2n+2} & & G_2 & \\ \mathfrak{sp}_{2n} & & \mathfrak{sl}_2 & & \mathfrak{sl}_2 \end{array}$	$\mathfrak{sp}_{2n-2}$	$4-\delta_n^0$
3	$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{sp}_{2n+2} & & F_4 & \\ \mathfrak{sp}_{2n} & & \mathfrak{sl}_2 & & \mathfrak{sp}_6 \end{array}$	$\mathfrak{sp}_{2n-2}$	$6-\delta_n^0$
4	$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{sp}_{2n+2} & & E_6 & \\ \mathfrak{sp}_{2n} & & \mathfrak{sl}_2 & & \mathfrak{sl}_6 \end{array}$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}$	$6-\delta_n^0$
5	$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{sp}_{2n+2} & & E_7 & \\ \mathfrak{sp}_{2n} & & \mathfrak{sl}_2 & & \mathfrak{so}_{12} \end{array}$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$	$6-\delta_n^0$
6	$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{sp}_{2n+2} & & E_8 & \\ \mathfrak{sp}_{2n} & & \mathfrak{sl}_2 & & E_7 \end{array}$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{so}_8$	$6-\delta_n^0$
7	$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{sp}_{2n+2} & & \mathfrak{so}_{k+3} & \\ \mathfrak{sp}_{2n} & & \mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{so}_3 & & \mathfrak{so}_k \end{array}$ $k \geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{so}_{k-3}$	$5-\delta_n^0-\delta_k^2$
8	$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{sl}_{n+2} & & \mathfrak{sl}_{m+2} & \\ \mathfrak{gl}_n & & \mathfrak{sl}_2 & & \mathfrak{gl}_m \end{array}$ $n, m \geqslant 2$	$\mathfrak{gl}_{n-2} \oplus \mathfrak{gl}_{m-2}$	$6-\delta_n^1-\delta_m^1$
9	$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{sl}_{n+2} & & \mathfrak{sl}_{m+2} & \\ \mathfrak{gl}_n & & \mathfrak{sl}_2 & & \mathfrak{sl}_m \end{array}$ $n \geqslant 1$, $m \geqslant 3$	$\mathfrak{gl}_{n-2} \oplus \mathfrak{sl}_{m-2}$	$7-\delta_n^1$
10	$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{sl}_{n+2} & & \mathfrak{sl}_{m+2} & \\ \mathfrak{sl}_n & & \mathfrak{sl}_2 & & \mathfrak{sl}_m \end{array}$ $n, m \geqslant 3$	$\mathfrak{sl}_{n-2} \oplus \mathfrak{sl}_{m-2}$	8

Таблица 4 (продолжение)

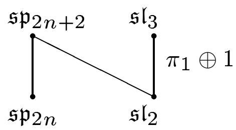
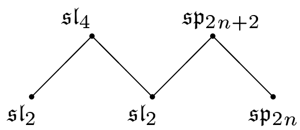
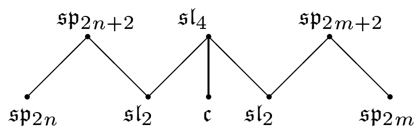
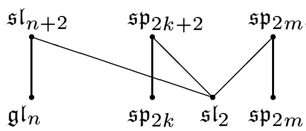
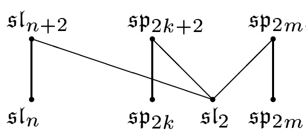
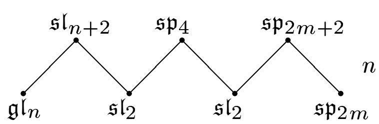
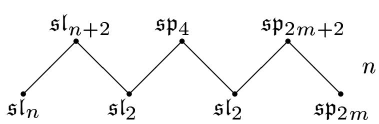
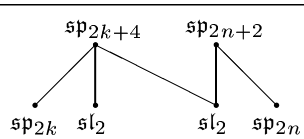
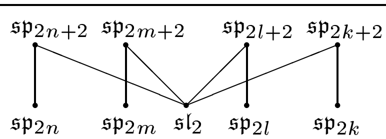
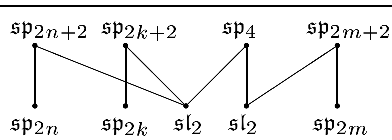
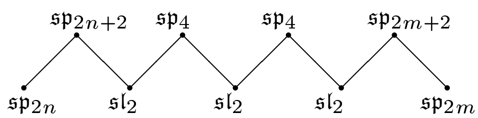
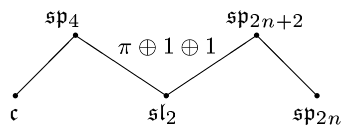
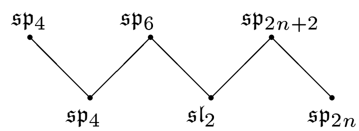
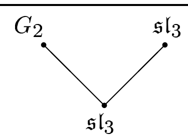
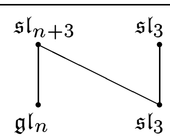
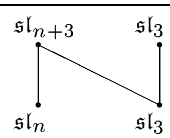
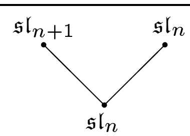
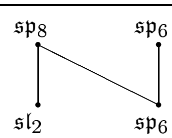
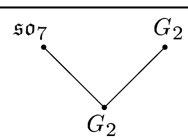
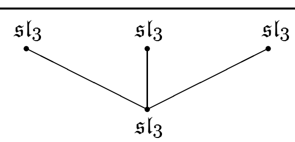
	$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$	$\mathfrak{s}$	rk
11		$\mathfrak{sp}_{2n-2}$	$4-\delta_n^0$
12		$\mathfrak{sp}_{2n-2}$	$5-\delta_n^0$
13		$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$7-\delta_n^0-\delta_m^0$
14	 $n \geqslant 1$	$\mathfrak{gl}_{n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2k-2}$ $\oplus\, \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$7-\delta_n^1-\delta_k^0-\delta_m^0$
15	 $n \geqslant 3$	$\mathfrak{sl}_{n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2k-2}$ $\oplus\, \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$8-\delta_k^0-\delta_m^0$
16	 $n \geqslant 1$	$\mathfrak{gl}_{n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$7-\delta_n^1-\delta_m^0$
17	 $n \geqslant 3$	$\mathfrak{sl}_{n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$8-\delta_m^0$
18	 $k \geqslant 1$	$\mathfrak{sp}_{2k-4} \oplus \mathfrak{sp}_{2n-2}$	$6-\delta_n^0-\delta_k^1$
19		$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2}$ $\oplus\, \mathfrak{sp}_{2l-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2k-2}$	$8-\delta_n^0-\delta_m^0$ $-\delta_l^0-\delta_k^0$
20		$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2}$ $\oplus\, \mathfrak{sp}_{2k-2}$	$8-\delta_n^0-\delta_m^0-\delta_k^0$

Таблица 4 (продолжение)

	$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$	$\mathfrak{s}$	rk
21		$\mathfrak{sp}_{2n-2} \oplus \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$8 - \delta_n^0 - \delta_m^0$
22		$\mathfrak{sp}_{2n-2}$	$4 - \delta_n^0$
23		$\mathfrak{sp}_{2n-2}$	$7 - \delta_n^0$
24		0	4
25	 $n \geqslant 2$	$\mathfrak{gl}_{n-3}$	$7 - \delta_n^2$
26	 $n \geqslant 4$	$\mathfrak{sl}_{n-3}$	8
27	 $n \geqslant 2$	0	$2n - 1$
28		0	7
29		0	5
30		0	6

Список литературы

1. *Luna D., Vust Th.* Plongements d'espaces homogènes // Comment. Math. Helv. 1983. V. 58. P. 186–245.
2. *Винберг Э. Б.* Сложность действий редуктивных групп // Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. №1. С. 1–13.
3. *Brion M.* Variétés sphériques // Notes de la session de la S.M.F. "Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques". Grenoble, 1997; `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/spheriques.ps`.
4. *Knop F.* The Luna–Vust theory of spherical embeddings // Proceeding of the Hyderabad conference on algebraic groups. (Univ. Hyderabad, India, December 1989) / ed. S. Ramanan. Madras: Manoj Prakashan, 1991. P. 225–249.
5. *Тимашев Д. А.* Классификация G-многообразий сложности 1 // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. №2. С. 127–162.
6. *Ахиезер Д. Н.* О действиях с конечным числом орбит // Функц. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. №1. С. 1–5.
7. *Ахиезер Д. Н.* О модальности и сложности действий редуктивных групп // УМН. 1988. Т. 43. №2. С. 129–130.
8. *Arzhantsev I. V., Timashev D. A.* Affine embeddings with a finite number of orbits // Transform. Groups. 2001. V. 6. №2. P. 101–110.
9. *Аржанцев И. В.* О модальности и сложности аффинных вложений // Матем. сб. 2001. Т. 192. №8. С. 47–52.
10. *Микитюк И. В.* Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами // Матем. сб. 1986. Т. 129 (171). С. 514–534.
11. *Gullemin V., Sternberg S.* Multiplicity-free spaces // J. Differential Geom. 1984. V. 19. P. 31–56.
12. *Винберг Э. Б.* Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия // УМН. 2001. Т. 56. №1. С. 3–62.
13. *Mykytyuk I. V., Stepin A. M.* Classification of almost spherical pairs of compact simple Lie groups // Poisson geometry / ed. J. Grabowski. Warsawa: Polish Acad. Sci., Inst. Math., 2000. P. 231–241. (Banach Center Publ. V. 51.)
14. *Mykytyuk I. V.* Actions of Borel subgroups on homogeneous spaces of reductive complex Lie groups and integrability // Compositio Math. 2001. V. 127. P. 55–67.
15. *Krämer M.* Sphärische Untergruppen in kompacten zusammenhängenden Liegruppen // Compositio Math. 1979. T. 38. C. 129–153.
16. *Brion M.* Classification des espaces homogènes sphériques // Compositio Math. 1987. V. 63. P. 189–208.
17. *Panyushev D. I.* Complexity of quasiaffine homogeneous varieties, t-decompositions, and affine homogeneous spaces of complexity 1 // Adv. Soviet Math. 1992. V. 8. P. 151–166.
18. *Элашвили А. Г.* Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. №1. С. 51–62.
19. *Panyushev D. I.* Complexity and rank of homogeneous spaces // Geom. Dedicata. 1990. V. 34. P. 249–269.
20. *Panyushev D. I.* Complexity and nilpotent orbits // Manuscripta Math. 1994. V. 83. P. 223–237.
21. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: `arjantse@mccme.ru`
`chuvashova@yandex.ru`

Поступила в редакцию
06.03.2003 и 12.01.2004