Математические заметки

Том 101 выпуск 6 июнь 2017

УДК 517.938

Соленоидальные базисные множества седлового типа

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

В статье строится пример диффеоморфизма 3-мерной сферы с положительной топологической энтропией, который имеет одномерное соленоидальное базисное множество с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым инвариантными многообразиями в каждой точке (в частности, базисное множество не является ни аттрактором, ни репеллером). Построенный диффеоморфизм служит основой для конструкции недиссипативного быстрого кинематического динамо с одномерным инвариантным соленоидальным множеством.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: базисные множества, соленоид.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11101

1. Введение. В топологию соленоиды были введены Виеторисом [1] в 1927 г. и независимо Ван Данцигом [2] в 1930 г. и изучались ими с различных точек зрения (см. введение в статье [3]). Одним из наглядных определений соленоида является его представление в виде пересечения последовательности вложенных друг в друга полноториев, причем ось последующего полнотория монотонно прокручивается несколько раз вдоль оси предыдущего полнотория [4]. С топологической точки зрения соленоид представляет собой неразложимый континуум, который не вкладывается в поверхность [5], [6].

В теории динамических систем соленоид был использован в книге [7; гл. 4, п. 8] для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, состоящим из почти периодических траекторий. Специальные потоки с соленоидальными инвариантными множествами рассматривались в [8]. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл [9], который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся соленоидом (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [10]–[14]). Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, лежащей внутри полнотория, и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория и при этом сохранялась дисковая структура. Подобные отображения возникают при изучении бифуркаций седло-узловых

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 15-01-03689-а, 16-51-10005-Ко_а) и РНФ (грант 14-41-00044). Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 г.

циклов [12], [15]. Известно [16] (см. также [17], [18]), что диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А Смейла, некоторого замкнутого 3-многообразия с двумя базисными множествами, являющимися соленоидами, и при этом, одно базисное множество является аттрактором, а второе – репеллером.

В статье мы строим пример одномерного соленоидального базисного множества с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым инвариантными многообразиями в каждой точке (в частности, базисное множество не является ни аттрактором, ни репеллером). Кроме этого, из построения вытекает, что построенный диффеоморфизм 3-мерной сферы имеет положительную топологическую энтропию и в некоторой окрестности базисного множества диффеоморфизм можно сделать консервативным. Поэтому пример может служить основой для построения недиссипативного быстрого кинематического динамо (согласно [19] быстрое недиссипативное динамо имеет место, если диффеоморфизм f имеет ненулевую топологическую энтропию, т.е. f достаточно хаотичен), см. теорему 3.

В 70-х годах 20-го века Я. Б. Зельдович и А. Д. Сахаров предложили конструкцию так называемого веревочного динамо, которая в идейном плане легла в основу современных конструкций трехмерных моделей быстрого динамо [20], [21]. Как отмечалось в [20] (см. обсуждение в гл. V), с точки зрения теории кинематического динамо конструкция Зельдовича–Сахарова имеет существенный недостаток, состоящий в том, что предложенное отображение не является консервативным. В настоящей статье мы предлагаем модификацию конструкции Сахарова–Зельдовича, лишенную этого недостатка в окрестности неблуждающего множества.

2. Основная конструкция. Рассмотрим прямое произведение $K\times[0;1]$, где $K=[-1;+1]\times[-1;+1]$ – квадрат на плоскости $\mathbb{R}^2$, наделенной декартовой системой координат (x,y). Обозначим через $R_t\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ вращение

$$\begin{cases}\overline{x}=x\cos\pi t-y\sin\pi t,\\ \overline{y}=x\sin\pi t+y\cos\pi t\end{cases}$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол πt против часовой стрелки. Множество $\bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1}(t,R_t(K))$ гомеоморфно $K\times[0;1]$, поскольку R_t есть гомеоморфизм для любого t. Так как $R_1(K)=K$, то квадраты $K\times\{0\}$, $K\times\{1\}$ естественным образом отождествляются. Имея в виду это отождествление $\mathrm{id}\colon K\times\{1\}\to K\times\{0\}$, построим тело, которое получается из $\bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1}(t,R_t(K))$ отождествлением квадратов $K\times\{0\}$ и $K\times\{1\}$:

$$\bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1}(t,R_t(K))/(K\times\{1\}\overset{\mathrm{id}}{\sim}K\times\{0\})\overset{\mathrm{def}}{=}B,$$

при этом будем считать, что отождествление id обращает ориентацию в предположении, что ориентация на квадратах $K\times\{0\}$, $K\times\{1\}$ индуцируется ориентацией тела $\bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1}(t,R_t(K))$. Полученное тело B можно рассматривать как скрученное цилиндрическое тело.

Ясно, что множество $\bigcup_{0\leqslant t<1}(t,(0,0))\overset{\mathrm{def}}{=}S^1_0$ является окружностью, на которой фактор-отображение $[0;1]\to[0;1]/(0\sim 1)=S^1$ индуцирует циклическую координату $t \bmod 1$. Окружность S^1_0 будем называть *осью* тела B. Вложим B в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы ось тела B была незаузлена в $\mathbb{R}^3$, и далее будем отождествлять B со своим вложением. Вначале построим диффеоморфизм $F\colon B \to f(B) \subset \mathbb{R}^3$ тела B на свой образ в некоторой окрестности, гомеоморфной полноторию. Отметим сперва, что естественная проекция $K \times [0;1] \to [0;1]$, которая является тривиальным расслоением, индуцирует локально тривиальное расслоение $p_1 : B \to S^1_0$ со слоем K. Слой над точкой $t \in S^1_0$ обозначим через D_t, $D_t = p_1^{-1}(t)$. Чтобы подчеркнуть двумерность слоя мы иногда будем писать D^2_t вместо D_t. Ясно, что D_t можно рассматривать как $R_t(K)$, т.е. как результат поворота R_t квадрата K.

Для определения диффеоморфизма F нам понадобится модификация отображения, введенного Смейлом и известного как подкова Смейла [9]. Напомним, что классическая *подкова Смейла* есть диффеоморфизм некоторого достаточно большого круга плоскости $\mathbb{R}^2$ в себя, который содержит квадрат $K = D^2_0$. Диффеоморфизм $w\colon D^2_0 = D^2 \to \mathbb{R}^2$ квадрата есть композиция сжатия вдоль оси Ox, растяжения вдоль оси Oy, сгибания (непринципиально, в какую сторону) полученного прямоугольника и сдвига так, чтобы пересечение $D^2 \cap w(D^2)$ представляло собой объединение двух непересекающихся полос, симметричных относительно оси Oy[1]. Ясно, что за счет сжатия и растяжения можно добиться того, чтобы якобиан $J(w)$ отображения w на D^2 равнялся $1/2$. Далее мы будем предполагать эти условия выполненными. Обозначим через $\mathrm{sh}_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ сдвиг $(x;y) \to (x+1/2;y)$ вдоль оси Ox и положим $w_0 = \mathrm{sh}_0 \circ w\colon D^2 \to \mathbb{R}^2$. Обозначим через $S_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ центральную симметрию относительно начала координат $(0;0)$, $S_0(x;y) = (-x;-y)$. Снова за счет сжатия-растяжения и сгиба можно добиться выполнения следующих условий:

1) пересечение $D^2 \cap w_0(D^2)$ состоит из двух непересекающихся полос;
2) множества $w_0(D^2)$, $S_0(w_0(D^2))$ не пересекаются,

$$w_0(D^2) \cap (S_0 \circ w_0(D^2)) = \varnothing. \tag{2.1}$$ {eq2.

Первое условие означает, что отображение $\mathrm{sh}_0 \circ w \overset{\mathrm{def}}{=} w_0$ по прежнему образует подкову Смейла, ось симметрии которой перпендикулярна оси абсцисс Ox. Второе условие означает, что подкова $w_0(D^2)$ не пересекается со своим образом относительно центральной симметрии S_0. Отметим, что $S_0 \circ w_0(D^2)$ также образует конфигурацию подковы.

Рассмотрим окрестность тела B, гомеоморфную полноторию $S^1 \times B^2$, где $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ – достаточно большой круг, окружающий квадрат K, и S^1 – окружность, наделенная циклической координатой $t \bmod 1$. Далее мы будем отождествлять окрестность тела B с $B^2 \times S^1$. Не уменьшая общности, можно считать, что S^1 совпадает геометрически с осью S^1_0 тела B, и $D_t \subset \{t\} \times B^2$ для любого t. Напомним, что квадрат D_t можно рассматривать как результат поворота $R_t(K)$ квадрата K. Это позволяет определить подкову Смейла на D_t. Положим

$$w_{0t} = R_t \circ w_0 \circ R_{-t}\colon D_t \to \{t\} \times B^2.$$

Это отображение можно интерпретировать как образование подковы в направлении прямой $y = x\cdot\tan \pi t$, когда ось симметрии подковы $w_{0t}(D^2)$ перпендикулярна прямой $y = x \cdot \tan \pi t$.

Пусть $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – окружность, наделенная естественной параметризацией $[0;1] \to [0;1]/(0 \sim 1) = S^1$. Отображение $E_2\colon S^1 \to S^1$ вида $t \to 2t \bmod 1$ является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два. Определим теперь

[1] Иногда подкова определяется как диффеоморфизм квадрата, который затем продолжается на плоскость. Известно [11], что w можно продолжить до отображения всей плоскости $\mathbb{R}^2$ так, чтобы это продолжение было тождественным вне некоторой окрестности D^2.

отображение $F\colon B\to S^1\times B^2$. Для любых $t\in[0;1)$ и $z\in D_t$ положим

$$(t;z)\mapsto (E_2(t);R_t\circ w_{0t}(z))=(2t \bmod 1;R_t\circ w_{0t}(z)),\qquad t\in[0;1),\quad z\in D_t.$$

Заметим, что выполняется следующее включение $F(D_t)\subset B_{2t \bmod 1}$.

Лемма 1. *Отображение*

$$F\colon B\to F(B)\subset S^1\times B^2$$

является диффеоморфизмом на свой образ.

Доказательство. Предположим, что

$$F(t_1;z_1)\cap F(t_2;z_2)\neq\varnothing.$$

Тогда $F(D_{t_1})\cap F(D_{t_2})\neq\varnothing$. Из определения F вытекает равенство $E_2(t_2)=E_2(t_1)$, т.е. $2t_1 \bmod 1=2t_2$. Так как отображение w_{0t} является диффеоморфизмом на свой образ, то можно считать $t_1\neq t_2$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $t_2=t_1+1/2$. Имеем

$$F(D_{t_1})=R_{2t_1}\circ w_0\circ R_{-t_1}(D_{t_1}),$$
$$F(D_{t_2})=F(D_{t_1+1/2})=R_{2t_1+1}\circ w_0\circ R_{-t_1-1/2}(D_{t_1})=R_1\circ R_{2t_1}\circ w_0\circ R_{-t_1-1/2}(D_{t_1}).$$

Поскольку R_1 есть поворот на угол π, то подковы $F(D_{t_1})$ и $S_0\circ F(D_{t_1})$ должны пересекаться, что противоречит равенству (2.1).

Отметим, что поскольку якобиан $J(w)$ отображениям w на D^2 равен $1/2$, то якобиан отображения F равен

$$J(F)=J(w)\cdot DE_2=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

Поэтому F является консервативным диффеоморфизмом на свой образ. Стандартным образом пополним пространство $\mathbb{R}^3$ бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$ так, что объединение $\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}$ отождествляется с 3-мерной сферой S^3. В силу [16; раздел 5] имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Отображение*

$$F\colon B\to F(B)\subset S^1\times B^2\subset\mathbb{R}^3$$

продолжается до диффеоморфизма $f\colon S^3\to S^3$, консервативного в некоторой окрестности тела B.

Для удобства читателя мы приведем схему доказательства.

Схема доказательства. По построению окружность S^1_0 является осью полнотория $S^1\times B^2$, а тела B и $S^1\times B^2$ являются ее трубчатыми окрестностями. Из того, что диффеоморфизм квадрата в подкове Смейла продолжается до некоторого диффеоморфизма достаточно большого круга, вытекает, что F продолжается до некоторого диффеоморфизма (обозначим его снова через F) полнотория $S^1\times B^2$, который сохраняет дисковую структуру, т.е. $F(D_t)\cap B\subset D_{E_2(t)}$. Не уменьшая общности, можно считать, что F является консервативным в некоторой окрестности B. Из конструкции вытекает, что каждая из кривых S_0^1 и $F(S_0^1)$ незаузлена в $\mathbb{R}^3$. Поэтому существует движение S_0^1 в $F(S_0^1)$, которое нетрудно продолжить до движения их трубчатых окрестностей $\varphi_0\colon S^1\times B^2\to F(S^1\times B^2)$. Ясно, что можно добиться того, чтобы φ_0 было консервативным. Можно показать при этом, что оси дополнительных полноториев также переходят друг в друга. Отсюда вытекает, что φ продолжается до требуемого диффеоморфизма $f\colon S^3\to S^3$.

3. Динамика неблуждающего множества. Полноторий B, вложенный в S^3, будем называть *базовым*, и обозначать через $\mathscr{B}$. Положим

$$\Omega=\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(\mathscr{B}). \tag{3.1}$$ {eq3.

Множество Ω инвариантно относительно f и не пусто, поскольку содержит в $D_0=\{0\}\times D^2\subset\mathscr{B}$ инвариантное нетривиальное (нульмерное) множество Ω_0 подковы Смейла [9]. Обозначим через $\mathrm{Diff}^1(S^3)$ пространство диффеоморфизмов 3-сферы S^3, наделенное C^1 топологией.

Лемма 3. *Множество Ω гиперболическое, и ограничение $f|_\Omega$ диффеоморфизма f на Ω имеет положительную (топологическую) энтропию. Более того, в пространстве $\mathrm{Diff}^1(S^3)$ имеется окрестность $U(f)$ диффеоморфизма f такая, что любой диффеоморфизм $g\in U(f)$ имеет гиперболическое инвариантное множество $\Omega_g\subset\mathscr{B}$, причем диффеоморфизмы $f|_\Omega$, $g|_{\Omega_g}$ сопряжены и ограничение $g|_{\Omega_g}$ имеет положительную энтропию.*

Доказательство. По построению якобиан отображения $f|_{\mathscr{B}}\colon S^1\times D^2\to\mathbb{R}^3$ равен

$$J(f)=\begin{pmatrix} J(w) & a\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

где $J(w)$ – якобиан подковы Смейла w с определителем $1/2$, а величины a не влияют на собственные значения якобиана $J(f)$. Поэтому f имеет гиперболическую структуру (не только на Ω, но и на $\mathscr{B}$). Отсюда следует, что множество Ω гиперболическое. Известно, что ограничение $f|_{\Omega_0}\colon\Omega_0\to\Omega_0$ имеет положительную энтропию [14]. Отсюда и [22] (где доказано, что энтропия диффеоморфизма равна энтропии ограничения на неблуждающем множестве) вытекает, что ограничение $f|_\Omega$ также имеет положительную энтропию. Поскольку гиперболические множества обладают устойчивостью относительно малых C^1 возмущений, то существует окрестность $U(f)$ с требуемыми свойствами, так как энтропия является инвариантом сопряженности.

Далее мы рассмотрим динамику ограничения диффеоморфизма $f\colon S^3\to S^3$ на неблуждающем множестве, которое принадлежит базовому полноторию $\mathscr{B}$. Для этого мы построим символическую модель диффеоморфизма $f|_\Omega$ на инвариантном множестве Ω. Зафиксируем $t_0\in S^1$, $0\leqslant t_0<1$, и рассмотрим пересечение Ω с диском $D_{t_0}=\{t_0\}\times B^2\subset S^1\times B^2$.

Следуя символической модели классической подковы Смейла, определим две вертикальные и две горизонтальные (в понятном смысле) полосы в квадрате D_{t_0} следующим образом. Напомним, что пересечение квадрата D_{t_0} с его образом относительно отображения подковы Смейла w_{0t_0} состоит из двух вертикальных полос,

$$w_{0t_0}(D_{t_0}) \cap D_{t_0} = R_0(t_0) \cup R_1(t_0),$$

где $R_0(t_0)$ (соответственно $R_1(t_0)$) – полоса, которая расположена ближе к центру (соответственно дальше). Из конструкции полностью аналогично подкове Смейла вытекает, что в D_{t_0} имеются две непересекающиеся горизонтальные (перпендикулярные к $R_0(t_0)$, $R_1(t_0)$) полосы, которые мы обозначим через $R_0^{(-1)}(t_0)$ и $R_1^{(-1)}(t_0)$ такие, что

$$w_{0t_0}(R_0^{(-1)}(t_0)) = R_0(t_0) \qquad \text{и} \qquad w_{0t_0}(R_1^{(-1)}(t_0)) = R_1(t_0). \tag{3.2}$$

{eq3.

Покажем, что пересечение $f^{-1}(\mathscr{B}) \cap D_{t_0} \cap f(\mathscr{B})$ состоит из восьми прямоугольников. В силу построения пересечение $D_{t_0} \cap f(\mathscr{B}) \cap \mathscr{B} = D_{t_0} \cap f(\mathscr{B})$ состоит из четырех полос. Действительно, существует ровно две точки

$$t_1' = \frac{t_0}{2}, \quad t_1'' = \frac{t_0+1}{2} \in S^1 \qquad \text{такие, что} \quad t_0 = E_2(t_1'), \quad t_0 = E_2(t_1'').$$

При этом $D_{t_0} \cap f(D_\mu) = \varnothing$ для всех $\mu \neq t_1', t_1''$, $0 \leqslant \mu < 1$. Тогда

$$D_{t_0} \cap f(\mathscr{B}) = D_{t_0} \cap (f(D_{t_1'}) \cup f(D_{t_1''})) = (D_{t_0} \cap f(D_{t_1'})) \cup (D_{t_0} \cap f(D_{t_1''})).$$

Каждое пересечение $D_{t_0} \cap f(D_{t_1'})$, $D_{t_0} \cap f(D_{t_1''})$ состоит из двух полос. Отметим, что

$$D_{t_0} \cap f(D_{t_1'}) = R_0(t_0) \cup R_1(t_0).$$

Далее, согласно определению отображения f

$$D_{E_2(t_0)} \cap f(R_i(t_0)) = R_0(E_2(t_0)) \cup R_1(E_2(t_0)), \qquad i = 0, 1. \tag{3.3}$$

{eq3.

Применяя равенство (3.2), в котором t_0 заменяется на $E_2(t_0)$, и равенство (3.3), получаем

$$R_0^{(-1)}(t_0) \cup R_1^{(-1)}(t_0) = f^{-1}(R_0(E_2(t_0)) \cup R_1(E_2(t_0))).$$

Поэтому пересечение $f^{-1}(\mathscr{B}) \cap D_{t_0}$ состоит из двух горизонтальных полос $R_0^{(-1)}(t_0) \cup R_1^{(-1)}(t_0)$. Следовательно, пересечение $f^{-1}(\mathscr{B}) \cap D_{t_0} \cap f(\mathscr{B})$ состоит из 8 прямоугольников, которые мы будем называть *прямоугольниками первого порядка* и которые получаются пересечением четырех вертикальных и двух горизонтальных полос.

Следуя кодировке классической подковы Смейла, введем кодировку для прямоугольников первого порядка следующим образом. Напомним, что $D_{t_0} \cap f(D_{t_1'})$ состоит из двух вертикальных полос. Поскольку каждая вертикальная полоса разбивает диск, одна из полос в понятном смысле расположена ближе, а другая – дальше, к началу координат. Ближней к началу координат полосе из пары $D_{t_0} \cap f(D_{t_1'})$ припишем число 0, а дальней – $+1$. Аналогично поступим с парой полос пересечения $D_{t_0} \cap f(D_{t_1''})$. Заметим, что

$$D_{t_0} \cap f(D_{t_1'}) = R_0(t_0) \cup R_1(t_0),$$

и мы приписали полосе $R_0(t_0)$ число 0, а $R_1(t_0)$ – +1. Горизонтальным полосам $R_0^{(-1)}$ и $R_1^{(-1)}$ приписывается значение $\omega_0' = 0$ и $\omega_0'' = 1$ соответственно. Таким образом, каждому прямоугольнику первого порядка ставится в соответствие блок

$$[(t_0, \omega_0); (t_1, \omega_1)], \qquad \text{где} \quad t_0 = E_2(t_1), \quad \omega_0 \in \{0; 1\}, \quad \omega_1 \in \{0; 1\}.$$

Прямоугольник с данным блоком обозначим через $V^{(1)}[(t_0, \omega_0); (t_1, \omega_1)]$. Из (3.1) и того, что прямоугольники первого порядка попарно не пересекаются, следует, что произвольная точка $P \in \Omega \cap D_{t_0}$ принадлежит ровно одному прямоугольнику, и точке $P \in V^{(1)}[(t_0, \omega_0); (t_1, \omega_1)]$ приписывается (начальный) блок первого порядка $[(t_0, \omega_0); (t_1, \omega_1)]$.

Аналогично показывается, что пересечение

$$f^{-2}(\mathscr{B}) \cap f^{-1}(\mathscr{B}) \cap D_{t_0} \cap f(\mathscr{B}) \cap f^2(\mathscr{B}) = f^{-1}[f^{-1}(\mathscr{B}) \cap \mathscr{B}] \cap D_{t_0} \cap f[\mathscr{B} \cap f(\mathscr{B})]$$

состоит из 8^2 прямоугольников, которые мы будем называть *прямоугольниками второго порядка*. Нетрудно видеть, что каждый прямоугольник первого порядка содержит 8 непересекающихся прямоугольников второго порядка. Подставляя на место диска D_{t_0} прямоугольник первого порядка $V^{(1)}[(t_0, \omega_0); (t_1, \omega_1)]$, аналогично предыдущей процедуре кодирования поставим в соответствие прямоугольнику второго порядка из $V^{(1)}[(t_0, \omega_0); (t_1, \omega_1)]$ блок $V^{(2)}[(t_{-1}, \omega_{-1}); (t_0, \omega_0); (t_1, \omega_1); (t_2, \omega_2)]$, где

$$t_{-1} = E_2(t_0), \quad t_1 = E_2(t_2), \qquad \omega_j \in \{0; 1\}, \quad j = -1, 0, 1, 2.$$

Поскольку точка $P \in \Omega \cap D_{t_0}$ принадлежит ровно одному прямоугольнику второго порядка, скажем

$$V^{(2)}[(t_{-1}, \omega_{-1}); (t_0, \omega_0); (t_1, \omega_1); (t_2, \omega_2)],$$

то ей приписывается единственным образом блок второго порядка

$$[(t_{-1}, \omega_{-1}); (t_0, \omega_0); (t_1, \omega_1); (t_2, \omega_2)].$$

Продолжая процедуру кодирования, получим для точки $P \in \Omega \cap D_{t_0}$ двустороннюю последовательность

$$\widehat{P} \stackrel{\text{def}}{=} \bigl[\dots (t_{-n}, \omega_{-n}); \dots; (t_{-1}, \omega_{-1}); \underbrace{(t_0, \omega_0)}; (t_1, \omega_1); (t_2, \omega_2); \dots; (t_n, \omega_n); \dots\bigr],$$

где

$$\omega_j \in \{0; 1\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \qquad E_2(t_{i+1}) = t_i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Подчеркнутая пара условно считается находящейся на нулевой позиции.

Обозначим через $\Sigma_2(E_2)$ множество всевозможных последовательностей вида

$$\bigl[\dots (t_{-n}, \omega_{-n}); \dots; (t_{-1}, \omega_{-1}); \underbrace{(t_0, \omega_0)}; (t_1, \omega_1); (t_2, \omega_2); \dots; (t_n, \omega_n); \dots\bigr],$$

где

$$\omega_j \in \{0; 1\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \qquad E_2(t_{i+1}) = t_i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Зафиксируем последовательность

$$\widehat{P}^{(0)} \in \Sigma_2(E_2), \qquad \widehat{P}^{(0)} = \{(t_i^{(0)}, \omega_i^{(0)}\}_{i=-\infty}^{\infty}$$

и числа $r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. (r,ε)-*Окрестностью* $U_{r,\varepsilon}(\widehat{P}^{(0)})$ последовательности $\widehat{P}^{(0)}$ называется множество последовательностей $\widehat{P} \in \Sigma_2(E_2)$, $\widehat{P} = \{(t_i,\omega_i)\}_{i=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$|t_i^{(0)} - t_i| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad -r \leqslant i \leqslant r, \qquad \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|\omega_i^{(0)} - \omega_i|}{2^i} < \varepsilon.$$

Множество (r,ε)-окрестностей наделяет $\Sigma_2(E_2)$ структурой топологического пространства. Обозначим через $\sigma\colon \Sigma_2(E_2) \to \Sigma_2(E_2)$ отображение вида

$$\sigma([\,\dots;(t_{-1},\omega_{-1});\underbrace{(t_0,\omega_0)};(t_1,\omega_1);\dots\,]) = [\,\dots;\underbrace{(t_{-1},\omega_{-1})};(t_0,\omega_0);(t_1,\omega_1);\dots\,].$$

Стандартным образом доказывается, что отображение σ является гомеоморфизмом.

Лемма 4. *Гомеоморфизм* $\sigma\colon \Sigma_2(E_2) \to \Sigma_2(E_2)$ *транзитивный и имеет всюду плотное множество периодических точек.*

Доказательство получается компиляцией известных доказательств аналогичных утверждений для классической подковы Смейла и соленоида Смейла [18], [9]. Мы его опускаем.

Теорема 1. *Ограничение* $f|_\Omega\colon \Omega \to \Omega$ *диффеоморфизма* f *на множество* Ω *сопряжено* $\sigma\colon \Sigma_2(E_2) \to \Sigma_2(E_2)$.

Доказательство. Обозначим через $\vartheta\colon \Omega \to \Sigma_2(E_2)$ отображение, ставящее в соответствие точке $P \in \Omega$ ее код $\widehat{P} \in \Sigma_2(E_2)$. Из того, что прямоугольники фиксированного порядка попарно не пересекаются вытекает корректность определения и однозначность отображения ϑ, т.е. $P_1 \neq P_2$ влечет $\vartheta(P_1) \neq \vartheta(P_2)$. Ясно, что прямоугольники фиксированного порядка непрерывно зависят (в хаусдорфовой топологии в пространстве компактных множеств) от параметра t квадрата D_t. Отсюда следует непрерывность ϑ. Поскольку пространство $\Sigma_2(E_2)$ компактное, то ϑ – гомеоморфизм. Непосредственно из определения кода вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f|_\Omega"] \arrow[d, "\vartheta"] & \Omega \arrow[d, "\vartheta"] \\ \Sigma_2(E_2) \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma_2(E_2) \end{tikzcd}$$

Это означает сопряженность отображений $f|_\Omega$, σ.

Следствие 1. *Гомеоморфизм* $f|_\Omega\colon \Omega \to \Omega$ *транзитивный и имеет всюду плотное множество периодических точек.*

Как известно, любой топологический соленоид S можно представить в виде пересечения последовательности вложенных друг в друга полноториев $P_0 \supset P_1 \supset \cdots$, причем ось последующего полнотория P_{i+1} монотонно прокручивается несколько раз вдоль оси предыдущего полнотория P_i [4]. Будем называть множество $\Omega \subset \mathscr{B}$ *соленоидальным*, если существует гомеоморфизм $\phi\colon P_0 \to \mathscr{B}$, переводящий S в Ω.

Теорема 2. *Диффеоморфизм $f\colon S^3 \to S^3$ имеет в базовом полнотории $\mathscr{B}$ соленоидальное одномерное базисное множество такое, что любая его точка имеет двумерное неустойчивое инвариантное многообразие и одномерное устойчивое инвариантное многообразие. Более того, f имеет положительную топологическую энтропию.*

Доказательство. Согласно [22] (см. также [14; теорема 9.1.4]) топологическая энтропия диффеоморфизма равна энтропии ограничения диффеоморфизма на неблуждающее множество. Отсюда и из леммы 3 вытекает, что f имеет положительную топологическую энтропию. Теперь требуемое утверждение непосредственно следует из конструкции, а также из теоремы 1 и следствия 1.

Предметом теории кинематического динамо является происхождение магнитных полей в электропроводящих средах, которые играют большую роль в динамике астрофизических процессов [21]. Согласно [20; гл. 5, п. 1.1] система уравнений кинематического динамо состоит из уравнения индукции

$$\partial\vec{\mathbf{B}}/\partial t = \operatorname{rot}(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) + \nu\triangle\vec{\mathbf{B}}$$

и бездивергентности

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{B}} = 0$$

магнитного поля $\vec{\mathbf{B}}$, заданного на некотором римановом многообразии M, где ν – магнитная вязкость (величина обратная так называемому магнитному числу Рейнольдса), $\vec{\mathbf{v}}$ – поле скоростей несжимаемой жидкости, заполняющей M. Имеется дискретная версия кинематического динамо, когда вместо $\vec{\mathbf{v}}$ рассматривается консервативный диффеоморфизм $f\colon M \to M$. Одним из аспектов быстрого кинематического динамо является изучение движений жидкости, которые вызывают экспоненциальный рост магнитного поля при малой магнитной вязкости (см. [20; гл. 5, задача 1.2]). Мы ограничимся качественным объяснением проблемы дискретной версии быстрого кинематического динамо (см. детали в [20; гл. 5, задача 1.5]). В упрощенной форме вопрос сводится к существованию консервативного диффеоморфизма $f\colon M \to M$ такого, что энергия (начального) бездивергентного магнитного поля $\vec{\mathbf{B}}_0$, заданного на M, растет экспоненциально под действием итераций диффеоморфизма f,

$$\liminf_{\nu\to 0}\,\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\iint_M |f_*^n(\vec{\mathbf{B}}_0)|^2\,dv > 0.$$

Если сразу положить $\nu = 0$, то говорят о *недиссипативном* динамо. Если $\nu \to +0$, то динамо называется *диссипативным* (*реальным*), и мы также должны учитывать процесс рассеивания магнитного поля, которое формально представляется как решение соответствующего уравнения диффузии [20].

Согласно следующему результату диффеоморфизм $f\colon S^3 \to S^3$ может служить основанием для построения быстрого недиссипативного кинематического динамо (относительно некоторого бездивергентного магнитного поля).

Теорема 3. *Существует диффеоморфизм $f_0\colon S^3 \to S^3$, совпадающий с $f\colon S^3 \to S^3$ на полнотории $\mathscr{B} \subset S^3$ (следовательно, f_0 имеет соленоидальное инвариантное множество $\Omega \subset \mathscr{B}$), которое является быстрым недиссипативным кинематическим динамо.*

Доказательство. Возьмем блуждающую точку $z_0 \in S^3 \setminus \mathscr{B}$ диффеоморфизма f такую, что $f(z_0) \in S^3 \setminus \mathscr{B}$ и существует путь $p \in S^3 \setminus NW(f)$, соединяющий точки z_0, $f(z_0)$. Стандартной операцией можно получить диффеоморфизм $f_0\colon S^3 \to S^3$, совпадающий с $f\colon S^3 \to S^3$ вне сколь угодно малой окрестности пути p и такой, что

$$f(z_0) = z_0.$$

Теперь мы можем рассматривать f_0 как диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$, тождественный вне некоторой открытой области. Ясно, что f_0 имеет соленоидальное инвариантное множество Ω и имеет ненулевую топологическую энтропию. В силу теоремы 2 [19] (мы применяет эту теорему для $d = 3$ и $q = 2$; кроме этого, анализ доказательства этой теоремы показывает, что она верна в предположении консервативности диффеоморфизма только в некоторой окрестности неблуждающего множества, поскольку энтропия диффеоморфизма равна ограничению диффеоморфизма на неблуждающем множестве), f_0 является быстрым недиссипативным кинематическим динамо относительно некоторого бездивергентного магнитного поля.

Авторы благодарят Алексея Окунева, внимательно прочитавшего рукопись и сделавшего ряд критических замечаний. Особая благодарность за финансовую поддержку Константину Витальевичу Кирсенко (просветителю и бизнесмену).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] L. Vietoris, “Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Addildungen”, *Math. Ann.*, **97** (1927), 454–472.

[2] D. von Dantzig, “Über topologisch homogene Kontinua”, *Fund. Math.*, **15** (1930), 102–125.

[3] F. Takens, “Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors”, *Topology Appl.*, **152**:3 (2005), 219–225.

[4] J. M. Aarts, R. J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:4 (1991), 1161–1163.

[5] R. H. Bing, “A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc”, *Canadian J. Math.*, **12** (1960), 209–230.

[6] R. H. Bing, “Embedding circle-line continua in the plane”, *Canadian J. Math.*, **14** (1962), 113–128.

[7] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ, М., 1947.

[8] I. Kan, “Strange attractors of uniform flows”, *Trans. of Amer. Math. Soc.*, **293**:1 (1986), 135–159.

[9] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.

[10] Д. В. Аносов, “Гладкие динамические системы. Гл. 1. Исходные понятия”, *Динамические системы* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНИТИ, М., 1985, 156–178.

[11] Д. В. Аносов, В. В. Солодов, “Динамические системы с гиперболическим поведением. Гл. 1. Гиперболические множества”, *Динамические системы* – 9, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНИТИ, М., 1991, 12–99.

[12] Ю. С. Ильяшенко, Л. Вейгу, *Нелокальные Бифуркации*, МЦНМО-ЧеРо, М., 1999.

[13] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, E. V. Zhuzhoma, *Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*, Transl. Math. Monogr., **153**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[14] C. Robinson, *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, Studies in Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

[15] Д. Тураев, Л. П. Шильников, “О катастрофах голубого неба”, *Докл. АН*, **342**:5 (1995), 596–599.

[16] H. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors. II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

[17] B. Jiang, Y. Ni, Sh. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356**:11 (2004), 4371–4382.

[18] M. Jiming, Y. Bin, “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds”, *Topology Appl.*, **154**:17 (2007), 3021–3031.

[19] I. Klapper, L.-S. Young, “Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy”, *Comm. Math. Phys.*, **173**:3 (1995), 623–646.

[20] В. И. Арнольд, Б. А.Хесин, *Топологические методы в гидродинамике*, МЦНМО, М., 2007.

[21] С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, “О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы «динамо»)”, *УФН*, **106**:2 (1972), 431–457.

[22] R. Bowen, “Topological entropy and axiom A”, *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 23–42.

Е. В. Жужома
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступило
22.01.2016
Исправленный вариант
09.09.2016

В. С. Медведев
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: medvedev@unn.ac.ru