ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2017, том 53, № 1, с. 3–9

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

ОБОБЩЁННО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

© 2017 г. А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба

Приводится определение и критерий существования обобщённо-периодических движений одного широкого класса систем. Данный класс содержит в себе все системы, характеризуемые классическим периодическим оператором сдвига, системы, порождённые интегральными уравнениями типа Вольтерры, и некоторые другие. Устанавливается связь между обобщённо-периодическими движениями и интегральными инвариантными множествами.

DOI: 10.1134/S0374064117010010

1. Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид
$$\dot{x} = L(t, x), \tag{1}$$
где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ – векторная функция действительного переменного t, а $L = (L^1, \ldots, L^n)$ – векторная функция, определённая и непрерывная вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial L^i}{\partial x^j}$, $i, j = \overline{1, n}$, на прямом произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ действительной оси $\mathbb{R}$ и евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$. При этом дополнительно предположим, что L является T-периодической по t функцией.

Вопрос о существовании периодических решений системы (1), как известно, представляет большой интерес как для теории дифференциальных уравнений, так и для приложений. Одним из важнейших результатов здесь является следующая теорема Х.Л. Массеры (см. [1]): пусть $n = 2$ и каждое решение системы (1) определено для всех $t \geq t_0$, тогда если существует решение $x = x(t, t_0, x_0)$ данной системы, ограниченное при этих значениях t, то система (1) имеет T-периодическое решение $x = x(t, t_0, x_p)$. Согласно работе [1], это утверждение справедливо также для линейных систем вида (1) произвольного порядка. Однако оказалось, что в нелинейном случае теорема Массеры неверна уже для $n = 3$ (см. [2, с. 70]).

Для автономных систем произвольного порядка в силу теорем Биркгофа из существования ограниченного решения следует существование компактного минимального множества, состоящего из рекуррентных решений, и обратно (см., например, [3, гл. 5]). Существенным здесь оказывается то, что многие свойства решений автономных систем, как известно, не переносятся на решения неавтономных систем. Так, в неавтономном случае траектории системы (1) могут пересекаться (см., например, [4, с. 115]). Поэтому определение рекуррентности и теоремы Биркгофа на неавтономный случай непосредственно не переносится. Однако для неавтономных систем достаточно общего вида подробно изучены асимптотические решения рекуррентного типа (см., например, [5–8] и [9, гл. 2]).

Заметим, что во второй половине прошлого века для изучения неавтономных систем начали широко применяться методы теории дискретных динамических систем (см., например, [10, гл. 4]). С помощью этих методов установлено, что существование ограниченного решения у неавтономных периодических систем влечёт за собой существование интегрального инвариантного множества [10, с. 105]. Более того, использование результатов из монографии [10, гл. 4] позволило ввести понятие обобщённо-периодического решения неавтономной системы как аналога рекуррентного решения [11, 12].

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие основных результатов из работ [11, 12] для широкого класса систем, определение которого дано ниже.

2. Изучаемый класс систем. Пусть Σ – метрическое пространство с метрикой d, $\mathbb{R}$ – действительная ось $(-\infty, +\infty)$ и $\mathbb{R}^+$ – действительная полуось $[0, +\infty)$.

Определение 1. Рассмотрим некоторое отображение $f:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\Sigma\to\Sigma$. Положим

$$f(\tau,t,x)=G(\tau,t)x$$

и будем считать, что:

a) отображение f непрерывно по совокупности переменных на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\Sigma$;

b) для всех $(\tau,x)\in\mathbb{R}\times\Sigma$ выполнено равенство $G(\tau,0)x=x$;

c) существует такое положительное число T, что при $(\tau,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ выполнено равенство

$$G(\tau+T,t)G(\tau,T)=G(\tau,t+T). \tag{2}$$

Тогда по аналогии с [2, с. 348] будем говорить, что функция $t\to f(\tau,t,x)$ – *движение,* если пара $(\tau,x)\in\mathbb{R}\times\Sigma$ фиксирована. При этом множество Σ будем называть *пространством движений.*

Нетрудно видеть, что определение движения близко к определению процесса из [11], но не эквивалентно ему. В первую очередь это объясняется тем, что в определении процесса условие (2) заменяется следующим более жёстким условием: для всех $(\tau,t,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ выполнено равенство

$$G(\tau+s,t)G(\tau,s)=G(\tau,t+s). \tag{3}$$

Если оператор $G(\tau,t)$ удовлетворяет условию (3), то он эквивалентен классическому оператору сдвига (см., например, [13, с. 12]). Очевидно, что такой оператор удовлетворяет условию (2), но обратное не верно. Поэтому будем называть оператор, удовлетворяющий условию (2), *расширенным оператором сдвига.*

В дальнейшем будем рассматривать только расширенный T-периодический оператор, т.е. оператор $G(\tau,t)$, для всех $(\tau,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ удовлетворяющий условию

$$G(\tau+T,t)=G(\tau,t). \tag{4}$$

Систему, характеризуемую расширенным T-периодическим оператором сдвига, будем называть *расширенной T-периодической системой.*

Если каждое решение $x=x(t,t_0,x_0)$ системы (1) определено для всех $t\geq t_0$, то простейшим примером расширенной T-периодической системы может служить система, порождённая уравнением (1). Это справедливо для систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с T-периодической по t правой частью (см. [10, с. 99]). Рассмотрим другие примеры.

Пример 1. Рассмотрим некоторое отображение $f:\ \mathbb{R}\times\Sigma\to\Sigma$ и положим

$$f(t,x)=g^tx.$$

При этом будем считать, что:

d) отображение f непрерывно по совокупности переменных на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$;

e) для всех $x\in\Sigma$ справедливо равенство $g^0x=x$;

f) для всех $t,s\in\mathbb{R}$ выполнено групповое свойство $g^{t+s}=g^tg^s$.

Тогда группа преобразований g^t представляет собой динамическую систему (см. [3, с. 347]).

Легко видеть, что для каждого $T>0$ система g^t является расширенной T-периодической системой. Более того, при любом фиксированном $x\in\Sigma$ функция $t\to f(t,x)$ представляет собой движение.

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение типа Вольтерры

$$y(t)=y_0+h(t)+\int\limits_{t_0}^{t}L(t,s,y(s))\,ds, \tag{5}$$

в котором $y_0\in\mathbb{R}^n$ – вектор параметров, а $h:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ и $L:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – непрерывные функции. Предположим, что для всех $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ решение $y=y(t,t_0,y_0)$ уравнения (5) определено и непрерывно по совокупности переменных t, t_0, y_0 в области их определения. Тогда если T-периодичны функции h и L (последняя по t, s), то уравнение (5) задаёт T-расширенную периодическую систему, в которой

$$G(t_0, t-t_0)y_0 = y(t, t_0, y_0).$$

Более того, несложно заметить, что в отличие от рассмотренных выше примеров оператор сдвига, порождённый уравнением (5), в общем случае не удовлетворяет условию (3) (см. [14]).

3. Обобщённо-периодические движения. Введём

Определение 2. Рассмотрим движение $f(\tau, t, x)$. Предположим, что для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N_ε, что при всех $t \in \mathbb{R}^+$ выполнено неравенство

$$d(f(\tau, t, x), f(\tau, t+N_\varepsilon T, x)) < \varepsilon.$$

Тогда будем говорить, что $f(\tau, t, x)$ – *обобщённо-периодическое движение.*

Примером обобщённо-периодического движения может служить T-периодическое движение. Этим, конечно, множество обобщённо-периодических движений не исчерпывается.

В самом деле, определение обобщённо-периодического движения формально близко к определению почти периодического движения, а в случае динамических систем каждое почти периодическое движение является рекуррентным движением, но обратное не верно (см., например, [3, с. 411, 418]). Поэтому установим связь между обобщённо-периодическим и рекуррентным движениями.

Пример 3. Рассмотрим динамическую систему g^t (см. пример 1). Пусть $f(t, x)$ – движение и

$$\gamma(x) = \{f(t, x): \ t \in \mathbb{R}\}$$

– его траектория. Напомним, что движение $f(t, x)$ системы g^t называется рекуррентным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $T_\varepsilon > 0$, при котором для всех $s \in \mathbb{R}$ дуга

$$\gamma_{s,T_\varepsilon}(x) = \{f(t, x): \ t \in [s, s+T_\varepsilon]\}$$

траектории $\gamma(x)$ аппроксимирует всю траекторию $\gamma(x)$ с точностью до ε [3, с. 402]. Напомним также, что множество M называется минимальным, если оно непусто, замкнуто и инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего этими тремя свойствами [3, с. 400].

Для простоты предположим, что пространство движений Σ компактно. Тогда необходимое и достаточное условие рекуррентности движения $f(t, x)$ состоит в том, что замыкание $\bar{\gamma}(x)$ траектории $\gamma(x)$ представляет собой компактное минимальное множество [3, с. 402–404]. Поэтому, как будет показано ниже (см. замечание 3), для всех $T > 0$ рекуррентное движение $f(t, x)$ является обобщённо-периодическим и обратно (см. также работу [15]).

Замечание 1. В общем случае для расширенных периодических систем траектория

$$\gamma^+(\tau, x) = \{f(\tau, t, x): \ t \in \mathbb{R}^+\}$$

движения $f(\tau, t, x)$ зависит не только от x, но и от τ. Последний случай собственно и определяет неавтономную расширенную систему – основной объект исследования настоящей работы.

Важнейшей отличительной особенностью неавтономных систем является то, что траектории их движений могут пересекаться. Следовательно, прямое перенесение определения рекуррентного движения на неавтономные расширенные периодические системы невозможно. Таким образом, обобщённо-периодическое движение является самостоятельным математическим объектом, который в случае динамических систем эквивалентен классическому рекуррентному движению.

Существование обобщённо-периодических движений устанавливает следующий аналог теоремы Массеры.

Теорема 1. *Пусть движение* $f(\tau,t,x)$ *расположено в некотором компактном множестве* $\Sigma_0\subset\Sigma$. *Тогда из каждой последовательности натуральных чисел* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$ *можно выбрать такую её подпоследовательность* $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$, *что существует обобщённо-периодическое движение* $f(\tau,t,y)$, *расположенное в* Σ_0 *и удовлетворяющее следующим условиям:*

i) равномерно на каждом из отрезков $[a,b]\subset\mathbb{R}^+$ *выполнено равенство*

$$\lim_{l\to+\infty}f(\tau,t+(N_{k_l}-1)T,x)=f(\tau,t,y);$$

ii) равномерно на всей полуоси $\mathbb{R}^+$ *выполнено равенство*

$$\lim_{l\to+\infty}f(\tau,t+(N_{k_{l+1}}-N_{k_l})T,y)=f(\tau,t,y).$$

Доказательство теоремы 1 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 работы [12]. Поэтому здесь его опускаем (см. также работу [16]).

Замечание 2. Необходимо отметить, что в условиях теоремы 1 в случае динамической системы g^t выбор числа T не зависит от выбора последовательности $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и обратно (см. работы [15, 16]).

Установим теперь связь между обобщённо-периодическими движениями и интегральными инвариантными множествами. Для этого прежде всего заметим, что важнейшим из инвариантных множеств, как известно, является минимальное множество. Поэтому начнём с установления связи между обобщённо-периодическими движениями и минимальными множествами.

Теорема 2. *Пусть движение* $f(\tau,t,x)$ *расположено в некотором компактном множестве* $\Sigma_0\subset\Sigma$. *Тогда множество*

$$\Omega(\tau,x)=\bigcap_{k\ge0}\overline{\bigcup_{l\ge k}f(\tau,lT,x)}$$

*компактно, инвариантно и является объединением компактных минимальных множеств**). *При этом в каждой точке* $(\tau,y)\in\mathbb{R}\times\Omega(\tau,x)$ *начинается обобщённо-периодическое движение* $f(\tau,t,y)$, *расположенное в* Σ_0.

Доказательство. Поскольку множество Σ_0 компактно, то множество $\Omega(\tau,x)$ компактно и инвариантно [10, с. 105]. Далее, согласно теореме 1, в каждой точке $y\in\Omega(\tau,x)$ начинается обобщённо-периодическое движение $f(\tau,t,y)$, расположенное в Σ_0. Поэтому для доказательства теоремы остаётся показать, что $\Omega(\tau,x)$ – объединение компактных минимальных множеств. Докажем это.

Для всех $N=0,1,\ldots$ обозначим через E_N множество точек

$$f(\tau,NT,y),f(\tau,(N+1)T,y),\ldots,f(\tau,(N+l)T,y),\ldots$$

Пусть при этом $\bar E_N$ – замыкание множества E_N. Тогда в силу определения 2 несложно заметить, что каждое множество $\bar E_N$ компактно и инвариантно. Более того, по построению имеют место включения

$$\Omega(\tau,x)\supset\bar E_0\supset\bar E_1\supset\ldots\supset\bar E_N\supset\ldots$$

Следовательно, существует компактное минимальное множество

$$M\subset\bigcap_{N\ge0}\bar E_N,$$

содержащееся во множестве $\Omega(\tau,x)$ [3, с. 401]. Но, согласно определению 2, справедливы равенства $\bar E_0=\bar E_1=\ldots=\bar E_N=\ldots$ Значит, $\bar E_0=M$.

*) В условиях теоремы инвариантность и минимальность множеств понимаются в смысле действия на них оператора $G(\tau,T)$.

Заметим теперь, что выбор точки $y \in \Omega(\tau, x)$ выше не играл никакой роли. Теорема доказана.

Для расширенных периодических систем будем использовать следующие определения из монографии [10, с. 102].

Определение 3. Пусть $h: \mathbb{R} \to \Sigma$ – непрерывное отображение, для всех $(\tau, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ удовлетворяющее условию

$$h(\tau + t) = G(\tau, t)h(\tau).$$

Тогда будем говорить, что h – *интеграл на* $\mathbb{R}$. Если при этом $h(\tau) = x$, то будем говорить, что h – *интеграл, проходящий через точку* $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma$. Если же $\mathcal{M}$ – множество в пространстве $\mathbb{R} \times \Sigma$ и для всех $(\tau, x) \in \mathcal{M}$ существует интеграл h, проходящий через точку (τ, x), такой, что $(s, h(s)) \in \mathcal{M}$ при $s \in \mathbb{R}$, то будем говорить, что $\mathcal{M}$ – *интегральное множество на* $\mathbb{R}$.

Определение 4. Пусть $\mathcal{M}$ – интегральное множество на $\mathbb{R}$. Для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ положим

$$\mathcal{M}_\tau = \{x \in \Sigma : \ (\tau, x) \in \mathcal{M}\}.$$

Интегральное множество $\mathcal{M}$ назовём *инвариантным*, если для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$G(\tau, T)\mathcal{M}_\tau = \mathcal{M}_\tau,$$

т.е. $\mathcal{M}_{\tau+T} = \mathcal{M}_\tau$.

Выясним смысл определения 4. Для этого рассмотрим динамическую систему g^t, описанную в примере 1.

Поскольку оператор g^t не зависит от τ, определение 4 примет здесь следующий вид: множество $Q \subset \Sigma$ называется инвариантным, если $\mathbb{R} \times Q$ является интегральным множеством для системы g^t. Это, очевидно, означает существование для каждой точки $x \in Q$ интеграла h, проходящего через точку $(0, x)$, такого, что $h(t) \in Q$ при любом $t \in \mathbb{R}$ [10, с. 103]. В этом случае, как несложно заметить, для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$g^t Q = Q,$$

что соответствует классическому определению инвариантного множества (см., например, [3, с. 349]).

Таким образом, роль и место интегрального инвариантного множества трудно переоценить, поскольку, очевидно, оно является распространением на случай расширенных периодических систем понятия инвариантного множества, которое ещё в начале прошлого века широко использовалось в общей теории динамических систем. Важность этого распространения объясняется тем, что в неавтономном случае, как отмечено выше, траектории движений могут пересекаться и, следовательно, классическое определение инвариантности на расширенные периодические системы непосредственно не переносится.

Простейшим примером интегрального инвариантного множества является множество

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma.$$

Значительно более полную характеристику интегрального инвариантного множества как важнейшего математического объекта устанавливает

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma \subset \Sigma$ *– множество такое, что при* $x \in \Gamma$ *для всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *движение* $f(\tau, t, x)$ *расположено в некотором компактном множестве* $\Sigma_0(x) \subset \Sigma$. *Пусть, кроме того,*

$$\Omega(\tau, x) = \bigcap_{k \geq 0} \overline{\bigcup_{l \geq k} f(\tau, lT, x)}, \tag{6}$$

где $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$, *и*

$$\Omega_\Gamma = \{y \in \Omega(\tau, x) : \ (\tau, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma\}. \tag{7}$$

Тогда если множество Γ *непусто и выполнено условие (3), то*

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Omega_\Gamma \tag{8}$$

– интегральное инвариантное множество такое, что в каждой точке $(\tau, y) \in \mathcal{M}$ *начинается обобщённо-периодическое движение* $f(\tau, t, y)$, *расположенное во множестве* Ω_Γ.

Доказательство. Согласно теореме 2, для всех $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$ множество $\Omega(\tau, x)$ инвариантно в смысле действия на него оператора $G(\tau, T)$. При этом в силу теоремы 2 в каждой точке (τ, y) множества $\mathbb{R} \times \Omega(\tau, x)$ начинается обобщённо-периодическое движение $f(\tau, t, y)$. Значит, в каждой точке (τ, y) множества $\mathcal{M}$, задаваемого равенством (8), также начинается обобщённо-периодическое движение $f(\tau, t, y)$. Более того, в силу равенств (6) и (7) каждое такое обобщённо-периодическое движение $f(\tau, t, y)$ расположено во множестве Ω_Γ. Отсюда следует, что при любом фиксированном $y \in \Omega_\Gamma$ определена непрерывная функция $h: \mathbb{R} \to \Omega_\Gamma$, для всех $(\tau, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ удовлетворяющая условию

$$h(\tau + t) = G(\tau, t)y, \tag{9}$$

т.е. h – интеграл, проходящий через точку (τ, y).

Легко видеть, что в силу равенства (9) для всех $s \in \mathbb{R}$ точка $(s, h(s))$ лежит во множестве $\mathcal{M}$. Поэтому $\mathcal{M}$ – интегральное множество.

Поскольку при $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$ множество $\Omega(\tau, x)$ инвариантно в смысле действия на него оператора $G(\tau, T)$, то для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$G(\tau, T)\Omega_\Gamma = \Omega_\Gamma.$$

Следовательно, $\mathcal{M}$ – интегральное инвариантное множество.

Таким образом, теорема доказана.

4. Приложение к динамическим системам. Применим результаты п. 3 к изучению динамической системы g^t (см. пример 1) и заметим, что для такой системы справедлив следующий аналог теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma \subset \Sigma$ *– множество такое, что для всех* $x \in \Gamma$ *движение* $f(t, x)$ *расположено в некотором компактном множестве* $\Sigma_0(x) \subset \Sigma$. *Пусть, кроме того, положим*

$$\Omega_T(x) = \bigcap_{k \geq 0} \overline{\bigcup_{l \geq k} f(lT, x)} \tag{10}$$

для некоторых положительного числа T *и точки* $x \in \Gamma$. *Тогда если множество* Γ *непусто, то для всех* $T > 0$ *множество*

$$\mathfrak{M}_T = \{y \in \Omega_T(x): \ x \in \Gamma\}$$

является объединением всех минимальных множеств системы g^t. *При этом любое минимальное множество* $M \subset \mathfrak{M}_T$ *компактно.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое положительное число T и точку $x \in \Gamma$. Тогда из равенства (10) следует, что для каждой точки $y \in \Omega_T(x)$ множество

$$M = \overline{\bigcup_{t \geq 0} f(t, y)}$$

представляет собой компактное минимальное множество системы g^t [16]. Но выбор числа T выше не играл никакой роли. Поэтому в силу определения множества $\mathfrak{M}_T$ теорема доказана.

Замечание 3. В компактном метрическом пространстве движений, как отмечено выше, замыкание траектории рекуррентного движения является компактным минимальным множеством. Поэтому, согласно теоремам 3 и 4, в компактном метрическом пространстве движений для всех $T > 0$ рекуррентное движение $f(t, x)$ динамической системы g^t является обобщённо-периодическим и обратно.

5. Заключение. Теорема 1 представляет собой простой критерий существования обобщённо-периодических движений в расширенных периодических системах. Класс таких систем достаточно широк. Он включает в себя системы, порождённые уравнениями (1), функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа, интегральными уравнениями (5), дифференциальными уравнениями в банаховом пространстве и некоторые другие.

Теоремы 2–4 устанавливают связь между обобщённо-периодическими движениями и интегральными инвариантными и минимальными множествами. Здесь особо следует подчеркнуть роль и место интегрального инвариантного множества как важнейшего математического объекта, поскольку интегральное инвариантное множество является распространением на неавтономный случай классического инвариантного множества.

В силу теорем 3 и 4 несложно заметить, что в случае динамических систем обобщённо-периодическое движение эквивалентно рекуррентному (см. замечание 3). Это означает, что обобщённо-периодическое движение является распространением рекуррентного движения на случай расширенных периодических систем.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10352).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Massera J.L.* The existence of periodic solutions of systems of differential equations // Duke Math. J. 1950. V. 17. P. 457–475.
2. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах. М., 2007.
3. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М., 2004.
4. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1965.
5. *Miller R.K.* Almost periodic differential equations as dynamical systems with application to existence of A.P. solutions // J. Differ. Equat. 1965. V. 1. № 3. P. 337–345.
6. *Deysach L.G., Sell G.R.* On the existence of almost periodic motions // The Michigan Math. J. 1965. V. 12. № 1. P. 87–95.
7. *Миллионщиков В.М.* Рекуррентные и почти периодические предельные решения неавтономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 9. С. 1555–1559.
8. *Bhatia N.P., Chow S.-N.* Weak attraction, minimality, recurrence, and almost periodicity in semi-systems // Funkcialaj Ekvacioj. 1972. V. 15. P. 35–59.
9. *Cheban D.N.* Asymptotically almost periodic solutions of differential equations. New York, 2009.
10. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
11. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Периодический оператор сдвига и квазипериодические кривые // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1367–1372.
12. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Слабый периодический оператор сдвига и обобщённо-периодические движения // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 123–127.
13. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
14. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Квазипериодические процессы в задачах управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 2. С. 22–28.
15. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* О рекуррентных траекториях, минимальных множествах и квазипериодических движениях динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 11. С. 1469–1474.
16. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Метод построения минимальных множеств динамических систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 835–841.

Институт проблем передачи
информации РАН, г. Москва,
Тверской государственный
технический университет,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Национальный исследовательский технологический
университет “МИСиС”, г. Москва

Поступила в редакцию
12.05.2016 г.