СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.М. Гончаренко, Л.В. Липагина, А.А. Рылов

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано
Экспертным советом УМО в системе ВО и СПО
в качестве **учебника** для специальностей
«Инженерное дело, технологии и технические науки»
и «Экономика и управление»
среднего профессионального образования

*Рекомендовано для освоения профессий
из списка ТОП-50 наиболее востребованных на рынке труда,
новых и перспективных профессий*

BOOK.ru
ЭЛЕКТРОННО-БИБЛИОТЕЧНАЯ СИСТЕМА

КНОРУС • МОСКВА • 2019

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
Г65

Рецензенты:
С.Л. Атанасян, д-р пед. наук, проф. (заведующий кафедрой геометрии МПГУ),
С.А. Логвенков, канд. физ.-мат. наук, доц. (кафедра высшей математики НИУ ВШЭ),
О.Е. Орел, канд. физ.-мат. наук, доц. (кафедра высшей математики МФТИ)

Авторы:
В.М. Гончаренко (НИУ ВШЭ),
Л.В. Липагина (Финансовый университет при Правительстве РФ),
А.А. Рылов (Финансовый университет при Правительстве РФ)

Гончаренко, Василий Михайлович.
Г65 Элементы высшей математики : учебник / В.М. Гончаренко, Л.В. Липагина, А.А. Рылов. — Москва : КНОРУС, 2019. — 364 с. — (Среднее профессиональное образование).

ISBN 978-5-406-06878-6

Изложены основные разделы высшей математики, входящие в базовые программы СПО. Рассматриваются теория пределов, основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных, теория рядов, элементы теории дифференциальных уравнений, а также основы линейной алгебры и аналитической геометрии — матрицы и их определители, векторы и системы линейных уравнений, прямые и плоскости в пространстве и кривые второго порядка на плоскости. Учебник знакомит с основными темами высшей математики, которые служат основой всего многообразия математических методов, применяемых при решении прикладных задач экономики и финансов, анализа данных и прикладной статистики.

Соответствует ФГОС СПО последнего поколения.

Рекомендовано для освоения профессий из списка ТОП-50 наиболее востребованных на рынке труда, новых и перспективных профессий.

Для студентов, обучающихся по различным направлениям среднего профессионального образования, а также студентов младших курсов высших учебных заведений.

Ключевые слова: функции, дифференциальное и интегральной исчисление, матрицы, линейные уравнения, аналитическая геометрия.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

Гончаренко Василий Михайлович
Липагина Лариса Владимировна
Рылов Александр Аркадьевич

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Изд. № 17171. Подписано в печать 14.12.2018. Формат 60×90/16.
Гарнитура «TNR». Усл. печ. л. 23,0. Уч.-изд. л. 18,24. Тираж 500 экз.

ООО «Издательство «КноРус».
117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.
Тел.: 8-495-741-46-28.
E-mail: office@knorus.ru http://www.knorus.ru

Отпечатано в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.
Тел.: 8-495-221-89-80.

ISBN 978-5-406-06878-6

Оглавление

Предисловие

По общепринятому в настоящее время определению, математика (от др.-греч. μᾰθημᾰτικά — изучение, наука) — наука о структурах, порядке и отношениях, которая исторически сложилась на основе операций подсчёта, измерения и описания форм реальных объектов. Математика широко используется в естественных и социальных науках как для точной формулировки их содержания, так и для получения новых результатов. Математика — фундаментальная наука, предоставляющая общие языковые средства другим наукам; тем самым она выявляет их структурную взаимосвязь и способствует нахождению самых общих законов природы.

Значение математики в современном мире трудно переоценить. Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических, экономических и гуманитарных исследованиях. Причина проникновения математики в различные отрасли знаний заключается в том, что она предлагает весьма четкие модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Настоящий учебник содержит материал, составляющий основу изучения математики в средних специальных учебных заведениях по направлениям экономика, управление, социология и другим. Согласно федеральным государственным образовательным стандартам последнего поколения современные специалисты должны уметь решать прикладные задачи и знать основные математические методы в области профессиональной деятельности, а для формирования этих компетенций необходимы знания по математическому анализу, линейной алгебре, дискретной математике, теории вероятностей и математической статистике. В данном учебнике рассматриваются основные разделы математического анализа: теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной, дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных, ряды, обыкновенные дифференциальные уравнения; а также разделы линейной алгебры: векторы и матрицы, системы линейных уравнений, аналитическая геометрия. Знания, полученные при освоении этих разделов математики, помогут овладеть навыками применения математического инструментария к решению профессиональных задач.

Каждый раздел содержит теоретический материал, достаточное количество иллюстрирующих его применение примеров, а также задания для самостоятельной работы и ответы (указания, решения) к ним.

Глава 1. Теория пределов

1.1. Понятие числовой последовательности

Пусть $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Определение 1.1. Числовая функция f, областью определения которой является некоторое подмножество $D_f \subseteq \mathbb{N}$, называется ***числовой последовательностью.***

Значения функции $f(n)$ называются *членами последовательности*, а соответствующие им аргументы – *номерами* ее *членов*. Вместо обозначений $f(1)$, $f(2)$, … часто употребляются обозначения a_1, a_2, …, или x_1, x_2, …

Обычно последовательность задается формулой *общего члена* a_n. Иногда последовательность задают прямым перечислением. Так, последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ может быть записана в виде

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$$

В последующих примерах приведены различные последовательности, заданные формулой общего члена. В первом из них – постоянная последовательность, во втором – конечная.

Пример 1.1. Пусть $a_n = 5$. В последовательности все члены равны 5: $a_1 = 5$, $a_{10} = 5$, $a_{1234} = 5$..., поэтому она является постоянной.

Пример 1.2. Если $a_n = \sqrt{-12 + 8n - n^2}$, то в силу области определения арифметического корня последовательность определена на множестве $D = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ и имеет всего пять членов: $a_2 = 0$; $a_3 = \sqrt{3}$; $a_4 = 2$; $a_5 = \sqrt{3}$; $a_6 = 0$. Поэтому она называется конечной.

Пример 1.3. Рассмотрим последовательность вида $a_n = \lg(n-3)$. Так как логарифм определен только для положительных значений аргумента, то последовательность определена на множестве $D = \{4;\ 5;\ldots\ n;\ldots\}$, а ее члены имеют вид $a_4 = 0$; $a_5 = \lg 2$; $a_6 = \lg 3; \ldots$.

Пример 1.4. Если $a_n = \dfrac{n}{n-25}$, то легко видеть, что последовательность задана на множестве $D = \mathbb{N} \setminus \{25\}$, причем $a_1 = -\dfrac{1}{24}$, $a_2 = -\dfrac{2}{23}$, $a_{24} = -24$, $a_{26} = 26$ и т.д.

Пример 1.5. Наконец, если $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, то элементы последовательности определены на всем множестве натуральных чисел, причем ее члены $a_1 = \dfrac{1}{2}$; $a_2 = \dfrac{2}{3}$; $a_3 = \dfrac{3}{4}, \dots$ возрастают, однако не превышают единицы.

Задачи и упражнения

1.1. Найдите область определения следующих последовательностей: а) $a_n = \sqrt{n^2 - 30n + 200}$; б) $a_n = \dfrac{1}{n^2 - 10n + 21}$.

1.2. Найдите первые шесть членов следующих последовательностей: а) $a_n = \dfrac{1}{n^3}$; б) $a_n = \log_6 \dfrac{n+1}{n+3}$; в) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

1.3. Найдите семнадцатый член следующих последовательностей: а) $a_n = \dfrac{2n+5}{n^2+4}$; б) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; в) $a_n = e^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2} n\right)$; г) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dots + \dfrac{1}{(n-1)n}$.

1.4. Найдите общий член следующих последовательностей: а) 1; $1+\dfrac{1}{2^2}$; $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}$;...; б) 1; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{1}{4}$;....

1.5. Найдите общей член последовательности, составленной из разностей соседних членов последовательности $a_n = \dfrac{1}{n}$.

1.2. Конечный предел числовой последовательности

Пусть задана произвольная числовая последовательность $\{a_n\}$, и пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое положительное число.

Если оказывается, что члены последовательности $\{a_n\}$ с возрастанием n стремятся к числу a, т.е. расстояние $|a_n - a|$ между a_n и a меньше любого заданного числа ε, начиная с некоторого номера (зависящего от ε) последовательности, то $\{a_n\}$ называют сходящейся к числу a, а само число a – пределом последовательности $\{a_n\}$. Отметим, что понятие предела последовательности является одним из базовых понятий математического анализа.

Определение 1.2. Число a называется *пределом последовательности* a_n, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всякого номера $n > k$, справедливо неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Кратко определение можно записать следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists k = k(\varepsilon) : \forall n > k \; |a_n - a| < \varepsilon .$$

Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то она называется *сходящейся*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то последовательность называют *бесконечно малой последовательностью*, или просто *бесконечно малой*.

Пусть теперь A – большое положительное число. Если члены последовательности $\{a_n\}$ с увеличением n неограниченно возрастают, то последовательность $\{a_n\}$ называют бесконечно большой, а символ ∞ – пределом бесконечно большой последовательности $\{a_n\}$.

Определение 1.3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $A > 0$ найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что для любого $n > k$, справедливо неравенство $|a_n| > A$.

Определение 1.4. Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $+\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если для любого $A > 0$ найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что для любого $n > k$, справедливо неравенство $a_n > A$.

Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $-\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если для любого $A > 0$ найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что для любого $n > k$ справедливо неравенство $a_n < -A$.

Если $\{a_n\}$ – бесконечно малая последовательность (предполагается, что $a_n \neq 0$ для всех n), то $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ – бесконечно большая.

В примерах 1.6.–1.7 представлены бесконечно малые последовательности. Пример 1.8 демонстрирует последовательность, сходящуюся к числу 1, а пример 1.9 – не имеющую предела последовательность.

Пример 1.6. Рассмотрим последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Это будет доказано, если для любого $\varepsilon > 0$ мы «предъявим» такое $k = k(\varepsilon)$, что для всякого номера $n > k$ выполнено неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем номер n из неравенства $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Сначала найдем требуемое в определении 1.2 натуральное число $k = k(\varepsilon)$: поскольку $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, или $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то число можно выбрать в виде $k = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где [ ] обозначает целую часть числа. Тогда определение выполнено: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] \in \mathbb{N}$, что для всякого номера $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, справедливо неравенство $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Рассмотрим два частных случая:

1) Если $\varepsilon = 0{,}1$, то $k = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$. Таким образом, начиная с номера 11, выполнено $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < 0{,}1$.

2) Если $\varepsilon = 0,001$, то $k = \dfrac{1}{0,001} = 1000$. Таким образом, начиная с номера 1001, выполнено $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < 0,001$.

Пример 1.7. Пусть $a_n = \dfrac{1}{n^k}$, где $k > 0$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$. Аналогично примеру 1.6 выразим номер n из неравенства $\left|\dfrac{1}{n^k} - 0\right| < \varepsilon$. Поскольку $\dfrac{1}{n^k} < \varepsilon$, т.е. $n > \dfrac{1}{\varepsilon^{1/k}}$, то требуемое число можно выбрать в виде $k = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{1/k}}\right]$. Тогда условие определения 1.2 выполнено: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\left[\dfrac{1}{\varepsilon^{1/k}}\right] \in \mathbb{N}$, что для всякого номера $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{1/k}}\right]$, справедливо неравенство $\left|\dfrac{1}{n^k} - 0\right| < \varepsilon$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$.

Пример 1.8. Рассмотрим последовательность $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выразим номер n из неравенства $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. Теперь найдем требуемое в определении 1.2 натуральное число $k = k(\varepsilon)$. Поскольку

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon,\ \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| < \varepsilon,\ \frac{1}{n+1} < \varepsilon,\ n+1 > \frac{1}{\varepsilon},\ n > \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

то число можно выбрать в виде $k = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$. Тогда определение выполнено: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] \in \mathbb{N}$, что для всякого номера $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$, справедливо неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Пример 1.9. Рассмотрим теперь последовательность вида $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \ldots$ Так как разность соседних членов $a_n - a_{n-1}$ по модулю, очевидно, равна 1, то эта последовательность не имеет предела: не существует такого числа a, к которому стремятся члены данной последовательности a_n с возрастанием номера n.

Пример 1.10. Рассмотрим последовательность $a_n = \log_7(n-3)$. Если A – большое положительное число, то условие $\log_7(n-3) > A$ можно преобразовать к виду $n > 7^A + 3$. Таким образом, для всех $n > \left[7^A + 4\right]$ элементы последовательности $a_n > A$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \log_7(n-3) = +\infty$.

Пример 1.11. Для последовательности $a_n = -n^2$ условие $-n^2 < -A$ для любого большого числа A преобразуется к виду $n > \sqrt{A}$. Таким образом, для всех членов последовательности с номерами $n > \left[\sqrt{A} + 1\right]$ верно неравенство $a_n < -A$. Последовательность также бесконечно большая: $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$.

Задачи и упражнения

1.6. Докажите, что предел последовательности $a_n = 3 + \frac{1}{n^2}$ равен 3. Найдите члены последовательности, расположенные к числу 3 ближе, чем на $\varepsilon_1 = 0{,}01$ и $\varepsilon_2 = 0{,}0001$.

1.7. Докажите, что следующие последовательности бесконечно малые: а) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$; б) $a_n = (-1)^n \cdot 0{,}9999^n$; в) $a_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}$.

1.8. Найдите предел последовательности: а) $a_n = \frac{\sin n}{n}$; б) $a_n = a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 1)$.

1.3. Общие правила нахождения пределов

Пусть числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда имеют место следующие правила нахождения пределов суммы, произведения и отношения этих последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab$, в частности, для любого действительного $k \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} k a_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ka$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$, если $b \neq 0$ и $b_n \neq 0$;

В частности, сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми.

Определение 1.5. Последовательность a_n называется *ограниченной*, если существует такое положительное число A, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $|a_n| < A$. В противном случае последовательность называется неограниченной.

Теорема 1.1. Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Теорема 1.2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой. Произведение бесконечно больших последовательностей является бесконечно большой.

Пример 1.11. Рассмотрим последовательности $a_n = \dfrac{1}{n}$ и $b_n = \dfrac{n}{n+1}$. Согласно примеру 1.6, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а из примера 1.8 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 0 + 1 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = 0.$$

Заметим, что правилами 1–3 нельзя пользоваться при бесконечных пределах, поэтому основной проблемой вычисления пределов является *раскрытие неопределенностей*, когда в результате формального применения правил 1–3 получаются выражения одного из видов

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}.$$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ получаются, как правило, в виде отношения бесконечно больших последовательностей. Поведение на бесконечности различных бесконечно больших последовательностей зависит от вида последовательности. При этом полезно пользоваться следующими правилами при сравнении различных бесконечно больших (степенной, логарифмической и показательной):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{b^n}=0, \ \lim_{n\to\infty}\frac{\log_c n}{n^a}=0 \ \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{\log_c n}{b^n}=0$$

при $a>0$, $b>1$ и $c>1$.

Пример 1.12. Рассмотрим последовательность

$$a_n=\frac{5n^2+14n-103}{13n^2+67n-243}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на максимальную степень n, т.е. на n^2. Тогда, так как пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ существуют, и существует предел отношения, то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{5+\frac{14}{n}-\frac{103}{n^2}}{13+\frac{67}{n}-\frac{243}{n^2}}=\frac{5+14\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-103\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{13+67\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-243\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{5}{13}.$$

Пример 1.13. Рассмотрим последовательность, аналогичную предыдущему примеру, изменив степень знаменателя, т.е.

$$a_n=\frac{5n^2-14n+103}{13n^3-67n+243}.$$

Числитель и знаменатель дроби также разделим на максимальную входящую в них степень, т.е. на n^3, и в пределе имеем:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - 14\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + 103\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{13 - 67\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + 243\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = 0.$$

Пример 1.14. Рассмотрим отношение последовательностей $a_n = \frac{n}{n+1}$ и $b_n = \log_7(n-3)$. Поскольку мы имеем произведение сходящейся (а значит, ограниченной) последовательности a_n на бесконечно малую $\frac{1}{\log_7(n-3)}$, то их произведение является бесконечно мало, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n/(n+1)}{\log_7(n-3)} = 0.$$

Рассмотрим теперь задачу на раскрытие неопределенности вида $\infty - \infty$.

Пример 1.15. Найдем предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$. Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное разности корней:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = 0.$$

Задачи и упражнения

1.9. Найдите пределы последовательностей а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{1-n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+7}{4n^2+6n+7}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-3n^5+2n-7n^4}{6n+5n^2-n^4+2n^5-6}$;

1.10. Найдите пределы последовательностей а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{2}+7n+\sqrt{3}}{3n^2+\sqrt[3]{5n+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+(-1)^n n^3+(-1)^{n+1}n^2+7}{5n^4+(-1)^{n+2}n^3+3}$.

1.11. Найдите пределы последовательностей а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100000n}{n^2+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^7$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} 8\cdot\left(\dfrac{6n^6-31n^3+17}{4n^6-23n^2-15n+45}\right)^3$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{n^3+2n+1}{n^2-n^3-1}\right)^7-\left(\dfrac{3n^2+6n^4-5}{2n^3+2n^4-7n+3}\right)^3\right)$.

1.12. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-6}-n\right)$.

В следующих упражнениях найдите пределы последовательностей:

1.13. $a_n = n^2 5^n$.

1.14. $a_n = -n^3\log_7(n^2+2n-7)$.

1.15. $a_n = 0{,}00001n$.

1.16. $a_n = \left(2-\dfrac{1}{n}\right):\log_7\dfrac{1}{n}$.

1.4. Второй замечательный предел

В математическом анализе большую роль играет число

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281828\ldots.$$

Это одна из фундаментальных величин в математике. Логарифм с основанием e называется *натуральным логарифмом*, он обозначается через $\ln$. Показательная функция $y=e^x$ называется *экспонентой* и широко используется в прикладных задачах.

Если $\{a_n\}$ – *бесконечно большая*, то при подстановке вместо аргумента n общего члена a_n получаем последовательность, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Если $\{b_n\}$ – бесконечно малая, то при подстановке вместо аргумента n выражения, обратного общему члену b_n, получаем последовательность, для которой

$$\lim_{n\to\infty}(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}}=e.$$

Поскольку основание в указанных формулах является последовательностью, сходящейся к единице, а показатель – бесконечно большой, то применение указанных формул дает подход к раскрытию неопределенности $\{1^\infty\}$.

Пример 1.16. Для вычисления предела последовательности $a_n=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$ выделим в основании целую часть

$$\frac{n+2}{n+1}=\frac{(n+1)+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}.$$

Поскольку $(n+1)$ – бесконечно большая, то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e.$$

Пример 1.17. Найдем предел последовательности $a_n=\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}$.

Выделим в основании целую часть и преобразуем степень

$$\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}=\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^2.$$

Так как выражение в квадратных скобках стремится к e, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^2=e^2.$$

Пример 1.18. Найдем предел последовательности $a_n=\left(\frac{3n^2-4n-10}{3n^2+5n-7}\right)^{2n+1}$

при $n\to\infty$. Выделим в дроби целую часть

$$\frac{3n^2-4n-10}{3n^2+5n-7}=\frac{\left(3n^2+5n-7\right)-9n-3}{3n^2+5n-7}=1-\frac{9n+3}{3n^2+5n-7}.$$

Далее преобразуем степень так, чтобы выделить выражение, стремящееся к e, но чтобы степень при этом не изменилась:

$$\left(1-\frac{9n+3}{3n^2+5n-7}\right)^{2n+1}=\left[\left(1-\frac{9n+3}{3n^2+5n-7}\right)^{-\frac{3n^2+5n-7}{9n+3}}\right]^{-\frac{9n+3}{3n^2+5n-7}\cdot(2n+1)}.$$

Выражение в квадратных скобках стремится к e при $n\to\infty$, поэтому исходный предел равен

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(9n+3)(2n+1)}{3n^2+5n-7}}=e^{-6}.$$

Пример 1.19. Найдем предел последовательности $a_n=\left(1+5^{-n}\right)^{3^n}$ при $n\to\infty$. Аналогично предыдущему примеру, преобразуем основание и степень для выделения второго замечательного предела:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5^n}\right)^{5^n}\right]^{\frac{3^n}{5^n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n}=e^0=1.$$

Заметим, что, если $a_n=\left(1+5^{-n}\right)^{7^n}$, т.е. в качестве степени рассматривается показательная функция с основанием, большим, чем у показательной степени в основании, то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5^n}\right)^{5^n}\right]^{\frac{7^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\overset{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\to+\infty}}=+\infty,$$ т.е. последовательность $a_n=\left(1+5^{-n}\right)^{7^n}$ – бесконечно большая.

Задачи и упражнения

В следующих упражнениях найдите пределы последовательностей:

1.17. $a_n=\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n+1}$; **1.18.** $a_n=\left(\frac{n-10}{n+5}\right)^{n+7}$;

Список рекомендованной литературы

1. Атанасян В.А., Атанасян Л.С. Сборник задач по геометрии, часть 1. – М.: Просвещение, 1977.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. М.: Высшая школа, 1998.
3. Борцова Т. В, Денежкина И.Е., Попов В.А. Математический анализ. Ч. 3. Интегральное исчисление; под редакцией В.Б. Гисина и Е.Н. Орла; М.: Финуниверситет, 2013.
4. Бугров Я.С. Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник. М.: Наука, 1988.
5. Бугров Я.С. Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для вузов. М.: Наука, 1988.
6. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: Учебное пособие. М.: Изд-во ГУ-ВШЭ, 1998.
7. Винюков, И. А., Попов В.Ю., Пчелинцев С.В. Линейная алгебра. Ч. 2. Многочлены и комплексные числа, собственные значения и собственные векторы. Модель Леонтьева; под редакцией В.Б. Гисина и Е.Н. Орла; М.: Финуниверситет, 2013.
8. Гончаренко. В.М., Свирщевский С.Р. Математический анализ. Ч. 5-6. Ряды. Дифференциальные уравнения. под редакцией В.Б. Гисина и Е.Н. Орла; М.: Финуниверситет, 2013.
9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1978.
10. Сборник задач по высшей математике / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. Ч.1. М.: Наука, 1993.
11. Ильин В.А., ПознякЭ.Г. Основы математического анализа: в 2-х частях. Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
12. Калачев Н.В. Линейная алгебра. Ч. 1. Линейные и евклидовы пространства; под редакцией В.Б. Гисина и Е.Н. Орла; М.: Финуниверситет, 2013.
13. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989.
14. Клетеник Д.С. Задачи по аналитической геометрии. – М.: Физматлит, 1998.
15. Красс М. С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. М.: Дело, 2000.
16. Красс М. С. Математика в экономике. Базовый курс. Учебник для СПО. М.: Юрайт, 2016.

17. Липагина. Л. В. Математический анализ. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. под редакцией В.Б. Гисина и Е.Н. Орла; М.: Финуниверситет, 2013.
18. Логвенков С.А., Мышкис П.А., Самовол В.С. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для студентов социально-управленческих специальностей. – М.: МЦНМО, 2014.
19. Малыхин В.И Математика в экономике: Учебное пособие: М.: ИНФРА-М, 1999.
20. Орел О.Е. Математический анализ. Ч. 1. Введение в анализ; под редакцией В.Б. Гисина и Е.Н. Орла; М.: Финуниверситет, 2013.
21. Сборник задач по курсу «Математика в экономике». В 3-х ч. Ч.1. Линейная алгебра: учеб. пособие / под ред. В.А. Бабайцева и В.Б. Гисина. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2012.
22. Сборник задач по курсу «Математика в экономике». В 3-х ч. Ч.2. Математический анализ: учеб. пособие / под ред. В.А. Бабайцева и В.Б. Гисина. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2012.
23. Силаев Е.В., Тимошенко В.В. Практические занятия по геометрии (1 семестр). – М.: Прометей, 1989.
24. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник. Ч.1-2. М.: Финансы и статистика, Инфра-М, 2011.
25. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах). Т.1. М: Физматлит, 2008.
26. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2010.
27. Шипачев В.С. Основы высшей математики: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1998.
28. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1998.
29. Шипачев В.С., А.Н. Тихонов. Математика: учебник и практикум для СПО Учебное пособие для вузов. М.: М.: Юрайт, 2016.
30. П.В. Ягодовский. Математический анализ. Часть 4. Функции нескольких переменных. Учебное пособие для подготовки бакалавров / Под редакцией В.Б. Гисина и Е.Н. Орла. М.: Финуниверситет, 2013, 2009
31. Anthony M., Biggs N. Mathematics for Economics and Finance. Methods and Modelling. Cambridge: CUP, 1996.
32. Simon C.P., Blume Z. Mathematics for Economists. W.W. Norton and Company, 1994.