Математические заметки

Том 106 выпуск 2 август 2019

УДК 517.98

Эргодические свойства ручных динамических систем

А. В. Романов

Проблему $*$-слабой разложимости на эргодические компоненты топологической $\mathbb{N}_0$-динамической системы (Ω, φ), где φ – непрерывный эндоморфизм метрического компакта Ω, мы рассматриваем в терминах ассоциированных обволакивающих полугрупп. В ручном случае (полугруппа Эллиса $E(\Omega, \varphi)$ состоит из эндоморфизмов Ω первого класса Бэра) мы показываем, что при правильном выборе обобщённого секвенциального метода усреднения такое разложение существует. Обсуждается также связь статистических свойств (Ω, φ) с взаимной структурой минимальных множеств и эргодических мер.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: эргодические средние, ручная динамическая система, обволакивающая полугруппа.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12227

1. Введение

Объектом нашего внимания являются топологические $\mathbb{N}_0$-динамические системы, полукаскады (Ω, φ), порождаемые непрерывным эндоморфизмом φ метрического компакта Ω. Цель этой работы – единый взгляд на три аспекта теории таких систем:

1) $*$-слабая сходимость различных эргодических средних (усреднений вдоль орбит системы) для скалярных тест-функций $x \in X \doteq C(\Omega)$ или борелевских мер $\mu \in X^*$ – подход, восходящий (в случае средних Чезаро) к Крылову–Боголюбову [1] и Окстоби [2];
2) соотношения между минимальными множествами и эргодическими мерами;
3) разложимость динамической системы (Ω, φ) на неприводимые (эргодические) подсистемы в зависимости от выбора метода усреднения.

Основные результаты получены для класса ручных систем, введенных в рассмотрение (под другим названием) Кёлер [3] и подробно исследованных в работах [4]–[8]. Известно несколько эвивалентных определений ручных динамических систем, например, систему (Ω, φ) называют *ручной*, $(\Omega, \varphi) \in \mathscr{D}_{\mathrm{tm}}$, если ее полугруппа Эллиса состоит из эндоморфизмов Ω первого класса Бэра. Интерес к подобным объектам связан с относительно простой топологией их обволакивающих полугрупп на фоне достаточно сложной во многих случаях фазовой динамики. Ряд утверждений о сходимости обобщенных эргодических средних для $(\Omega, \varphi) \in \mathscr{D}_{\mathrm{tm}}$ установлен в [9], [10], причем в работе [10] рассматривается более общий случай действия на X произвольных аменабельных операторных полугрупп. Есть основания считать, что

© А. В. Романов, 2019

дихотомия ручной-неручной связана так или иначе с отсутствием или наличием хаотической фазовой динамики; во всяком случае любой неручной полукаскад на $[0,1]$ оказывается хаотичным по Ли–Йорке [3].

Мы обсуждаем следующие свойства $*$-слабо эргодических (см. п. 2.1) операторных сетей и последовательностей $\mathscr{V} \subset \mathscr{L}(X^*)$, отождествляя их с соответствующими методами усреднения:

a) сходимость *всех* сетей (последовательностей) $\mathscr{V}$; сходимость *каких-нибудь* эргодических последовательностей $\mathscr{V}$;

b) возможность статистического описания поведения орбит (Ω, φ) с помощью эргодических мер.

Свойства a) полукаскада (Ω, φ) рассматриваются во взаимосвязи с его динамическим характеристиками:

i) орбитальные подсистемы одноэргодичны;

ii) носители эргодических мер минимальны;

iii) минимальные подсистемы одноэргодичны.

В разделе 3 систематизированы и усилены соответствующие данной тематике результаты недавних работ [9]–[11]. В частности, установлено (теорема 3.3), что для $(\Omega, \varphi) \in \mathscr{D}_{\mathrm{tm}}$ каждая эргодическая последовательность $\mathscr{V}$ содержит сходящуюся подпоследовательность и, в частности, существует сходящаяся подпоследовательность средних Чезаро.

Главные результаты статьи представлены в разделе 4. Мы показываем (теорема 4.5), что для ручной топологической динамической системы (Ω, φ) существуют различные разложения на эргодические компоненты, зависящие от секвенциального метода усреднения, и описываем все такие разложения в терминах некоторой, связанной с (Ω, φ), полугруппы операторов $\mathscr{K}_c \subseteq \mathscr{L}(X^*)$. Разложимость $(\Omega, \varphi) \in \mathscr{D}_{\mathrm{tm}}$ на эргодические компоненты означает существование эргодической последовательности $\mathscr{V}$ такой, что асимптотические $\mathscr{V}$-распределения всех орбит определяются эргодическими мерами. Тем самым, для ручных полукаскадов реализуется свойство b).

В разделе 5 дан краткий обзор некоторых характерных примеров ручных и неручных $\mathbb{N}_0$-систем. В том числе приводится недавно полученный критерий [12] эффективного разделения ручной-неручной для аффинных полукаскадов на торах $\mathbb{T}^d$, $d \geqslant 1$.

2. Предварительные сведения

Итак, мы рассматриваем полукаскады (Ω, φ), где φ – непрерывный эндоморфизм метрического компакта Ω. При фиксированном Ω будем иногда отождествлять (Ω, φ) и φ, употребляя термины типа "минимальный эндоморфизм". Пусть $X = C(\Omega)$, $Ux = x \circ \varphi$ для $x \in X$ – оператор Купмана и $V = U^*$, $V \in \mathscr{L}(X^*)$. Имеем

$$\|U\|_{\mathscr{L}(X)} = \|V\|_{\mathscr{L}(X^*)} = 1.$$

Обозначаем через $\mathscr{P}(\Omega)$ выпуклое, компактное в w^*-топологии пространства X^* множество вероятностных борелевских мер на Ω, а через X_1 – подпространство ограниченных функций первого класса Бэра в X^{**}. Приведем необходимые сведения об эргодических средних, ассоциированных с (Ω, φ) обволакивающих полугруппах, а также о ручных динамических системах.

2.1. Эргодические средние. Слегка модифицируя классическое определение [13] для нашего случая циклической полугруппы операторов сдвига $\{V^n\}$, называем сеть $\{V_\alpha\} \subseteq \mathrm{co}\{V^n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ в $\mathscr{L}(X^*)$ *эргодической*, если

$$(\mathrm{Id} - V)V_\alpha \xrightarrow{\mathrm{W^*O}} 0: \qquad (x, (\mathrm{Id} - V)V_\alpha \mu) \to 0, \qquad x \in X, \quad \mu \in X^*. \tag{2.1}$$

Здесь $V_\alpha = U_\alpha^*$, $U_\alpha \in \mathscr{L}(X)$, и сеть $\{U_\alpha\} \subseteq \mathrm{co}\ \{U^n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ также именуем эргодической. Если $V_\alpha \xrightarrow{\mathrm{W^*O}} Q$, $Q \in \mathscr{L}(X^*)$, то $Q^2 = Q$. Благодаря двойственности

$$(Ux, \mu) = (x, V\mu), \qquad x \in X, \quad \mu \in X^*,$$

сходимость $V_\alpha \xrightarrow{\mathrm{W^*O}} Q$ в $\mathscr{L}(X^*)$ равносильна сходимости $U_\alpha x \xrightarrow{w^*} Q^* x$ в X^{**}, где $x \in X$ и $Q^* \in \mathscr{L}(X^{**})$. Для эргодических последовательностей $\{U_n\} \subset \mathscr{L}(X)$ такая сходимость эквивалентна поточечной сходимости функций $U_n x \to \overline{x} \in X_1$. Отметим, что свойство эргодичности наследуется при переходе к подсетям и подпоследовательностям. Говоря далее об эргодических средних, чаще будем иметь в виду операторные сети (последовательности) в $\mathscr{L}(X^*)$.

Всевозможные эргодические последовательности $\mathscr{V} = \{V_n\} \subset \mathscr{L}(X^*)$ можно получать на основе методов суммирования числовых последовательностей с бесконечной числовой матрицей $S = \{s_{n,k}\}$, удовлетворяющей следующим условиям:

(1) $s_{n,k} \geqslant 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k} = 1$, $n \geqslant 0$;

(2) строки S содержат конечное число $s_{n,k} > 0$;

(3) $\lim_{n\to\infty}(s_{n,0} + \sum_{k=1}^{\infty} |s_{n,k} - s_{n,k-1}|) = 0$.

Последовательность операторов $V_n = \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k} V^k$ оказывается эргодической, поскольку $\|(\mathrm{Id} - V)V_n\|_{\mathscr{L}(X^*)} \to 0$ при $n \to \infty$. Например, подходящим средним Рисса соответствуют веса

$$s_{n,k} = \frac{p_k}{p_0 + p_1 + \dots + p_n}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad s_{n,k} = 0, \qquad k > n,$$

где $p_n \geqslant p_{n+1} > 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$ ($p_n \equiv 1$ для средних Чезаро).

2.2. Обволакивающие полугруппы. Полугруппа Эллиса $E(\Omega, \varphi)$ полукаскада (Ω, φ) представляет собой [14] замыкание множества преобразований $\{\varphi^n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ в топологии прямого произведения Ω^Ω. Полугруппа Кёлер $\mathscr{K}(\Omega, \varphi)$ есть замыкание множества операторов

$$\mathscr{K}^0 = \{V^n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$$

в W*O-топологии пространства $\mathscr{L}(X^*)$ [3]. Наконец, полугруппа $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$ определяется [11] как W*O-замыкание выпуклой оболочки $\mathrm{co}\mathscr{K}^0$. Право-топологические полугруппы $E(\Omega, \varphi)$, $\mathscr{K}(\Omega, \varphi)$, $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$ компактны. Фактически $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$ – это обволакивающая полугруппа действия $\mathscr{P} \times W \xrightarrow{V} \mathscr{P}$ на $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\Omega)$ абелевой полугруппы полиномов $W = \mathrm{co}\{t^n,\, n \geqslant 0\}$ с обычным умножением.

Перечислим некоторые полезные свойства полугруппы $\mathscr{K}_{\mathrm{c}} = \mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$ (см. [11; раздел 1]). Непустое ядро (пересечение двусторонних идеалов) $\mathrm{Ker}\,\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ полугруппы $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ состоит в точности из проекторов с нормой единица $Q \in \mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ таких, что $VQ = Q$ или, эквивалентно,

$$QX^* = \mathrm{fix}(V) \doteq \{\mu \in X^* : V\mu = \mu\}.$$

Операторная сеть $V_\alpha \in \mathrm{co}\mathscr{K}^0$ такая, что $V_\alpha \xrightarrow{\mathrm{W^*O}} T \in \mathscr{K}_{\mathrm{c}}$, будет эргодической точно тогда, когда $T \in \operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$. Каждый элемент $Q \in \operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ есть предел некоторой операторной эргодической сети, т.е. для любого $\varphi \in C(\Omega, \Omega)$ существуют W*O-сходящиеся эргодические сети.

Замечание 2.1. Согласно [11; теорема 3.2] все эргодические сети (2.1) сходятся точно тогда, когда $\operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ состоит из единственного элемента, необходимо нуля полугруппы $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$. В статье [10] используется немного отличное от нашего (более традиционное и более широкое) определение эргодической сети, а именно, предполагается, что в (2.1) операторы $V_\alpha \in \overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{K}^0 = \mathscr{K}_{\mathrm{c}}$. Тем не менее [10; теорема 4.3], условие $\operatorname{card}\operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}} = 1$ влечет сходимость также и всех таких сетей.

2.3. Ручные динамические системы. На теоретико-функциональном языке ручные $\mathbb{N}_0$-системы можно определить так (см. [3]).

Определение 2.2. Полукаскад (Ω, φ) называем *ручным*, если для любого $x \in X$ и любой подпоследовательности $\{n(k)\} \subseteq \mathbb{N}_0$ имеем

$$\inf_a \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_{n(k)} \right\|_X = 0,$$

где $x_{n(k)} = x \circ \varphi^{n(k)}$, последовательности $a \in \ell^1$ финитны и $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = 1$.

По существу данное условие связано с восходящей к Розенталю [15] проблемой изоморфной вложимости ℓ^1 в пространства Банаха. Пусть Π_b и Π_1 – множества борелевских и первого класса Бэра эндоморфизмов Ω. Каждое из следующих свойств эквивалентно определению 2.2:

(a) $E(\Omega, \varphi)$ – компакт Фреше–Урысона;
(b) $\operatorname{card} E(\Omega, \varphi) \leqslant \mathfrak{c}$;
(c) $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$ – компакт Фреше–Урысона;
(d) $E(\Omega, \varphi) \subset \Pi_1$;
(e) $E(\Omega, \varphi) \subset \Pi_b$.

Свойства (c) и (e) как эквивалентные определения ручной динамической системы появились соответственно в [10; предложение 3.11] и в [9; теорема 3.4], остальные можно найти в обзоре [4] и ссылках там. Фактически в условиях (a) и (c) полугруппы $E(\Omega, \varphi)$ и $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$ секвенциально компактны. Согласно условию (a) динамическая система оказывается ручной, если ее полугруппа Эллиса метризуема. Компактные подсистемы и прямые произведения ручных систем также оказываются ручными [4]. Отметим два ярких свойства фазовой динамики *минимальных* ручных систем:

1) топологическая энтропия равна нулю [4; с. 2356];
2) система (Ω, φ) точечно дистальна, т.е. найдется точка $\omega_0 \in \Omega$ такая, что любая пара точек (ω, ω_0), $\omega \neq \omega_0$, не проксимальна [5; предложение 4.4].

3. Сходимость эргодических средних

Критерий $*$-слабой сходимости средних Чезаро

$$U_n = \frac{1}{n+1}(I + U + \dots + U^n), \qquad V_n = \frac{1}{n+1}(I + V + \dots + V^n)$$

был получен в [16; теорема 1] и обобщен на произвольные эргодические сети $\{U_\alpha\} \subset \mathscr{L}(X)$, $\{V_\alpha\} \subset \mathscr{L}(X^*)$ в [11; теорема 1.5]. Именно, справедлива

Теорема 3.1 (принцип разделения). *Если* $X_0 = \{x \in X : U_\alpha x \xrightarrow{w^*} \overline{x} \in X^{**}\}$, *то* $X_0 = X$ *точно тогда, когда предельные элементы* $\overline{x}$ *разделяют* $\mathrm{fix}(V)$.

Последнее означает, что для любой инвариантной меры $\mu \in \mathrm{fix}(V)$ найдутся непрерывные функции $x_1, x_2 \in X_0$ такие, что $(\overline{x}_1, \mu) \neq (\overline{x}_2, \mu)$. При этом X_0 – непустое замкнутое U-инвариантное линейное подпространство в X и

$$\overline{x} = Tx, \qquad T \in \mathscr{L}(X_0, X^{**}), \quad \|T\| = 1.$$

В случае эргодических последовательностей имеем $\overline{x} \in X_1$.

Для $\mathbb{N}_0$-динамической системы (Ω, φ) обозначаем

- $m \subseteq \Omega$ – минимальные множества;
- $\mu_e \in \mathscr{P}(\Omega)$ – эргодические меры;
- $\overline{o}(\omega)$ – замыкания орбит $o(\omega) = \{\varphi^n\omega,\ n \geqslant 0\}$, $\omega \in \Omega$.

Будем рассматривать следующие свойства динамики (Ω, φ) и операторных эргодических сетей $\mathscr{V} \subset \mathscr{L}(X^*)$:

- (single m in $\overline{o}$) – каждое $\overline{o}(\omega) \supseteq$ единственное m;
- (supp $\mu_\mathrm{e} = m$) – носители μ_e минимальны;
- (single μ_e on m) – минимальные подсистемы (m, φ) одноэргодичны;
- UE($\overline{o}$) – орбитальные подсистемы $(\overline{o}(\omega), \varphi)$ одноэргодичны;
- (AEN) – все сети $\mathscr{V}$ сходятся;
- (AES) – все последовательности $\mathscr{V}$ сходятся;
- (SES) – некоторая последовательность $\mathscr{V}$ сходится.

Выделим некоторые общие связи между описанными свойствами.

Лемма 3.2. *Для произвольного полукаскада* (Ω, φ) *справедливы следующие импликации*:

(i) (AEN) $\Rightarrow UE(\overline{o}) \Rightarrow$ (AES);

(ii) (SES) $\Rightarrow$ (single μ_e on m);

(iii) UE($\overline{o}$) $\Leftrightarrow$ (single m in $\overline{o}$) + (supp $\mu_\mathrm{e} = m$) + (single μ_e on m).

Доказательство. Импликация (AEN) $\Rightarrow$ UE($\overline{o}$) следует из [10; лемма 5.9] с учетом замечания 2.1. Импликация UE($\overline{o}$) $\Rightarrow$ (AES) установлена в [11; теорема 3.2]. Утверждение (ii) слегка обобщает [2; теорема 5.4]. Если существует сходящаяся эргодическая последовательность операторов $V_n = U_n^*$ и множество $m \subseteq \Omega$ минимально, то $(U_n x)(\omega) \to \overline{x}(\omega)$ для любых $x \in X$, $\omega \in m$, причем $\overline{x}(\varphi\omega) \equiv \overline{x}(\omega)$ на m. В силу плотности орбит $o(\omega) \subseteq m$ сужение $\overline{x}|_m$ либо постоянно, либо всюду разрывно. Последнее невозможно для функции первого класса Бэра и согласно, например, принципу разделения 3.1 динамическая система (m, φ) одноэргодична. Утверждение (iii) тривиально.

Как видим, если некоторое минимальное множество поддерживает более одной эргодической меры, то не существует сходящихся эргодических последовательностей (хотя всегда существуют сходящиеся эргодические сети). Такой эффект имеет место для некоторых минимальных аналитических диффеоморфизмов тора $\mathbb{T}^2$, обладающих несчетным множеством эргодических мер [17; следствие 12.6.4].

В ручном случае о сходимости эргодических средних можно сказать много больше.

Теорема 3.3. *Для ручной $\mathbb{N}_0$-системы (Ω, φ) справедливы следующие утверждения*:

(i) *каждая эргодическая операторная сеть $\{V_\alpha\} \subset \mathscr{L}(X^*)$ содержит сходящуюся эргодическую последовательность $V_{\alpha(n)}$*;

(ii) *каждая эргодическая операторная последовательность $\{V_n\} \subset \mathscr{L}(X^*)$ содержит сходящуюся эргодическую подпоследовательность*; *в частности*, *средние Чезаро содержат сходящуюся подпоследовательность*.

Доказательство. В силу компактности $\mathscr{K}_{\mathrm{c}} = \mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$ считаем без потери общности, что $V_\alpha \xrightarrow{\mathrm{W^*O}} Q$, где $Q \in \operatorname{Ker} \mathscr{K}_{\mathrm{c}}$. Для ручного полукаскада (Ω, φ) топологическое пространство $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ есть компакт Фреше–Урысона, а значит, сеть $\{V_\alpha\}$ содержит последовательность $V_{\alpha(n)} \xrightarrow{\mathrm{W^*O}} Q$ и эта последовательность эргодическая, так как $Q \in \operatorname{Ker} \mathscr{K}_{\mathrm{c}}$.

Утверждение (ii) следует из секвенциальной компактности $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ и из свойства сохранения эргодичности при переходе к подпоследовательностям.

Эргодическая последовательность $\{V_{\alpha(n)}\}$ в 3.3(i), вообще говоря, не есть подпоследовательность эргодической сети $\{V_\alpha\}$. Выясним теперь, как связаны между собой эргодические и динамические свойства ручных систем.

Теорема 3.4. *Для ручной $\mathbb{N}_0$-системы (Ω, φ) имеет место свойство* (SES). *Также справедливы эквивалентности*

$$\text{(AEN)} \iff \mathrm{UE}(\overline{o}) \iff \text{(AES)} \iff (\text{single } m \text{ in } \overline{o}).$$

Доказательство. Сходящиеся операторные эргодические последовательности для ручного полукаскада существуют по теореме 3.3. Предположим, что все такие последовательности сходятся и при этом найдутся два разных элемента $Q_1, Q_2 \in \operatorname{Ker} \mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$. Согласно 3.3 (i) найдутся эргодические последовательности

$$V_n^{(1)} \xrightarrow{\mathrm{W^*O}} Q_1, \qquad V_n^{(2)} \xrightarrow{\mathrm{W^*O}} Q_2.$$

Тогда смешанная последовательность $V_{2n-1} = V_n^{(1)}$, $V_{2n} = V_n^{(2)}$ оказывается эргодической, но расходящейся. Тем самым, свойство (AES) влечет соотношение

$$\operatorname{card} \operatorname{Ker} \mathscr{K}_{\mathrm{c}} = 1,$$

равносильное согласно [11; теорема 3.2] свойству (AEN), и по лемме 3.2(i) имеем (AEN) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{UE}(\overline{o})$ $\Leftrightarrow$ (AES) для ручных систем. Наконец, [9; теорема 4.6] обеспечивает импликацию (single m in $\overline{o}$) $\Rightarrow$ (AES) и остается заметить, что $\mathrm{UE}(\overline{o}) \Rightarrow$ (single m in $\overline{o}$).

Эквивалентность (AEN) $\Leftrightarrow$ (single m in $\overline{o}$) установлена независимо в [10; теорема 5.10]. Теорема 3.4, в частности, обеспечивает одноэргодичность минимальных ручных полукаскадов – факт, полученный для более широкого класса ручных систем еще в [7], [8]. Это утверждение усилено в [10; лемма 5.12]: единственность минимального множества $m \subseteq \Omega$ влечет одноэргодичность $(\Omega, \varphi) \in \mathscr{D}_{\mathrm{tm}}$. Полезно сформулировать в этой связи

Замечание 3.5. Носители эргодических мер ручных $\mathbb{N}_0$-систем либо минимальны, либо содержат более одного минимального множества.

С другой стороны, согласно [18; теорема 3.1], если произвольный полукаскад (Ω, φ) обладает единственным минимальным множеством и средние Чезаро $*$-слабо сходятся, то существут или одна эргодическая мера или несчетное число таких мер. При этом вторая возможность реализуема [18; раздел 4].

Замечание 3.6. Даже для ручных систем сходимость одной эргодической последовательности не влечет сходимость всех других, т.е. (SES) $\not\Rightarrow$ (AES). Именно, построен ручной подсдвиг Бернулли, для которого сходятся средние Чезаро, но свойство (single m in $\overline{o}$) не выполнено [10; пример 5.14]. Согласно теореме 3.4 для этого полукаскада не выполнено и условие (AES).

4. Асимптотическое распределение орбит

Мы перенесем здесь некоторые конструкции [1], [2], связанные с поточечной сходимостью на Ω средних Чезаро $U_n x$ для непрерывных тест-функций $x \in X = C(\Omega)$, на произвольные эргодические последовательности. При этом вместо индивидуальной эргодической теоремы (не справедливой для общих методов усреднения) будем использовать априорную информацию о поточечной сходимости тех или иных обобщенных эргодических средних. Наша главная задача – установить возможность разложения ручной динамической системы на неприводимые (эргодические) компоненты. Обозначаем через $\mathscr{P}_{\mathrm{in}}(\Omega)$ и $\mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$ – подмножества φ-инвариантных и φ-эргодических мер в $\mathscr{P}(\Omega)$, а через X_1 – совокупность ограниченных скалярных функций первого класса Бэра на Ω. Множество $\Theta \subseteq \Omega$ би-инвариантно, если $\varphi^{-1}\Theta = \Theta$. Пусть еще $D(\Omega)$ – множество мер Дирака δ_ω на Ω и

$$\mathscr{K}_{\mathrm{c}} = \mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi) \subseteq \mathscr{L}(X^*)$$

– полугруппа операторов, определенная в п. 2.2.

Предполагаем существование сходящейся эргодической операторной последовательности

$$\mathscr{V} = \{V_n\} \subset \mathscr{L}(X^*), \qquad V_n \xrightarrow{\mathrm{W^*O}} Q \in \operatorname{Ker} \mathscr{K}_{\mathrm{c}},$$

и записываем этот факт как $\mathscr{V} \to Q$. Тогда $(U_n x)(\omega) \to \overline{x}(\omega)$ для двойственной эргодической последовательности $\{U_n\} \subset \mathscr{L}(X)$, $U_n^* = V_n$, и всех $\omega \in \Omega$, $x \in X$, причем функция $\overline{x} \in X_1$ инвариантна ($\overline{x} \circ \varphi = \overline{x}$) и каждой точке $\omega \in \Omega$ соответствует мера

$$\mu_\omega = Q\delta_\omega \in \mathscr{P}_{\mathrm{in}}(\Omega), \qquad \overline{x}(\omega) = (x, \mu_\omega),$$

определяющая асимптотическое $\mathscr{V}$-распределение орбиты $o(\omega)$. Фактически это означает, что $V_n \delta_\omega \xrightarrow{w^*} \mu_\omega$. Линейный проектор Q в X^* индуцирует отображение первого класса Бэра $\Psi_{\mathscr{V}} \colon \Omega \to \mathscr{P}_{\mathrm{in}}(\Omega)$. Обозначение $\Psi_{\mathscr{V}}$ удобно, хотя это отображение вполне определяется предельным элементом Q последовательности $\mathscr{V}$.

Лемма 4.1. *Если эргодическая последовательность* $\mathscr{V} = \{V_n\}$ *сходится, то* $\Psi_{\mathscr{V}}\Omega \supseteq \mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$.

Другими словами, для любой сходящейся эргодической последовательности $\mathscr{V}$ каждая эргодическая мера определяет асимптотическое $\mathscr{V}$-распределение некоторой орбиты.

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$, $x \in X$ и $c(x) = (x, \mu)$. В условиях леммы

$$(U_n x, \mu) = (x, V_n \mu) = (x, \mu),$$

двойственная последовательность $(U_n x)(\omega)$ сходится к $\overline{x}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, причем $\overline{x} = \overline{x} \circ \varphi$ и по теореме Лебега $(\overline{x}, \mu) = c(x)$. Доводы типа [19; предложение 7.15, (i) $\Rightarrow$ (iv)] показывают, что в силу эргодичности μ ограниченная инвариантная функция $\overline{x} \in X_1$ тождественно равна постоянной $c(x)$ на некотором борелевском множестве $\Theta_{x,\mu} \subseteq \Omega$ полной μ-меры. Следовательно, для точек $\omega \in \Theta_{x,\mu}$ имеем

$$(x, V_n \delta_\omega) = (U_n x, \delta_\omega) \to (\overline{x}, \delta_\omega) = (\overline{x}, \mu) = (x, \mu). \tag{4.1}$$

Выбирая теперь x из произвольного счетного всюду плотного в X множества Y, получаем соотношения (4.1) для $x \in Y$ и $\omega \in \Theta_\mu$, где $\Theta_\mu = \bigcap_{x \in Y} \Theta_{x,\mu}$ и $\mu(\Theta_\mu) = 1$. Поскольку $\|V_n\| \leqslant 1$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, то же верно и для любых $x \in X$, $\omega \in \Theta_\mu$. Тем самым,

$$V_n \delta_\omega \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \mu \qquad \text{для} \quad \omega \in \Theta_\mu.$$

Для сходящейся эргодической последовательности $\mathscr{V} = \{V_n\}$ полагаем

$$\Omega_{\mathscr{V}} = \{\omega \in \Omega : \mu_\omega \in \mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)\},$$

где $V_n \delta_\omega \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \mu_\omega$; тогда для эргодических мер μ подмножества $\Omega_{\mu,\mathscr{V}} = \Psi_{\mathscr{V}}^{-1} \mu$ образуют разбиения $\Omega_{\mathscr{V}}$ на *$\mathscr{V}$-квазиэргодические* компоненты. Множества $\Omega_{\mathscr{V}}$, $\Omega_{\mu,\mathscr{V}}$ би-инвариантны. Эти множества борелевские, что следует из чисто топологических рассуждений [2; с. 78–79], никак не связанных со спецификой усреднения по Чезаро. Поскольку $\Omega_{\mu,\mathscr{V}} \supseteq \Theta_\mu$, где Θ_μ – множество из доказательства леммы 4.1, получаем

Следствие 4.2. *Если эргодическая последовательность $\mathscr{V}$ сходится, то каждой эргодической мере μ соответствует борелевское $\mathscr{V}$-квазиэргодическое множество $\Omega_{\mu,\mathscr{V}}$ полной μ-меры.*

Переходим теперь к обсуждению главного сюжета данной статьи.

Определение 4.3. Скажем, что $\mathbb{N}_0$-система (Ω, φ) *эргодически разложима*, если найдется сходящаяся операторная эргодическая последовательность $\mathscr{V}$ такая, что $\Omega_{\mathscr{V}} = \Omega$ или, эквивалентно, $\Psi_{\mathscr{V}} \Omega = \mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$.

Фактически при этом *топологическая* динамическая система (Ω, φ) допускает разложение на эргодические подсистемы $(\Omega_{\mu,\mathscr{V}}, \varphi)$, $\mu \in \mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$. В данной ситуации $\mathscr{V} \to Q \in \operatorname{Ker} \mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ и любой непрерывной функции $x \in X$ соответствует функция $\overline{x} = Q^* x \in X_1$, принимающая постояное значение $(\overline{x}, \mu) = (x, \mu)$ на каждом квазиэргодическом множестве $\Omega_{\mu,\mathscr{V}}$. Таким образом, для каждой меры $\mu \in \mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$ *метрическая* динамическая система $(\Omega_{\mu,\mathscr{V}}, \varphi)$ эргодична относительно μ в стандартном смысле [19; определение 6.18]. В интерпретации [17; раздел 4.1] эргодическая разложимость полукаскада (Ω, φ) означает, что асимптотические $\mathscr{V}$-распределения всех орбит определяются эргодическими мерами. Так как индуцируещее разложение (Ω, φ) отображение $\Psi_{\mathscr{V}} \colon \Omega \to \mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$ принадлежит первому классу Бэра, то точки его непрерывности образуют в Ω плотное множество типа G_δ.

Оказывается, эргодическая разложимость $\mathbb{N}_0$-динамической системы связана с существованием операторных эргодических последовательностей, сходящихся к крайним точкам ядра полугруппы $\mathscr{K}_{\mathrm{c}} = \mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$.

Предложение 4.4. *Если эргодическая последовательность* $\mathscr{V}$ *сходится к* $Q \in \operatorname{ex}\operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$, *то динамическая система* (Ω,φ) *эргодически разложима.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{V}=\{V_n\}$. Согласно [9; предложение 2.10] в этой ситуации $Q\colon D(\Omega)\to\mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$ и, поскольку $V_n \xrightarrow{\mathrm{W}^*\mathrm{O}} Q$, то $V_n\delta_\omega \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \mu\in\mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$ для каждой точки $\omega\in\Omega$. Тем самым, $\Omega_{\mathscr{V}}=\Omega$ и система (Ω,φ) эргодически разложима.

Теорема 4.5 (основная). *Ручные* $\mathbb{N}_0$*-системы* (Ω,φ) *эргодически разложимы.*

Доказательство. Произвольный проектор $Q\in\operatorname{ex}\operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ является $\mathrm{W}^*\mathrm{O}$-пределом некоторой эргодической сети $\{V_\alpha\}\subset\mathscr{L}(X^*)$ и по теореме 3.3(i) найдется эргодическая последовательность операторов $V_{\alpha(n)} \xrightarrow{\mathrm{W}^*\mathrm{O}} Q$. Искомое утверждение с $\mathscr{V}=\{V_{\alpha(n)}\}$ следует из предложения 4.4.

Опишем теперь структуру всевозможных разложений ручных систем на эргодические компоненты.

Лемма 4.6. *Для ручной* $\mathbb{N}_0$*-системы* (Ω,φ) *операторы* $T\in\mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega,\varphi)$ *определяются своими значениями на мерах Дирака.*

Доказательство. Так как в данной ситуации полугруппа $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ есть компакт Фреше–Урысона, то для любого $T\in\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ найдется последовательность

$$\{V_n\}\subseteq \operatorname{co}\{V^n,\, n\geqslant 0\},$$

сходящаяся к T в $\mathrm{W}^*\mathrm{O}$-топологии пространства $\mathscr{L}(X^*)$. Если $U_n^*=V_n$, $x\in X$ и $\omega\in\Omega$, то $(x,V_n\delta_\omega)=(U_nx)(\omega)$ и

$$(U_nx)(\omega)\to\overline{x}(\omega),\qquad \text{где}\quad \overline{x}(\omega)=(x,T\delta_\omega).$$

Здесь $\overline{x}\in X_1$ и по теореме Лебега

$$(x,V_n\mu)=(U_nx,\mu)\to(\overline{x},\mu)=(x,T\mu)$$

для каждой меры $\mu\in\mathscr{P}(\Omega)$. В то же время $\overline{x}(\omega)=(x,T\delta_\omega)$ для $\omega\in\Omega$, следовательно, оператор T полностью определяется своими значениями на $D(\Omega)$.

Лемма 4.6 усиливает подобное утверждение [9; теорема 3.5, (a1) $\Rightarrow$ (a4)], в котором вместо условия $(\Omega,\varphi)\in\mathscr{D}_{\mathrm{tm}}$ требуется метризуемость полугруппы $E(\Omega,\varphi)$.

Следствие 4.7. *Если* $(\Omega,\varphi)\in\mathscr{D}_{\mathrm{tm}}$ *и* $Q_1|_{D(\Omega)}=Q_2|_{D(\Omega)}$ *для* $Q_1,Q_2\in\operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$, *то* $Q_1=Q_2$.

Отсюда без труда находим, что в ручном случае условие $Q\in\operatorname{ex}\operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$ не только достаточно, но и необходимо для справедливости соотношения $Q\colon D(\Omega)\to\mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega)$, $Q\in\operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$. Для $(\Omega,\varphi)\in\mathscr{D}_{\mathrm{tm}}$ естественно определять квазиэргодические множества в привязке к элементам $Q\in\operatorname{ex}\operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$, а не к сходящимся эргодическим последовательностям $\mathscr{V}$. Именно, полагаем

$$\Omega_{\mu,Q}=\{\omega\in\Omega: Q\delta_\omega=\mu\},\qquad \mu\in\mathscr{P}_{\mathrm{e}}(\Omega).$$

Как видим, борелевские би-инвариантные квазиэргодические множества полной μ-меры $\Omega_{\mu,Q}$ образуют разбиение Φ_Q фазового пространства Ω. Совокупность Λ

всех эргодических последовательностей $\mathscr{V} \to Q$ разбивается на непересекающиеся классы Λ_Q, соответствующие различным Q. Элементы $\mathscr{V} \in \Lambda_Q$ осуществляют связь динамики полукаскада (Ω, φ) с эргодическими мерами, а именно, асимптотическое $\mathscr{V}$-распределение каждой орбиты $o(\omega)$ определяется мерой $\mu = Q\delta_\omega$. При этом существует взаимно-однозначное (в силу следствия 4.7) соответствие между проекторами $Q \in \operatorname{ex}\operatorname{Ker}\mathscr{K}_{\mathrm{c}}$, разбиениями Φ_Q фазового пространства Ω на квазиэргодические множества и разбиениями Λ_Q множества Λ сходящихся к крайним точкам ядра полугруппы $\mathscr{K}_{\mathrm{c}}(\Omega, \varphi)$ эргодических операторных последовательностей.

5. Дополнение

Рассмотрим здесь ряд характерных примеров ручных и неручных $\mathbb{N}_0$-динамических систем. Полагаем $I = [0, 1]$.

Пример 1. Согласно [20; предложение 10.5] и [4; раздел 9] любой полукаскад, порожденный гомеоморфизмом I или $\mathbb{S}^1$, обладает метризуемой полугруппой Эллиса, а значит, оказывается ручным.

Пример 2. Левый сдвиг Бернулли на множестве $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ последовательностей $\omega_0, \omega_1, \dots$ со стандартной метрикой

$$\rho(\omega, \nu) = (1 + \min\{k : \omega_k \neq \nu_k\})^{-1}$$

порождает неручную $\mathbb{N}_0$-систему (Ω, φ), допускающую однако ручные подсистемы (Θ, φ). Вот их изящное описание: каждое бесконечное множество $L \subseteq \mathbb{N}_0$ содержит бесконечное подмножество $K \subseteq L$ такое, что проекция $\pi_K(\Theta)$ есть счетное подмножество $\{0, 1\}^K$ [6; теорема 4.7].

Пример 3. Для полукаскада (I, φ) из примера [21; с. 147–149] множество периодических точки не замкнуто, причем любая орбита $o(\omega)$, $\omega \in I$, либо финально периодична ($\varphi^k\omega = \varphi^{k+p}\omega$ для некоторых $k \geqslant 0$, $p \geqslant 1$), либо ее предельные точки заполняют классическое канторово множество. Данный полукаскад оказывается ручным [3; пример 5.8(c)].

Пример 4. С другой стороны, любой полукаскад (I, φ), допускающий периодические точки с периодом отличным от степени 2, не будет ручным [3; пример 5.8(e)].

Пример 5. Легкая модификация рассуждений [4; с. 2354] показывает, что проективное действие произвольного обратимого оператора $T \in GL(n, \mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, индуцирует ручной полукаскад на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$.

Примеры 3, 5 показывают, что ручные системы могут демонстрировать нетривиальную фазовую динамику.

Весьма простое и конструктивное равносильное определение ручной динамики сформулировано в [12]: *полукаскад* (Ω, φ) *ручной, если всякая последовательность итераций* $\varphi^{n(k)}$, $\{n(k)\} \subseteq \mathbb{N}_0$, *содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность*. На этой основе в [12] получен критерий, позволяющий различать ручные и неручные аффинные эндоморфизмы тора $\varphi\colon \omega \to A\omega + b$, $\omega \in \mathbb{T}^d$, $d \geqslant 1$, с целочисленной матрицей A и произвольным сдвигом $b \in \mathbb{T}^d$. Если $\det A = \pm 1$, то φ – автоморфизм.

Теорема 5.1 (Лебедев [12]). *Полукаскад* $(\mathbb{T}^d,\varphi)$ *ручной тогда и только тогда, когда* $A^k=A^l$ *при некоторых* $k,l\in\mathbb{N}_0$, $k\ne l$.

При этом собственные числа $\lambda(A)$ либо нули, либо корни из единицы и

$$\varphi^k=\varphi^l+b_1,$$

где b_1 – сдвиг на $\mathbb{T}^d$. Если $\det A=\pm1$, то условие теоремы превращается в $A^k=\mathrm{Id}$. В частности, автоморфизм $\varphi\colon(\omega_1,\omega_2)\to(\omega_1+\omega_2,\omega_2)$ тора $\mathbb{T}^2$ неручной.

Автор благодарен В. В. Лебедеву, Х. Крейдлеру и М. Мегрелишвили за идеи, полезные предложения и стимулирующие дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] N. Kryloff, N. Bogoliouboff, "La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire", *Ann. of Math.* (2), **38**:1 (1937), 65–113.

[2] Д. Окстоби, "Эргодические множества", *УМН*, **8**:3 (55) (1953), 75–97.

[3] A. Köhler, "Enveloping semigroups for flows", *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **95**:2 (1995), 179–191.

[4] E. Glasner, "Enveloping semigroups in topological dynamics", *Topology Appl.*, **154**:11 (2007), 2344–2363.

[5] E. Glasner, "The structure of tame minimal dynamical systems", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **27**:6 (2007), 1819–1837.

[6] E. Glasner, M. Megrelishvili, "More on tame dynamical systems", *Ergodic Theory and Dynamical Systems in Their Interactions with Arithmetics and Combinatorics*, Lecture Notes in Math., **2213**, Springer, Cham, 2018, 351–392.

[7] W. Huang, "Tame systems and scrambled pairs under an abelian group action", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26**:5 (2006), 1549–1567.

[8] D. Kerr, H. Li, "Independence in topological and C^*-dynamics", *Math. Ann.*, **338**:4 (2007), 869–926.

[9] A. V. Romanov, "Ergodic properties of discrete dynamical systems and enveloping semigroups", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **36**:1 (2016), 198–214.

[10] H. Kreidler, "Compact operator semigroups applied to dynamical systems", *Semigroup Forum*, **97**:3 (2018), 523–547.

[11] A. V. Romanov, "О слабой* сходимости операторных средних", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:6 (2011), 79–98.

[12] V. Lebedev, *Tame Semicascades and Cascades Generated by Affine Self-Mappings of the d-Torus*, 2018, arXiv: 1806.06386.

[13] W. F. Eberlein, "Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67**:1 (1949), 217–240.

[14] R. Ellis, *Lectures on Topological Dynamics*, W. A. Benjamin, New York, 1969.

[15] H. P. Rosenthal, "A characterization of Banach spaces containing ℓ^1", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **71**:6 (1974), 2411–2413.

[16] A. Iwanik, "On pointwise convergence of Cesáro means and separation properties for Markov operators on $C(X)$", *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.*, **29**:9-10 (1981), 515–520.

[17] А. Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

[18] Y. Katznelson, B. Weiss, "When all points are recurrent/generic", *Ergodic Theory and Dynamical Systems I*, Progr. Math., **10**, Birkhäuser, Boston, MA, 1981, 195–210.

[19] T. Eisner, B. Farkas, M. Haase, R. Nagel, *Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory*, Grad. Texts in Math., **272**, Springer, Cham, 2015.

[20] E. Glasner, M. Megrelishvili, “Hereditarily non-sensitive dynamical systems and linear representations”, *Colloq. Math.*, **104**:2 (2006), 223–283.

[21] L. S. Block, W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Lecture Notes in Math., **1513**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

А. В. Романов
Московский институт электроники и математики
им. А. Н. Тихонова – Национальный
исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: av.romanov@hse.ru

Поступило
14.10.2018
Принято к публикации
16.01.2019