

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А. А. ДОРОДНИЦЫНА ФИЦ ИУ РАН
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ РАН
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
РОССИЙСКОЕ ОБЩЕСТВО ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИИ
РОССИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЩЕСТВО ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

**IX Московская международная
конференция по исследованию операций
(ORM2018)**

Москва, 22–27 октября 2018

ТРУДЫ

в двух томах

Том II

**IX Moscow International Conference
on Operations Research
(ORM2018)**

Moscow, October 22–27 2018

PROCEEDINGS

In two volumes

Volume II



МОСКВА – 2018

*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 18-01-20080*

Составители и редакторы:

В. В. Шевченко, А. В. Вахранев

Ответственный редактор:

Ф. И. Ерешко, д-р техн. наук

Рецензенты:

Ю. А. Флёров, А. А. Васин

IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2018). Москва, 22–27 октября 2018 г. Труды. В двух томах. / Отв. ред. Ф. И. Ерешко – Москва : МАКС Пресс, 2018.

ISBN 978-5-317-05923-1

Том II. – 580 с.

ISBN 978-5-317-05925-5

В сборнике представлена вторая часть трудов IX Московской международной конференции по исследованию операций (ORM 2018 – Гермейер 100), посвященной столетию со дня рождения выдающегося советского ученого профессора Юрия Борисовича Гермейера, внесшего фундаментальный вклад в разработку математических основ теории принятия решений и сыгравшего основополагающую роль в становлении отечественной школы исследования операций и теории игр. Содержание сборника составляют доклады, отражающие теоретических исследования и практические приложения принятия решений в условиях неопределённости, развивающие достижения школы Гермейера. В докладах обсуждаются математические вопросы исследования операций в различных областях деятельности, а также численные методы исследования операций.

Ключевые слова: исследование операций, оперирующая сторона, цели, критерии эффективности, информированность, стратегия, неопределённые факторы, математические модели, оптимизационные методы, теория игр, многокритериальная оптимизация, иерархические игры, теория активных систем, исследование операций в экономике, исследование операций в военном деле, исследование операций в банковском деле и на финансовых рынках, исследование операций в страховании и риск-менеджменте, исследование операций в биологии и медицине, исследование операций в физике и экологии, автоматизированное проектирование, теоретико-игровые модели, анализ политических процессов и коррупции, рынки и аукционы, предсказательное моделирование транспортных потоков, информационные системы

УДК 519.8

ББК 22.18

IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018). Moscow, October 22–27, 2018. Proceedings. In two volumes. / Editor-in-chief F. Ereshko. – Moscow : MAKS Press, 2018.

ISBN 978-5-317-05923-1

Volume II. – 580 p.

ISBN 978-5-317-05925-5

This volume comprises the proceedings of the IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2018 – Germeyer100) in the scope of fundamental research and applications of decision-making theory under uncertainty, operations research in multiple areas as well as numerical methods of operations research. The conference is devoted to the centenary of the outstanding Soviet scientist, professor Yuri Germeyer who contributed greatly to the development of mathematical foundations of the decision making theory and played a key role in the formation of the domestic school of operations research and the game theory. The reports demonstrate a further and profound development of the Germeyer scientific school.

Keywords: operations research, the operating party, the purposes, criteria of efficiency, information, knowledge, strategy, uncertain factors, mathematical models, optimization methods, game theory, multicriteria optimization, hierarchical games and the theory of active systems, operations research in economy, operations research in military science, operations research in banking and in the financial markets, operations research in insurance and risk management, operations research in biology and medicine, operations research in physics and ecology, the automated design in industry, game-theoretic models, the analysis of political processes and corruption, the markets and auctions, predictive modeling of traffic flows, information systems. .

**IX Московская международная конференция
по исследованию операций (ORM2018)
22-27 октября 2018**

В сборнике представлена вторая часть трудов IX Московской международной конференции по исследованию операций, посвященной памяти выдающегося российского ученого профессора Ю.Б. Гермейера. Конференция проводится Вычислительным центром им. А.А.Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), факультетом Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, Московским физико-техническим институтом (МФТИ), Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Российским научным обществом исследования операций (РНОИО), Российским обществом исследования операций (РосоИО).

Сопредседатели Оргкомитета конференции:

Ю.А. Флёров (ФИЦ ИУ РАН) и А.А. Васин (МГУ)

Председатель Программного комитета конференции:

И.Г. Поспелов

Программный комитет:

Ф.Т. Алескеров, В.Н. Бурков, А.А. Васин, Г.-В. Вебер, В.А. Горелик, В.А. Гурвич, Ю.Г. Евтушенко, А.Ф. Измайлов, В.В. Мазалов, Н.М. Новикова, Ю.Н. Павловский, Г.И. Савин, И.А. Соколов, А. Фишер, А.А. Шананин, М. Ячимович.

Оргкомитет:

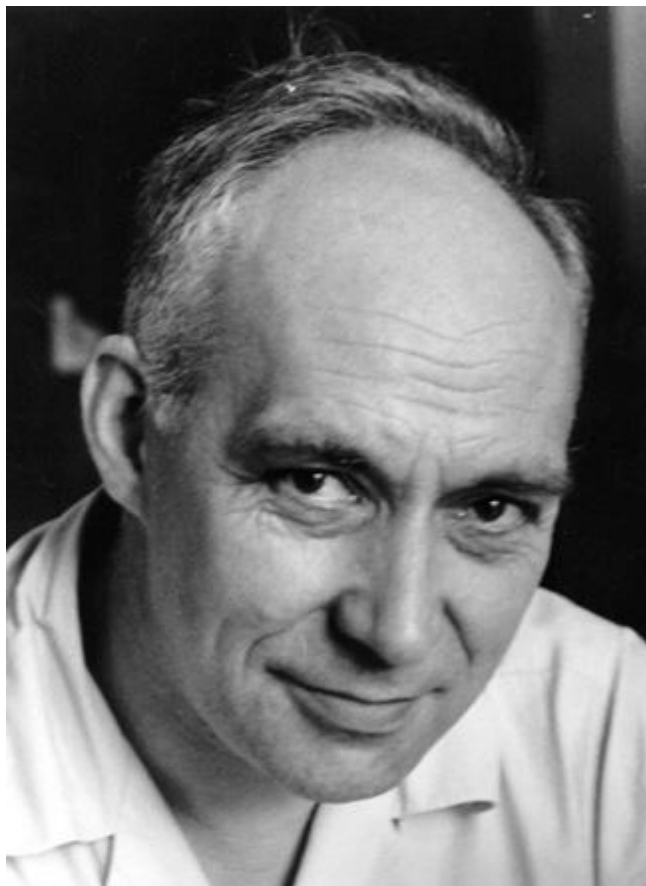
Ф.И. Ерешко (заместитель председателя), Ф.Т. Алескеров, Л.Г. Афанасьева, А.А. Белолипецкий, Н.В. Белотелов, В.Н. Бурков, Н.К. Бурова Е.В. Булинская, А.В. Вахранев, А.В. Гасников, Д.Ю. Голембиовский, В.А. Горелик, М.А. Горелов, Д.В. Денисов, А.Г. Дивцова, И.А. Зонн, А.Ф. Измайлов, Ф.В. Костюк, Н.С. Кукушкин, А.В. Лотов, Ю.Е. Малашенко, И.С. Меньшиков, Е.И. Моисеев, В.В. Морозов, Е.З. Мохонько, Н.М. Новикова, В.В. Подиновский, И.Г. Поспелов, И.И. Поспелова, И.А. Соколов, В.В. Шевченко, Е.Б. Яровая.

Учёный секретарь: В.В. Шевченко

Секретари конференции: Ю.В. Гусева, Э.В. Мешина

Поддержано РФФИ (проект 18-01-20080)

Московская школа Исследования операций профессора Юрия Борисовича Гермейера



18 июля 2018 года исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося ученого, блестящего педагога, прекрасного организатора науки и замечательного человека Юрия Борисовича Гермейера. Он открыл новые направления в отечественной науке, основал большую научную школу теории исследования операций, воспитал плеяду крупных ученых, создал отдел Исследования операций в Вычислительном центре Академии наук и одноименную кафедру в Московском университете.

Юрий Борисович Гермейер родился в городе Аткарске Саратовской области в семье военного врача и медсестры. Его отец умер в том же 1918 году от тифа, и мать одна воспитывала детей. В 1934 году Юра пошел в школьный математический кружок И.М. Гельфанда в Математическом институте АН СССР. Весной 1935 года он стал лауреатом первой

Всесоюзной математической олимпиады и поступил на мехмат МГУ.

Юрий Борисович специализировался по кафедре теории функций и функционального анализа его научного руководителя профессора Д.Е. Меньшова. Во время учебы в МГУ Юрий Борисович делил одну комнату в общежитии на Стромынке с Н.Н. Моисеевым, где зародилась дружба этих двух ярких личностей. Там же познакомился с Елизаветой Тоцкой, своей будущей женой, с которой прожил всю жизнь и воспитал сына и дочь. Ю.Б. Гермейер окончил МГУ, получив диплом с отличием 3 июля 1941 года, и был направлен на завод 490 Наркомата авиационной промышленности в Сталинград.

С этого момента четверть века его жизнь была неразрывно связана с разработкой новых типов самолетов и их вооружения. Ю.Б. Гермейер проявил себя как высококвалифицированный математик и вместе с тем хороший практик, умевший творчески применять свои знания в прикладных исследованиях. После перевода в Москву в НИИ-2 он входил в группу главного конструктора Г.Я. Дилона, где занимался проблемами эффективности авиационных торпед, проводил фундаментальные научные исследования по разработке универсального метода оценки эффективности воздушной стрельбы и схем вооружения боевых самолетов. Ю.Б. Гермейер руководил большим коллективом ученых, возглавлял направления работы в области эффективности и надежности образцов и систем авиационной техники, являлся непосредственным участником создания новой техники и исследований по выбору их характеристик. За эту работу он награжден орденом «Трудового Красного Знамени».

В 1966 году Ю.Б. Гермейер принимает предложение А.А. Дородницына и Н.Н. Моисеева о переходе в ВЦ АН СССР, где 1-го марта 1966 года создается сектор теории операций, а Ученый совет единогласно избирает Ю.Б. Гермейера его заведующим. В том же 1966 году он организует научный семинар «Теория игр»,

который уже через два года расширяет свою тематику и начинает функционировать как семинар по исследованию операций. С докладами на нем выступают многие известные ученые. Семинар быстро приобретает огромную популярность, а число участников порой переваливает за сотню.

Одновременно Юрий Борисович начинает заниматься преподавательской работой и весной 1966 года приходит на свой родной мехмат МГУ на кафедру Вычислительной математики. В 1970 году на базе этой кафедры академиком А.Н. Тихоновым создается новый факультет МГУ – Вычислительной математики и кибернетики, – где Ю.Б. Гермейер организует и возглавляет кафедру исследования операций.

Область научных интересов Юрия Борисовича сосредоточивается на решении оптимизационных и игровых задач и формировании общей методологии исследования операций. Им решены некоторые конкретные задачи теории надежности, дано новое простое и общее доказательство сходимости метода штрафных функций для экстремальных и максиминных задач и вывода на его основе условий оптимальности. Предложен и обоснован способ сведения задачи нахождения максимина непрерывной функции, заданной на замкнутых ограниченных множествах евклидова пространства, к задаче математического программирования, что является значительным обобщением классического метода сведения решения матричных игр в смешанных стратегиях к линейному программированию, обоснован новый метод отыскания максимина, названный методом невязок, установлен новый вид необходимых условий максимина для общего случая.

Большой вклад Ю.Б. Гермейер внес в теорию многокритериальной оптимизации. Им проанализированы методы свертывания многих критериев в один и установлена полнота элементарных способов свертывания, предложен минимаксный метод свертки критериев и доказана его эквивалентность паретооптимальности (теорема Гермейера), построена аксиоматически обоснованная арбитражная схема Гермейера. Ю.Б. Гермейером установлен принцип уравнивания для ряда максиминных задач распределения ресурсов, поставлена и решена задача о выборе момента переключения элементов для повышения надежности, показана эффективность смешанных стратегий переключения, решена задача об оптимальном методе линейной фильтрации сигналов с неопределенными аддитивными помехами.

В основополагающих работах Ю.Б. Гермейера были сформулированы принципы моделирования процессов принятия решений в управляемых социально-экономических системах. В теории неантагонистических игр, в частности, иерархических игр Гермейера и игр с иерархическим вектором интересов Гермейера-Вателя заложены основы теоретико-игрового моделирования функционирования иерархических систем.

Юрий Борисович был не только крупным ученым, но и разносторонним человеком, чрезвычайно интеллигентным, порядочным, искренним, отзывчивым, доброжелательным, радеющим за своих учеников.

Дело профессора Юрия Борисовича Гермейера живет в работах его благодарных учеников и созданных ими школ.

Гермейеровская школа исследования операций продолжает развиваться, ярким свидетельством чего является настоящая конференция и Труды, которые Вы держите в руках.

Ф.В. Костюк, В.В. Шевченко

СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

| | |
|--|-----|
| 1. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ТЕОРИЯ АКТИВНЫХ СИСТЕМ | 7 |
| 2. ДИСКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ | 55 |
| 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ | 99 |
| 4. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ | 129 |
| 5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ | 153 |
| 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ | 158 |
| 7. РЫНКИ И АУКЦИОНЫ: АНАЛИЗ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ | 243 |
| 8. АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ | 265 |
| 9. ИО В БАНКОВСКОМ ДЕЛЕ И НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ | 282 |
| 10. ИО В СТРАХОВАНИИ И РИСК МЕНЕДЖМЕНТЕ | 340 |
| 11. ИО В БИОЛОГИИ, МЕДИЦИНЕ, ФИЗИКЕ И ЭКОЛОГИИ | 350 |
| 12. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ | 398 |
| 13. АНАЛИЗ ПОЛИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И КОРРУПЦИИ | 443 |
| 14. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ | 486 |
| 15. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ | 514 |
| 16. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ВОЕННОМ ДЕЛЕ | 527 |

СЕКЦИЯ № 1

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ТЕОРИЯ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| Акинфиев В.К.. Динамическая задача расширения производства на конкурентных рынках | 7 |
| Белявский Г.И., Данилова Н.В., Угольницкий Г.А. Методы случайного поиска для решения игры Гермейера распределения ресурсов | 10 |
| Воронин А.А., Исаева И.И. Модели управления эколого-экономическими проектами в активных системах | 14 |
| Горелов М.А., Ерешко Ф.И. Модели с неопределённостью в проблеме децентрализации | 17 |
| Dresvyanskaya N.V. A behavior model of the Generating companies in the electricity market | 22 |
| Еналеев А.К. Модель оптимального согласованного механизма в цепочке активных элементов | 23 |
| Жемчугов Н.А., Панкратова Я.Б., Петросян Л.А. Одна древовидная повторяющаяся иерархическая игра | 28 |
| Искаков М.Б. Равновесие в безопасных стратегиях и игра с неопределённым инсайдером | 30 |
| Кашенков А.Р. Моделирование противозатратных механизмов управления в условиях вероятностной неопределённости | 32 |
| Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Теоретико-игровая модель продвижения инноваций в организациях | 35 |
| Федянин Д.Н. Комплексная модель двухэтапного сетевого взаимодействия игроков: сообщение своих функций полезности и выбор стратегий | 39 |
| Цыганов В.В. Прогрессивность и правильность адаптивных механизмов функционирования активных систем | 42 |
| Чхартишвили А.Г. О динамике структур информированности | 47 |
| Шевченко В.В. О рефлексивном анализе игровых взаимодействий | 50 |

Динамическая задача расширения производства на конкурентных рынках

В.К.Акинфиев

ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН РАН, Москва, Россия

Задача расширения производства (Capacity Expansion Problem) является актуальной и давно является популярной среди исследователей. Любая компания в процессе своей жизнедеятельности стремится повысить свою конкурентоспособность, долю рынка, стоимость и прибыльность своего бизнеса. Одним из основных способов достижения

этих целей являются инвестиции в расширение и модернизацию производственных мощностей компании.

Традиционный подход к оценке эффективности и выбору инвестиционных стратегий развития компаний основан на методах моделирования дисконтированных денежных потоков (DCF), в которых прогноз динамики цен и спроса на продукцию компании являются экзогенными переменными. Большинство рынков в современной экономике относятся к рынкам несовершенной конкуренции, где каждый производитель в состоянии существенно влиять на цену продукции. Наиболее интересным для исследования типом рыночных структур является олигополия. Предполагается, что компании принимают инвестиционные решения в условиях неопределенности и независимо друг от друга и их выбор влияет на соотношение спроса и предложения на рынке и, соответственно на рыночную цену продукта.

Рассмотрим рынок, на котором присутствует N компаний, $i = \overline{1, N}$. Прогнозный горизонт равен T периодам, $t = \overline{1, T}$. Пусть $D(t)$ – динамика рыночного спроса на продукцию; $P(t)$ – рыночная цена продукции в период t . Предположим, что в каждый период времени рыночная цена формируется на основе соотношения спроса $D(t)$ и суммарного предложения со стороны компаний $S(t)$. Тогда:

$$P(t) = P(0) \left(1 + \gamma \frac{D(t) - S(t)}{D(t)} \right) \quad (1)$$

где $P(0)$ – цена на начало прогнозного периода (начальные условия); γ – эластичность цены по величине превышения спроса над предложением.

Задача анализа и выбора стратегического поведения компаний на конкурентных рынках может быть сведена к задаче математического программирования с равновесными ограничениями (Mathematical Programs with Equilibrium Constraints (MPEC)). Модель представляет собой систему взаимосвязанных задач оптимизации, каждая из которых описывает выбор стратегии компании i . Перепишем формулу (1) в виде

$$P(t) = a - b(t) \cdot S(t), \text{ где } a = P(0) \cdot (1 + \gamma) \text{ и } b(t) = \gamma \frac{P(0)}{D(t)}$$

Искомые переменные: $x_i(t)$ – объем поставок (производство) товара; $y_i(t)$ – прирост мощности производства (инвестиционная стратегия компании). Тогда:

$I_i(t) = k_i \cdot y_i(t - \tau_i)$ – объем инвестиций в период t , необходимый для увеличения мощности производства, где τ_i – временной лаг между периодом инвестирования и периодом прироста мощности производства. $S(t) = x_i(t) + x_{-i}(t)$, где $x_{-i}(t)$ – суммарный объем поставок (производство) товара другими агентами.

Пусть компания стремится максимизировать свой суммарный денежный поток за прогнозный период $t = \overline{1, T}$, который равен чистой прибыли, полученной за этот период, за вычетом средств, направленных на инвестиции. Тогда задача выбора параметров стратегического поведения компании i сводится к поиску решения следующей задачи оптимизации:

$$\max_{x_i(t), y_i(t)} \sum_{t=1}^T (a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t))) \cdot x_i(t) - c_i \cdot x_i(t) - k_i \cdot y_i(t + \tau_i) \quad (2)$$

$$x_i(t) \leq S_i(0) + \sum_{t=1}^T y_i(t) \quad (3)$$

$$y_i(t) \leq y_i^{\max}(t) \quad (4)$$

$$x_i(t) \geq 0, \quad y_i(t) \geq 0 \quad (5)$$

где $y_i^{\max}(t)$ - максимально возможный прирост мощности производства в период t , который определяется, в том числе, наличием финансовых ресурсов у агента в период t . Неравенство (3) задает ограничение на объем поставки (производства) товара, а неравенство (4) - на прирост мощности производства. Совместное решение задач (2)-(5) для всех компаний $i = \overline{1, N}$ сводится к выбору искомым переменных $x_i(t)$ и $y_i(t)$, удовлетворяющих условиям равновесия Нэша.

В докладе анализируются два подхода к решению данной задачи, а именно:

- Использование методов точного и приближенного решения задачи МРЕС.
- Совместное использование методов многоагентного имитационного моделирования и теории игр.

В рамках первого подхода получены существенные теоретические результаты, а также примеры их применения для решения ряда прикладных задач [1]. Однако следует отметить существенный разрыв между теоретическими моделями и потребностями практики.

Методы многоагентного имитационного моделирования позволяют учесть многие существенные для практики факторы. Технология решения сводится к совместному исследованию моделей компаний и модели рынка и позволяет учесть влияние выбора инвестиционных решений компаний на рыночные условия функционирования их бизнеса. Решение задачи сводится к поиску решения одношаговой или многошаговой непрерывной игры с ненулевой суммой, в которой функции выигрышей игроков (компаний) задаются имитационной моделью[2].

Предложенный подход иллюстрируется на примере задачи анализа стратегического поведения нефтяных компаний с традиционным и нетрадиционным способами добычи нефти [3].

Список литературы

1. Gabriel, S. A., Conejo, A. J., Fuller, J. D., Hobbs, B. F., Ruiz, C., 2012. Complementarity Modeling in Energy Markets. International Series in Operations Research & Management Science. Springer New York. P. 630
2. Акинфиев В. К. Моделирование инвестиционных стратегий компаний в условиях неопределенности // Управление большими системами. М., 2016. Вып. 61. С.136 – 167.
3. Акинфиев В. К. Модель конкуренции между нефтедобывающими компаниями с традиционным и нетрадиционным способом добычи // Управление большими системами. М., 2017. Вып. 67. С. 52 – 80

Dynamic problem of expansion of production in the competitive markets

V.K. Akinfiev

*V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow, Russia*

Методы случайного поиска для решения игры Гермейера распределения ресурсов*

Г.И.Белявский, Н.В.Данилова, Г.А.Угольницкий
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

В задачах управления организационными системами игры Гермейера являются важным средством моделирования. Игра Гермейера Γ_1 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} J_0(u, v) &\rightarrow \max_u; \\ J_i(u, v) &\rightarrow \max_{v_i}, i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (1)$$

Функции u и v_i принадлежат банаховому пространству $B([0,1])$ ограниченных функций f с равномерной нормой: $\|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} f(t)$. Функционал J_0 - это выигрыш ведущего игрока, J_i - выигрыши ведомых игроков. Считается, что целевые функции ведомых игроков известны ведущему. Стратегия ведущего игрока сообщается ведомым игрокам, которые выбирают стратегии из множества $N(u)$, например, равновесных по Нэшу стратегий. Во всяком случае, множество $N(u)$ считается известным ведущему игроку. В результате выигрыш ведущего определяется вычислением $\max_u \min_{v \in N(u)} J_0(u, v)$, если ведомые игроки не склонны к сотрудничеству, или $\max_u \max_{v \in N(u)} J_0(u, v)$, если ведомые игроки сотрудничают с центром. Допустим, для любой своей стратегии ведущий игрок умеет вычислять функционал $v = \Phi(u) \in \text{Arg} \min_{v \in N(u)} J_0(u, v)$, или $v = \Phi(u) = \text{Arg} \max_{v \in N(u)} J_0(u, v)$, причем будем предполагать, что $\Phi(u) \in B^r([0,1])$. В результате задача ведущего игрока, состоящая в вычислении

$$\max_u \bar{J}_0(u), \quad (2)$$

где $\bar{J}_0(u) = J_0(u, \Phi(u))$, относится к задачам бесконечномерной оптимизации. В связи с этим очень важно предполагать, что выполняется локальное условие Липшица:

$$|\bar{J}_0(u) - \bar{J}_0(w)| \leq L \|u - w\|, w \in B_r(u), \quad (3)$$

где $B_l(u) = \{w \in B[0,1] : \|u - w\| \leq l\}$. Данное условие обеспечивает возможность перехода к конечномерной оптимизации и использования приближенных методов. Проверка условия Липшица для сложного функционала может оказаться трудоемким занятием. Достаточные условия его выполнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} |J_0(u_2, v) - J_0(u_1, w)| &\leq L_u \|u_2 - u_1\| + L_v \|v - w\|_r, \\ \|\Phi(u_2) - \Phi(u_1)\|_r &\leq L_\Phi \|u_2 - u_1\|, u_1 \in B_l(u_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Норма $\|v\|_r = \sqrt{\sum_{i=1}^r \|v_i\|^2}$. Из определения функционала $\Phi(u)$ следует, что второе

ограничение может оказаться критическим, однако в ряде задач можно проверить его выполнение. В связи с этим рассмотрим пример. В каждый момент времени

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №17-19-01038.

происходит распределение ресурса $u(t) \geq \delta > 0$ с использованием пропорций $\gamma(t) = (\gamma_i(t))_{i=1}^r$. Ведомые игроки независимо друг от друга решают задачи

$$\gamma_i(t)v_i(t) - \mu_i(t)(v_i(t))^2 \rightarrow \max_{v_i(t)} \quad (5)$$

В этой задаче $\gamma_i(t)v_i(t)$ - компенсация центра, $\mu_i(t)(v_i(t))^2$ - затраты игрока на производство. Задача центра заключается в выборе оптимальных пропорций при фиксированном $u(t)$ путем решения задачи

$$\sum_{i=1}^r v_i(t) \rightarrow \max_{\gamma} , \text{ при ограничении: } \sum_{i=1}^r \gamma_i(t)v_i(t) = u(t). \quad (6)$$

Далее мы будем опускать t . Решение задач (5) имеет вид: $v_i = \frac{\gamma_i}{2\mu_i}$. Для того, чтобы

увеличить оптимальное значение целевой функции ведомого игрока: $\frac{\gamma_i^2(t)}{4\mu_i(t)}$ ведомому

игроку необходимо сокращать затраты на производство. Подставляя в (6) оптимальные значения v_i , получим задачу

$$\sum_{i=1}^r \frac{\gamma_i}{\mu_i} \rightarrow \max_{\gamma} , \text{ при ограничениях: } \sum_{i=1}^r \frac{(\gamma_i)^2}{\mu_i} = 2u. \quad (7)$$

В результате решения (7) определяются оптимальные пропорции:

$$\gamma_i = \sqrt{2u / \sum_{j=1}^r \frac{1}{\mu_j}}. \quad (8)$$

Особенностью (8) является то, что оптимальные пропорции γ_i не зависят от i .

Далее для функционала $\Phi(u)$ выполняется равенство

$$\Phi(u)_t = \frac{1}{2} \sqrt{2u(t) / \sum_{j=1}^r \frac{1}{\mu_j(t)}} \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i(t)} = A(t) \sqrt{u(t)}. \quad \text{Отсюда следует неравенство:}$$

$$\|\Phi(u_2) - \Phi(u_1)\| \leq \frac{1}{2\delta} \sup_{[0,1]} A(t) \|u_2 - u_1\|, \text{ которое является глобальным условием Липшица}$$

для функционала $\Phi(u)$.

Рассмотрим одну из возможных конечномерных аппроксимаций задачи ведущего игрока, заметив, что качество аппроксимации зависит от дополнительных предположений относительно решения u . Пусть множество допустимых решений состоит из функций, удовлетворяющих условию Липшица:

$$L([0,1]) = \left\{ u \in B : \exists \alpha, \sup \frac{|u(t) - u(s)|}{|t - s|} \leq \alpha, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1, t \neq s \right\}.$$

Справедливо утверждение [1]. Последовательность функций

$$u_n = u_0 + \frac{\alpha(u)}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^n(u) I_{\{t > \tau_i\}}, \tau_i = i/n, i = 0, 1, \dots, n; \delta_i \in \{-1, 0, 1\}; \text{ стремится к } u \text{ в}$$

равномерной норме.

В связи с этим можно рассматривать следующую конечномерную задачу:

$$\max_{u \in L([0,1])} \bar{J}_0(u) = \max_{u_0, \alpha, \Delta} \bar{J}_0(u_0, \alpha, \Delta), \quad \Delta = (\delta_i)_{i=1}^n, \quad \text{гарантируя при этом } \varepsilon - \text{оптимальность}$$

найденного решения. Для ее решения используются следующие алгоритмы.

Генетический алгоритм [2] состоит из генерации начальной популяции, состоящей из набора хромосом, вычисления здоровья начальной популяции и набора повторяющихся действий, направленных на оздоровление популяции:

1. Скрещивание
2. Мутация
3. Естественный отбор

Остановка алгоритма происходит, если здоровье популяции не увеличивается при фиксированном числе повторений. Алгоритм сходится к устойчивой популяции, которая с вероятностью, близкой к единице, содержит оптимальное решение. Вычисление здоровья фиксированной хромосомы связано с решением задачи:

$$F(\tilde{\Delta}) = \max_{u_0, \alpha} \bar{J}_0(u_0, \alpha, \tilde{\Delta}).$$

Альтернативой генетическому алгоритму может служить алгоритм имитации отжига [3]. В этом алгоритме начинают с некоего начального Δ и начальной температуры $T = T_s$.

Итерации заключаются в следующем:

1. Вычисляют новое $\bar{\Delta}$ в окрестности текущего Δ .
2. Если $F(\bar{\Delta}) \geq F(\Delta)$, то $\Delta := \bar{\Delta}$, иначе $\Delta := \bar{\Delta}$ выполняется с вероятностью

$$p = \exp\left(-\frac{F(\Delta) - F(\Delta_n)}{T}\right).$$

3. Вычисляется температура $T := \alpha T$.

Параметр $0 < \alpha < 1$. Итерации повторяются до тех пор, пока $T \geq T_f$.

Надо отдавать себе отчет, что и алгоритм отжига, и генетический алгоритм относятся к эвристическим алгоритмам, хотя и хорошо зарекомендовавшим себя в ряде приложений. К иным недостаткам можно отнести неопределенность, связанную с числом точек разбиения интервала $[0,1]$. Приводимый ниже алгоритм кусочно-постоянной аппроксимации лишен этого недостатка. Однако, он применим при определенных условиях.

Будем предполагать аддитивность игры. Именно, функционал $\bar{J}_0(u)$ аддитивный, если для любого разбиения интервала $[0,1]: 0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = 1$

$$\bar{J}_0(u) = \bar{J}_0\left(\sum_{i=1}^n u(t) I_{\{\tau_{i-1}, \tau_i\}}(t)\right) = \sum_{i=1}^n \bar{J}_0\left(u(t) I_{\{\tau_{i-1}, \tau_i\}}(t)\right).$$

Зададим начальное разбиение интервала $[0,1]: [0,1/2) \cup [1/2,1]$ и рассмотрим аппроксимацию $u^{(1)}(t) = a_{1,0} I_{[0,1/2)}(t) + a_{1,1} I_{[1/2,1)}(t)$. Из всех приближений данного вида выберем наилучшее, используя свойство аддитивности функционала $\bar{J}_0(u^{(1)}) = \bar{J}_0(a_{1,0} I_{[0,1/2)}) + \bar{J}_0(a_{1,1} I_{[1/2,1)})$. Для этого необходимо решить две одномерные задачи: $\min_{a_{1,0}} \bar{J}_0(a_{1,0} I_{[0,1/2)})$ и $\min_{a_{1,1}} \bar{J}_0(a_{1,1} I_{[1/2,1)})$.

Итерация с номером n заключается в следующем. Выбирается интервал из текущего разбиения $[0,1) = \bigcup_{i=0}^n [\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)})$ следующим образом. Текущему разбиению

соответствует кусочно-постоянное приближение $u^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} I_{[\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)})}(t)$.

Определим последовательность $b_{n,j} = \frac{1}{\tau_{j+1}^{(n)} - \tau_j^{(n)}} \bar{J}_0 \left(a_{n,j} I_{[\tau_j^{(n)}, \tau_{j+1}^{(n)})} \right)$ и вероятности

выбора интервала $p_{n,j} = \frac{\exp(-b_{n,j})}{\sum_{k=0}^n \exp(-b_{n,k})}$. Интервал выбирается случайно в соответствии

с распределением вероятностей $p_{n,j}$. Выбранный интервал с номером j разбивается

пополам и строится новое приближение $u^{(n+1)}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} a_{n+1,i} I_{[\tau_{i-1}^{(n+1)}, \tau_i^{(n+1)})}(t)$, в котором

$a_{n+1,i} = a_{n,i}$, если $i < j$, $a_{n+1,j}$ является решением задачи $\min_a \bar{J}_0 \left(a I_{[\tau_j^{(n+1)}, \tau_{j+1}^{(n+1)})} \right)$, $a_{n+1,j+1}$

является решением задачи $\min_a \bar{J}_0 \left(a I_{[\tau_{j+1}^{(n+1)}, \tau_{j+2}^{(n+1)})} \right)$, $a_{n+1,i} = a_{n,i-1}$, если $i > j$, $\tau_i^{(n+1)} = \tau_i^{(n)}$,

если $i \leq j$, $\tau_{j+1}^{(n+1)} = \frac{\tau_{j+1}^{(n)} + \tau_{j+1}^{(n)}}{2}$, $\tau_i^{(n+1)} = \tau_i^{(n)}$, если $i > j+1$. Итерации повторяются до тех

пор, пока изменения станут незначительными.

Очевидно, что алгоритм останавливается за конечное число итераций. В результате работы алгоритма будет получена кусочно-постоянная функция.

Известно, что функции, удовлетворяющие условию Липшица, могут быть приближены с любой степенью точности кусочно-постоянными функциями в равномерной норме.

В докладе проводится сравнительный анализ эффективности указанных алгоритмов на численных примерах.

Список литературы

1. Белявский Г.И., Данилова Н.В., Угольницкий Г.А. Эволюционное моделирование в задачах управления устойчивым развитием активных систем // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. Вып. 4. С. 14-29
2. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Теория и практика эволюционного моделирования. М. Физматлит, 2003.
3. Джонс М. Т. Программирование искусственного интеллекта в приложениях. М. ТНК Пресс, 2004.

Random search methods for the solution of a resource allocation

Germeyer game

G.I. Beliavsky, N.V. Danilova, G.A. Ougolnitsky
SFedU, Rostov-on-Don, Russia

Модели управления эколого-экономическими проектами в активных системах

А. А. Воронин, И.И. Исаева

Волгоградский государственный университет, Волгоград, Россия

Рассматриваются модели управления Центра сложным эколого-экономическим проектом. Предполагается, что сложный проект является совокупностью независимых простых проектов, причем простые проекты не могут реализовываться частично. Каждый простой проект имеет значимый для Центра экологический и значимый для соответствующего Агента экономический эффекты. Задачей Центра является максимизация суммарного экологического эффекта при заданной величине его ресурса, являющейся параметром задачи. Совокупный ресурс Центра позволяет реализовать только часть из совокупности простых проектов, поэтому для увеличения реализуемого их числа (и, соответственно, эффекта для Центра) целесообразно привлечение агентов к софинансированию соответствующих проектов.

Задача управления проектами имеет следующий вид:

$$\Phi(R) = \sum_{i=1}^n \varphi_i u_i \rightarrow \max_u, \quad \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) u_i \leq R, \quad u_i = \{0; 1\}, \quad (1)$$

$$F_i = (f_i - q_i) u_i \rightarrow \max_{q_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad 0 \leq q_i \leq f_i, \quad (2)$$

где n – число проектов и агентов, $u = (u_1, \dots, u_n)$ – управление Центра ($u_i = 1$ – проект реализуется, $u_i = 0$ – проект не реализуется), R – совокупный ресурс Центра, n -мерные векторы p, φ, f, q означают соответственно стоимость проектов, доходы Центра, доходы агентов и величины софинансирования.

В традиционных моделях управления проектами с софинансированием агентов, описанных в [1, 2], стратегии агентов вносят вклад в целевую функцию Центра. В модели (1), (2) стратегии агентов участвуют в ресурсном ограничении, что не позволяет использовать в ней рассмотренные в [1, 2] подходы.

Рассмотрим следующий механизм управления: Центр сообщает агентам значения параметров p, φ, R и вид задачи (1), получает от них информацию о величинах софинансирования (вектор $q(R)$) и решает задачу целочисленного программирования (1). При этом агенты получают вектор $q(R)$ как решение игры Γ_0 . Предполагается, что им (в отличие от Центра) известны величины f_i ($i = 1, \dots, n$).

Для этого механизма существует равновесие Нэша $q^N(\varphi, R)$ игры агентов Γ_0 с параметром R . Приведем вид этого решения для $n=3$ в случае $\max_{i,j=1,2,3;i \neq j} (p_i + p_j - f_i - f_j) \leq R \leq p_1 + p_2 + p_1 - f_3$, т.е. для значений ресурса Центра, при котором возможна реализация любых двух, но не всех трех проектов (для других диапазонов параметра R решение имеет более простой вид). Обозначим Φ_i, Φ_{jk} ($i, j, k = 1, 2, 3; j \neq k$) соответственно доходы Центра от реализации проекта i и пары проектов (j, k) . Без ограничения общности будем считать выполненными следующие неравенства $\Phi_{12} \geq \Phi_{13} \geq \Phi_{23} \geq \Phi_1 \geq \Phi_2 \geq \Phi_3$. Решение $q^N(\varphi, R)$ имеет следующий вид:

$$q^N(\varphi, R) = \begin{cases} (\varepsilon, c_{12} - \varepsilon, q_3^{\max}), \delta_{12} \leq \delta_{13} \\ (\varepsilon, q_2^{\max}, c_{13} - \varepsilon), \delta_{12} > \delta_{13} \end{cases}, \quad \min(\delta_{12}, \delta_{13}) \leq \varepsilon \leq \max(\delta_{12}, \delta_{13}), \quad (3)$$

$$\delta_{1j} = c_{1j} - q_j^{\max}, q_j^{\max} = \min(f_i, c_{1j}), c_{1j} = \max(p_1 + p_j - R, 0).$$

Как видно, в общем случае решение (3) образует однопараметрическое семейство (единственное решение можно получить, введя последовательность принятия решений агентами). В решении (3) величины предложений агентов, проекты которых не реализуются Центром, предполагаются максимальными. Такое предположение отвечает принципу индивидуальной рациональности, т.к. повышает мощность множества исходов игры, обеспечивающего реализацию нужного им проекта.

Значение функции $\Phi(q^N(\varphi, R))$ не превосходит оптимального для Центра решения этой задачи $\Phi(q^P(\varphi, R))$, где $q^P(\varphi, R)$ – Парето-оптимальный исход игры агентов Γ_0 . Рассмотрим механизм управления, использующий информационное манипулирование со стороны Центра о виде задачи (1), целью которого является реализация вектора $q^P(\varphi, R)$ в качестве равновесия Нэша новой игры агентов Γ_0 . Для реализации этого механизма Центр должен знать величины f_i ($i = 1, \dots, n$).

В этом механизме Центр по-прежнему решает задачу (1), но сообщает агентам общий вид задачи (4):

$$\Phi(R) = \sum_{i=1}^n (s(\varphi_i, R) - p_i + q_i) u_i \rightarrow \max_u, \quad \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) u_i \leq R, \quad u_i = \{0; 1\}, \quad (4)$$

и величины p, R , при этом не сообщая вектор $s(\varphi, R)$, т.к. он на этом этапе не известен. Центр указывает порядок предпочтения проектов для случая совпадения величин прибыли такого их числа, совокупность которых не может быть реализована. Далее Центр получает от агентов сообщение $s(f)$. Очевидно, что агентам не выгодно искажение данных, поэтому $s(f) = f$. После этого Центр подбирает оптимальное сообщение $s(\varphi, R)$ так, чтобы для решения игры Γ_0 агентов (2) с полными данными о задаче Центра (4) $q^N(s(\varphi, R), R)$ выполнялось равенство $\Phi(q^N(s(\varphi, R), R)) = \Phi(q^P(\varphi, R))$. Этот механизм можно использовать для таких R , при которых не выполнено равенство $\Phi(q^N(\varphi, R)) = \Phi(q^P(\varphi, R))$.

Ниже представлен пример задачи (1), (2) для $n = 3$. В таблице 1 приведены значения параметров задачи, в таблице 2 представлены решения $q^N(\varphi, R)$ для различных значений R . Символом (*) отмечены предложения агентов, проекты которых не реализуются, величины этих предложений, как указано выше, предполагаются максимальными.

Таблица 1. Входные данные задачи

| Проект | №1 | №2 | №3 |
|-------------|-----|-----|-----|
| p_i | 1 | 2 | 3 |
| φ_i | 4 | 5 | 6 |
| f_i | 1/2 | 3/2 | 7/4 |

Таблица 2. Равновесия Нэша $q^N(\varphi, R)$ и величины $\Phi(q^N(\varphi, R))$ для решений задачи (1), (2) при различных значениях R

| R | ΔR | $q^N(\varphi, R)$ | $\Phi(q^N(\varphi, R))$ |
|------------------|------------|---------------------------|-------------------------|
| $0 + \Delta R$ | $[0; 1/2)$ | (*, *, *) | 0 |
| $1/2 + \Delta R$ | $[0; 3/4)$ | (*, $3/2 - \Delta R$, *) | 5 |

| | | | |
|-------------------|----------------|---|----|
| $5/4 + \Delta R$ | $[0; 1/2)$ | $(1/2 - \delta; 5/4 - \Delta R + \delta; *)$, $\delta \in [0; 1/2 - \max(1/4 - \Delta R, 0)]$ | 9 |
| $7/4 + \Delta R$ | $[0; 1/2)$ | $(1/2 - \Delta R - \delta; 3/4 + \delta; *)$, $\delta \in [0; 1/2 - \Delta R]$ | 9 |
| $9/4 + \Delta R$ | $[0; 7/4)$ | $(*; 1; 7/4 - \Delta R)$ | 11 |
| $16/4 + \Delta R$ | $[0; 1)$ | $(*; 1 - \Delta R; 0)$ | 11 |
| $22/4 + \Delta R$ | $[0; +\infty)$ | $(\max(1/2 - \Delta R); 0; 0)$ | 15 |

Таблица 3. Вид функции $s(\varphi, R)$ для механизма (2), (4) с величинами параметров, представленными в таблице 1

| Интервалы для R | $s(\varphi_1)$ | $s(\varphi_2)$ | $s(\varphi_3)$ |
|-------------------|----------------|----------------|-------------------|
| $[1; 5/4)$ | φ_1 | φ_2 | φ_3 |
| $[7/4; 9/4)$ | φ_1 | φ_1 | $\varphi_1 + 3/4$ |
| $[9/4; 22/4)$ | φ_1 | φ_1 | $\varphi_1 + 3/4$ |

На рисунке 1 представлены параметрические зависимости целевых функций Центра для описанных выше механизмов управления проектами. Нижняя штриховая линия соответствует решению задачи (1) без софинансирования агентов, а верхняя штриховая линия – функции $\Phi(q^P(\varphi, R))$ и функции $\Phi(q^N(s(\varphi, R), R))$. Сплошная линия отвечает функции $\Phi(q^N(\varphi, R))$.

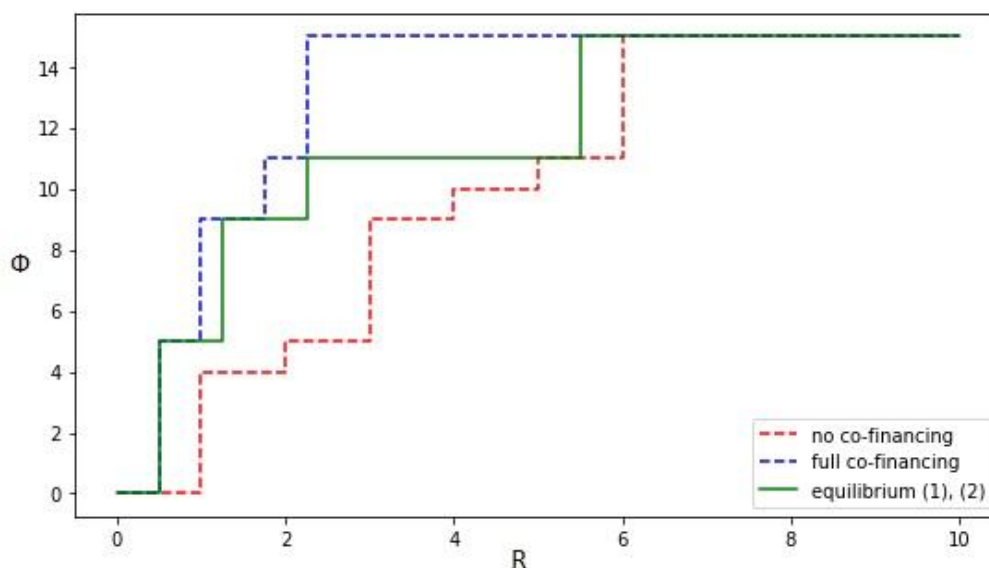


Рисунок 1 – Параметрические зависимости целевых функций Центра для различных механизмов управления проектами

Одним из содержательных примеров рассмотренной выше задачи управления является управление гидротехническими проектами в малых руслах Волго-Ахтубинской поймы. Одним из факторов ее экологической деградации является стихийная установка хозяйственными субъектами (агентами) земляных дамб в малых руслах в моменты максимальных паводковых разливов с целью задержки паводковых вод для орошения полей. Однако, в последующие годы эти дамбы затрудняют паводковое затопление экологически значимых территорий поймы. Решением данной проблемы является строительство управляемых паводковых дамб в малых руслах

пойменной территории. Целями проектов является оптимизация паводкового затопления значимых территорий пойменной экосистемы (экологический эффект Центра) и сохранение воды в малых руслах территории для повышения эффективности орошаемого земледелия (экономические эффекты агентов) без деградации малых русел.

Можно привести большое число содержательных примеров задачи (1), (2) в эколого-экономических и социально-экономических системах. Их общей чертой является несоизмеримость эффектов проектов для Центра и агентов. В механизме (2), (4) Центр искусственно вводит эту соизмеримость в целях манипуляции. Механизм софинансирования проекта восстановления малых русел Волго-Ахтубинской поймы с введением соизмеримости экологического и экономического эффектов рассмотрен в [3].

Список литературы

1. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Как управлять проектами. — М.: Синтег, 1997. — 190 с.
2. Новиков Д. А. Теория управления организационными системами. 3-е изд. — М.: Издательство физико-математической литературы, 2012. — 604 с.
3. Воронин А. А., Васильченко А.А., Писарева М.В., Писарев А.В., Хоперсков А.В., Храпов С.С., Подшипкова Ю.Е. Проектирование системы эколого-экономического управления территорией Волго-Ахтубинской поймы на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования // Управление большими системами. Выпуск 55. М.: ИПУ РАН, 2015. С.79-102.

Models of eco-economic projects' management in active systems

A.A. Voronin, I.I. Isaeva
Volgograd State University, Volgograd, Russia

Модели с неопределённостью в проблеме децентрализации

М.А. Горелов, Ф.И. Ерешко
ВЦ ФИЦ ИУ РАН

Общие рассуждения

Проблемы информированности и децентрализации являются одними из главных в теории принятия решений и привлекали внимание многих исследователей (см., например, <https://en.wikipedia.org/wiki/Decentralization>). В теории математического программирования одна из ключевых идей связана с декомпозицией исходной задачи (алгоритмы Данцига-Вулфа, Корнаи-Липтака) [1], что с точки зрения исследования операций и теории игр есть процедура децентрализации в принятии решений, а в терминах экономических интерпретаций – передача властных полномочий при планировании производственной деятельности от центрального органа к подчинённым подсистемам. Здесь мы придерживаемся идей Ю.Б. Гермейера и Н.Н. Моисеева [2] и исследуем вопрос о целесообразности децентрализации управления в зависимости от объема доступной оперирующей стороне информации о «внешней среде» в линейных задачах и в общем случае. Эффективность управления оценивается максимальным гарантированным результатом оперирующей стороны. Вычислительные проблемы обсуждались в [3].

Простейшая линейная модель принятия решений в условиях неопределенности

Рассматривается группа экономически независимых, самостоятельно действующих агентов. Члены группы принимают решение создать Коалицию, деятельность которой будет выгодна для всех, и рассматривают различные механизмы организации

функционирования коалиции. Может создаваться координирующий Центр, который на основе принятого алгоритма осуществляет автоматически регулирующие функции.

Пусть имеется n агентов. Будем обозначать их числами от 1 до n . Каждый агент может производить m видов продукции, затрачивая при этом некоторые ресурсы. Число ресурсов будем обозначать буквой k . На производство единицы продукта вида j агент i затрачивает ресурс вида l в количестве p_{lj}^i . Агент i имеет собственный запас ресурса вида l в количестве b_l^i ($l=1,2,\dots,k$). Кроме того имеются общие запасы ресурсов в количестве r_l ($l=1,2,\dots,k$). Продукция вида j может быть реализована на рынке по цене c_j . Таким образом, если агент i произведет продукцию вида j в количестве x_j^i ($j=1,2,\dots,m$), то он потратит ресурс вида l в количестве $p_{l1}^i x_1^i + p_{l2}^i x_2^i + \dots + p_{lm}^i x_m^i$, а реализовать эту продукцию он сможет за сумму $c_1 x_1^i + c_2 x_2^i + \dots + c_m x_m^i$. Обозначим через x^i вектор столбец $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i)^T$ (верхний индекс T , как обычно, обозначает транспонирование). Пусть $c=(c_1, c_2, \dots, c_m)$, а матрица затрат $P^i = \|p_{kj}^i\|$, ресурсы $b^i = (b_1^i, b_2^i, \dots, b_k^i)^T$, $r=(r_1, r_2, \dots, r_k)$. В этих обозначениях предыдущие формулы будут выглядеть следующим образом. Если агент i выпустит продукцию, в количестве x^i , то он сможет выручить за нее сумму $c x^i$, и при этом будут затрачены ресурсы в количестве $y^i = P^i x^i$, где y^i – вектор столбец $(y_1^i, y_2^i, \dots, y_k^i)^T$.

Первая задача. Интервальная неопределённость. «Жёсткое» управление

Предположим, что управление системой осуществляется централизованно, то есть существует некоторый дополнительный координирующий орган (Центр), который выбирает объемы общих ресурсов, выделяемых каждому агенту, и его программу выпуска продукции. При этом он стремится по общему коалиционному решению к максимизации суммарного дохода системы. Оставляем вопросы дележа полученного общего результата на следующий этап принятия решений в коалиции. Будем считать, что характеристики агентов известны Центру неточно: Центру не известны точно коэффициенты матриц P^i и векторов b^i . Введя новые матрицы P^{i-} и P^{i+} , и векторы b^{i-} , b^{i+} , эти условия можно символически записать в виде $P^{i-} \leq P^i \leq P^{i+}$ и $b^{i-} \leq b^i \leq b^{i+}$. В описанных условиях будем считать, что Центр должен выбирать управления так, чтобы ресурсов у каждого агента хватило на предложенную ему программу выпуска при любой матрице P^i и любом векторе b^i из указанных диапазонов. Таким образом, перед Центром стоит нестандартная задача:

$$c x^1 + c x^2 + \dots + c x^n \rightarrow \max, \\ P^i x^i \leq b^i + y^i, y^1 + y^2 + \dots + y^n \leq r, x^i \geq 0, y^i \geq 0, i=1,2,\dots,n.$$

Если выполняются условия $P^{i+} x^i \leq b^i + y^{i-}$, $i=1,2,\dots,n$, то соответствующие условия сформулированной выше задачи будут выполнены для любых допустимых матриц P^i и векторов b^i . Следовательно, Центру нужно решить стандартную задачу линейного программирования. Управлениями Центра в этой задаче, разумеется, являются векторы выпусков x^i и векторы выделенных агентам ресурсов y^i ($i=1,2,\dots,n$). Решение определится путём использования теоремы Куна–Таккера.

Вторая задача. α -параметрическая неопределённость. «Жёсткое» управление

В этом варианте постановки задачи будем по-прежнему считать, что управления x^i и y^i выбираются централизованно, и в условиях неполной информации о параметрах модели. Относительно неопределенности будем считать, что значения коэффициентов матриц P^i и векторов b^i ($i=1,2,\dots,n$) зависят от некоторого неопределенного фактора α . Про этот фактор лицу, принимающему решение, известно лишь некоторое множество возможных значений A . Для простоты будем предполагать, что множество A наделено

топологией и компактно, а функции $p_{ij}^i(\alpha)$ и $b_i^i(\alpha)$ непрерывны в этой топологии. Таким образом, центр должен решать следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} cx^1+cx^2+\dots+cx^n \rightarrow \max, \\ P^i(\alpha) \leq b^i(\alpha)+y^i, i=1,2,\dots,n, \alpha \in A, \\ y^1+y^2+\dots+y^n \leq r, x^i \geq 0, y^i \geq 0, i=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции

$$f^i(x^i) = \max_{\alpha \in A} \max_{l=1,2,\dots,k} (p_{l1}^i x_1^i(\alpha) + p_{l2}^i x_2^i(\alpha) + \dots + p_{lm}^i(\alpha) x_m^i - b_l^i(\alpha)), i=1,2,\dots,n.$$

Функции $f^i(x^i)$ являются выпуклыми, и исходная задача эквивалентна следующей задаче выпуклого программирования, разрешаемой с помощью теоремы Куна – Таккера:

$$cx^1+cx^2+\dots+cx^n \rightarrow \max, f^i(x^i) \leq y^i, y^1+y^2+\dots+y^n \leq r, x^i \geq 0, y^i \geq 0, i=1,2,\dots,n.$$

Третья задача. Интервальная неопределённость. «Мягкое» управление

В данном варианте будем предполагать, что Центр выбирает распределение ресурсов y^1, y^2, \dots, y^n . Объем выпуска продукции x^i выбирает i -й агент. При этом он преследует собственные цели, которые описываются стремлением к максимизации критерия $c^i x^i$. Центру известны пределы, в которых могут меняться коэффициенты матриц P^i и векторов b^i ($P^{i-} \leq P^i \leq P^{i+}$ и $b^{i-} \leq b^i \leq b^{i+}$). Центр точно знает интересы партнеров (векторы c^i). Каждый из агентов точно знает «свои» матрицу P^i и вектор b^i . Будем предполагать, что Центр обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает свои управления y^1, y^2, \dots, y^n и сообщает о своем выборе партнерам. При этом он рассчитывает на то, что все агенты рациональны, то есть i -й агент выбирает свои управления x^i из множества $BR^i(y^i, P^i, b^i)$ всех решений задачи

$$c^i x^i \rightarrow \max, P^i x^i \leq b^i + y^i, x^i \geq 0.$$

Выписывая максимальный гарантированный результат Центра и сравнивая с первой задачей, получаем, что максимальный гарантированный результат Центра в третьей задаче всегда не превосходит максимального гарантированного результата Центра в первой задаче при «жестком» управлении.

Четвёртая задача. α -параметрическая неопределённость. «Мягкое» управление

Вновь будем предполагать, что Центр выбирает распределение ресурсов y^1, y^2, \dots, y^n . Объем выпуска продукции x^i выбирает i -й агент. При этом он преследует собственные цели, которые описываются стремлением к максимизации критерия $c^i x^i$.

Считаем, что Центру неизвестны точно технологические матрицы P^i и собственные запасы ресурсов b^i агентов. Известно лишь, что они принадлежат параметрическим семействам $P^i(\alpha)$ и $b^i(\alpha)$, где $\alpha \in A$. Агентам же точно известны собственные технологии и возможности, Центр обладает правом первого хода.

Результат в этой задаче естественно сравнивать с максимальным гарантированным результатом во второй задаче. В данном случае может оказаться, что максимальный гарантированный результат Центра в четвертой задаче больше чем аналогичный результат во второй задаче, то есть децентрализация целесообразна, а возможен и противоположный случай.

Построены соответствующие примеры.

Пятая задача. «Мягкое» управление при игре Γ_2

Предыдущие модели при «мягком» управлении были построены по мотивам игры Γ_1 . Естественно возникает вопрос относительно утверждений в случае иерархических взаимодействий типа игры Γ_2 . В этом случае можно также рассмотреть мягкое управление, т.е. механизмы координации Центром с учётом активных действий подсистем, как при интервальной, так и при α -параметрической неопределённости.

Остановимся пока на последней постановке и будем считать, что Центру неизвестны точно технологические матрицы P^i и собственные запасы ресурсов b^i агентов. Известно лишь, что они принадлежат параметрическим семействам $P^i(\alpha)$ и

$b^i(\alpha)$, где $\alpha \in A$. Для простоты в данной модели будем считать запасы r_1, r_2, \dots, r_k строго положительными. Агентам же точно известны собственные технологии и возможности.

Будем предполагать, что Центр распоряжается дележом «общих» ресурсов, но в данном случае он выделяет ресурсы под конкретные программы производства. Эти программы агенты вправе выбирать самостоятельно. Разумеется, центр не обязан обеспечивать реализуемость любой предложенной агентом программы. Напротив, агент вынужден выбирать свою программу, исходя из выделенных ему ресурсов. Кроме того, агенты могут передавать Центру информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора. Эти сообщения не обязательно являются достоверными, и Центр знает это.

Результат в данной постановке можно сформулировать следующим образом. Отдельные частные случаи по количеству игроков и неопределённых факторов рассматриваются до конкретного результата. Однако в общем случае требуется введение дополнительных соглашений между участниками коалиций по обмену информацией.

Общий случай

Остановимся кратко на общем случае в следующей постановке.

Рассмотрим простейшую модель притяжения решений в условиях неопределенности и систему, управление которой осуществляется путем выбора управления w из множества W . Кроме того, на результат управления влияет значение неопределенного фактора α , выбор которого не контролируется лицом, принимающим решение, и параметр α может принимать любое значение из множества A . Целью управления является максимизация значения $g(w, \alpha)$ функции $g: W \times A \rightarrow \mathbb{R}$ (как обычно \mathbb{R} – множество действительных чисел). Предположим, что рассматриваемая управляемая система «технологически структурирована», множество W может быть представлено, как декартово произведение $W = U \times V^1 \times V^2 \times \dots \times V^n$. Таким образом, управление $w \in W$ может быть записано в виде $w = (u, v^1, v^2, \dots, v^n)$, где $u \in U$, $v^i \in V^i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Модель централизованного управления. Будем считать, что выбор управления $w \in W$ осуществляет Центр, и Центр может получать достоверную информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора α , но объем информации, которую он способен получить и своевременно обработать, ограничен. Предположим, Центр способен переработать l бит информации. Выбор содержания этой информации – это право Центра. Введем обозначение. Здесь и далее $\Phi(X, Y)$ будет обозначать семейство всех функций, отображающих множество X в множество Y . Поскольку Центру доступны l бит информации, эта информация может быть закодирована словами $s = (s_1, s_2, \dots, s_l)$, где каждый символ s_i , $i = 1, 2, \dots, l$ принадлежит множеству $\{0, 1\}$. Таким образом, все сообщения о значении неопределенного фактора, которые Центр может получить, принадлежат множеству $S = \{0, 1\}^l$ (декартовой степени множества $\{0, 1\}$). Выше сделано предположение о том, что содержание информации, закодированной словом s (семантику сообщения s), выбирает Центр. Будем считать, что для каждого значения $\alpha \in A$ центр вправе выбрать сообщение $P(\alpha) \in S$, которое соответствует реализации значения параметра α . Таким образом, Центр фактически выбирает функцию $P \in \Phi(A, S)$. Кроме того, для каждого сообщения $s \in S$ Центр вправе выбрать свое управление $w \in W$. То есть, по сути, центр выбирает функцию $w_* \in \Phi(S, W)$.

Таким образом, стратегиями Центра являются пары (w_*, P) из множества $\Phi(S, W) \times \Phi(A, S)$. Если центр выберет такую стратегию (w_*, P) и реализуется значение неопределенного фактора α , то выигрыш Центра составит $g(w_*(P(\alpha)), \alpha)$.

Если значение неопределенного фактора α Центру заранее не известно, то его максимальный гарантированный результат составит

$$R_0 = \sup_{(w_*, P) \in \Phi(S, W) \times \Phi(A, S)} \inf_{\alpha \in A} g(w_*(P(\alpha)), \alpha).$$

Модель децентрализованного управления. Предположим, что Центр передоверяет выбор управления $v^i \in V^i$ некоторому агенту, которого в дальнейшем будем называть агентом i ($i=1, 2, \dots, n$). Будем считать, что интересы агента i описываются стремлением к максимизации функции $h^i(u, v^i, \alpha)$ (т.е. не зависят от выборов других агентов). Право выбора управления $u \in U$ Центр оставляет за собой, до окончательного выбора своего управления он может рассчитывать на получение l бит информации о неопределенном факторе, и содержание этой информации вправе выбирать он сам.

Таким образом, стратегиями Центра будут пары (u_*, P) функций $u_* \in \Phi(S, U)$ и $P \in \Phi(A, S)$. При этом выигрыши Центра и агентов будут определяться выражениями $g(u_*(P(\alpha)), v^1, v^2, \dots, v^n, \alpha)$ и $h^i(u_*(P(\alpha)), v^i, \alpha)$, ($i=1, 2, \dots, n$) соответственно.

Будем считать, что Центр обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает и сообщает агентам свою стратегию $(u_*, P) \in \Phi(S, U) \times \Phi(A, S)$.

В таком случае агенту i в момент принятия решения известно значение неопределенного фактора α и стратегия (u_*, P) , а, значит, и значение $u_*(P(\alpha))$, т.е. «физическое» управление, которое должен будет выбрать Центр. Таким образом, для этого агента задача принятия решений превращается в задачу оптимизации, и максимальный гарантированный результат Центра в рассматриваемой модели является

$$R_1 = \sup_{(u_*, P) \in \Phi(S, U) \times \Phi(A, S)} \min_{\alpha \in A} \min_{v^1 \in BR^1(u_*, P, \alpha)} \min_{v^2 \in BR^2(u_*, P, \alpha)} \dots \min_{v^n \in BR^n(u_*, P, \alpha)} g(u_*(P(\alpha)), v^1, \dots, v^n, \alpha).$$

Далее рассмотрим случаи, когда интересы Центра и агентов «совпадают», а именно $g(u, v^1, v^2, \dots, v^n, \alpha) = \sum_{i=1}^n h^i(u, v^i, \alpha)$, и когда интересы агентов и Центра

«противоположны», т.е. $g(u, v^1, v^2, \dots, v^n, \alpha) = -\sum_{i=1}^n h^i(u, v^i, \alpha)$.

Доказано утверждение. Если интересы агентов «плохо согласованы» с интересами Центра, то всегда выгоднее централизованное управление. Если же интересы Центра и агентов «хорошо согласованы», то при больших значениях l выгоднее централизация управления, а при малых значениях l предпочтительнее децентрализованное управление.

Заключение

Итак, сформулирована задача о возможной децентрализации управления системой при наличии неопределённости и приводится её решение на простейшей из нетривиальных моделей. Весьма важными представляются выводы из последнего раздела. Они ни в коей мере не являются неожиданными. Но именно это свидетельствует о том, что построенная модель верно отражает некоторые качественные особенности рассматриваемой проблемы. Это представляет некие начальные основания для дальнейшего исследования в области централизации-децентрализации в принятой постановке.

Прежде всего, естественно рассмотреть постановки, когда подсистемы подобно Центру недостаточно информированы о неконтролируемых факторах. Здесь предполагалась их полная информированность. Понятно, что постановка задачи и ее

формальный анализ в таком случае сильно усложнится. Кроме того, весьма важный вопрос о согласованности интересов Центра и подсистем. На первый взгляд, достаточно хорошо отражает факт согласованности наличие малой величины меры разности между функцией цели Центра и линейной свёртки с весами системы критериев подсистем. Однако такой подход должен содержать также гипотезы и механизмы коалиционного решения подсистем, что представляет собой совсем нетривиальный вопрос. Возможно, удастся продвинуться в дальнейших исследованиях в случае линейных зависимостей. Линейные задачи удобно рассматривать в стандартных постановках моделей линейных производственных процессов (Канторович--Купманс) при разных формах задания неопределённых факторов, опираясь на развитый аппарат множителей и функций Лагранжа и теоремы типа Куна--Таккера. По крайней мере, к настоящему времени установлены различные варианты эффективности процедур децентрализации в линейных случаях, и построены соответствующие примеры. Кроме того, обратим внимание на факт возможных динамических трансформаций организационных структур от централизации к децентрализации, и в обратном направлении и возможность дальнейшей передачи управляющих функций на нижние уровни многоуровневых систем

Основная цель, которая ставилась авторами при исследованиях в начальный период -- построить математические модели, адекватные реальным ситуациям, для которых характерно либо наличие Центра -- выделенного участника, обладающего приоритетом в действиях, либо сочетание возможности первого хода и равноправия участников. Прикладной смысл таких исследований -- создание математического аппарата для анализа упрощённых моделей, позволяющих делать качественные выводы и, что самое главное, формировать на модельном уровне представление о предмете исследований у лиц, принимающих решения.

Список литературы

1. Итеративные методы в теории игр и программировании / Под ред. Беленького В.З. и Волконского В.А. М.: Наука, 1974.
2. Гермейер Ю.Б., Моисеев Н.Н. О некоторых задачах теории иерархических систем // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 30–43.
3. Ereshko F.I., Zlobin A.S. Mathematical methods for the analysis of hierarchical systems. II. Numerical methods for solving game-theoretic, equilibrium and pareto optimization problems, IIASA, Laxenburg, Austria, CP-84-20, 1984, 1–26 p.

The models with uncertainty in a decentralization problem

M.A. Gorelov, F.I. Ereshko
CC FRC CSC RAS Moscow, Russia

A behavior model of the Generating companies in the electricity market*

N.V. Dresvyanskaya
Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia

The presented investigation is a development of the approach described in [2]. We consider the electricity market model of interaction between power producers (GenCo – Generating Companies) and System Operator (SO), taking into account the limits on generation, capacities of lines, as well as transmission losses [3].

* This research is supported by RNF grant 17-11-01021.

It is assumed that the power producers are able to influence on the market price. The problem should take into account the oligopolistic situation in the market. A short description of the model is as follows. SO solves a scheduling problem, minimizing total costs of electricity generation and transmission and calculating the nodal prices (dual variables) on the basis of technical and costs characteristics (parameters) of the power plants provided by the producers. The problem of SO is a convex programming problem. To increase their profits power producers deliberately distort real values of some technical parameters of the power plants thereby implicitly influencing the prices. Hence each GenCo solves a maximization problem varying the technical parameters.

A total mathematical formulation is based on bilevel programming approach [1]. The upper level corresponds to the profit maximization of Generating Company with true cost functions. The lower level of the problem corresponds to SO efforts to schedule generation and calculate local marginal prices (LMP) on the basis of total production cost minimization.

The bilevel optimization problem can be interpreted as profit maximization for producer with modeling of following activity of SO for generation scheduling and nodal price determination. Bilevel interaction consists in the following. GenCo provides distorted technical parameters to SO. Using these parameters SO calculate LMP and gives this LMP back to GenCo, than having LMP GenCo can calculate their profits. GenCo tries to find such values of the distorted technical parameters that maximize the profits.

To solve the investigated problem we use an approach based on nonlinear support function technique [2]. Results of numerical testing are presented.

References

1. Dempe S. Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
2. Dresvyanskaya N.V. An Investigation of a Bilevel Energy Market Model // Proc. DOOR 2016, Vladivostok, Russia, September 19-23, 2016. CEUR-WS. 2016. Vol. 1623. P. 563-573. CEUR-WS.org, online <http://ceur-ws.org/Vol-1623/paperme3.pdf>
3. Khamisov O.V. Nonconvex optimization with nonlinear support functions // Trudy IMM UrO RAN. 2013. V. 19. №2. P. 209-306 (in Russian).
4. Palamarchuk S.I. Bilateral treaty planning for power energy supply under conditions of wholesale market // Izv. RAN. Energetika. 2011. №2. P. 77-91.

Модель оптимального согласованного механизма в цепочке активных элементов*

А.К. Еналеев

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Работа основана на результатах из [1 – 3] и является дальнейшим развитием построений в [4].

Рассмотрим простейшую структуру работ, связанных строгой последовательностью выполнения (для более общего случая, древовидной структуры связей работ, описанный подход и результаты принципиально не отличаются).

Описание модели.

Рассматриваемая система состоит из управляющего органа, называемого далее центром (Ц), и n агентов, каждый из которых отвечает за определенную работу в заданной последовательности выполняемых n работ.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ОАО «РЖД» в рамках научного проекта №17-20-05216.

Задачей Ц является установление механизма управления, включающего процедуру планирования и системы стимулирования.

Представим целевую функцию Ц в виде

$$\Phi(x, y, r) = c_1 y_1 - z_1(x_1, y_1) - v_1(y_1, r_1) + \sum_{i=2}^n [c_i(y_i - y_{i-1}) - z_i(x_i, y_i) - v_i(y_i, r_i)],$$

где y_i – значение состояния АЭ, которое характеризует результат выполнения активным элементом i -й работы (например, время выполнения работы, либо удельная экономия энергоресурсов по сравнению с текущим, либо установленным нормативным уровнем); x_i – устанавливаемый Ц план i -й работы; $z_i(x_i, y_i)$ – значение потерь Ц от несовпадения показателя y_i с планом x_i ; $v_i(y_i, r_i)$ – величина потерь от отклонения уровня y_i от оптимального значения r_i ; $r_i \in [r_i^H, r_i^B]$, $y_i \in [0, r_i^B]$, $x_i \in [0, r_i^B]$. Здесь r_i^H – нижнее допустимое значение показателя r_i , r_i^B – верхнее допустимое значение этого показателя, c_i – заданные параметры, характеризующие ценность значений состояний y_i для Ц.

Примем $0 \leq y_i \leq r_i$, $z_i(x_i, y_i) \geq 0$, $z_i(x_i, x_i) = 0$, $v_i(y_i, r_i) \geq 0$, $v_i(r_i, r_i) = 0$. Пусть $v_i(y_i, r_i) = a_i(r_i - y_i)$, где $0 \leq a_i \leq c_i$. При этом каждый АЭ, выполняющий i -ю работу, т.е. выбирающий значения величин y_i знает значение r_i , а Ц знает только допустимые границы этого показателя r_i^H и r_i^B . Предположим, что последовательные работы связаны друг с другом следующими соотношениями $r_{i+1}^H = r_i^H + \Delta_{i+1}^H$, $r_{i+1}^B = r_i^B + \Delta_{i+1}^B$, где $i = 1, \dots, n-1$.

Пусть целевая функция 1-го АЭ равна $f_1(x_1, y_1, r_1) = \sigma_1(y_1) - \vartheta_1(x_1, y_1) - \omega_1(y_1, r_1)$, где $\sigma_1(y_1)$ – функция поощрения, $\vartheta_1(x_1, y_1)$ – функция штрафов за отклонение результата от плана, $\omega_1(y_1, r_1)$ – функция затрат 1-го агента. Целевую функцию i -го АЭ (исполнителя i -й работы) представим в виде $f_i(x_i, y_i, y_{i-1}, r_i) = \sigma_i(y_{i-1}, y_i) - \vartheta_i(x_i, y_i) - \omega_i(\delta_i, r_i)$, где $\sigma_i(y_{i-1}, y_i)$ – функция поощрения за состояние (результат выполнения работы) y_i i -го АЭ при реализации состояния y_{i-1} предшествующим АЭ, $\vartheta_i(x_i, y_i)$ – функция штрафов за отклонение состояния y_i результата от плана x_i , $\omega_i(\delta_i, r_i)$ – функция затрат i -го АЭ, зависящая от вклада АЭ в повышение значения состояния y_i . Здесь $\delta_{i+1} = y_{i+1} - y_i$ для $i = 1, \dots, n-1$, $\delta_1 = y_1 \geq 0$. Будем предполагать, что $\delta_{i+1} \geq 0$ при $i = 1, \dots, n-1$.

Для упрощения анализа примем, что функции затрат с достаточной точностью аппроксимируются квадратичной функцией: $\omega_i(\delta_i, r_i) = e_i \delta_i^2 / 2r_i$, где $e_i > 0$. В функциях отражено следующее свойство: чем большее величина r_i , тем меньше значение затрат, т.е. чем больше резерв для выбора большего значения состояния, тем меньше для АЭ требуется усилий.

Опишем порядок принятия решений участниками в рассматриваемой модели системы стимулирования.

Сначала Ц устанавливает механизм $\mu = \{\sigma(\cdot), \vartheta(\cdot, \cdot), x(\cdot)\}$, включающий в свой состав функции поощрения $\sigma_i(\cdot)$, функции штрафов $\vartheta_i(\cdot, \cdot)$ за невыполнение плана по энергосбережению и правило $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$ формирования планов x_i на основании имеющейся информации ρ_i о параметрах r_i , $i = 1, \dots, n$.

Затем АЭ сообщают в Ц оценки ρ_i параметров r_i , на основании которых назначаются планы энергосбережения $x_i = x_i(\rho_i)$ в соответствии с установленными процедурами $x_i(\cdot)$. Наконец, АЭ реализует работу и обеспечивает ее уровень y_i . На основании этого АЭ назначаются поощрения $\sigma_i(y_{i-1}, y_i)$ и штрафы $\vartheta_i(x_i, y_i)$ по установленным функциям $\sigma_i(\cdot, \cdot)$ и $\vartheta_i(\cdot, \cdot)$.

Пусть показатель эффективности механизма стимулирования определяется как гарантированное значение целевой функции Ц на множествах $R(r)$ и $Y(x)$,

$$K(\mu, r) = \inf_{\rho \in R(r)} \inf_{y \in Y(x(\rho))} \Phi(x(\rho), y, r),$$

где $R(r)$ – множество рациональных стратегий АЭ при выборе сообщений $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $Y(x)$ – множество рациональных стратегий АЭ при выборе значений $y = (y_1, \dots, y_n)$ при заданном плане $x = (x_1, \dots, x_n)$. Далее будем рассматривать механизмы, для которых множество $R(r)$ состоит из доминантных стратегий АЭ, т.е. для каждого АЭ существуют сообщения, доставляющие максимум его целевой функции независимо от

сообщений других АЭ. Множество $Y(x)$ определяется заданной последовательностью выбора показателей y_i в соответствии с нумерацией, когда i -й АЭ максимизирует свою целевую функцию при известном плане и показателе y_{i-1} предшествующего АЭ. Более детально множества рациональных стратегий описаны ниже при построении оптимального механизма и формулировке результатов.

Постановка задачи определения оптимального механизма стимулирования.

Определить механизм μ^* , такой что для всех значений параметра $r \in [r^H, r^B]$ справедливо

$$K(\mu^*, r) \geq \sup_{\mu \in M} K(\mu, r) - \varepsilon,$$

где M – заданное компактное множество допустимых механизмов, $\varepsilon > 0$.

Пусть множество M определено следующими ограничениями на функции поощрения, функции штрафов и процедуру планирования:

- функции поощрения $\sigma_i(y_i)$ являются кусочно-непрерывными и $0 \leq \sigma_i(y_i) \leq g_i$;
- функции штрафов $\vartheta_i(x_i, y_i)$ так же кусочно-непрерывны и удовлетворяют ограничению «максимального роста», $\vartheta_i(x_i, y_i) - \vartheta_i(x_i, y_i') \leq \theta_i(y_i', y_i)$, где $\theta_i(y_i', y_i)$ – заданный показатель максимального роста штрафов [3], удовлетворяющий неравенству «треугольника», $\theta_i(y_i', y_i) + \theta_i(y_i, x_i) \geq \theta_i(y_i', x_i)$;
- процедуры планирования $x_i(\rho_i)$ – непрерывные функции, $i=1, \dots, n$.

В [2, 3] доказано, что при этих условиях приведенная выше задача определения оптимального механизма μ^* может быть сведена к задаче оптимизации

$$K(\mu^*, r) = \max_{\mu \in M_c} \Phi(x(r), x(r), r) = \max_{\mu \in M_c} \{c_1 y_1 - v_1(y_1, r_1) + \sum_{i=2}^n [c_i(x_i - x_{i-1}) - v_i(x_i, r_i)]\}, \quad (1)$$

где M_c – множество допустимых механизмов при дополнительных условиях согласования, которым должна удовлетворять процедура планирования $x(\rho)$ и система стимулирования $\sigma(\cdot), \vartheta(\cdot, \cdot)$ для побуждения агентов выполнять планы и сообщать в Ц достоверную информацию о своих параметрах как доминантные стратегии.

Таким образом задача определения механизма сводится к определению множества M_c и решению задачи (1). Условия согласования, определяющие множество M_c , будут представлены ниже в процессе формулировки результатов решения задачи (1). В [3] показано, что выполнение условий согласования свойственно оптимальному механизму и стимулирует агента на *выполнение* плана и сообщение в УО *достоверной* информации.

Условия согласования, обеспечивающие выполнение плана и сообщение достоверной информации.

Рассмотрим сначала ограничения, задаваемые на множество механизмов, при которых агенты выполняют планы.

Выполнение планов может быть обеспечено за счет штрафов за отклонение состояния агента от плана. В [3] показано, что для рассматриваемого здесь множества допустимых функций штрафа оптимальными являются штрафы, совпадающие с показателем их максимального роста $\theta_i(x_i, y_i)$.

Множество $P_i(y_{i-1}, r_i)$ планов, выполнение которых максимизирует целевые функции агентов, определяется выражением

$$P_i(y_{i-1}, r_i) = \{x_i \mid f_i(x_i, x_i, y_{i-1}, r_i) \geq f_i(x_i, y_i, y_{i-1}, r_i), x_i, y_i \in [0, r_i^g]\}.$$

В [3] доказано, что для рассматриваемых функций штрафа $\theta_i(x_i, y_i)$, удовлетворяющих «неравенству треугольника», множество $P_i(y_{i-1}, r_i)$ совпадает с множеством $Y_i(y_{i-1}, r_i) = \text{Arg max}_{y_i \in [0, r_i]} f_i(x_i, y_i, y_{i-1}, r_i)$ рациональных стратегий i -го АЭ,

$Y_i(y_{i-1}, r_i) = P_i(y_{i-1}, r_i)$. Условие $x_i \in P_i(y_{i-1}, r_i)$ называется условием максимального согласования (МС).

Определим для каждого агента множества $P_i(y_{i-1}, r_i^H)$ планов, которые при функции штрафов $\theta_i(x_i, y_i)$, будут выполнимы при минимальном значении неопределенного параметра r_i^H . Будем считать, что для r_i^H выполнение устанавливаемого плана обеспечивается штрафами $\theta_i(x_i, y_i)$, при этом функция поощрения равна 0. Максимальное значение плана $x_i^c = x_i^c(y_{i-1}, r_i^H)$ в множестве $P_i(y_{i-1}, r_i^H)$ определяется условием выполнения неравенства

$$\theta_i(x_i^c - y_{i-1}, y_i - y_{i-1}) \geq \omega_i(y_i - y_{i-1}, r_i^H) - \omega_i(x_i^c - y_{i-1}, r_i^H) \quad (2)$$

для всех y_i из отрезка $0 \leq y_i \leq r_i^H$.

Сообщение агентами достоверной информации, т.е. обуславливается выполнением условий совершенного согласования, при которых АЭ назначаются планы, при которых целевые функции АЭ достигают максимума на множестве допустимых планов. Показано, что оптимальную процедуру планирования достаточно искать среди процедур, удовлетворяющих условиям совершенного согласования. При определении оптимальных процедур планирования будем руководствоваться этим выводом. В соответствии с этим воспользуемся методикой определения оптимальных механизмов, представленной в [2, 3].

Оптимальный механизм.

Заметим, что функция

$$\begin{aligned} \Phi(x, x, r) &= c_1 x_1 - v_1(x_1, r_1) + \sum_{i=1}^n [c_i(x_i - x_{i-1}) - v_i(x_i, r_i)] = \\ &= (c_1 + a_1)x_1 - a_1 r_1 + \sum_{i=2}^n [(c_i + a_i)(x_i - x_{i-1}) - a_i r_i] \end{aligned}$$

возрастает по $x_i - x_{i-1}$. Поэтому

при заданных фондах поощрения $g=(g_1, \dots, g_n)$ достаточно обеспечить получение максимального значения каждого из слагаемых целевой функции Ц.

Введем в рассмотрение числа $\gamma_i > 0$ и соответствующие им неравенства $(c_i + a_i)(x_i - x_{i-1}) - a_i r_i \geq \gamma_i$. Из этого неравенства определим множество планов, при которых величина слагаемых в целевой функции Ц не меньше соответствующего значения γ_i . Это множество определяется неравенством $x_i \geq q_i(x_{i-1}, \gamma_i, r_i) = x_{i-1} + (\gamma_i + a_i r_i) / (c_i + a_i)$.

Рассмотрим процедуру планирования, имеющую вид

$$\tilde{\pi}_i(\gamma_i, \rho_i, x_{i-1}) = \begin{cases} x_i^c = x_i^c(x_{i-1}, r_i^H), & \text{если } r_i^H \leq \rho_i \leq \beta_i, \\ q_i(x_{i-1}, \gamma_i, r_i), & \text{если } \beta_i < \rho_i \leq r_i^B, \end{cases} \quad (3)$$

где значение β_i определяется из решения уравнения $x_i^c(x_{i-1}, r_i^H) = q_i(x_{i-1}, \gamma_i, \beta_i)$, $i=1, \dots, n$.

Для процедуры планирования вида (3) определим функции поощрения $\sigma_i(x_{i-1}, y_i)$, для которых выполняются условия совершенного согласования при $y_i = x_i = \pi_i(\gamma_i, \rho_i, x_{i-1})$.

Как следует из [3], такая функция поощрения вычисляется по формуле

$$\sigma_i(x_{i-1}, y_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq y_i \leq x_i^c, \\ \int_{x_i^c - x_{i-1}}^{y_i - x_{i-1}} \omega'_i(t, \tilde{r}_i(\gamma_i, t)) dt & \text{при } x_i^c < y_i \leq q_i(x_{i-1}, \gamma_i, r_i^B), \\ \bar{g}_i & \text{при } q_i(x_{i-1}, \gamma_i, r_i^B) < y_i \leq r_i^B. \end{cases}$$

В этом выражении $\tilde{r}_i(\gamma_i, t)$ обозначает обратную функцию к $\tilde{\pi}_i(\gamma_i, \rho_i, x_{i-1})$ по отношению к аргументу ρ_i , $\omega'_i(t, \tilde{r}_i(\gamma_i, t))$ обозначает частную производную по первой переменной функции затрат агента $\omega_i(t, r_i)$, значение \bar{g}_i определяется по формуле

$$\bar{g}_i = \int_{x_i^c - x_{i-1}}^{q_i(x_{i-1}, \gamma_i, r_i^B) - x_{i-1}} \omega'_i(t, \tilde{r}_i(\gamma_i, t)) dt.$$

Максимальное значение целевой функции Ц обеспечивается при максимальных значениях параметров γ_i , которые достигаются при полном использовании фондов поощрения $g=(g_1, \dots, g_n)$.

Предположим, что функции штрафов «линейны», а именно, $\theta_i(x_i, y_i) = k_i |y_i - x_i|$.

Вычислим $x_i^c = x_i^c(y_{i-1}, r_i^H)$ из условия (2). Для рассматриваемых функций штрафов

$$\text{условие (2) эквивалентно условию } \left. \frac{d\omega_i(x, r_i^H)}{dx} \right|_{x=x_i^c} = e_i(x_i^c - x_{i-1}) / r_i = k_i. \quad \text{Отсюда}$$

получаем $x_i^c = x_{i-1} + r_i k_i / e_i$.

Параметр β_i в выражении (3) определяется из условия

$x_i^c(x_{i-1}, r_i^H) = x_{i-1} + (\gamma_i + a_i \beta_i) / (c_i + a_i)$. Отсюда следует

$$\beta_i = [(x_i^c(x_{i-1}, r_i^H) - x_{i-1})(c_i + a_i) - \gamma_i] / a_i = r_i k_i (c_i + a_i) / (e_i a_i) - \gamma_i / a_i.$$

Тогда выражение (3) для процедуры планирования, приобретает вид

$$\tilde{\tau}_i(\gamma_i, \rho_i, x_{i-1}) = \begin{cases} x_{i-1} + r_i^H k_i / e_i, & \text{если } r_i^H \leq \rho_i \leq \beta_i, \\ x_{i-1} + (\gamma_i + a_i r_i) / (c_i + a_i), & \text{если } \beta_i \leq \rho_i \leq r_i^B. \end{cases} \quad (4)$$

Определим функцию $\tilde{r}_i(\gamma_i, t)$, обратную к $\tilde{\tau}_i(\gamma_i, \rho_i, x_{i-1})$ на интервале $(x_i^c(x_{i-1}, r_i^H) - x_{i-1}, (\gamma_i + a_i r_i^B) / (c_i + a_i))$. Имеем $\tilde{r}_i(\gamma_i, t) = (t - x_{i-1})(c_i + a_i) / a_i - \gamma_i / a_i$. Отсюда получаем выражение для функции поощрения, при использовании которой процедура планирования (4) удовлетворяет условиям совершенного согласования [3],

$$\sigma_i(x_{i-1}, y_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq y_i \leq x_{i-1} + r_i^H k_i / e_i, \\ (y_i - x_{i-1} - r_i^H k_i / e_i) a_i e_i / (c_i + a_i) & \\ \text{при } x_{i-1} + r_i^H k_i / e_i < y_i \leq (\gamma_i + a_i r_i^B) / (c_i + a_i), & \\ g_i & \text{при } (\gamma_i + a_i r_i^B) / (c_i + a_i) < y_i \leq r_i^B. \end{cases}$$

Определим оптимальное значение параметра γ_i^* из условия «использования фонда поощрения»: $g_i = [(\gamma_i^* + a_i r_i^B) / (c_i + a_i) - r_i^H k_i / e_i] a_i e_i / (c_i + a_i)$.

Отсюда получаем $\gamma_i^* = [g_i (c_i + a_i) / a_i e_i + r_i^H k_i / e_i] - a_i r_i^B$ и, соответственно, оптимальное значение целевой функции Ц $\Phi(x^*, x^*, r) = \sum_{i=1}^n \gamma_i^*$.

Оптимальный механизм с встречным планированием.

Поскольку для рассматриваемого механизма выполнены условия максимального и совершенного согласования, выбираемые АЭ состояния совпадают с установленными им планами, $y_i = x_i$, и АЭ заинтересованы сообщать достоверную информацию, $\rho_i = r_i$. При этом $r_i = (x_i - x_{i-1})(c_i + a_i) / a_i - \gamma_i / a_i$. Подставив это выражение в формулу для функции поощрения и учитывая $y_i = x_i$, имеем для функции стимулирования на отрезках, задаваемым неравенствами $x_{i-1} + r_i^H k_i / e_i < y_i \leq (\gamma_i + a_i r_i^B) / (c_i + a_i)$, выражение $A_i(x_i - x_{i-1}) - k_i |y_i - x_i|$, где $A_i = [a_i e_i - k_i (c_i + a_i + \gamma_i^*)] / (c_i + a_i)$.

Функция стимулирования, имеющая вид $A_i(x_i - x_{i-1}) - k_i |y_i - x_i|$, используется в механизме с встречным планированием [5]. При встречном планировании агенты сообщают в Ц вместо параметров ρ_i выгодные им планы, а Ц стимулирует агентов с целью обеспечить им выгодность «наиболее напряженных» планов при заданных фондах поощрения.

Таким образом мы проиллюстрировали оптимальность механизма с встречным планированием.

Список литературы

1. Бурков В.Н., Еналеев А.К. Оптимальность принципа открытого управления. Необходимые и достаточные условия достоверности информации в активных системах // Автоматика и телемеханика. – 1985. – № 3. – С. 73–80.
2. Еналеев А.К. Оптимальный механизм функционирования в активной системе с обменом информацией // Управление большими системами. 2010. – № 29. С. 108–127.
3. Еналеев А.К. Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах // Управление большими системами. – 2011. – № 33. – С. 143–166. Enaleev, A.K. Optimal incentive-compatible mechanisms in active systems // Automation and Remote Control. 2013. 74(3). P. 491-505.
4. Еналеев А.К. Оптимальный согласованный механизм в системе с несколькими активными элементами. – М.: Проблемы управления. №3. 2015. С. 20 – 28. Enaleev, A.K. Optimal incentive compatible mechanism in a system with several active elements // Automation and Remote Control. 2017. 78(1). P. 146-158.
5. Механизмы управления / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: ЛЕНАНД, 2011.

The model of the optimum coordinated mechanism in a chain of active elements

A.K. Enaleev

Trapeznukov Institute Control Problem RAS, Moscow, Russia

Одна древовидная повторяющаяся иерархическая игра*

Н.А. Жемчугов, Я.Б. Панкратова, Л.А. Петросян

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

В работе исследуется двухуровневая древовидная повторяющаяся игра с одним руководящим координирующим центром C_0 и производственными фирмами S_1, \dots, S_n . На первом уровне руководящий центр C_0 выбирает вектор управлений $x = (x_1, \dots, x_n)$ из заданного множества управлений X , в котором каждая компонента вектора – это набор ресурсов m видов, т.е. $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$. Компоненты вектора управлений x_i характеризуют воздействие руководящего центра на подчиненные ему подразделения фирмы. На втором уровне $S_i, i = 1, 2, \dots, n$, выбирают управления $y_i \in Y_i(x_i)$, где $Y_i(x_i)$ – множество управлений подразделения S_i . Другими словами, руководящий центр имеет право первого хода и может ограничивать возможность подчиненных ему фирм, направляя их действия в нужное русло. Целью руководящего центра является максимизация по x функционала $H_0(x, y_1, \dots, y_n)$, а целью подчиненных фирм S_i – максимизация $H_i(x, y_i)$, по $y_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Данная бескоалиционная игра Γ $n + 1$ лица (координирующего центра C_0 и подчиненных фирм S_1, \dots, S_n) может быть представлена в нормальной форме [1], [2]. Действительно, предположим, что множество стратегий игрока C_0 имеет следующий вид:

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-51-53030)

$$X = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0, x_i \in R^m, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^m x_i \leq q \right\},$$

где $q \in R^m$ интерпретируется как вектор имеющихся ресурсов. Вектора $x_i, i = 1, \dots, n$, можно таким же образом интерпретировать как набор ресурсов m наименований, поставляемых центром в подразделение i .

Рассматривается случай полной информации, т.е. каждая фирма S_i знает выбор C_0 и в соответствии этим знанием выбирает вектор y_i из некоторого множества $Y_i(x_i)$, которое имеет следующий вид

$$Y_i(x_i) = \{y_i \in R^k, y_i P_i \leq x_i\},$$

где $P_i = \{p_{ij}\}$ интерпретируется как технологическая матрица i -ой фирмы, причем $p_{ij} \geq 0$. Под y_i будем понимать производственную программу i -ой фирмы по разным видам продукции. Под стратегией фирмы S_i будем понимать функцию $y_i(x_i)$, ставящую в соответствие каждому элементу x_i вектор из множества $Y_i(x_i)$. Множество всех таких функций обозначим через $\bar{Y}_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Далее определим функции выигрышей игроков в игре Γ . Для игроков S_i функция выигрыша имеет вид скалярного произведения

$$H_i(x, y_1(x_1), \dots, y_n(x_n)) = \beta_i y_i(x_i),$$

где $\beta_i \geq 0, \beta_i \in R^k$ – фиксированный вектор.

Функцию выигрыша игрока C_0 положим равной сумме скалярных произведений

$$H_0(x, y_1(x_1), \dots, y_n(x_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x_i),$$

где $\alpha_i \geq 0, \alpha_i \in R^k, i = 1, \dots, n$ – фиксированные вектора.

Таким образом, игра Γ имеет вид [2]

$$\Gamma = (C_0, S_1, \dots, S_n; \bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n; H_1, \dots, H_n).$$

В такой игре почти тривиально строится равновесие по Нэшу [2].

Теперь рассмотрим конечную повторяющуюся l шаговую игру Γ^l , в которой на каждом шаге разыгрывается игра Γ .

Предположим, что на шаге t на первом уровне игрок C_0 выбрал вектор распределения ресурсов $x^t = (x_1^t, \dots, x_n^t) \in X^t$, где X^t

$$X^t = \left\{ (x_1^t, \dots, x_n^t) : x_i^t \geq 0, x_i^t \in R^m, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^m x_i^t \leq q \right\}$$

и на втором уровне игроки S_1, \dots, S_n выбрали свои производственные программы y_1^t, \dots, y_n^t , где $y_i^t \in Y_i^t$

$$Y_i^t = \{y_i^t \in R^k, y_i^t P_i^t \leq x_i^t\},$$

где P_i^t – технологическая матрица i -ой фирмы и $y_1^t(x_1^t), \dots, y_n^t(x_n^t)$ – стратегии игроков S_1, \dots, S_n на шаге t . Тогда функции выигрыша для игроков S_i за t шагов определяется следующим образом

$$H_i^t(x^t, y_1^t(x_1^t), \dots, y_n^t(x_n^t)) = \sum_{m=1}^t \beta_i y_i^m(x_i^m),$$

а для игрока C_0 функция выигрыша имеет вид

$$H_0^t(x^t, y_1^t(x_1^t), \dots, y_n^t(x_n^t)) = \sum_{m=1}^t \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^m(x_i^m).$$

Предположим, что игра повторяется l раз. В полученной l шаговой игре возможны различные равновесия по Нэшу, основанные на стратегиях угроз или наказания. В

одном случае центр навязывает подчиненным фирмам их поведение (вектор производимых товаров), угрожая лишить их ресурсов при отклонении от предписанного поведения. В другом случае подчиненные фирмы могут навязать центру определенное распределение ресурсов, угрожая прекратить производство в случае невыполнения их требований.

Пусть в игре первые k шагов ($k < l$) игрок C_0 диктует свои условия, т.е. выделяет необходимое количество ресурсов \tilde{x}^j , $j = 1, \dots, k$ для производства определяемого им количества товара \tilde{y}_i^j , которые нужно произвести фирмам S_i на шаге $j = 1, \dots, k$ из условия максимизации своего выигрыша. В случае отказа фирм от производства, навязанного центром фиксированного количества товара, игрок C_0 наказывает фирмы S_i , прекращая поставку ресурсов, и, соответственно, выигрыш фирм S_i на шаге отклонения оказывается равным 0.

На следующих $(l - k)$ шагах фирмы S_i заключают между собой сговор и диктуют свои условия, требуя от руководящего центра фиксированный вектор управлений (ресурсов) $\tilde{x}^t = (\tilde{x}_1^t, \dots, \tilde{x}_n^t) \in X^t$, чтобы произвести продукцию \tilde{y}_i^t , $t = l - k, \dots, l$, максимизирующую суммарный выигрыш фирм S_i . Аналогично, если руководящий центр C_0 , отказывается на некотором шаге распределить ресурсы указанным образом, то фирмы перестают производить продукцию, и выигрыш на этом шаге у центра становится равным 0.

Используя различные комбинации подобного поведения на различных шагах игры, как со стороны руководящего центра, так и со стороны подчиненных фирм получаем широкое семейство равновесий по Нэшу. Разумеется, в этой игре имеется и тривиальное равновесие, которое является повторением на каждом шаге равновесия подробно описано в работе [2].

Задача может быть обобщена на случай бесконечно повторяющейся игры с дисконт фактором. Также интересно исследовать случай, когда не все подчиненные подразделения, а только их подмножество может диктовать свои условия координирующему центру, угрожая прекратить производство и выявить, какое из подмножеств подчиненных фирм может это сделать.

Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Игры с не противоположными интересами. М.: Наука. 1976.
2. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Громова Е.В. Теория игр. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
3. Nash J. Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences. 36. 1950.

Tree-like Repeated Hierarchical Game

N.A. Jemchugov, Y.B. Pankratova, L.A. Petrosyan,
St Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

Равновесие в безопасных стратегиях и игра с неопределенным инсайдером

М.Б. Исаков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Доклад посвящен прояснению вопроса связи понятия равновесия в безопасных стратегиях [1, 2] с динамическими многошаговыми играми, с порядком ходов (особенно когда игроков больше двух), с совершенным равновесием по подыграм, с равновесием Штакельберга и так далее. Базовым предположением нэшевского анализа игр в нормальной форме является предположение, что игроки принимают решение по

выбору стратегии одновременно и независимо. Но, если игроки строят в своих рассуждениях предположения относительно угроз со стороны других игроков, значит исходное для игр в нормальной форме допущение, что игроки определяют свои стратегии одновременно и независимо, нарушается. Это означает, что в конструкции РБС неявно присутствует предположение о неодновременности принятия решений игроками? Действительно, в экономической реальности предположение об одновременности принятия решений всеми игроками является очень сильным. Попробуем немного, самым минимальным образом ослабить это допущение, и строго сформулировать альтернативу, вместо одновременности и независимости принятия решений. Пусть в игре, после одновременного принятия решения всеми игроками, появляется «инсайдер», который имеет возможность изменить свою стратегию, причем заранее никто не знает, кто окажется инсайдером, в том числе и он сам. В таком случае все игроки, следуя принципу максимального гарантированного результата, будут стремиться обезопасить себя от самого неблагоприятного развития событий.

Сформулируем постановку игры с неопределенным инсайдером строго. Пусть задана исходная игра $\Gamma = \{N = \{1, \dots, n\}, x_i \in X_i, u_i(x) \in \mathfrak{R}\}$. Рассмотрим двухшаговую игру с участием природы, которая на втором шаге, поле того, как игроки выбрали стратегии $x = (x_1, \dots, x_n)$, определяет значение параметра $\theta(x) = (\theta_0, \theta_1(x), \dots, \theta_n(x)) \in \Theta(x)$. Параметр $\theta_0 \in N$ обозначает номер игрока-инсайдера. Изменение стратегии i -го игрока, если он оказался инсайдером, задается как $\theta_i(x) \in \Theta_i(x) \subseteq X_i$, где $\Theta_i(x) = x_i \cup \{x'_i : u_i(x'_i, x_{-i}) > u_i(x)\}$. То есть изменение стратегии инсайдера происходит неопределенным образом, но при условии, что его выигрыш увеличивается, если это возможно. Выигрыши игроков по итогам игры составляют: $\tilde{u}_i(x, \theta(x)) = u_i(x_1, \dots, x_{\theta_0-1}, \theta_{\theta_0}(x), x_{\theta_0+1}, \dots, x_n)$. Таким образом, корректно поставлена игровая задача с неопределенностью $\tilde{\Gamma} = \{N, x_i \in X_i, \theta(x) \in \Theta(x), \tilde{u}_i(x, \theta(x))\}$. Пусть игроки устраняют неопределенность по методу гарантированного результата. Тогда целевые функции игроков будут составлять: $\hat{u}_i(x) = \min_{\theta \in \Theta(x)} \tilde{u}_i(x, \theta)$. Назовем так определенную игру *игрой с неопределенным инсайдером*.

Утверждение 1. РБС игры Γ всегда будет равновесием Нэша игры с неопределенным инсайдером $\tilde{\Gamma}$ с устранением неопределенности по МГР.

Доказательство. Пусть x^* – РБС игры Γ . Тогда $u_i(x^*) = \hat{u}_i(x^*)$, так как в профиле x^* нет угроз и никакое отклонение $\theta \in \Theta(x^*)$ не может уменьшить выигрыш игроков. Допустим существует такое отклонение (x'_i, x_{-i}^*) , что $\hat{u}_i(x'_i, x_{-i}^*) > \hat{u}_i(x^*)$. Это означает, что игрок i может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением x'_i , и x^* – не РБС?! •

В игре с неопределенным инсайдером игрок, получивший возможность изменения стратегии, совершает его неопределенным образом, он лишь увеличивает свой выигрыш, но не стремится достичь его максимального значения. Если предположить, что инсайдер будет максимизировать свой выигрыш, то это сократит принимаемое во внимание другими игроками множество возможных угроз и приведет к выбору более рискованных (в игровом смысле) стратегий. Тем не менее, при моделировании осторожного поведения кажется естественным предположить, что игроки будут руководствоваться не предположениями об абсолютно рациональном поведении партнеров, но предпочтут застраховаться от более широкого множества возможных угроз.

Таким образом, выше получены два множества профилей игры, включающие в себя множество РБС M_{EinSS} : множество наилучших безопасных профилей M_{BSR} и

множество равновесий игры с неопределенным инсайдером M_{UIGE} . Следующее утверждение задает соотношение этих множеств между собой.

Утверждение 2. *Игровой профиль $x \in (M_{BSR} \cap M_{UIGE}) \setminus M_{EinSS} \Rightarrow$ существует хотя бы одно безопасное отклонение от x , и для любого безопасного отклонения x'_i существует угроза $\{(x'_i, x_{-i}), (x'_i, x'_j, x_{-ij})\}$, такая что $u_i(x'_i, x'_j, x_{-ij}) = u_i(x)$.*

Доказательство. Из утверждений 1 и 2 следует, что $M_{EinSS} \subseteq M_{BSR}$ и $M_{EinSS} \subseteq M_{UIGE}$. Так как $x \in M_{BSR}$, то любое отклонение, увеличивающее выигрыш, содержит угрозу отклонившемуся игроку. Так как $x \notin M_{EinSS}$, то для некоторого игрока i существует безопасное отклонение x'_i , то есть для любой угрозы $\{(x'_i, x_{-i}), (x'_i, x'_j, x_{-ij})\}$: $u_i(x'_i, x'_j, x_{-ij}) \geq u_i(x)$. Если допустим, что для всех таких угроз $u_i(x'_i, x'_j, x_{-ij}) > u_i(x)$, то $x \notin M_{UIGE}$, так как $\hat{u}_i(x'_i, x_{-i}) > \hat{u}_i(x)$. Значит, существует угроза $\{(x'_i, x_{-i}), (x'_i, x'_j, x_{-ij})\}$, такая что $u_i(x'_i, x'_j, x_{-ij}) = u_i(x)$.

Доказанное утверждение говорит о том, что если игровой профиль одновременно является наилучшим безопасным профилем и равновесием игры с инсайдером, то он либо является РБС, либо допускает для игроков только такие безопасные отклонения, в которых содержатся угрозы, сводящие выигрыш этих игроков к исходному положению.

Таким образом, конструкция игры с неопределенным инсайдером поясняет связь понятия РБС с динамическими играми. Предложенное равновесие не совпадает ни с совершенным равновесием по подыграм, ни с равновесием Штакельберга. Это есть равновесие игры с введенной минимальной динамикой возможностью для одного неизвестного заранее игрока-инсайдера однократно сменить стратегию и неопределенностью относительно новой стратегии этого инсайдера.

Список литературы

1. Исаков М.Б. Равновесие в безопасных стратегиях и равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх. // Автоматика и телемеханика. 2008. №2. С. 114-134.
2. M.Iskakov, A.Iskakov, C. d'Aspremont Games for cautious players: the equilibrium in secure strategies // CORE discussion paper 2016/51. Center for Operations Research and Econometrics, Universite catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, <http://www.uclouvain.be/en-44508.html> 28 p

Equilibrium in Secure Strategies & Game with Uncertain Insider

M.B. Iskakov

ICS RAS named after V. A. Trapeznikov, Moscow, Russia

Моделирование противозатратных механизмов управления в условиях вероятностной неопределенности

А.Р. Кашенков

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

Рассмотрим модель организации-монополиста, выпускающей какую-либо продукцию. Эта модель подходит для научной организации и для предприятия. Производимый продукт может быть как интеллектуальной продукцией или услугой, так и материальным продуктом. Аналогичная модель применима для систем внутрифирменного управления, когда подразделения являются монополистами.

Продукт характеризуется себестоимостью производства C , устанавливаемой производителем, и эффектом L , определяемым потребителем. В качестве полезного эффекта L может выступать предельная цена, то есть максимальная цена, которую потребитель еще может заплатить и получить от продукции положительный эффект. В качестве показателя эффективности можно взять $\mathcal{E} = \frac{L}{C}$, то есть эффект у потребителя на единицу себестоимости продукта. Цена продукта \mathcal{C} есть сумма себестоимости продукта (затрат производителя) и прибыли \mathcal{P} . Тогда $\mathcal{C} = C + \mathcal{P} = (1 + \rho) \cdot C$, где $\mathcal{P} = \rho \cdot C$ - прибыль, ρ - рентабельность. Соотношения записаны для единицы продукции, но если считать количество продукции постоянным, то они справедливы для любого объема выпуска.

Одним из возможных путей обеспечения противозатратности механизма управления для монополиста являются регулируемые цены. Противозатратность механизма ценообразования может достигаться за счет введения зависимости рентабельности от эффективности [1-3]. Примем, что интерес производителя определяется стремлением к максимизации прибыли.

Механизм ценообразования называется противозатратным (по прибыли), если при уменьшении затрат производителя (себестоимости) прибыль растет, а цена продукта уменьшается.

Поскольку при уменьшении себестоимости растет эффективность $\mathcal{E} = \frac{L}{C}$, то для обеспечения противозатратности естественно увеличивать ρ вместе с ростом эффективности \mathcal{E} . Будем предполагать, что $\rho(\mathcal{E})$ - возрастающая дифференцируемая функция. В формальной записи требования противозатратности имеют вид:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial C} < 0, \quad \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial C} > 0. \quad (1)$$

Из (1) получаем условия, которым должна удовлетворять $\rho(\mathcal{E})$:

$$0 < \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{E}} - \rho(\mathcal{E}) < 1. \quad (2)$$

Множество значений эффективности, для которых выполняются условия (2), называется множеством противозатратности механизма по прибыли G .

Функция $h(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{E}} - \rho(\mathcal{E})$ называется характеристической функцией множества противозатратности. Функция $h(\mathcal{E})$ на множестве G принимает значения из интервала (0,1). Зная характеристическую функцию можно сразу найти множество противозатратности механизма ценообразования.

Величина $h(\mathcal{E})$ определяет влияние снижения себестоимости на рост прибыли, а величина $1 - h(\mathcal{E})$ определяет влияние снижения себестоимости на снижение цены.

Можно решить обратную задачу, то есть восстановить зависимость $\rho(\mathcal{E})$ по заданной характеристической функции $h(\mathcal{E})$. Для этого рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\mathcal{E} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{E}} - \rho(\mathcal{E}) = h(\mathcal{E}). \quad (3)$$

Его решение имеет вид:

$$\rho(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cdot \left[\frac{\rho_{\min}}{\mathcal{E}_{\min}} + \int_{\mathcal{E}_{\min}}^{\mathcal{E}} \frac{h(x)}{x^2} dx \right], \quad (4)$$

где $\rho_{\min} = \rho(\mathcal{E}_{\min})$ - минимальная рентабельность, соответствующая минимально допустимой эффективности. Если $\mathcal{E}_{\min} = 1$, то (4) принимает вид:

$$\rho(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cdot \left[\rho(1) + \int_1^{\mathcal{E}} \frac{h(x)}{x^2} dx \right]. \quad (5)$$

Все сказанное выше справедливо для планируемой прибыли. Поскольку при росте планируемой себестоимости цена растет, то фактическая прибыль $\hat{\Pi} = \hat{C} - \hat{C}$ также растет (\hat{C} - фактическая себестоимость). Чтобы избежать завышения цены ставка налога на сверхплановую прибыль должна быть больше, чем ставка налога на планируемую прибыль.

Рассмотрим ситуацию, когда фактическая себестоимость имеет вероятностное распределение. Будем считать, что плотность распределения вероятностей $f(\hat{C})$ для конкретного продукта известна. Пусть $\rho(\mathcal{E}) = \varepsilon(\mathcal{E} - 1)$, где $0 < \varepsilon < 1$.

В этом случае прибыль организации

$$\Pi = (1 + \rho)C - \hat{C} = \Pi_{\Pi} + \Pi_C, \quad (6)$$

где $\Pi_{\Pi} = \rho \cdot C = \varepsilon(L - C)$ - планируемая прибыль, $\Pi_C = C - \hat{C}$ - сверхплановая прибыль.

Пусть μ_{Π} - налоговая ставка на планируемую прибыль, μ_C - налоговая ставка на сверхплановую прибыль. В качестве целевой функции производителя будем рассматривать остаточную прибыль. Если $C \leq \hat{C}$, то остаточная прибыль

$$\Pi_o = (1 - \mu_{\Pi})\varepsilon(L - C) + C - \hat{C}. \quad (7)$$

Если $C > \hat{C}$, то остаточная прибыль

$$\Pi_o = (1 - \mu_{\Pi})\varepsilon(L - C) + (1 - \mu_C)(C - \hat{C}). \quad (8)$$

Из условий $\frac{\partial \Pi_o}{\partial \hat{C}} < 0$ и $\frac{\partial \Pi_o}{\partial C} < 0$ получаем

$$1 - \varepsilon(1 - \mu_{\Pi}) < \mu_C < 1. \quad (9)$$

Из условий максимума математического ожидания $M[\Pi_o]$ остаточной прибыли по планируемой себестоимости C получаем

$$\int_0^C f(\hat{C}) d\hat{C} = \frac{1 - \varepsilon + \mu_{\Pi}\varepsilon}{\mu_C}. \quad (10)$$

Меняя параметры μ_{Π} , μ_C и ε можно менять значение $F(C) = \int_0^C f(\hat{C}) d\hat{C}$, то есть вероятность того, что реальная себестоимость производства продукта меньше планируемой.

Недостатком рассмотренного механизма ценообразования является необходимость деления прибыли на планируемую и сверхплановую. От этого недостатка свободны противозатратные механизмы налогообложения. В дальнейшем представляется целесообразным исследовать противозатратные механизмы налогообложения в случае вероятностной неопределенности затрат на производство продукта.

Список литературы

1. Бурков В.Н., Кашенков А.Р. Противозатратный механизм управления научными исследованиями и разработками // Совершенствование организационно-экономического механизма управления деятельностью научных организаций. М: МДНТП, 1988. С. 49-53.
2. Кашенков А.Р. Моделирование противозатратных механизмов управления с учетом различных видов областей противозатратности // Управление большими системами: сборник трудов. 2000. № 2. С. 59-61.
3. Бурков В.Н., Дорри М.Х., Щепкин А.В., Кашенков А.Р. Противозатратный механизм ценообразования в системе «центр – агенты монополисты» // Экономика и менеджмент систем управления. 2017. Т. 26, № 4.1. С. 164-172.

Modeling of cost-effective control mechanisms under conditions of probabilistic uncertainty

A.R. Kashenkov

Vologda State University, Vologda, Russia

Теоретико-игровая модель продвижения инноваций в организациях*

Г.А. Угольницкий, А.Б. Усов

ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия

Продвижение инноваций в организациях является мощным средством повышения производительности труда и роста эффективности их функционирования. Задача продвижения инноваций является относительно новой. Подробно о способах ее решения написано, например, в [1]. Эта задача состоит в выборе механизма стимулирования, при котором сотрудникам организаций будет экономически выгодно заниматься инновационной деятельностью.

Ниже данная задача решается в рамках иерархического управления устойчивым развитием разного рода организационных систем [2-4].

Методология иерархического управления устойчивым развитием организаций изложена, например, в [5]. Иерархическое управление подразумевает использование определенного метода, к числу которых можно отнести два основных: принуждение и побуждение. Принуждение предполагает воздействие ведущего игрока (субъекта управления верхнего уровня, супервайзера) на множество допустимых управлений ведомого (субъекта нижнего уровня, агента), а побуждение – на функционал выигрыша ведомого. Как при принуждении, так и при побуждении игра между супервайзером и агентами ведется в соответствии с выбранным информационным регламентом. В иерархических дифференциальных играх реализуется четыре основных регламента, соответствующих играм Гермейера с обратной связью по управлению/состоянию и без нее. В настоящей работе рассматриваются игры в программных стратегиях, соответствующие регламентам Γ_{1t} и Γ_{2t} [2].

Статья логически продолжает ряд работ авторов [5-7]. В отличие от [5] ниже при нахождении оптимальных стратегий агентов возникает известная задача оптимального управления, более точно описывающая интересы агентов в задаче продвижения инноваций. Кроме того, при численном исследовании задачи используется метод качественно репрезентативных сценариев [8], позволяющий с меньшими временными

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 17-19-01038.

затратами найти оптимальные стратегии субъектов с заданной точностью. При сравнительном анализе разных методов управления для оценки их эффективности вычисляется индекс системной согласованности интересов субъектов управления.

Постановка задачи

Рассматривается двухуровневая модель продвижения инноваций. Исследуется случай одного субъекта управления верхнего уровня (супервайзера) и N субъектов управления нижнего уровня (агентов). Непосредственно внедрением инноваций занимаются агенты, но их интересует только максимизация своего выигрыша. За продвижение инноваций отвечает супервайзер. Внедрение инноваций является его основной целью и обеспечивает устойчивое развитие всей активной системы. Устойчивое функционирование активной системы супервайзер может обеспечить не единственным способом, поэтому, кроме того, он преследует свои частные цели, которые выражаются в стремлении к максимизации своего выигрыша. Супервайзер воздействует на каждого из агентов, используя выбранный метод иерархического управления, в соответствии с используемым информационным регламентом. Целевые функционалы агентов возьмем в виде

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t} [-x(t) - \frac{\alpha}{2} u_i^2(t) + s_i(u_i(t))] dt \rightarrow \max . \quad (1)$$

Максимизация (1) проводится по функции u_i - темпу внедрения инноваций i -м агентом ($i \in N$); $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множество агентов инноваций. Кроме того, в (1): t - время; T - конечный горизонт времени, до которого ведется моделирование; ρ - коэффициент дисконтирования; $x(t)$ - уровень стагнации фирмы; α - постоянная, выражающая затраты агентов при внедрении инноваций; $s_i(t) = s_i(u_i(t))$ - поощрение (наказание) i -го агента супервайзером за продвижение (непродвижение) инноваций. При принуждении функции $s_i(u_i(t))$ считаются заданными, а при побуждении являются управлениями супервайзера. Целевые функционалы J_i отражают дисконтированный доход агентов (1, 2, ..., n) от внедрения инноваций на периоде $[0, T]$. Ограничения на управления агентов имеют вид

$$q_i(t) \leq u_i(t) \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь величины $q_i(t)$ определяют минимально допустимые усилия агентов по продвижению инноваций. При побуждении эти величины заданы, например, полагаются равными нулю, а при принуждении функции $q_i(t); 1, 2, \dots, n$ являются управлениями супервайзера.

Динамика системы описывается уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = \beta(t) - \sqrt{x(t)} \sum_{i=1}^n u_i(t), \quad x(0) = x_0 . \quad (3)$$

Здесь $\beta(t)$ - функция стагнирования; x_0 - уровень стагнации в начальный момент времени.

Целевые функционалы супервайзера (J_0) при побуждении и принуждении незначительно, но отличаются друг от друга. Именно, целевой функционал супервайзера имеет вид:

- при принуждении

$$J_0 = \int_0^T e^{-\rho t} [-x(t) - D(\sum_{i=1}^N q_i(t))] dt \rightarrow \max ; \quad (4)$$

- при побуждении

$$J_0 = \int_0^T e^{-\rho t} [-x(t) - \sum_{i=1}^N s_i(u_i(t))] dt \rightarrow \max . \quad (5)$$

Здесь функционал J_0 выражает общий дисконтированный доход супервайзера от внедрения инноваций на периоде $[0, T]$ с учетом затрат $D(t) = D(\sum_{i=1}^N q_i(t))$ на административный контроль внедрения инноваций; D - непрерывная выпуклая функция, $D(0)=0$.

При принуждении супервайзер устанавливает минимально возможные усилия агентов по продвижению инноваций, а при побуждении величину поощрения/наказания за их продвижение/непродвижение.

Ограничения на управления супервайзера имеют вид

- при принуждении

$$0 \leq q_i(t) \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, n.; \quad 0 \leq t \leq T; \quad (6)$$

- при побуждении

$$0 \leq s_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, n.; \quad 0 \leq t \leq T . \quad (7)$$

Исследуемая модель (1) – (3) и (4), (6) или (5), (7) представляет собой дифференциальную неантагонистическую игру n агентов и супервайзера при наличии иерархии в отношениях между ними, которая ведется в соответствии с информационными регламентами игр Гермейера Γ_{1t} и Γ_{2t} [2].

Алгоритмы построения равновесий

С математической точки зрения модель (1) – (3), (4), (6) или (5), (7) представляет собой динамическую неантагонистическую игру, в которой динамика управляемой системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (3).

Примем следующие предположения относительно информационного регламента игры между субъектами для модели (1) – (3), (4), (6) или (5), (7):

- все игроки используют программные стратегии;
- супервайзер выбирает и сообщает агентам административные (6) или экономические (7) управления. При использовании административных управлений игра ведется в соответствии с информационным регламентом игры Гермейера без обратной связи по управлению, а в случае экономических управлений – с обратной связью по управлению;

- при известных стратегиях супервайзера агенты одновременно и независимо выбирают свои стратегии поведения, что приводит к равновесию Нэша в игре агентов. Будем считать, что множество равновесий Нэша в игре агентов не пусто для рассматриваемого класса входных данных.

Приведем алгоритмы построения равновесий для модели (1) – (3), (4), (6) или (5), (7) при использовании разных информационных регламентов.

Алгоритм построения равновесия при принуждении в игре Гермейера без обратной связи по управлению для модели (1) – (3), (4), (6) состоит в следующем [5]:

1. Супервайзер выбирает программную стратегию вида

$$q(t) = \{q_i(t)\}_{i=1}^N \in Q = \{0 \leq q_i(t) \leq 1 \quad i = 1, \dots, N; 0 \leq t \leq T\}$$

и сообщает ее всем агентам.

2. Зная выбранную супервайзером стратегию, агенты разыгрывают между собой неантагонистическую игру (1) – (3). Решением этой игры является равновесие Нэша $NE(q(\cdot))$.

3. Супервайзер выбирает программную стратегию так, чтобы максимизировать свой выигрыш (4) на множестве равновесий Нэша $NE(q(\cdot))$ с учетом (6).

Алгоритм построения равновесия при побуждении в игре Гермейера с обратной связью по управлению для модели (1) - (3), (5), (7) состоит в следующем [6]:

1. Супервайзер определяет стратегии наказания агентов, если они отказываются с ним сотрудничать. Для этого при его фиксированных управлениях $(s(t) \in S = \{(s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t))\})$ рассматривается неантагонистическая игра агентов (1) - (3). Находятся равновесия Нэша - $NE(s(t))$.

Допустим, что равновесий Нэша при фиксированном управлении супервайзера $s(t)$ есть L_s штук.

Введем обозначения

$$(u_i^{NE}(t))_k = (u_i^{NE}(s(t), t))_k; i = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, L_s \text{ и } u_k^{NE}(t) = \{(u_i^{NE}(t))_k\}_{i=1}^n.$$

Вводятся стратегии наказания агентов и

$$s^P(t) = \{s_i^P(t)\}_{i=1}^n; s_i^P(t) = \arg \min_{s_i \geq 0} \max_{1 \leq k \leq L_s} J_i((u_i^{NE})_k(t), s_i(t), x(t))$$

Находятся максимальные гарантированные выигрыши агентов, если они отказываются сотрудничать с супервайзером и он применяет по отношению к ним стратегию наказания:

$$R_i = \min_{s(t) \in S} \max_{1 \leq k \leq L_s} J_i((u_i^{NE})_k(t), s(t), x(t)); i = 1, \dots, n.$$

2. Решается задача оптимального управления (1) - (3), (5), (7) с дополнительными условиями $R_i < J_i(u_i(t), s_i(t), x(t)); i = 1, \dots, N$. При этом максимум для функционала супервайзера J_0 ищется одновременно по (2 N) функциям $s_i(t), u_i(t); i = 1, \dots, N$.

Решение указанной задачи оптимального управления обозначим $\{s_i^R(t), u_i^R(t)\}_{i=1}^n$, где $s_i^R(t)$ - стратегия поощрения i -го агента супервайзером.

3. Супервайзер предъявляет каждому агенту стратегию с обратной связью по его управлению:

$$s_i(t) = \begin{cases} s_i^R(t), & \text{если } u_i(t) = u_i^R(t) \text{ для } \forall t \in [0, \infty), \\ s_i^P(t), & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. При экономически разумных агентах решение имеет вид $\{s_i^R(t), u_i^R(t)\}_{i=1}^N$.

В случае входных данных общего вида решение ищется с помощью имитационного моделирования по методу качественно репрезентативных сценариев (КРС) [8].

Заключение

В работе предложена оригинальная модель продвижения инноваций в организациях, в которой предусмотрена возможность использования двух информационных регламентов, соответствующих дифференциальным играм Гермейера с обратной связью по управлению и без нее. Указаны алгоритмы построения равновесий, которые были реализованы численно. Проведенное математическое моделирование инновационного развития организаций помогает выбрать информационный регламент и метод иерархического управления, которые обеспечивают максимальный экономический эффект от внедрения инноваций для всех субъектов и лучшую системную согласованность.

Литература

1. Новиков Д.А., Иващенко А.А. Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы. М. Комкнига, 2006.
2. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М. Радио и связь, 1991.
3. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М. СИНТЕГ, 1999.

4. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. М. Физматлит, 2007.
5. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Динамические иерархические игры двух лиц в программных стратегиях и их приложения // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. № 5(2), С. 82-104.
6. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика. 2014. №6, С.86-102.
7. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Алгоритмы решения дифференциальных моделей иерархических систем управления // Автоматика и телемеханика. 2016. №5, С.148-158.
8. Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. N.Y.: Nova Science Publishers, 2018. P.63-106.

A game-theoretic model of the promotion of innovations in organizations

G.A. Ougolnitsky, A.B. Usov
SFedU, Rostov-on-Don, Russia

Комплексная модель двухэтапного сетевого взаимодействия игроков: сообщение своих функций полезности и выбор стратегий

Д.Н.Федянин

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Работа основана на результатах из [2-5] и является дальнейшим развитием построений в [6-12].

Пусть задана игра в нормальной форме виде $G = \langle N, X, F \rangle$, где N – множество игроков, X – набор множеств допустимых стратегий игроков, F – набор функций полезности игроков.

Игроки выбирают свои стратегии вне зависимости от того действительно ли они получат свой выигрыш в соответствии с их целевой функцией или же это лишь их субъективное представление о том, как именно будет рассчитываться их выигрыши. Подробнее взаимосвязь между представлениями агентов об их целевых функциях и целевыми функциями, в соответствии с которыми действительно будет распределяться выигрыш описано в работе [1].

Пусть каждая функции полезности каждого игрока зависит от представления игрока о значении набора параметров k , как описано, например, в работах [2, 3].

Представление игрока может быть названо его мнением, и тогда будет естественным использовать модели динамики мнений в мультиагентной системе. В том числе модели консенсуса для социальных сетей, например, марковская модель описанная Де Гроотом в работе [4]. Подробное описание есть в работе [5]. Эта модель приписывает каждого игроку мнение, выраженное действительным числом, и затем последовательно вычисляет новое знание мнения как взвешенную сумму мнений игроков на предыдущем шаге, причем веса считаются заданными и постоянными, определяющимися графом доверия между агентами.

Таким образом, мы получаем описание взаимодействия в виде двухэтапной комплексной модели – вначале используется модель динамики представлений, а уже затем осуществляется сам выбор стратегий агентов. Пример такого взаимодействия описан в работе [6]. Другие пример такого исследования приведены в работах [7, 8].

Более подробно о самой методологии комплексирования можно найти информацию в работе [9].

Несмотря на механистический подход к комплексированию модели, уже он дает интересные результаты. В частности, можно рассмотреть целевую функцию, которая определяется таблицей значений, которые в свою очередь можно рассмотреть, как параметры, о которых у игроков есть свои представления. В этом случае можно использовать модель динамики мнений. Пример подобного исследования описания представлено в работе [10].

Отметим, что в работе [10] рассматривается более запутанный случай – в ней сравниваются результаты различного комплексирования – обмен локальными представлениями и затем глобальный выбор наилучшего мнения (которому может быть сопоставлено действие), и локальные выборы наилучших мнений (которым может быть сопоставлено действие) и затем глобальный обмен уже наилучшими мнениями.

Возвращаясь к табличным значениям как параметрам. Мы получаем важный результат. В рамках этой модели фактически получается, что итоговые целевые функции игроков будет равны взвешенной сумме (если выбрана марковская модель обмена мнениями) исходных целевых функций агентов.

Этот простой математический результат может быть довольно неожиданным с точки зрения интерпретации. Получается в процессе взаимодействия игроков результатом их доверия мнению других игроков становится изменение своих целевых функций. Однако, по сути, именно такое изменение целевых функций агентов происходит и играх Γ_1 и Γ_2 , когда центр выбирает правило выплаты вознаграждения агенту [11]. Более подробно об играх Γ_1 и Γ_2 можно прочитать в фундаментальной работе по этой теме [12].

Полученную модель можно естественным образом изменить, заменив модель обмена мнениями де Гроота моделью Фридкина-Джонсена [13], в которой игроки свои мнение вычисляют не только как взвешенную сумму предыдущих, но и с некоторым весом учитывают свое исходное мнение.

Сложная структура представлений агентов и их целевых функций позволяет сделать новое обобщение, которое в дальнейшем представляется интересным изучать и в качестве самостоятельной модели обмена мнениями. Суть ее в том, что не вся целевая функция игроков становится предметом обсуждения посредством модели обмена мнениями. Можно естественным образом предположить, что агенты готовы обсуждать лишь один из элементов своей целевой функции.

Проще всего это показать на примере. Пусть есть два игрока: Центр и Работник. Целевая функция центра F состоит из двух составляющих – функции дохода центра H и функция расходов на стимулирование агента s , причем Центр готов обсуждать с работником лишь функцию расходов на его стимулирование s . Целевая функция Работника f также состоит из двух частей – функции его доходов s , полученных от стимулирования его Центром, и функции расходов c . Действие Центра пока не рассматриваем, а действие агента – x – именно от него зависят значения функций H , s , x , F , f . Это можно записать формально в привычном стиле [11]

$$\begin{aligned} F(x) &= H(x) - s(x), \\ f(x) &= s(x) - c(x). \end{aligned}$$

Пусть первоначальное представление о функции s у Работника и Центра отличались. Обозначим представление Центра в начальный момент времени – $s_1(0)$, а представление Работника $s_2(0)$.

Пусть в процессе взаимодействия Центр и Работник на основании своего доверия к друг другу (например, по обобщении марковской модели Де Гроота, о котором было сказано выше) придут к консенсусу относительно функции стимулирования $s_1(\infty) = s_2(\infty) = w_1 s_1(0) + w_2 s_2(0)$, где w_1 и w_2 – соответственно влияния Центра и Работника. Получается, что Центр и Работник используют модель обмена мнениями

лишь для обсуждения части своей целевой функции, а итоговые целевые функции получают, подставляя в них результат консенсуса. Еще раз отметим, что результат консенсуса может быть не только числом как это принято в классических работах, но также и функцией, аналогично как это было сделано для поиска консенсуса функции предпочтения в работе [10].

Такое стимулирование не совпадает с классическим оптимальным (см., например, [11]), но прямое сравнение здесь не очень корректно, так как описанная выше процедура учитывает такое понятие как влияние, важность которого в социальных системах считается довольно высокой (см., например, [5]).

Интерпретируем полученный в этом примере результат. Мы получили, что Центр и Работник провели процесс переговоров и пришли к консенсусу, который им обоим представляется приемлемым. На первый взгляд, кажется неестественным то, что, казалось бы, нерациональное стимулирование может признаваться всеми(!) участниками переговоров как приемлемое. Однако потенциально возможная нерациональность консенсуса в реальных экспериментах была показана в частности, в игре “Ultimatum game” [14].

Отметим, что консенсусом можно управлять и есть большое количество работ, посвященных исследованию этой области, например, [15, 16].

Частным случаем является произвольная иерархическая структура общения между игроками, в том числе можно рассмотреть линейный порядок. В этом случае становится возможным использовать частные результаты управления консенсусом, например, [17].

Если на консенсус накладываются ограничения – например, доступный бюджет или другие особенности, то управление таким объектом тоже возможно, но требуются использовать специализированные методы и результаты, например, [18].

В заключение отметим, что полученная модель динамики изменения представления взаимодействия игроков и последующее принятие ими решения основана на классической теории игр, но является комплексной и учитывает также модели динамики представлений игроков.

Список литературы

1. Perea A. Epistemic game theory: reasoning and choice. – Cambridge University Press, 2012.- 580 p.
2. Novikov D., Chkhartishvili, A. Reflexion & Control: Mathematical models.// Series: Communications in Cybernetics, Systems Science and Engineering (Book 5). CRC Press. March 10, 2014. P. 298
3. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексия и управление: математические модели. – М.: Физматлит, 2012. – 412 с.
4. DeGroot M.H. Reaching a Consensus // Journal of American Statistical Assotiation. 1974. №69, P.118-121.
5. Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. – М.: Издательство физико-математической литературы, - 2010. - 228с.
6. Федянин Д.Н. О консенсусе в социальной сети со сложными узлами при двух этапах взаимодействия // Материалы 13-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2016, Самара). М.: ИПУ РАН, 2016. С. 501-510.
7. Fedyanin D.N., Chkhartishvili A.G. On a model of informational control in social networks // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, No. 10. С. 2181–2187.
8. Федянин Д.Н., Чхартишвили А.Г. Об одной модели информационного управления в социальных сетях // Управление большими системами. 2010. вып. 31. С. 265-275.

9. Бурков В. Н., Коргин Н. А., Новиков Д. А., Проблемы комплексирования и декомпозиции механизмов управления организационно-техническими системами // Пробл. управл., 2016, № 5, 14–23
10. Федянин Д.Н. Об одном обобщении марковской модели на случай мнений, заданных в виде вероятностных распределений / Труды 5-й Российской мультиконференции по проблемам управления, конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург). СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2012. С. 1109-1111.
11. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. Издание 2, М.: 2005.
12. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976. - 327 с.
13. Friedkin, N. E., & Johnsen, E. C. (1999). Social influence networks and opinion change, *Advances in Group Processes*, 16(1), 1-29.
14. Nowak, M. A.; Page, K. M.; Sigmund, K. (2000). "Fairness Versus Reason in the Ultimatum Game". *Science*. 289 (5485): 1773–1775.
15. Li Z., Duan Z., Lewis F. L. Distributed robust consensus control of multi-agent systems with heterogeneous matching uncertainties // *Automatica*. – 2014. – Т. 50. – №. 3. – С. 883-889.
16. Bauso D., Giarre L., Pesenti R. Mechanism design for optimal consensus problems // *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*. – IEEE, 2006. – С. 3381-3386.
17. Парсегов С.Э., Поляков А.Е., Щербаков П.С. Достижение равноудаленного расположения агентов на отрезке за заданное время // *Доклады Академии наук*. 2013. Т. 448, №5. С. 524-528.
18. Nedic, Angelia & E. Ozdaglar, Asuman & A. Parrilo, Pablo. (2010). Constrained Consensus and Optimization in Multi-Agent Networks. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. 55. 922 - 938. 10.1109/TAC.2010.2041686.

Complex model of two-stage network interaction of players: communicating their utility functions and choosing strategies

D.N.Fedyanin

ICS RAS named after V. A. Trapeznikov, Moscow, Russia

Прогрессивность и правильность адаптивных механизмов функционирования активных систем

В. В. Цыганов

Институт проблем управления имени В.А.Трапезникова РАН, Москва, Россия

Работа основана на результатах из [1] и является дальнейшим развитием построений в [2]. Рассматривается двухуровневая активная система (АС), на верхнем уровне которой находится Центр, а на нижнем – активный элемент (АЭ). Состояние АЭ в периоде t характеризует показатель y_t , $y_t \in R^1$. На вход АЭ в периоде t подается воздействие r_t , величина которого известна Центру, $r_t \in Q_t \subset R^M$. Кроме того, АЭ подвергается случайному воздействию со стороны внешней среды. При этом

$$y_t \in Y_t(p_t) = [0, W_t(p_t)], \quad p_t = (\zeta_t, r_t), \quad \zeta_t \in \Xi_t, \quad p_t \in P_t = \Xi_t \cup Q_t, \quad t=1,2,\dots, \quad (1)$$

где $Y_t(p_t)$ - множество возможных состояний АЭ, ζ_t - случайный эндогенный параметр, неизвестный Центру, p_t - комплексный параметр АЭ. Для краткости, обозначим $z_t = W_t(p_t)$, где z_t — максимальное состояние (потенциал) АЭ.

Порядок и механизм функционирования. Рассмотрим следующий порядок функционирования АС в периоде $t, t=1,2,\dots$. В начале этого периода Центру и АЭ становится известна величина r_t . Основываясь на оценке a_{t-1} в предыдущем периоде такой, что $a_\tau \in R^1, \tau=0,1,2,\dots, a_0 = a^0$, Центр назначает АЭ план на период t :

$$x_t = \pi(a_{t-1}) \in R^1, \pi(a_{t-1}) \uparrow a_{t-1}, \quad (2)$$

$\pi(a_{t-1})$ - процедура планирования, $t=1,2,\dots$. Далее, АЭ становится известно конкретное значение случайного параметра ζ_t в периоде t . Тем самым, ему становится известен p_t . Исходя из этого, АЭ выбирает состояние $y_t \in Y_t(p_t)$. Затем, в зависимости от выполнения плана x_t , назначается стимул АЭ:

$$\varphi_t = f(x_t, y_t) \in R^1, f(x_t, y_t) \uparrow y_t, f(x_t, y_t) \downarrow x_t, \quad (3)$$

где $f(x_t, y_t)$ - процедура стимулирования АЭ. Кроме того, Центр, основываясь на известной величине r_t и наблюдении y_t , формирует оценку a_t в периоде t с помощью рекуррентной процедуры идентификации:

$$a_t = I_t(a_{t-1}, r_t, y_t) \uparrow a_{t-1}, I_t(a_{t-1}, r_t, y_t) \uparrow y_t, \quad t=1,2,\dots \quad (4)$$

Совокупность процедур оценки (4), планирования (2) и стимулирования (3) будем называть адаптивным механизмом функционирования АС (кратко - АМФ) и обозначать $\Sigma = (I, \pi, f)$.

Решение игры активного элемента с Центром. Предположим, что АЭ стремится к увеличению суммы дисконтированных стимулов:

$$V_t = \sum_{\tau=t}^{t+T} \rho^{\tau-t} \varphi_\tau, \quad 0 < \rho < 1, \quad (5)$$

где ρ – коэффициент дисконтирования, T – дальновидность АЭ. При этом АЭ, как и Центру, известны только будущие множества параметров P_τ и возможных состояний $Y_\tau(p_\tau), \tau = \overline{t+1, t+T}$. Для принятия решения об y_t , в условиях неопределенности, АЭ ориентируется на гарантированную величину целевой функции (5):

$$w_t(x_t, y_t) = \min_{p_\tau \in P_\tau, \tau = \overline{t+1, t+T}} \min_{y_\tau \in Y_\tau(p_\tau), \tau = \overline{t+1, t+T}} V_t \quad (6)$$

Тогда множество решений игры АЭ с Центром - это множество состояний АЭ, максимизирующих величину (6):

$$R_t(\Sigma, p_t) = \{ y_t^* \in Y(p_t) / w_t(x_t, y_t^*) \geq w_t(x_t, y_t), y_t \in Y_t(p_t) \}. \quad (7)$$

Будем предполагать, что справедлива гипотеза благожелательности АЭ по отношению к Центру: если $z_t \in R_t(\Sigma, p_t)$, то $y_t^* = z_t, t=1,2,\dots$. Содержательно это означает, что АЭ не занижает свой показатель, если ему это не выгодно.

Проблема идентификации потенциала. Потенциал АЭ z_t зависит не только от известного ресурса r_t , но и от реализации случайного эндогенного параметра ζ_t , неизвестного центру. Рассмотрим процедуру адаптивной идентификации потенциала АЭ в этих условиях. Предположим вначале, что АЭ не скрывает свой потенциал: $y_t^* = z_t$, и воспользуемся типовым адаптивным алгоритмом, применяемым в технических системах [3]. Именно, полагая, что АС функционирует в стационарном

режиме (или режиме нормальной работы) [3], рассмотрим настраиваемую модель потенциала АЭ:

$$\hat{z}_t = c_{t-1} q(r_t), \quad t=1,2,\dots, \quad c_0 = c^0, \quad (8)$$

где \hat{z}_t — оценка потенциала АЭ в периоде t , c_t — настраиваемая оценка, q — функция входа r_t , $q(r_t) \geq 0$.

Предположим, что Центр наблюдает потенциал АЭ z_t , а его целью является минимизация средних потерь идентификации $L(c) = M_{\zeta} \{ \Phi(\varepsilon_t) \}$, где функция потерь $\Phi(\varepsilon_t)$ - выпуклая дважды дифференцируемая функция невязки $\varepsilon_t = z_t - \hat{z}_t$, $\Phi(0) = 0$, M_{ζ} — оператор математического ожидания – усреднения по всем реализациям случайного параметра ζ_t . В соответствии с общим подходом [3], обозначим через

$$L_t(c, z^t) = \left(\sum_{\tau=1}^t \Phi(\varepsilon_{\tau}) \Big|_{c_{\tau-1}=c} \right) / t \quad \text{эмпирические средние потери, характеризующие}$$

качество идентификации, $z^t = (z_1, \dots, z_t)'$. Тогда оптимальная выборочная оценка

$$\hat{c}_t = \arg \min_c L_t(c, z^t) = \hat{c}_{t-1} - \gamma_t \Phi'_c(\varepsilon_t) \equiv I_t(\hat{c}_{t-1}, r_t, z_t) \quad (9)$$

где $\Phi'_c(\varepsilon_t)$ - производная функции $\Phi(\varepsilon_t)$ по c_{t-1} , γ_t - коэффициент усиления, выбираемый так, чтобы оценка (9) сходилась к оптимальной оценке c^* :

$$\hat{c}_t = \arg \min_c L_t(c, z^t) \rightarrow c^* = \arg \min_c L(c), \quad \gamma_t \geq \gamma_{t+1} > 0, \quad \gamma_t \Phi''_c(\varepsilon_t) < 1, \quad (10)$$

где $\Phi''_c(\varepsilon_t)$ - вторая производная функции $\Phi(\varepsilon_t)$ по c_{t-1} .

С другой стороны, АЭ выбирает состояние y_t^* из множества решений игры $R_t(\Sigma, p_t)$. Поэтому, вообще говоря, $y_t^* \neq z_t$. Предположим, что Центр, наблюдая y_t^* , определяет выборочную оценку a_t с помощью процедуры (9):

$$a_t = \arg \min_a L_t(a, y_t^*) = a_{t-1} - \gamma_t \Phi'_a(t) \equiv I_t(a_{t-1}, r_t, y_t^*), \quad (11)$$

$$\Phi'_a(t) \equiv \Phi'_a(y_t^* - \hat{y}_t), \quad \hat{y}_t = a_{t-1} q(r_t), \quad \gamma_t \Phi''_a(t) < 1, \quad t=1,2,\dots, \quad a_0 = a^0.$$

где $\Phi''_a(t)$ - вторая производная функции $\Phi(t)$ по a_{t-1} . Тогда, при $y_t^* \neq z_t$, оценка a_t не сходится к оптимальной оценке c^* , и возникает проблема идентификации потенциала АС. Рассмотрим возможности решения этой проблемы в рамках правильного АМФ.

Правильные адаптивные механизмы. Как указывалось в [2], практически важно построить правильный АМФ, нацеленный на выполнение АЭ планового задания в случае, если оно достижимо в сложившейся ситуации (при конкретной реализации случайного эндогенного параметра ζ_t). В противном случае, правильный АМФ должен обеспечить заинтересованность АЭ в максимальной степени выполнения плана.

В соответствии со сказанным выше, план x_t назначается до того, как АЭ становится известным значение случайного параметра ζ_t . Более того, Центру значение ζ_t вообще неизвестно. Поэтому план x_t может не принадлежать множеству возможных состояний АЭ $Y_t(p_t)$, т.е. быть нереальным.

Формально, план x_t реален (или нереален), если $x_t \in Y_t(p_t)$ (или, соответственно, $x_t \notin Y_t(p_t)$). Следуя общему определению [1], в рассматриваемом случае правильный АМФ должен обеспечивать выбор АЭ состояния y_t из некоторого подмножества

$A_t(x_t, p_t)$, принадлежащего границе множества возможных состояний АЭ. Но, согласно (1), эта граница представляет собой точку $W_t(p_t)$. Следовательно, $A_t(x_t, p_t) = W_t(p_t)$. Таким образом, согласно формуле (7) работы [1], множество оптимальных состояний АЭ:

$$B_t(x_t, p_t) = \begin{cases} x_t, & x_t \in Y_t(p_t) \\ W_t(p_t), & x_t \notin Y_t(p_t) \end{cases}, t=1,2,\dots \quad (12)$$

По определению, согласно формуле (8) работы [7], АМФ – правильный, если

$$R_t(\Sigma, p_t) \subset B(x_t, p_t) \quad \forall p_t \in P_t. \quad (13)$$

Тогда из (7) и (12)-(13) следует, что АМФ - правильный при

$$y_t^* = \begin{cases} x_t, & x_t \in Y_t(p_t) \\ W_t(p_t), & x_t \notin Y_t(p_t) \end{cases}, t=1,2,\dots \quad (14)$$

Таким образом, вообще говоря, $y_t^* \neq z_t$. Если при этом Центр, наблюдая y_t , определяет выборочную оценку параметра АС с помощью процедуры (11), то эта оценка (a_t) не сходится к оптимальной оценке (c^*). Следовательно, проблема идентификации потенциала АС актуальна и при правильном АМФ.

Задача синтеза правильного адаптивного механизма с идентификацией (ПАМИ) ставится как задача построения АМФ $\Sigma = (I, \pi, f)$, при котором выполняется (14) и

$$a_t = I_t(a_{t-1}, r_t, y_t^*) \rightarrow c^*, y_t^* \in R_t(\Sigma, p_t). \quad (15)$$

Исходя из принципа гарантированного результата, для каждого периода $t, t=1,2,\dots$, введем операторы устранения неопределенности в отношении параметров и состояний АС, предшествующих выбору y_t :

$$g_t u = \min_{p_t \in P_t} \min_{p_{t-1} \in P_{t-1}} \min_{y_{t-1} \in Y_{t-1}(p_{t-1})} \dots \min_{p_1 \in P_1} \min_{y_1 \in Y_1(p_1)} \frac{\partial}{\partial u}, \quad (16)$$

а также операторы устранения неопределенности в отношении параметров и состояний АС после выбора y_t :

$$d_t u = \min_{\tau=t+1, t+T} \min_{p_{t+1} \in P_{t+1}} \min_{y_{t+1} \in Y_{t+1}(p_{t+1})} \dots \min_{p_\tau \in P_\tau} \min_{y_\tau \in Y_\tau(p_\tau)} \frac{\partial}{\partial u}, \quad (17)$$

где $\min_{p_0 \in P_0} \min_{y_0 \in Y_0(p_0)} \equiv 1$. Кроме того, предполагая дифференцируемость функций

$\pi(a_{t-1})$ и $f(x_t, y_t)$, обозначим: $F_t = d_t x_t \varphi_\tau$, $G_t = g_t y_t [-\Phi'_a(t)]$, $H_t = d_t a_{\tau-1} \Phi'_a(\tau)$, $J_t = d_t a_{\tau-1}(-x_\tau)$.

Теорема. $\Sigma = (I, \pi, f)$ — ПАМИ, если

$$g_t y_t \varphi_t + \rho \gamma_t F_t G_t J_t [1 - \rho^T (1 - \gamma_t H_t)^T] / [1 - \rho(1 - \gamma_t H_t)] \geq 0, t=1,2,\dots, \quad (18)$$

$$\pi \in \{ \pi(a_{t-1}), t=1,2,\dots, \pi(a_{t-1}) \notin \text{int } Y_t(p_t), p_t \in P_t \}, \quad (19)$$

где $\text{int } Y_t(p_t)$ - внутренность множества $Y_t(p_t)$: $\text{int } Y_t(p_t) = Y_t(p_t) \setminus W_t(p_t)$.

Доказательство. Дифференцируя V_t по y_t , согласно (5), получаем:

$$\frac{\partial V_t}{\partial y_t} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y_t} + \sum_{\tau=t+1}^{t+T} \rho^{\tau-t} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x_\tau} \frac{\partial x_\tau}{\partial a_{\tau-1}} \frac{\partial a_{\tau-1}}{\partial y_t} \quad (20)$$

Подставляя выражение для a_t из (11) в (20), и используя его как рекуррентное соотношение, нетрудно получить:

$$\frac{\partial V_t}{\partial y_t} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y_t} - \gamma_t \frac{\partial \Phi'_a(t)}{\partial y_t} \sum_{\tau=t+1}^{t+T} \rho^{\tau-t} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x_\tau} \frac{\partial x_\tau}{\partial a_{\tau-1}} \prod_{\zeta=t+1}^{\tau-1} [1 - \gamma_\zeta \Phi''_a(\zeta)] \quad (21)$$

Рассмотрим знаки и оценки членов (21). Согласно (3), первый член $\partial \varphi_t / \partial y_t \geq 0$. Его минимальная величина, при любых допустимых предшествующих состояниях $y_\mu \in Y_\mu(p_\mu)$ и параметрах $p_\mu \in P_\mu$, $\mu = \overline{1, t-1}$, согласно (16), равна $g_t y_t \varphi_t$:

$$\partial \varphi_t / \partial y_t \geq g_t y_t \varphi_t, \quad (22)$$

Определим теперь знак и верхнюю оценку вычитаемого в (21). Согласно (10), $\gamma_t > 0$. Далее, $\Phi(y_t - \hat{z}_t)$ - выпуклая дважды дифференцируемая функция, растущая при увеличении невязки $\varepsilon_t = y_t - \hat{z}_t$. Поэтому $\Phi'_a(y_t - \hat{z}_t)$ монотонно убывает с ростом y_t , так что $\frac{\partial \Phi'_a(t)}{\partial y_t} \leq 0$. В силу (2) $\partial x_\tau / \partial a_{\tau-1} \geq 0$, а в силу (3) $\partial \varphi_t / \partial x_t \leq 0$. Из неравенства (11) следует, что все сомножители под знаком произведения положительны. Учитывая знаки всех сомножителей вычитаемого в (21), получаем, что вычитаемое в (21) также положительно.

Отсюда, используя определения (16), (19) и условие $\gamma_t > \gamma_{t+1}$ (10), нетрудно показать, что при любых допустимых предшествующих состояниях $y_\mu \in Y_\mu(p_\mu)$, $\mu = \overline{1, t-1}$, и параметрах $p_\eta \in P_\eta$, $\eta = \overline{1, t}$, а также будущих состояниях $y_t \in Y_t(p_t)$ и параметрах $p_t \in P_t$, $t = \overline{t+1, t+T}$, справедливо неравенство:

$$\gamma_t \frac{\partial \Phi'_a(t)}{\partial y_t} \sum_{\tau=t+1}^{t+T} \rho^{\tau-t} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x_\tau} \frac{\partial x_\tau}{\partial a_{\tau-1}} \prod_{\zeta=t+1}^{\tau-1} [1 - \gamma_\zeta \Phi''_a(\zeta)] \leq \rho \gamma_t F_t G_t J_t \frac{1 - [\rho(1 - \gamma_t H_t)]^T}{[1 - \rho(1 - \gamma_t H_t)]} \quad (23)$$

Вычитая из неравенства (22) неравенство (23), получаем, с учетом (21):

$$\partial V_t / \partial y_t \geq g_t y_t \varphi_t + \rho \gamma_t F_t G_t J_t [1 - \rho^T (1 - \gamma_t H_t)^T] / [1 - \rho(1 - \gamma_t H_t)], \quad t = 1, 2, \dots$$

Но тогда, по условию теоремы (18), $\partial V_t / \partial y_t \geq 0$, так что V_t - неубывающая функция y_t при любых предшествующих и будущих допустимых состояниях и параметрах. При этом, согласно (6), максимум $w_t(x_t, y_t)$ достигается при $y_t = z_t$, и, в соответствии с (7), $z_t \in R_t(\Sigma, p_t)$. Отсюда, в силу гипотезы благожелательности АЭ по отношению к Центру, имеем $y_t^* = z_t$, $t = 1, 2, \dots$, и выполняется условие идентификации (15).

С другой стороны, учитывая, что из $x_t \in W_t(p_t)$ следует $x_t = W_t(p_t)$, а также то, что $W_t(p_t) = z_t$, условие правильности АМФ (14) нетрудно представить в виде:

$$y_t^* = \begin{cases} x_t, & x_t \in \text{int } Y_t(p_t) \\ W_t(p_t), & x_t \notin \text{int } Y_t(p_t) \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

Но, по условию теоремы (19), $x_t \notin \text{int } Y_t(p_t)$. При этом условие правильности АМФ (24) вырождается в условие $y_t^* = z_t$, $t = 1, 2, \dots$. Следовательно, АМФ $\Sigma = (I, \pi, f)$, обеспечивающий выполнение условий (14) и (15), является ПАМИ, ч.т.д.

Обсуждение результатов. Содержательно, теорема устанавливает условия, при которых адаптивный механизм $\Sigma = (I, \pi, f)$ обеспечивает стремление АЭ как к выполнению планов, так и к раскрытию потенциала. Именно, при выполнении условия (18), гарантированная величина целевой функции АЭ растет с увеличением показателя состояния АЭ. А поскольку, согласно (19), план равен потенциалу АЭ (или превышает его), то стимулы растут и по мере приближения показателя к плану. Таким образом, при выполнении условий теоремы, АЭ заинтересован в увеличении показателя до предельно достижимого уровня. Это обеспечивает возможность идентификации и

прогнозирования потенциала АЭ. При этом условия (19), (18) носят конструктивный характер, прямо ограничивая параметры процедур оценки (I), планирования (π) и стимулирования (f) в ПАМИ $\Sigma=(I,\pi,f)$. Например, при заданных процедурах оценки (I) и стимулирования (f), эти условия налагают конкретные и, в определенном смысле, противоречивые ограничения на процедуру планирования π . Именно, условие (19) требует напряженных планов, а условие (15) - ограниченных темпов их роста при увеличении фактических показателей. Ведь при слишком высоких темпах адаптивного планирования «от достигнутого» теряется заинтересованность АЭ в её росте. Таким образом, Центр должен задавать напряженные планы, которые, однако, не должны слишком быстро расти при успешной работе АЭ.

Далее, при заданных процедурах оценки (I) и планирования (π), условие (19) требует гарантированных темпов роста стимулирования при увеличении показателя. Содержательно, прирост текущего стимула АЭ за хорошую работу сегодня должен покрывать потери от снижения будущих стимулов, связанные с увеличением будущих плановых заданий при планировании «от достигнутого».

Выводы. Дана постановка задачи, и найдены достаточные условия синтеза правильных адаптивных механизмов с идентификацией, в которых планирование и стимулирование, ориентированное на выполнение планов внедрения, совмещается с раскрытием потенциала. Полученные условия являются конструктивными, и позволяют решать задачи оценки и прогнозирования потенциала АЭ, используя разнообразные алгоритмы адаптивной идентификации в технических системах.

Список литературы

1. Цыганов В. В. Правильные адаптивные механизмы // Автоматика и телемеханика.. 1989. № 6. С. 95-106
2. Цыганов В. В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. М.: Наука, 1991.
3. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984.

Progressiveness and correctness of adaptive mechanisms of functioning of active systems

V. V. Tsyganov

ICS RAS named after V. A. Trapeznikov, Moscow, Russia

О динамике структур информированности

А.Г. Чхартишвили

ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Одним из важных направлений теоретико-игрового моделирования является моделирование сложной информированности в ситуации с неопределенностью. Данный доклад является продолжением серии работ (см., напр., [1, 2]), в которых при помощи аппарата рефлексивных игр исследуется принятие решений в условиях неполной информированности. Альтернативой является моделирование в русле байесовых игр – подход, подробно изложенный, например, в статье [3] (см. также [4]).

Опишем структуру информированности игроков (агентов) в ситуации неполной информированности. Пусть в игре участвует n игроков, будем их называть *реальными агентами*. Их информированность может быть описана при помощи следующих понятий и множеств:

Θ – множество состояний природы;

A_i – множество возможных *экземпляров* i -го агента, $i \in N = \{1, \dots, n\}$;

$A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ – множество всех агентов;

$\Omega \subset \Theta \times A_1 \times \dots \times A_n$ – множество *возможных миров*.

В каждом возможном мире $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ имеет место определенное состояние природы $\omega_0 \in \Theta$ и определенные экземпляры $\omega_i \in A_i$ каждого агента. Будем говорить, что агент ω_i принадлежит миру ω , или входит в мир ω .

η – *функция информированности* агента, которая каждому агенту $a \in A$ ставит в соответствие множество миров $\eta(a) \subset \Omega$, которые агент считает возможными в силу своей информированности.

$\omega^* \in \Omega$ – *реальный мир*. Один из возможных миров является реальным, т.е. характеризуется состоянием природы и агентами, существующими на самом деле.

Входящие в реальный мир агенты являются реальными, прочие экземпляры агентов являются фантомными, т.е. существуют в сознании реальных или других фантомных агентов.

Данную конструкцию (*множественную структуру информированности*) можно наглядно изображать в виде ориентированного графа с вершинами двух типов – миры (прямоугольники) и агенты (круги), реальный мир выделен особо. Стрелка от агента к миру означает, что данный агент входит в данный мир. Стрелка от мира к агенту означает, что данный агент считает данный мир возможным. Двойная стрелка является сокращенным обозначением двух стрелок – от агента к миру и от мира к агенту.

Будем считать, что выполнены условия идентичности агента (каждый агент входит во все миры, которые он считает возможными) и единства мира (каждый мир и каждый агент связан последовательностью стрелок с реальным миром).

При помощи множественной структуры информированности можно формализовать ряд интуитивных информационных свойств (информированность одного агента о другом, большая или меньшая информированность), в том числе изменение информированности в результате взаимодействия агентов.

Если наряду со структурой информированности (характеризующей информированность агентов) заданы целевые функции (характеризующие интересы агентов) и их возможные действия, то можно задаться традиционным для теории игр вопросом: какие действия выберут агенты?

Отвечать на этот вопрос предлагается следующим образом. Пусть $\theta \in \Theta$ – состояние природы, а $x_i \in X_i$, – действие, выбираемое i -м агентом. Действия выбираются агентами одновременно и независимо, т.е. рассматривается игра в нормальной форме.

Пусть, далее, $f_i(\theta, x_1, \dots, x_n)$, $i \in N$, – целевые функции агентов. Тогда назовем *информационным равновесием* набор функций

$$\chi_i: A_i \rightarrow X_i, i \in N,$$

таких, что

$$\chi_i(a_i) \in \operatorname{Argmax}_{x \in X_i} \min_{\omega \in \eta(a_i)} f_i(\omega_0, \chi_1(\omega_1), \dots, \chi_{i-1}(\omega_{i-1}), x, \chi_{i+1}(\omega_{i+1}), \dots, \chi_n(\omega_n)).$$

Это означает, что каждый агент действует в соответствии с принципом максимального гарантированного результата, т.е. максимизирует свой наихудший результат во всех мирах, которые он считает возможными.

Структура информированности представляет собой своего рода «моментальный снимок» взаимной информированности агентов. Ясно, что с течением времени информированность может меняться. Опишем, следуя [1], динамику структуры информированности игры вследствие наблюдения агентами ее результатов. При этом будем считать, что сохраняется вся имеющаяся у агентов информированность, не противоречащая новым наблюдениям.

Напомним, что мы рассматриваем игру в нормальной форме, т.е. ходы выбираются агентами одновременно и независимо. При этом если в результате игры информированность агентов меняется, то каждую следующую игру (если она состоится) агенты разыграют с новой информированностью независимо от предыдущих и последующих.

Пусть у i -го реального агента имеется являющаяся общим знанием функция наблюдения. Смысл ее следующий: если в мире, в который входит агент $a_i \in A_i$, имеет место состояние природы θ и агенты выбрали действия (x_1, \dots, x_n) , то агент a_i наблюдает значение $w_i \in W_i$, где W_i – множество возможных наблюдений экземпляров i -го агента.

Суть трансформации структуры информированности состоит в следующем: для каждого агента $a \in A$ (как реального, так и фантомного), модифицируется множество миров $\eta(a)$, которые он считает возможными (подробнее см. в [1, 2]). Модификация состоит в том, что исключаются миры, для которых функция наблюдения принимает значение, отличное от ожидаемого агентом значения.

Трансформация структуры информированности может привести к тому, что каждый агент ровно один мир будет считать возможным. Нетрудно показать, что если одним из возможных миров для всех агентов является реальный, то он остается таковым и после трансформации. Иначе говоря, наличие в сознании агента верных представлений о мире (тех или иных) гарантирует верное представление и в дальнейшем.

Однако в случае отсутствия в сознании агентов реального мира динамическое изменение информированности может привести к иной ситуации: агенты на каждом шаге уточняют свое представление о ситуации (из структуры информированности исключаются миры, не соответствующие наблюдениям), в итоге каждый агент считает единственно возможным один мир, однако этот мир не является реальным.

Рассмотрим игру двух агентов (с номерами 1 и 2), целевые функции которых совпадают и имеют следующий вид (здесь $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$):

$$f_i(\theta, x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 + x_2 > \theta; \\ 9, & x_1 + x_2 = \theta; \\ 8, & x_1 + x_2 < \theta. \end{cases}$$

Будем считать, что каждый агент может наблюдать свои действие и выигрыш (но не действие оппонента и состояние природы θ).

Пример 1. Пусть представления агентов о параметре θ таковы: каждый агент считает множеством его возможных значений $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ и, более того, считает это общим знанием, при этом истинным значением является $\theta = 5$. Тогда агенты на первом шаге выберут «осторожные» стратегии, обеспечивающие условие $x_1 + x_2 = 3$, а в силу соображений симметрии фокальным ([5], см. также [2]) будет равновесие $x_1 = x_2 = 1,5$. Получив выигрыши $f_1 = f_2 = 8$, агенты скорректируют свою информированность (исключив возможность $\theta = 3$) и на следующем шаге выберут действия $x_1 = x_2 = 2$, а на третьем шаге – действия $x_1 = x_2 = 2,5$. После третьего шага, получив выигрыши $f_1 = f_2 = 9$, агенты узнают истинное значение $\theta = 5$.

Пример 2. Пусть первый агент считает общим знанием множество возможных значений $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (при таких же представлениях второго агента и таком же значении θ , как в Примере 1). Тогда динамика информированности приведет к иному результату: после четвертого шага первый агент будет считать общим знанием значение $\theta = 4$, а второй агент – значение $\theta = 6$.

Таким образом, в Примере 2 динамика структуры информированности привела к тому, что агенты считают твердо установленным ложное состояние мира. Это показывает важность верных априорных представлений.

Список литературы

1. Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры: трансформация структур информированности // Проблемы управления. 2008. № 5. С. 43-48.
2. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексия и управление: математические модели. М.: Физматлит, 2012.

3. Aumann R. Interactive epistemology I: Knowledge // International Journal of Game Theory. 1999. Vol. 28. № 5. P. 263-300.
4. Aumann R., Heifetz A. Incomplete Information // Handbook of Game Theory, Vol. 3, edited by R.J. Aumann and S. Hart. Elsevier, Amsterdam, 2002. P. 1665-1686.
5. Schelling T. The Strategy of Conflict. – Cambridge: Harvard University Press, 1960.

On the dynamics of awareness structures

A.G. Chkhartishvili

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

О рефлексивном анализе игровых взаимодействий

В.В. Шевченко

ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Принимая решение в игровом взаимодействии (о выборе из множества возможных выборов или о выборе в том или ином множестве стратегий) игрок опирается на те или иные предположения об информированности и поведении других игроков (о принципах принятия решений другими игроками) и о реализациях неопределённостей или/и на те или иные договорённости. Совокупности указанных предположений, позволяющие свести задачу принятия игроком решений в рассматриваемом игровом взаимодействии к оптимизационным задачам, названы в [1] полными сценарными условиями (ПСУ). При этом можно выделить 4 направленности предположений при принятии игроками решений и говорить о рефлексии в части информированности игроков; в части принципов принятия решений игроками; в части природных факторов; в части договорённостей между игроками.

В [2] и других работах заложенного авторами направления рефлексия разделяется на информационную и стратегическую. Для рассмотрения информационной рефлексии разработан математический аппарат, позволяющий проводить рефлексивный анализ игровых взаимодействий в части информированности игроков и их предположений о реализации природных факторов при фиксированных принципах принятия решений игроками и при предположении о неукоснительном соблюдении игроками принятых обязательств (договорённостей) либо об отсутствии таковых. Рассматривается множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ агентов (игроков). Констатируется присутствие неопределённого параметра $\theta \in \Omega$, при этом множество Ω определяется как общее знание. Рассматриваются представления всех агентов о параметре θ : $\theta_i \in \Omega, i \in N$; представления всех агентов о представлениях всех агентов о параметре θ : $\theta_{ij} \in \Omega, i, j \in N$ и так далее (представлений о параметре θ с одним индексом – N^1 , с двумя индексами – N^2 , с числом индексов, меньшим либо равным $K - \sum_{k=1}^K N^k$). Под структурой информированности I рассматриваемой игры понимается бесконечное n -дерево, в корневой вершине которого стоит сам параметр θ , N исходящих из неё ветвей заканчиваются вершинами с представлениями об этом параметре с одним индексом и так далее. Под рефлексивной игрой Γ_1 понимается игра, описываемая кортежем: $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, I\}$, где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i -го агента, $f_i(\cdot): \Omega \times X_1 \times \dots \times X_N \rightarrow \mathbb{R}$ – его целевая функция, $i \in N$, I – структура информированности.

В качестве принципов принятия решений игроками рассматриваются принцип максимального гарантированного результата (МГР) и принцип принятия выбора, соответствующего равновесию по Нэшу, которое может определяться исходя из различных совокупностей представлений о параметре θ рассматриваемых при его определении игроков, в число которых могут входить как реальные игроки (с их

реальными представлениями о параметре θ), так и так называемые фантомные игроки, которые отличаются от реальных тем, что их представления о параметре θ соответствуют вершинам 2-го и более уровней бесконечного n -дерева структуры информированности I . Такие равновесия названы информационными равновесиями.

В рассматриваемых в [2] рефлексивных играх игрок может связать с каждым из реальных игроков тот или иной уровень рефлексии, сопоставить с ним соответствующие представления о параметре θ его самого и других игроков в его видении (найденные в соответствующих вершинах n -дерева структуры информированности I) и принцип принятия решений (МГР или равновесие по Нэшу).

При традиционном, не рефлексивном использовании игроком принципа МГР используемое им ПСУ (полное сценарное условие) состоит в том, что при любом его выборе другие игроки сделают наихудший для него выбор. В соответствии с идеологией, представленной в [2], 1-й игрок с 1-м уровнем рефлексии, используя принцип МГР и считая, что тот же принцип МГР используют остальные игроки, рассчитывает, какие выборы будут сделаны остальными игроками, имеющими представления о параметре $\theta - \theta_{12}, \dots, \theta_{1N}$, и придерживаясь принципа МГР и определит свой выбор, максимизирующий его выигрыш при рассчитанных выборах других игроков и реализации θ_1 параметра θ . Используя принцип равновесия по Нэшу и считая, что тот же принцип используют остальные игроки, этот 1-й игрок с 1-м уровнем рефлексии определит (если это возможно) информационное равновесие по Нэшу 1-го ранга рефлексии (x_1^*, \dots, x_N^*) , при котором в видении каждого игрока (включая его самого) при его представлении о параметре θ ему самому от этой точки равновесия отклоняться невыгодно. При этом, что будет делать такой игрок в случае отсутствия или не единственности такого равновесия – не понятно. Возможно, воспользуется принципом МГР. Аналогично разбираются случаи с рефлексией не выше первого ранга, в которых разные игроки могут рефлексировать или не рефлексировать, использовать принцип МГР или принцип равновесия по Нэшу.

В работе [2] проведён описанный рефлексивный анализ многих простых классических и оригинальных игр (Игра в прятки, Дилемма заключённого, Семейный спор, Снос на мизере, простые производственно-рыночные взаимодействия «оптимистов» и «пессимистов», другие).

Под стратегической рефлексией в [2] при двух игроках понимается поведение игроков исходя из того, что другой игрок: принимает решение по принципу МГР или выбирая равновесие по Нэшу (1-й ранг рефлексии); считает его принимающим решение по принципу МГР или выбирая равновесие по Нэшу (2-й ранг рефлексии) и так далее. В отличие от информационной рефлексии, при которой рефлексивные предположения строятся только в части знаний о параметре θ .

В качестве исходного базового класса игровых моделей для анализа стратегической рефлексии выбираются биматричные игры с чистыми стратегиями.

Опираясь на [1-3] и многое другое, можно предложить целостную и взаимоувязанную методологию проведения формализованного, но качественного рефлексивного анализа игровых взаимодействий, позволяющую проводить такой анализ в части и информированности игроков; и принципов принятия решений игроками; и природных факторов; и договорённостей между игроками.

Наряду со структурой информированности игры I будем рассматривать множество образов игроков $O = \{o_{11}, \dots, o_{1o_1}, \dots, o_{n1}, \dots, o_{no_n}\}$, каждый из которых (образ) определяет конкретный принцип принятия решений в рассматриваемой игре данным игроком, который может быть рефлексивным с заданным уровнем рефлексии (и в соответствии с этим уровнем рефлексии описывать алгоритм принятия решений данным игроком с учётом принятых в данном принципе принятия решений уровней рефлексии других игроков) либо не рефлексивным (МГР, равновесие по Нэшу, градиентный, иной).

Будем также рассматривать множество обязательств игроков $Ob = \{ob_{1v_1}, \dots, ob_{1v_1}, \dots, ob_{nv_1}, \dots, ob_{nv_n}\}$, каждое из которых, в соответствии с установленным в игре порядком ходов Or (устанавливающим, выборы каких из игроков известны каждому из игроков перед его выбором, и являющимся булевой матрицей размерности n на n), записывается в виде ЕСЛИ <условие> ТО <ограничение на множестве выборов данного игрока> и определяет то или иное ограничение на выборы игрока, имеющего данное обязательство в случае, если выполнено заданное условие, определяемое выборами, известными данному игроку перед его выбором. Под параметром θ будем понимать всю существенную в игре информацию о множестве игроков, множестве выборов, целевой функции и обязательствах каждого игрока, порядке ходов в игре плюс представление о принципе принятия решений каждым игроком, заданное в виде некоторого набора $(o_{1\gamma_1}, \dots, o_{n\gamma_n})$, $\gamma_i \leq o_i, i \in N$. При этом, как и в игре Γ_1 , будем полагать, что в каждой вершине n -дерева I может быть как истинная, так и ложная информация по каждому элементу параметра θ . В представление игрока об обязательствах будем включать информацию не только о наличии обязательств, но и о том, будет ли с точки зрения данного игрока выполнено каждое из обязательств (последняя информация запишется, очевидно, в виде булевозначного вектора размерности $v = v_1 + \dots + v_n$). Информационную структуру I будем считать не бесконечным n -деревом, а n -деревом, ограниченным максимальными уровнями рефлексии в множестве образов игроков.

Под статической рефлексивной игрой Γ_2 будем понимать игру описываемую кортежем: $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, Or, O, Ob, I\}$, где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i -го агента, $f_i(\cdot): \Omega \times X_1 \times \dots \times X_N \rightarrow \mathbb{R}$ – его целевая функция, $i \in N$, Or – порядок выборов игроков, O – множество образов игроков, Ob – множество договорных обязательств игроков, I – структура информированности игры.

В игре Γ_2 могут рассматриваться, рассчитываться и сопоставляться самые различные наборы $(o_{1\gamma_1}, \dots, o_{n\gamma_n})$, $\gamma_i \leq o_i, i \in N$, определяющие то, какими игроками являются на самом деле. При этом n -дерево структуры информированности игры дополняет выбранный для рассмотрения набор образов тем, каковы представления каждого игрока и возможных образных игроков каждого игрока (при его рефлексировании) о параметре θ . Для каждого выбранного набора всегда можно рассчитать, что получит каждый из игроков. Общее число возможных для рассмотрения наборов при этом, очевидно, составит $o_1 \cdot o_2 \cdot \dots \cdot o_n$. При этом может быть доказана достаточно очевидная теорема:

Теорема о доминировании: Если в игре Γ_2 для некоторого набора $(o_{2\gamma_2}, \dots, o_{n\gamma_n})$, $\gamma_i \leq o_i, i = 2, \dots, n$ образов всех игроков, кроме первого (определяющего то, каковы эти игроки на самом деле) существует набор $(o_{1\gamma_1}, o_{2\gamma_2}, \dots, o_{n\gamma_n})$, $\gamma_1 \leq o_1$ образов всех игроков, при котором внутренние образы первого игрока (оперирующей стороны) в $o_{1\gamma_1}$ соответствуют образам тех же игроков в данном наборе (то есть истинной сути других игроков) и иные составляющие параметра θ известны первому игроку достоверно, то выигрыш первого игрока на этом наборе при таком его представлении о параметре θ больше или равен его выигрышу на любом другом наборе данной игры, включающем в себя в качестве поднабора набор $(o_{2\gamma_2}, \dots, o_{n\gamma_n})$ и при любом другом представлении первого игрока о параметре θ .

Действительно, в таком наборе данный игрок точно определяет выборы всех других игроков и точно знает обо всём другом перед своим выбором. В связи с чем, и получает максимум того, что может получить при сделанных выборах других игроков.

Когда знание первого игрока не достоверно, это приводит к уменьшению его выигрыша, которое будем называть издержками ложной информации, присутствующей в представлениях игрока. Нетрудно доказать, что добавление новой ложной информации к представлениям игрока (его дезинформация) не может увеличить его выигрыш (если исключить случаи замены одной ложной информации на другую ложную). Действительно, максимум функции по части переменных при фиксированных остальных переменных не может быть меньше значения функции, которое будет получено в случае, если вместо оптимального значения переменных, по которым ищется максимум, будет поставлено значение, максимизирующее ту же функцию при другой фиксации остальных переменных.

В теореме о доминировании выделен некоторый набор $(o_{2\gamma_2}, \dots, o_{n\gamma_n})$, $\gamma_i \leq o_i$, $i = 2, \dots, n$ образов всех игроков, кроме первого. Для этого набора может существовать доминирующий для первого игрока набор $(o_{1\gamma_1}, o_{2\gamma_2}, \dots, o_{n\gamma_n})$, $\gamma_1 \leq o_1$ образов всех игроков. Но при этом в игре в целом при выделении других наборов всех игроков, кроме одного, могут иметь доминирующие наборы другие игроки. Возникает естественный вопрос о том, есть ли в игре в целом игрок, над которым ни в одном из наборов образов не может доминировать другой игрок. И если такой игрок есть, то имеет ли он доминирующий образ (можно сказать и доминирующую стратегию) для любого набора образов всех игроков, кроме него. Если такой игрок существует, то будем его называть триумфатором в данной игре.

Можно показать, что триумфатор в рассматриваемых играх всегда один.

Теорема о единственности триумфатора: Существование более, чем одного триумфатора в игре Γ_2 невозможно.

Действительно, наличие у первого игрока точного образа любого другого игрока означает, что ранг рефлексии первого игрока на единицу выше. В связи с чем, другой игрок не может иметь точного образа первого игрока.

В случае, если первый игрок имеет истинное представление о параметре θ , но не является триумфатором, то множество возможных образов первого игрока всегда можно дополнить так, чтобы он им стал (разработав для первого игрока образы, доминирующие любой возможный набор $(o_{2\gamma_2}, \dots, o_{n\gamma_n})$, $\gamma_i \leq o_i$, $i = 2, \dots, n$ образов всех игроков, кроме первого). Если он не имеет истинного представления о параметре θ , то ему можно и нужно помочь его обрести (задача исследователя операций).

В общем случае повышение своего ранга рефлексии не триумфатором увеличивает его выигрыш. Но возможны простые игры (крестики-нолики или соответствующие игры, рассмотренные в [2]), при которых выигрыш при этом не изменится.

Рассмотренная обобщающая концепция рефлексивного игрового анализа позволила определить и исследовать оригинальную статическую операционную рефлексивную игру с иерархическим вектором интересов [1-3], являющуюся обобщением рассмотренной в [2] игры «Семейный спор», которую можно назвать «Семейный компромисс» (детальный анализ данной игры, иллюстрирующий все аспекты данной концепции не приводится, но читатель может провести его самостоятельно):

Игроки: M и J . Счета: время M и время J с одинаковым начальным сальдо S . Три совместные производственные операции по производству семейного блага ($O1$), блага для M ($O2$), блага для J ($O3$). Каждый игрок может распределить своё время между участием в операциях $O1$, $O2$, $O3$: $tm_1 + tm_2 + tm_3 \leq S$, $tw_1 + tw_2 + tw_3 \leq S$. Каждая операция получает время, равное минимуму из выборов игроков. Операции имеют трудоёмкости, выраженные во временах совместных действий, необходимых для производства единицы соответствующего блага: p_1, p_2, p_3 . Производство благ $O1$, $O2$, $O3$: $p_1 \cdot \min(tm_1, tw_1)$, $p_2 \cdot \min(tm_2, tw_2)$, $p_3 \cdot \min(tm_3, tw_3)$ соответственно. Компоненты

вектора интересов M – производство блага $O1$ и производство блага $O2$, вектора интересов J – производство блага $O1$ и производство блага $O3$.

Примем свёртку векторов интересов в виде суммы с коэффициентами альтруизма α_m и α_w . Тогда функции выигрышей игроков M и J будут иметь вид:
 $\alpha_m \cdot p_1 \cdot \min(tm_1, tw_1) + p_2 \cdot \min(tm_2, tw_2), \quad \alpha_w \cdot p_1 \cdot \min(tm_1, tw_1) + p_3 \cdot \min(tm_3, tw_3).$

Каждый игрок может не рефлексировать и использовать тот или иной принцип оптимальности (гарантированный результат, равновесие по Нэшу, иной), либо рефлексировать. Рефлексируя, он может верно или неверно понять другого игрока. Можно рассматривать различные порядки ходов, различные варианты информированности игроков о производительности операций и о коэффициентах альтруизма друг друга. Ресурс времени и правила игры естественно считать известными обоим игрокам.

В случае, если α_m и α_w больше нуля (игроки не чистые эгоисты), сильные равновесия в игре возможны лишь тогда, когда весь ресурс времени S задействован. В противном случае коалиция обоих игроков может направить свободный ресурс времени на производство семейного блага и получить лучший совместный результат. В таких равновесиях $tm_1 = tw_1 = t_1, tm_2 = tw_2 = t_2, tm_3 = tw_3 = t_3, t_1 + t_2 + t_3 = S$.

Если $\alpha_m \cdot p_1 > p_2$ или/и $\alpha_w \cdot p_1 > p_3$ - сильным равновесием является направление всего ресурса времени S на операцию $O1$. Действительно, в этом случае, тому, для кого создание семейного блага выгоднее, отклоняться нет смысла. Другой, отклоняясь, также не увеличит свой выигрыш. Никакое совместное отклонение также не может увеличить выигрыш каждого, поскольку выигрыш одного из игроков – максимально возможный. Выигрыш $p_1 \cdot (\alpha_m + \alpha_w) \cdot \min(tm_1, tw_1) + p_2 \cdot \min(tm_2, tw_2) + p_3 \cdot \min(tm_3, tw_3)$ M и J вместе в случае сильного равновесия при не чистых эгоистах равен $p_1 \cdot (\alpha_m + \alpha_w) \cdot t_1 + p_2 \cdot t_2 + p_3 \cdot (S - t_1 - t_2) = [p_1 \cdot (\alpha_m + \alpha_w) - p_3] \cdot t_1 + (p_2 - p_3) \cdot t_2 + p_3 \cdot S$. При $p_1 \cdot (\alpha_m + \alpha_w) > p_2$ направление всего ресурса времени S на операцию $O1$ максимизирует этот суммарный выигрыш, является простым равновесием, но не обязательно является сильным равновесием. Простым равновесием во всех случаях является любой совместный выбор, при котором выполнены условия: $tm_2 \geq tw_2, tw_3 \geq tm_3, tw_1 = tm_1$.

Рассмотрение данной простейшей статической операционной игры с рефлексией и иерархическим вектором интересов можно считать первым шагом в определении и исследовании такого класса игровых моделей. Следующими шагами могли бы стать рассмотрение более сложных статических игр того же класса с большими числами игроков, операций, уровней иерархических векторов интересов; рассмотрение динамических операционных игр с рефлексией и иерархическим вектором интересов.

Список литературы

1. Кононенко А.Ф., Шевченко В.В. Операционные игры. Теория и приложения. М.: ВЦ РАН, 2013. - 136 с.
2. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексия и управление (математические модели). – М.: Физматлит, 2013, 411 с.
3. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. Игры с иерархическим вектором интересов // Техническая кибернетика. 1974. №3. С. 54-69.

On the reflexive analysis of game interactions

V.V. Shevchenko
 CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia

СЕКЦИЯ № 2

ДИСКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| Афраймович Л.Г., Ильин С.Ю. Циклическая декомпозиция потока при решении многоиндексной задачи планирования конференции | 55 |
| Балашов В.В., Антипина Е.А. Распределение вычислительной нагрузки и оценка необходимых процессорных ресурсов в модульных вычислительных системах | 58 |
| Бронштейн Е.М., Гиндуллин Р.В. Эвристический метод решения задачи о заборе и доставке грузов одним транспортным средством | 60 |
| Гончар Д.Р. Параллельный алгоритм решения минимаксной задачи теории расписаний методом ветвей и границ | 62 |
| Ерохин И.Л. Математическая модель задачи развозки бетона | 67 |
| Ковешников В.А., Мехтиев А.Я., Зубарев А.А., Шевцов О.Ю. Новый универсальный подход к решению задач параметрической оптимизации | 69 |
| Косоруков О.А. Метод обобщенных потенциалов для смешанной задачи синтеза коммуникационной сети | 74 |
| Костенко В.А., Смирнов А.С. Использование алгоритмов нахождения максимального потока для построения статико-динамических расписаний | 77 |
| Куприянов Б.В. Решение одной задачи распределения ресурсов для рекурсивного конвейера | 81 |
| Мирошник С.Н. Вычисление верхней оценки суммы избыточностей информации в БД реального времени | 83 |
| Сергеев А.С. Оценка эффективности биоинспирированных методов муравьиных колоний криптоанализа шифров перестановок и замены | 86 |
| Furugyan M.G. Scheduling in Multiprocessor Real-Time Systems with Additional Restrictions | 89 |
| Furugyan M.G. Pseudo-polynomial Algorithm for Solving the Problem of Scheduling in Multiprocessor Real-Time Systems with Non-Fixed Job Durations | 92 |
| Хуснуллин Н.Ф. Задача планирования подготовки космонавтов как задача удовлетворения ограничениям | 96 |

Циклическая декомпозиция потока при решении многоиндексной задачи планирования конференции

Л.Г. Афраймович, С.Ю. Ильин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

В работе рассматривается постановка задачи построения расписания конференции/семинара как многоиндексной задачи целочисленного линейного

программирования транспортного типа [1]. Ранее при исследовании многоиндексных задач транспортного типа были получены результаты сводимости многоиндексных задач к задаче поиска потока в сети [2], что в свою очередь дало возможность предложить класс эффективных потоковых методов анализа многоиндексных задач [3–5]. В данной работе рассмотрено два частных случае многоиндексной задачи планирования конференции: показано, что в случае, когда матрица эффективности задачи имеет специальную декомпозиционную структуру – задача сводится к поиску потока в сети, в случае, когда матрица эффективности отражает соответствие проводимых лекций выбранной аудиторий – предложен эвристический алгоритм, основанный на построении соответствующей потоковой модели. В обоих частных случаях алгоритм построения расписания связан с построением потоковой сетевой модели, поиске потока минимальной стоимости в сети и его дальнейшей декомпозиции на простые циклы, соответствующие переменным исходной задачи планирования.

Рассмотрим содержательную постановку задачи построения расписания конференции/семинара. Известны доступные аудитории, лектора и множество лекций, которые необходимо провести в рамках семинара. Для каждой аудитории известно время ее доступности. Для каждого лектора известно максимальное число лекций и множество лекций, которые он может провести, а также доступное время. Для семинара определено максимальное число лекций, которые могут идти параллельно. Нужно составить расписание семинара: определить время проведения лекций, назначить лекторов и аудитории таким образом, чтобы «обобщенная эффективность» расписания принимала экстремальное значение.

При решении задачи будем предполагать, что все лекции имеют равную длительность, а временные слоты модельного времени разбито на такты, каждый из которых соответствует интервалу времени, в который может быть проведена лекция.

Введём следующие исходные параметры: I – множество аудиторий, J – множество лекторов, K – множество лекций, T – множество тактов времени. Далее пусть

$$S_{it} = \begin{cases} 1, & \text{если аудитория } i \text{ свободна в такт } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$L_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если лектор } j \text{ может провести лекцию } k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$H_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{если лектор } j \text{ свободен в такт } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

G_j – максимальное количество семинаров, которое готов провести лектор j , B – максимальное количество лекций, которые могут проводиться параллельно, C_{ijkt} – коэффициент отражающий эффективность проведения лектором j лекции k в аудитории i в такт t , $i \in I, j \in J, k \in K, t \in T$.

Введём следующие варьируемые параметры:

$$x_{ijkt} = \begin{cases} 1, & \text{если лектор } j \text{ проводит лекцию } k \text{ в ауд. } i \text{ в такт } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$i \in I, j \in J, k \in K, t \in T$.

Допустимым расписанием будем называть набор варьируемых параметров, x_{ijkt} , $i \in I, j \in J, k \in K, t \in T$, удовлетворяющих следующей системе ограничений:

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijkt} \leq S_{it}, \quad i \in I, t \in T, \quad (1)$$

(аудиторию можно занимать только когда она свободна),

$$\sum_{i \in I} \sum_{t \in T} x_{ijkt} \leq L_{jk}, \quad j \in J, k \in K, \quad (2)$$

(лектора можно назначить только на лекцию, которую он может провести),

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijkt} \leq H_{jt}, \quad j \in J, t \in T, \quad (3)$$

(лектора можно назначить только когда он свободен),

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} x_{ijkt} \leq G_j, \quad j \in J, \quad (4)$$

(количество лекций, проводимых лектором, не может превышать максимально возможного значения),

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} x_{ijkt} = 1, k \in K, \quad (5)$$

(каждая лекция должна быть проведена одним лектором, в одной аудитории, в один такт времени),

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijkt} \leq 1, i \in I, t \in T, \quad (6)$$

(в каждый такт времени в аудитории проводится не более одной лекции),

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijkt} \leq 1, j \in J, t \in T, \quad (7)$$

(в каждый такт времени лектор проводит не более одной лекции),

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijkt} \leq B, t \in T, \quad (8)$$

(в каждый такт времени параллельно проводятся не больше B лекций),

$$x_{ijkt} \in \{0,1\}, i \in I, j \in J, k \in K, t \in T, \quad (9)$$

(естественные ограничения на переменные).

Задача заключается в поиске допустимого расписания, при котором принимает минимальное значение критерий:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} C_{ijkt} x_{ijkt} \rightarrow \min, \quad (10)$$

характеризующий суммарную эффективность построенного расписания.

Далее рассмотрим частный случай задачи (1)-(10), когда матрица C_{ijkt} обладает следующей декомпозиционной структурой. Пусть заданы матрицы $U_{ij}, V_{jt}, W_{jk}, i \in I, j \in J, k \in K, t \in T$. Тогда рассмотрим частный случай, когда

$$C_{ijkt} = U_{it} + V_{jt} + W_{jk}, i \in I, j \in J, k \in K, t \in T.$$

Критерий оптимальности в данном случае будет иметь вид:

$$\sum_{i \in I, j \in J, k \in K, t \in T} (U_{it} + V_{jt} + W_{jk}) x_{ijkt} \rightarrow \min. \quad (11)$$

Можно показать, что согласно [5] задача (1)-(9),(11) к классу многоиндексных задач с декомпозиционной структурой, что гарантирует ее сводимость к задаче поиска потока в сети. Алгоритм решения, предложенный в [5], основан на поиске потока в соответствующей сетевой модели и декомпозиции потока на простые циклы, где величинам потока вдоль простых циклов поставлены в соответствие переменные исходной задачи планирования. Согласно [5] предлагаемый алгоритм решения задачи (1)-(9),(11), требует $O(n^2 \log^2 n)$ вычислительных операций, где $n = |I \times J \times K \times T|$.

Другим частным случаем задачи (1)-(10) является случай, когда матрица эффективности отражает соответствие аудиторий лекциям. Подобная ситуация возникает, например, когда аудитория обладает некоторой вместительностью, аппаратурой и др. необходимыми при проведении лекции. Тогда обозначим через O_{ik} признак соответствия аудитории i лекции k : O_{ik} равен 0, если лекция и аудитория соответствуют друг другу; равен 1, в противном случае, $i \in I, k \in K$.

Критерий оптимальности при этом будет иметь вид:

$$\sum_{i \in I, j \in J, k \in K, t \in T} O_{ik} x_{ijkt} \rightarrow \min. \quad (12)$$

Для решения задачи (1)-(9),(12) предлагается эвристический алгоритм, основанный на построении соответствующей потоковой модели, декомпозиции потока на простые циклы, разбиении и перестройки простых циклов и связанных с ними потоков на циклы заданной длины, соответствующие переменным исходной задачи планирования.

Таблица 1. Результаты вычислительного эксперимента

| Размерность ¹ | Число проведённых экспериментов | Оценка работы эвристического алгоритма ² |
|--------------------------|---------------------------------|---|
| 8 | 10 | 10% |
| 9 | 10 | 6% |
| 10 | 10 | 10% |

| | | |
|----|----|-----|
| 13 | 10 | 10% |
|----|----|-----|

- 1 - За размерность n примем $I=J=K=T=n$
 2 - $(F_{\text{э}} - F^*)/|K|$, где $F_{\text{э}}$ – значение, полученное эвристикой, F^* - нижняя оценка, определенная как линейная релаксация задачи, $|K|$ - число лекций.

Список литературы

1. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. – М.: Радио и связь. 1982.
2. Ahuja R.K., Magnati T.L., Orlin J.B. Network flows: theory, algorithms, and applications // N.J. Prentice Hall, 1993.
3. Афраимович Л.Г. Эвристический метод решения целочисленных декомпозиционных многоиндексных задач // Автоматика и телемеханика. 2014. № 8. С. 3-18.
4. Афраимович Л.Г. Многоиндексные транспортные задачи с 2-вложенной структурой // Автоматика и телемеханика. 2013. № 1. С. 116-134.
5. Афраимович Л.Г. Многоиндексные транспортные задачи с декомпозиционной структурой // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 130-147.

Cyclic decomposition of the flow while the multi-index solution to the problem of planning the conference

L. G. Afraimovich, Y. S. P'in

Nizhny Novgorod Lobachevsky's state University, Nizhny Novgorod, Russia

Распределение вычислительной нагрузки и оценка необходимых процессорных ресурсов в модульных вычислительных системах*

В.В. Балашов, Е.А. Антипина

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Современная модульная вычислительная система реального времени (МВС РВ) представляет собой совокупность стандартизованных модулей, каждый из которых оснащен многоядерным процессором. Модули связаны между собой сетью передачи данных (СПД). Как правило, в состав МВС РВ входят однотипные вычислительные модули общего назначения и несколько видов специализированных модулей, например – коммуникационные (для поддержки унаследованных интерфейсов передачи данных) и графические (включающие в свой состав сопроцессоры для обработки графики). При этом основной процессорный ресурс МВС предоставляется модулями общего назначения [1].

Вычислительная нагрузка для МВС РВ представляет собой набор разделов (групп взаимосвязанных периодических задач), обмен данными между которыми осуществляется посредством передачи сообщений. Передача сообщений между разделами, выполняющимися на одном модуле, осуществляется через оперативную память модуля и не создает нагрузку на СПД.

Загрузка процессорного ядра вычислительной задачей равна произведению частоты выполнения задачи и максимальной длительности выполнения задачи на этом ядре (на практике используется верхняя оценка этой длительности). Загрузка СПД

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №17-07-01566.

передаваемым сообщением равна произведению длительности передачи сообщения и частоты его передачи.

Планирование вычислений в МВС РВ состоит из двух фаз:

1. Распределение разделов по модулям и процессорным ядрам; при этом каждому разделу может быть сопоставлено только одно ядро.
2. Построение для каждого ядра расписания окон (временных интервалов) выполнения разделов; в каждом окне выполняются задачи единственного раздела под управлением динамического планировщика.

При выполнении фазы 1 необходимо для каждого ядра соблюсти заданное верхнее ограничение на загрузку ядра вычислительными задачами разделов, привязанных к этому ядру. Также, как правило, необходимо минимизировать суммарную загрузку межмодульной СПД [2].

Авторами выполнено сведение задачи распределения вычислительной нагрузки в МВС РВ к модифицированной задаче о мультипликативном рюкзаке (ЗМР) [3]. При этом:

- процессорные ядра соответствуют рюкзакам;
- рюкзаки, соответствующие ядрам одного модуля, объединены в группу;
- разделы соответствуют упаковываемым объектам;
- загрузка ядра разделом соответствует объему объекта;
- ограничение на загрузку ядра соответствует объему рюкзака.

В случае наличия на различных модулях МВС РВ процессорных ядер разной производительности, загрузка ядра одним и тем же разделом может варьироваться в зависимости от типа ядра. Соответственно, объем объекта может быть различным в зависимости от того, в какой рюкзак этот объект упаковывается.

В отличие от базовой постановки ЗМР, стоимость задается не для каждого объекта в отдельности, а для пар объектов. Паре объектов назначается стоимость, равная вкладу трафика между соответствующими разделами в загрузку СПД. При этом стоимость для пары объектов полагается равной нулю в случае, если эти объекты из данной пары помещены в рюкзаки из различных групп. Тем самым, размещать объекты в рюкзаки из одной группы выгодно (трафик соответствующих разделов не загружает СПД), а размещать объекты в рюкзаки из разных групп – невыгодно.

Для решения модифицированной ЗМР авторами предложен алгоритм на основе метода ветвей и границ. Разработаны схемы расчета верхних и нижней границ, используемые при отсечении поддеревьев дерева поиска решения, доказана корректность этих схем.

Предложена модификация метода ветвей и границ, позволяющая ускорить поиск за счет «отождествления» поддеревьев, соответствующих привязке некоторого раздела к однотипным ядрам одного и того же модуля, имеющим одинаковую (в частности, нулевую) загрузку до выполнения привязки. Доказано, что при использовании данной модификации алгоритм по-прежнему гарантированно находит оптимальное решение. Предложенная модификация позволяет заметно повысить быстродействие алгоритма (коэффициент понижения сложности – порядка $(k!)^n$, где k – число однотипных ядер в модуле, а n – число модулей). Также возрастает масштабируемость алгоритма: без модификации время работы алгоритма в 1000 с на современном процессоре достигается для систем из порядка 8 ядер и 12 разделов, а с модификацией – для систем из порядка 12 ядер и 18 разделов, что соответствует характеристикам реальных МВС РВ авиационного назначения.

Одной из актуальных задач проектирования новой МВС РВ является определение количества процессорных ресурсов, необходимого для выполнения заданной вычислительной нагрузки. Эта задача сводится к определению минимального количества вычислительных модулей общего назначения, при котором существует

решение рассмотренной выше задачи распределения вычислительной нагрузки по модулям и процессорным ядрам. Предложенный авторами алгоритм на основе метода ветвей и границ с описанной выше модификаций позволяет эффективно решить эту задачу, поскольку для новой проектируемой МВС РВ распределение вычислительной нагрузки производится «с чистого листа», и все ядра изначально имеют нулевую загрузку.

Исследования производительности и масштабируемости разработанного алгоритма производились как на данных по реальным бортовым МВС РВ, так и на синтетических данных, полученных на основе реальных данных. Реализацию алгоритм планируется встроить в инструментальную систему планирования вычислений в бортовых МВС РВ [2].

Список литературы

1. Парамонов П.П., Жаринов И.О. Интегрированные бортовые вычислительные системы: обзор современного состояния и анализ перспектив развития в авиационном приборостроении // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 1–17.
2. Tool system and algorithms for scheduling of computations in integrated modular onboard embedded systems / V. Balashov, V. Balakhanov, V. Kostenko, S. Tutelian // Proc. 14th IFAC conference on programmable devices and embedded systems. Brno, Czech Republic, 2016. P. 345–350.
3. Martello S., Toth S. Knapsack problems: algorithms and computer implementations. John Wiley & Sons, 1990.

Workload distribution and necessary computational resources estimation in modular computer systems

V.V. Balashov, E.A. Antipina
Lomonosov MSU, Moscow, Russia

Эвристический метод решения задачи о заборе и доставке грузов одним транспортным средством

Е.М. Бронштейн, Р.В. Гиндуллин
УГАТУ, Уфа, Россия, БаиГУ, Уфа, Россия

В работе рассматривается вариант задачи VRP именуемый The pickup and delivery problem (PDP) с одним транспортным средством ограниченной вместимости (SPDP), в которой предполагается наличие полного графа, вершинами которого являются пункты производства и потребления, а дугами – соответствующие пути, и единственного транспортного средства ограниченной вместимости, которое должно забрать грузы различного веса от поставщиков, причём груз от конкретного производителя должен быть доставлен одному конкретному потребителю. Задача относится к классу NP-сложных задач. Задачи вида SPDP также называют Pickup-Delivery Traveling Salesman Problem или Traveling Salesman Problem with Pickups and Deliveries [1].

Постановка задачи следующая. Пусть $P = \{1, \dots, n\}$ – пункты вывоза грузов веса q_i для i -го пункта, $D = \{n+1, \dots, 2n\}$ – пункты доставки грузов. Множество пунктов есть $V = P \cup D \cup \{0\}$, где нулевой пункт является базой. Транспортное средство (ТС) вместимости S должно объехать все пункты по циклу таким образом, чтобы доставить грузы из i -го пункта в $(n+i)$ -й при всех i . Полагаем, что в $(n+i)$ -м пункте вес груза отрицательный ($-q_i$). Маршрут должен начинаться и заканчиваться в базовом пункте. Известны расстояния между всеми парами пунктов c_{ij} . Требуется найти допустимый цикл минимальной длины. Задача относится к классу NP-трудных, поскольку в случае,

когда пункты каждой пары совпадают и вместимость ТС не ограничена, получим классическую задачу коммивояжера.

Сформулируем несколько свойств данной задачи.

1. Минимально допустимая вместимость ТС равна $\max\{q_i\}$. Действительно, очевидно, что при $S < \max\{q_i\}$ организовать перевозку невозможно. При $S = \max\{q_i\}$ допустимым, например, является маршрут $0-1-(n+1)-2-(n+2)-\dots-n-2n-0$. Тем самым, эта задача существенно отличается от более общей задачи транспортировки однородного груза, для которой задача вычисления минимально допустимой вместимости ТС является *NP*-трудной [2].

2. При неограниченной вместимости ТС число допустимых маршрутов равно $(2n)!/2^n$. Действительно, всего перестановок пунктов $(2n)!$, при этом, каждая из допустимых перестановок порождает 2^n перестановок, полученных всевозможными перестановками пар пунктов с номерами $i, (n+i)$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Этот результат получен в [3] более сложным рассуждением.

3. При $S \geq \max\{q_i\}$ любой допустимый отрезок маршрута можно продолжить. Действительно, если после прохождения отрезка ТС не содержит груза и при этом есть необслуженные пункты, то в качестве следующего можно принять любой пункт, в котором есть груз. Если ТС содержит груз, то это означает, что его забрали в некотором пункте i , но в $(n+i)$ -й не доставили. Следующим пунктом маршрута можно принять $(n+i)$ -й.

Различные варианты формализаций задачи приведены в [2].

Цикл назовем правильным, если при прохождении его от базы для любого i пункт i встречается раньше, чем $i+n$, т.е. доставка грузов по такому циклу возможна.

Предлагается процедура 4-орт-о, аналогичная [4], которая заключается в переформировании правильного цикла так, что:

1. в результате получаем правильные циклы,
2. из любого правильного цикла в результате применения последовательности предложенных операций можно получить любой правильный цикл. Это гарантирует сходимость предложенной эвристики к оптимальному циклу.

Процедура 4-орт-о организована следующим образом:

Случайно выбираем две пары пунктов (пусть $i, i+n; j, j+n$, здесь и далее $i \neq j$) и удалим из цикла все дуги, ведущие в эти пункты и из них. От прежнего цикла останутся 5, 4, 3, 2 или 1 дуга. Эти дуги занумеруем в порядке прохождения, 1 дуга всегда содержит базу.

Допустим осталось 5 дуг. Это означает, что никакие два из выбранных пунктов не являются смежными. Правильный цикл образуется если последовательность прохождения дуг 1, 2, 3, 4, 5 сохраняется, пункты $i, i+n; j, j+n$ вставляются в последовательность дуг так, что i (соответственно j) предшествует $i+n$ (соответственно $j+n$). Например, из первоначального цикла $1-i-2-j-3-(i+n)-4-(j+n)-5$ можно получить циклы $1-j-2-3-i-4-(j+n)-5-(i+n)$, $1-j-i-2-3-(j+n)-4-(i+n)-5$ и т.д.

Максимальное количество возможных дуг в цикле – пять. Если отрезков меньше пяти, берётся самый длинный (по количеству пунктов) отрезок и делится пополам, и эта процедура повторяется до получения пяти отрезков.

Подсчитаем число полученных таким образом правильных циклов (без учёта вместимости транспортного средства). Будем добавлять в последовательность 1, 2, 3, 4, 5 последовательно пункты $i, i+n; j, j+n$ (не обязательно обеспечивающие правильность полученного цикла). Например, можно получить последовательно 1, 2, 3, 4, i ; 1, $i+n$, 2, 3, 4, i , 5; 1, $i+n$, 2, j , 3, 4, i , 5; 1, $j+n$, i , 2, j , 3, 4, 5, $i+n$. Всего таких комбинаций получим $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$ (число 1 всегда первый элемент). Они распадаются на четверки, которые отличаются перестановками пар пунктов $i, i+n$ и $j, j+n$. Из каждой такой четверки правильность последовательности обеспечит только одна (в приведенном примере 1, j , i , 2, $j+n$, 3, 4, $i+n$). Таким образом, число правильных перестановок, которые можно

получить в данном случае, равно 420. Из данных правильных перестановок выбирается та, у которой наименьшая длина и не нарушаются ограничения на вместимость ТС.

Отметим, что операция 4-opt-o обратима.

При проведении вычислительных экспериментов использовался ПК со следующими характеристиками: процессор *Intel Core i5-4670 3.4GHz*, *16Gb RAM*, операционная система *Windows 10 64bit*. Процедура 4-opt-o реализована в среде *NetBeans IDE 8.1 (Java(TM) SE Runtime Environment 1.8.0_45-b14)*. Для примера размерности n рассматривается начальный допустимый цикл $(0, 1, 1+n, 2, 2+n, \dots, n, 2n)$, который обеспечивает ограничение по загрузке. Правило останова процесса – если за заданное число итераций (k) при использовании процедуры 4-opt-o не произойдет уменьшения продолжительности пути.

Для проведения сравнительного анализа моделей использовалась стандартная библиотека примеров для симметричных задач TSPLIB [5].

В произведенных сериях численных экспериментов для оценки поведения процедуры 4-opt-o при различных правилах останова было выявлено, что наиболее приемлемым оказалось правило останова по числу итераций, равному количеству пар в задаче.

Список литературы

1. Parragh S., Doerner K., Hartl R. A survey on pickup and delivery problems. Part II: Transportations between customers and depot // *Journal fur Betriebswirtschaft*. 2008. Issue 58. P.21-51
2. Ruland K.S., Rodin E.Y. The pickup and delivery problem: Faces and branch-and-cut algorithm // *Computers and Mathematics with Applications*. 1997. Volume 33, Issue 12. P. 1-13
3. Бронштейн Е.М., Гиндуллина Э.В., Гиндуллин Р.В. Формализации задач погрузки и доставки // *Вестник Южно-Уральского университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2017. Том 9, Номер 1. С. 13–21
4. Hooijenga D. Perturbation heuristics for the pickup and delivery traveling salesman problem [Internet] // *Econometrie*. 2015. URL: <https://thesis.eur.nl/pub/30373/Hooijenga.pdf> (дата обращения: 18.03.18)
5. MP-TESTDATA - The TSPLIB Symmetric Traveling Salesman Problem Instances. URL: <http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsp/> (дата обращения: 18.03.18)

Heuristic method of solving the problem of the collection and delivery of goods by one vehicle

E. M. Bronshtein, R. V. Gindullin
USATU, Ufa, Russia, Bashkir state University, Ufa, Russia

Параллельный алгоритм решения минимаксной задачи теории расписаний методом ветвей и границ

Д.Р. Гончар
ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Постановка задачи. Имеется подлежащее выполнению множество работ $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и вычислительная система из m процессоров для обработки этих работ. Время выполнения работы i на процессоре j равно t_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$). Не допускаются прерывания и переключения с одного процессора на другой при выполнении работ. В заданный момент времени каждый процессор может выполнять

не более одной работы, а каждая работа может выполняться не более чем одним процессором.

Расписание выполнения работ N определим как разбиение множества N на m непересекающихся подмножеств N_1, N_2, \dots, N_m ($N = \bigcup_{j=1}^m N_j$; $N_{j_1} \cap N_{j_2} = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$).

Работы из множества N_j приписываются процессору j и выполняются на нем одна за другой в произвольном порядке. Величина $Q_j = \sum_{i \in N_j} t_{ij}$ – загруженность процессора j

($j = 1, 2, \dots, m$), а $\max_{j=1,2,\dots,m} Q_j$ – это длина расписания. Задача заключается в построении расписания минимальной длины, т.е. оптимального по быстродействию расписания.

Подобные задачи широко освещены в литературе. При их решении применяются, например, такие методы, как случайный и исчерпывающий поиск [1], методы математического программирования [2], метод ветвей и границ [3, 4], муравьиные алгоритмы [5], поиск с запретами [6], вероятностные алгоритмы [7], генетические алгоритмы [8], метод имитации отжига [9], различные эвристические алгоритмы [10], алгоритмы агрегирования [11] и др.

Метод ветвей и границ. Для решения поставленной задачи предлагается метод ветвей и границ, основанный на результатах работы [3, 4].

Ветвление. Множество всех расписаний (их число равно m^n) будем описывать в виде дерева расписаний. На нулевом уровне дерева находится корень, который соответствует множеству всех расписаний. На первом уровне находится m вершин, каждая из которых соответствует множеству всех расписаний, в которых первая работа назначена на определенный процессор. На втором уровне дерева находится m^2 вершин, каждая из которых соответствует множеству всех расписаний, в которых первые две работы назначены на один или два определенных процессора. На n -м уровне дерева расписаний находится m^n листьев, каждый из которых соответствует некоторому расписанию выполнения множества работ N .

Пусть x_k – некоторый узел уровня k дерева расписаний, $R(x_k)$ – множество всех расписаний, соответствующих этому узлу (т.е. множество расписаний, в которых работы $1, 2, \dots, k$ назначены на определенные процессоры), x_{k+1}^j – узел уровня $k+1$ ($k < n$), связанный с узлом x_k ребром, соответствующим процессору j . Наша цель – вычисление нижней и верхней оценок минимальной длины расписания на множестве $R(x_k)$. Имея эти оценки, можно применить стандартную схему метода ветвей и границ [12] (например, одностороннего или фронтального ветвления).

Нижняя оценка. Пусть T_j ($j = 1, \dots, m$) – загруженность процессора j после назначения первых k работ (т.е. T_j – это суммарная длительность работ из числа $1, 2, \dots, k$, назначенных на процессор j). Нижнюю оценку $L(x_k)$ минимальной длины расписания на множестве $R(x_k)$ будем вычислять следующим образом: $L(x_k) = \max(L_1(x_k), L_2(x_k), L_3(x_k))$, где $L_1(x_k), L_2(x_k), L_3(x_k)$ – это нижние оценки, вычисленные тремя различными способами.

Величина $L_1(x_k)$ вычисляется как следующий максимум: $L_1(x_k) = \max_{j=1,2,\dots,m} T_j$. При хранении величины T_1, T_2, \dots, T_m в виде обычного массива сложность вычисления $L_1(x_k)$ составляет $\theta(m)$.

Величина $L_2(x_k)$ вычисляется как следующий максимум:

$$L_2(x_k) = \max_{i=k+1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} (T_j + t_{ij}).$$

При использовании для этого обычного двумерного массива A с элементами $a_{ij} = T_j + t_{ij}$, $i = k+1, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$ сложность вычисления величины $L_2(x_k)$ составляет $\theta(mn)$.

Величина $L_3(x_k)$ вычисляется по формуле

$$L_3(x_k) = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m T_j + \sum_{i=k+1}^n \min_{j=1, \dots, m} t_{ij} \right).$$

Верхняя оценка. В качестве верхней оценки $H(x_k)$ минимальной длины расписания на множестве $R(x_k)$ возьмем длину расписания, в котором работы $1, 2, \dots, k$ назначены на процессоры в соответствии с вершиной x_k дерева расписаний, а работы $k+1, \dots, n$ назначаются по следующему “жадному” алгоритму. Пусть уже назначены работы $1, 2, \dots, p$ ($k \leq p < n$), T_j – загруженность процессора j ($j = 1, 2, \dots, m$) и $\min(T_1 + t_{p+1,1}, \dots, T_m + t_{p+1,m}) = T_{j_0} + t_{p+1,j_0}$. Тогда работа $p+1$ назначается на процессор j_0 . Указанная процедура повторяется для $p = k, k+1, \dots, n-1$. Сложность процедуры вычисления величины $H(x_k)$ составляет $O(m \cdot n)$. В случае, когда процессоры идентичные (т.е. $t_{ij_1} = t_{ij_2}$ при всех $1 \leq j_1, j_2 \leq m$) работа $p+1$ назначается на процессор j_0 , определяемый соотношением $\min(T_1, T_2, \dots, T_m) = T_{j_0}$.

Реализация обхода дерева в методе ветвей и границ в однопроцессорной системе. При применении метода ветвей и границ происходит последовательное разбиение множества допустимых решений на подмножества: на каждом последующем шаге новые подмножества образуются в итоге разбиения некоторых подмножеств, полученных на предыдущих шагах. Так строится дерево решения исходной задачи. Такое разбиение продолжается до тех пор, пока для подмножеств, соответствующих конечным вершинам дерева, решение задачи уже не требует разбиения.

Поскольку при данном подходе с ростом размерности задачи быстро возрастают запросы к необходимой для служебных массивов оперативной памяти, нами был предложен комбинированный алгоритм, при котором обход дерева собственно по методу ветвей и границ совершается в пределах первых k уровней дерева, а для оставшихся перспективных ветвей дерева решение вырабатывается жадным алгоритмом.

Для этой реализации алгоритма были проведены расчеты, в том числе сравнительно с результатами алгоритма полного перебора дерева и с идеальной оценкой расписания.

В приведённой ниже таблице m и n – это число процессоров и заданий, соответственно, Exc_Ideal – превышение полученного итога вычислений (длины расписания) над оценкой для идеального расписания для тех же данных (средняя величина для серии из 50 запусков с различными случайно порождёнными наборами входных данных для данных значений m и n).

Таблица. Сравнение полученной точности расчёта расписания с идеальной.

| m | n | Exc_Ideal |
|-----|------|-----------|
| 4 | 20 | 1.0375 |
| 4 | 40 | 1.0289 |
| 4 | 60 | 1.0209 |
| 4 | 80 | 1.0170 |
| 4 | 100 | 1.0137 |
| 4 | 150 | 1.0111 |
| 4 | 200 | 1.0069 |
| 4 | 250 | 1.0059 |
| 4 | 300 | 1.0050 |
| 4 | 350 | 1.0039 |
| 4 | 400 | 1.0038 |
| 4 | 450 | 1.0034 |
| 4 | 500 | 1.0032 |
| 4 | 600 | 1.0025 |
| 4 | 700 | 1.0023 |
| 4 | 800 | 1.0020 |
| 4 | 900 | 1.0019 |
| 4 | 1000 | 1.0017 |
| 4 | 1500 | 1.0010 |
| 4 | 2000 | 1.0009 |
| 4 | 2500 | 1.0007 |
| 4 | 3000 | 1.0005 |
| 4 | 4000 | 1.0004 |
| 4 | 5000 | 1.0003 |

Приведённые результаты говорят, на наш взгляд, о достаточно высокой точности вычисления оптимальных расписаний, причём точность определённо улучшается при росте размерности задачи.

Распараллеливание обхода дерева в методе ветвей и границ при реализации алгоритма в многопроцессорной системе.

В итоге разбиения начальная задача распадается на ряд подзадач, которые могут решаться в значительной степени независимо друг от друга, что обеспечивает возможность распараллеливания решения задачи. Отметим, что при упомянутом выше комбинированном алгоритме на основе метода ветвей и границ, такое распараллеливание даёт возможность не только снизить время получения результата, но и повысить его точность. Действительно, поскольку распараллеливание предполагает решение задачи на каждом физическом процессоре не с самого начала обхода дерева решений, а после того, как число рассмотренных его ветвей станет близким к числу предоставленных физических процессоров (подробности реализации здесь могут заметно различаться в зависимости от принятых разработчиком критериев и представлений). Поэтому при принятом комбинированном подходе к решению задачи фактическое число просматриваемых по собственно методу ветвей и границ уровней дерева решений при параллельной реализации возрастает. Соответственно, возрастает и точность получаемых решений.

Заметим, что при реализации параллельного алгоритма возникают дополнительные задачи, в частности, необходимость поддерживать определенные связи (зависимости) между полученными подзадачами, что объясняется следующими двумя причинами:

- 1) дерево решения может оказаться плохо уравновешенным, что приводит к тому, что процессоры вычислительной системы оказываются неравномерно загруженными;
- 2) возникающие при попытке уравновешивания нагрузки зависимости по данным между подзадачами, связанные с передачей оценок, наилучших значений оптимизируемого функционала и других подобных сведений, могут приводить к большим накладным расходам на взаимодействие процессов, препятствующих повышению параллельной эффективности;

Для преодоления перечисленных причин снижения успешности распараллеливания решения задачи применяются методы оптимизации загрузки процессов, минимизации обменов данными, а также распределения обменов по вычислительному пространству [15, 16].

Список литературы

1. Гончаров Е.Н., Кочетов Ю.А. Вероятностный поиск с запретами для дискретных задач безусловной оптимизации // Дискретный анализ и исследования операций. Сер. 2. 2002. Т. 9. № 2. С. 13–30.
2. Кочетов Ю.А., Столяр А.А. Использование чередующихся окрестностей для приближенного решения задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами // Дискретный анализ и исследования операций. Сер. 2. 2003. Т. 10. № 2. С. 29–56.
3. Алексеев О.Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. М.: Наука, 1987.
4. Фуругян М.Г. Некоторые алгоритмы решения минимаксной задачи составления многопроцессорного расписания. //Изв. РАН, ТиСУ. 2014, № 2. С. 50–56.
5. Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы // ExponentaPro. Математика в приложениях. 2003. № 4(4). С. 70–75.
6. Glover F., Laguna M. Chapter 3: Tabu search/ Ed. R. Colin Reeves, Modern Heuristics Techniques for Combinatorial Problems. Oxford, Blackwell Scientific Publications, 1993. P. 70–150.
7. Raghavan R. Probabilistic Construction of Deterministic Algorithms: Approximating Packing Integer Programs // J. Computer and System Sciences. 1988. V. 37. P. 130–143.
8. Костенко В.А., Смелянский Р.Л., Трекин А.Г. Синтез структур вычислительных систем реального времени с использованием генетических алгоритмов// Программирование. 2000. № 5. С. 63–72.
9. Shen C., Pao Y., Yip P. Scheduling multiple job problems with guided evolutionary simulated annealing approach // Proc. First IEEE Conf. on Evolutionary Computations. Orlando, 1994. P. 702–706.
10. Brucker P. Scheduling Algorithms. Heidelberg, Springer, 2001..
11. Красовский Д.В. Алгоритмы решения задачи составления оптимального расписания без прерываний. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-матем. наук. М.: МФТИ, 2007.
12. Коглер В., Штиглиц К. Перечислительные и итеративные алгоритмы. В кн.: Теория расписаний и вычислительные машины. Под ред. Коффмана Э.Г. М.: Наука, 1984. С. 251–288.
13. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005.
14. Гончар Д.Р. Параллельная реализация мультиоценочного алгоритма составления многопроцессорного расписания без прерываний. // Некоторые алгоритмы

планирования вычислений и методы многокритериальной оптимизации для многопроцессорных систем. М.: ВЦ РАН, 2014. С. 21–31.

15. *Посыпкин М.А., Сигал И.Х., Галимьянова Н.Н.* Алгоритмы параллельных вычислений для решения некоторых классов задач дискретной оптимизации. М.: ВЦ РАН, 2005.

16. *Посыпкин М.А., Сигал И.Х., Галимьянова Н.Н.* Параллельные алгоритмы в задачах дискретной оптимизации: вычислительные модели, библиотека, результаты экспериментов. М.: ВЦ РАН, 2006.

A parallel algorithm for solving minimax problem of scheduling theory by the method of branches and borders

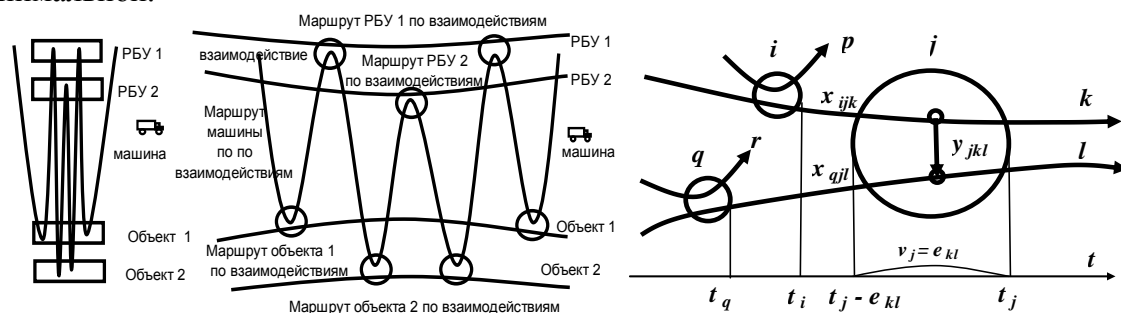
D. R. Gonchar
FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Математическая модель задачи развозки бетона

И.Л.Ерохин
ООО «НБК», Москва, Россия

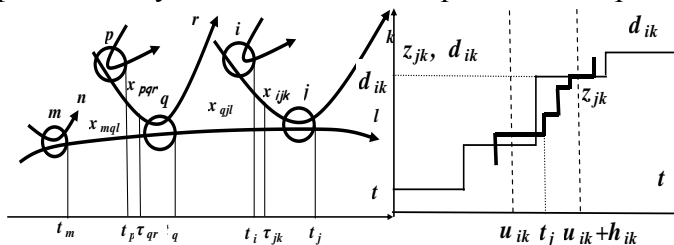
Классическая задача о коммивояжере предусматривает посещение коммивояжером каждого города один и только один раз. Если, маршрут коммивояжера, исходя из каких-либо условий, предполагает многократное посещение одного и того же города, возникает новый класс задач теории расписаний. Для их формализации требуется введение понятия "взаимодействия" участников расписания и построения маршрутов участников расписания по "взаимодействиям". Сформулированная ниже задача доставки бетона на объекты строительства относится к такому классу задач. Доклад посвящен построению математической модели этой задачи.

Постановка задачи следующая. Объекты строительства (объекты) потребляют бетон, производимый растворобетонными узлами (РБУ). Доставка бетона от РБУ к объектам осуществляется автомобилями-бетоновозами (машинами). Машины начинают свой маршрут с автобаз и заканчивают маршрут автобазами. Каждая машина принадлежит одной автобазе. Продолжительность рабочего дня каждой машины ограничена. Количество перевозимого за один рейс машиной бетона ограничено. Задано время перемещения машин между пунктами, в которых расположены РБУ, объекты и автобазы. Задано время погрузки и разгрузки машин. Задан почасовой график потребности каждого объекта в бетоне. Количество бетона производимого и отгружаемого каждым РБУ не ограничено. Требуется составить маршруты машин, таким образом, чтоб почасовые графики потребности объектов в бетоне и другие ограничения задачи были удовлетворены, а общая длина маршрутов всех машин была минимальной.



Введем обозначения. Задано множество машин J , множество РБУ Q , множество объектов K , множество L автобаз и фиктивных пунктов начала маршрутов РБУ и объектов по взаимодействиям, множество моментов начала следующего часа M в

почасовых графиках. Объединение непересекающихся множеств РБУ, автобаз и объектов образует множество N топографических пунктов $N=U(Q,L,K)$. Объединение непересекающихся множеств: машин, РБУ и объектов образует множество P приборов. $P=U(J,Q,K)$. Два прибора могут взаимодействовать между собой (если это не запрещено им условиями данной задачи). Множество потенциальных взаимодействий приборов обозначим I . Взаимодействие машины и РБУ является погрузкой машины. Взаимодействие машины и объекта является разгрузкой машины. Взаимодействие машин (перегрузка) запрещено. Так же запрещены взаимодействия между собой топографических пунктов и элементов множеств их образующих. Любое взаимодействие предполагает участие двух и только двух приборов. Введем следующие параметры задачи: a_k - максимальное количество бетона, перевозимое за один раз, машиной $k \in J$; b_k - длительность рабочего дня машины $k \in J$; c_{pm} - время перемещения машин между пунктами $p \in N$ и $m \in N$; g_{kl} - принадлежность машины $k \in J$ автобазе $l \in L$. $g_{kl} = 1$, если машина $k \in J$ принадлежит автобазе $l \in L$, 0 в противном случае; e_{kl} - продолжительность взаимодействия приборов $k \in P$ и $l \in P$; d_{ik} - почасовой график (потребность объекта $k \in K$ в бетоне в момент начала каждого часа $i \in M$) Почасовой график представляет собой кусочно-постоянную возрастающую функцию; u_{ik} - начальный, h_{ik} - предельный срок поставки бетона на объект $k \in K$ в его почасовом графике $i \in M$ с учетом технологии производства работ и свойств бетона;



Введем основные переменные задачи: x_{ijk} – участок маршрута прибора $k \in P$ от взаимодействия $i \in I$ до взаимодействия $j \in I$; $x_{ijk} = 1$, если прибор $k \in P$ после взаимодействия $i \in I$ переходит к взаимодействию $j \in I$, 0 , в противном случае; y_{jkl} – количество бетона, передаваемое взаимодействием $j \in I$ от прибора $k \in P$ прибору $l \in P$; Введем вспомогательные переменные задачи: $s_{jk} = 1$, прибор $k \in P$ участвует во взаимодействии $j \in I$, 0 , в противном случае; t_j – момент времени окончания взаимодействия $j \in I$; τ_{jk} - момент прибытия прибора $k \in P$ к взаимодействию $j \in I$; v_j – продолжительность взаимодействия $j \in I$; w_{ij} – время перемещения машин между взаимодействием $i \in I$ и $j \in I$; z_{jk} – количество бетона, имеющееся у прибора $k \in P$ после взаимодействия $j \in I$. В математической модели будут использоваться θ и δ функции Хэвисайда $\theta(x) = \{ 1, \text{ если } x \geq 0, 0, \text{ в противном случае}, \delta(x) = \{ 1, \text{ если } x > 0, 0, \text{ в противном случае}.$

Математическая модель задачи представляет собой зависимость $(x,y)=f(a,b,c,d,e,h,g,u)$ и формулируется следующим образом:

$$\sum_{k \in P} \max_{j \in I} \tau_{jk} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$t_j = \max_{k \in P} \tau_{jk} + v_j, \quad j \in I, \quad (2)$$

$$\tau_{jk} = \max_{l \in P} (\max_{i \in I} (t_i + w_{ijk}) x_{ijk}) (1 - g_{kl}) + h_{kl} g_{kl}, \quad j \in I, k \in P, \quad (3)$$

$$v_j = \sum_{i \in I} \sum_{k \in P} \sum_{l \in P} e_{kl} s_{jk} s_{jl}, \quad i \in I, j \in I, \quad (4)$$

$$w_{ij} = \sum_{k \in P} \sum_{m \in P} \sum_{p \in P} c_{pms} x_{ijk}, \quad i \in I, j \in I, \quad (5)$$

$$s_{jk} = \sum_{l \in P} \delta(y_{jkl} + g_{kl}) = \sum_{l \in P} \delta(y_{jlk} + g_{lk}) = \sum_{i \in I} x_{ijk} = \sum_{i \in I} x_{jik}, \quad j \in I, k \in P, \quad (6)$$

$$\sum_{k \in P} s_{jk} \in \{0,2\}, \quad j \in I, \quad (7)$$

$$s_{jk} \in \{0,1\}, \quad j \in I, \quad k \in P, \quad (8)$$

$$\sum_{k \in P} g_{kl} = 1, \quad l \in L, \quad (9)$$

$$z_{jk} = \sum_{i \in I} z_{ik} x_{ijk} + \sum_{l \in P} (y_{jkl} - y_{jlk}), \quad j \in I, \quad k \in P, \quad (10)$$

$$\max_{j \in I} z_{jk} \theta (t_j - u_{ik}) \delta(u_{ik} - t_j + h_{ik}) = d_{ik}, \quad i \in M, \quad k \in K, \quad (11)$$

$$z_{jk} \leq a_k, \quad j \in I, \quad k \in J, \quad (12)$$

$$\max_{j \in I} \tau_{jk} \leq b_k, \quad k \in J, \quad (13)$$

Смысл соотношений не раскрыт из-за ограничений на объем текста. Интерес к данной задаче связан с тем, что формализация условий многих игр, допускающих повторение некоторых ходов, невозможна без использования множества "взаимодействий".

Mathematical model of the problem of unloading concrete

I.L. Erohin

ООО «NBK», Moscow, Russia

Новый универсальный подход к решению задач параметрической оптимизации

В.А.Ковешников, А.Я.Мехтиев, А.А.Зубарев, О.Ю.Шевцов

АО «КБП» им. акад. А.Г.Шутунова», Тула, Россия

Введение

Оптимизация – естественный и необходимый этап процесса моделирования, направленный на повышение качества функционирования систем. При проектировании сложных наукоемких изделий, в том числе и вооружений, актуальность оптимизационных исследований возрастает. Однако на практике оптимизация затруднена ввиду отсутствия надежных методов, способных давать эффективные решения независимо от особенностей математической модели. Рассматриваемый в статье материал раскрывает сущность нового универсального подхода (НС-метод), основанного на эвристиках, эксперименте, использующий специальные процедуры отсечения и сортировки, паретоанализ и теорию случайных процессов.

Существует много оптимизационных методов, однако большинство из них предназначены для решения задач определенного класса и имеют на практике много ограничений, обусловленных многокритериальностью, многопараметричностью, многоэкстремальностью, наличием областей неопределенности моделей, спецификой непрерывных и дискретных переменных, различными требованиями по точности, сходимостью и временем решения. Универсальный метод предполагает возможность оптимизационного исследования при наличии всего спектра отмеченных проблем.

Разработка метода, позволяющего решать большинство задач параметрической оптимизации, является сложной и актуальной задачей. Определенную роль здесь может играть эвристический, интуитивный подход, основанный на случайном поиске, специальных процедурах накопления и сортировки динамических массивов информации.

Сущность подхода. Понятие накопителя решений

Если основу подхода определяет идея анализа набора фиксированных решений, а переход в следующее состояние (очередная итерация) выполняется посредством многокритериальных многоуровневых сортировок множества решений, причем генерация новых решений выполняется случайно, то мы имеем дело с *методом анализа накопителя*, накопительным сортировочным методом (НС-метод). Схематично сущность подхода поясняет цепочка операций, представленная на нижеследующей схеме взаимодействия.

$$V_0 \xrightarrow{\Delta V_0} (V_1 \xrightarrow{\Pi \rightarrow \Phi \rightarrow R} V_1' \xrightarrow{W} V_1^*) \xrightarrow{\Delta V_1} (V_2 \xrightarrow{\Pi \rightarrow \Phi \rightarrow R} V_2' \xrightarrow{W} V_2^*) \dots$$

$$\xrightarrow{\Delta V_{k-1}} (V_k \xrightarrow{\Pi \rightarrow \Phi \rightarrow R} V_k' \xrightarrow{W} V_k^*) \xrightarrow{\Delta V_k} \dots \quad (3)$$

$$V_0 \xrightarrow{\Delta V_0} (V_1 \xrightarrow{\Phi \rightarrow R} V_1' \xrightarrow{W} V_1^*) \xrightarrow{\Delta V_1} (V_2 \xrightarrow{\Phi \rightarrow R} V_2' \xrightarrow{W} V_2^*) \dots \xrightarrow{\Delta V_{k-1}} (V_k \xrightarrow{\Phi \rightarrow R} V_k' \xrightarrow{W} V_k^*) \xrightarrow{\Delta V_k} \dots \quad (4)$$

Зависимости (3) символизируют о включении паретоанализа (на схеме - символ Π) как одной из операций обработки накопителя решений, согласно зависимости (4) операция паретоанализа не используется. Получаем модификации метода оптимизации, эффективность которых можно оценить разве что экспериментально.

Символика, используемая в записях (3),(4) имеет следующий смысл.

V_0 – начальное состояние накопителя, пустой накопитель.

ΔV_0 – набор начальных решений, полученных определенным способом (например, случайно в n – мерном пространстве поиска). Необходимая информация для запуска процедуры поиска.

ΔV_{k-1} – набор решений, полученных на $(k-1)^{\text{ой}}$ итерации процесса поиска путем использования уже имеющихся решений за счет синтеза одноименных координат и их варьирования для последующего добавления и анализа в накопителе.

V_k – набор всех решений, уже имеющихся на $(k-1)^{\text{ой}}$ итерации V_{k-1}^* и добавленных ΔV_{k-1} , в совокупности формирующих исходное состояние накопителя на следующей $k^{\text{ой}}$ итерации, то есть $V_k = V_{k-1}^* \cup \Delta V_{k-1}$.

V_k' – набор решений накопителя, полученных в результате паретоанализа, оценки по фитнес – функции и ранжирования.

V_k^* – набор базовых значений на $k^{\text{ой}}$ итерации, полученных после выявления и потери бесперспективных решений и содержащий текущие результаты (лучшее допустимое решение, если оно имеется, паретооптимальное недопустимое решение лучшее по целевой функции, текущее решение в ходе итерационного процесса, основное оптимальное решение – оптимальное по цели при допустимых ограничениях либо лучшее по ограничениям недопустимое решение).

Φ – символ отображения решений посредством фитнес–функции (совокупная оценка эффективности оптимизации в зависимости от значений целевой функции и ограничений с учетом глубины процесса оптимизации - дискретного времени).

R – символ ранжирования, фиксирующий необходимость отыскания и последовательной записи решений в метрике фитнес–функции, когда все решения располагаются в порядке понижения значимости.

W – символ операции определения и фиксации лучших решений, содержащихся в накопителе.

Получив новое решение, его необходимо сравнить с имеющимися решениями в текущий момент и обосновать необходимость включения в накопитель для использования в дальнейшей работе. Принципиальной основой здесь являются

внешние условия, когда поиск должен выполняться в строго допустимой области либо когда область поиска произвольна, то есть, можно использовать как допустимые так и недопустимые решения. В связи с этим целесообразно рассмотреть два блока стратегии управления накопителем.

Стратегии управления при отсутствии ограничений на область поиска

Символ (+) фиксирует факт поступление решения в накопитель («Н»), с другой стороны символ (–) свидетельствует о том, что решение не включается в состав «Н».

1. (+) При *любом* значении ограничений $g_i(\bar{x}), i = \overline{1, m}$ и целевой функции $f(\bar{x})$ решение поступает в накопитель («Н»).
2. (–) Если координаты нового решения *совпадают* с одним из решений «Н», то оно теряется. Такая логика позволяет избежать ситуации «информационной пустоты», когда все решения «Н» совпадают, что наиболее вероятно при решении задач дискретной или целочисленной оптимизации.
3. (+) Ограничение *нарушено*, но не более некоторого порога ограничений, тогда оно поступает в «Н».
4. (+) *Всякое* допустимое решение поступает в «Н».
5. (–) Решение допустимое, но *есть более сильные* допустимые решения.
6. (–) Если решение *уступает худшему* решению в «Н» по цели и ограничениям одновременно, то оно в «Н» не поступает.
7. (+) Решение допустимое, поступает в «Н», так как там на текущий момент *нет допустимых решений*.
8. (–) Новое решение допустимое, оно теряется, так как *уступает худшему* допустимому решению.
9. (–) Новое решение допустимое, оно не поступает в «Н» в связи с тем, что *уступает лучшему* решению без нарушения ограничений (очень жесткий режим).

Стратегии управления при поиске в допустимой области

1. (+) В «Н» поступает *любое допустимое решение*, даже если оно уступает худшему решению «Н».
2. (+) В «Н» поступает допустимое решение, если оно *лучше самого худшего* решения «Н».
3. (+) В «Н» поступает допустимое решение, если оно *лучше самого лучшего* решения «Н» в текущий момент (на текущей итерации), это очень жесткий режим.
4. (–) В «Н» решение не поступает, если оно *совпадает* с одним из уже имеющихся решений. Совпадающие решения не дублируются.
5. (+) В «Н» поступает допустимое решение, если оно уступает только *самому лучшему* решению «Н».

При оптимизации имеет место проблема в связи улучшением значения целевой функции и выполнением ограничений. Сложность сравнения двух решений возникает в том случае, когда улучшение по одному из показателей сопровождается ухудшением по другому, тогда неизбежно возникает неопределенность, классифицируемая как многокритериальность, то есть проблема принятия решений при наличии нескольких критериев (здесь их два). Паретоанализ – один из эффективных и оригинальных подходов разрешения неопределенности критериев, причем не использующий какие либо способы преобразования нескольких показателей и сведения их к одному обобщенному [1].

На основе нескольких решений не сложно получить новое решение, используя все многообразие классических и современных оптимизационных подходов. Для универсального метода оптимизации представляется наиболее перспективным случайный подход, обозначенный в генетических алгоритмах как скрещивание и мутации.

Оптимизационные решения могут быть либо допустимыми, либо не допустимыми. В первом случае их легко сравнивать, так как по существу остается лишь один показатель – значений целевой функции. В случае не допустимых решений ситуация принципиально иная, так как превосходство по одному из показателей сопровождается проигрышем по другому. Паретоанализ является хорошим дополнением при сравнении решений. Он позволяет разделить их на кластеры так, что состав решений первых кластеров (в порядке сортировки) становится наверняка предпочтительнее последующих, однако в пределах кластера объективных предпочтений для различия не существует, и все они между собой не различимы.

Использование механизма свертки позволяет перевести все решения к одному показателю и обеспечивает возможность их сравнения. В накопителе V меняется порядок следования решений, где они расположены по убыванию значений фитнес-функции. При этом остаются лишь лучшие среди них в количестве, не превосходящем некоторый фиксированный объем (N) накопителя.

Для оценки работоспособности данного метода (алгоритма) использовались специальные тестовые задачи. Что касается решения таких хорошо известных в теории параметрической оптимизации задач, как Griewangk, Schwefel, Askley, Helix, Леви, Растригина, Rosenbrock, Powel, Wood, Kowalik и др. [2,5], то все они были получены в стандартном режиме без какой-либо дополнительной настройки алгоритма и модели.

Отдельного внимания заслуживают дискретные задачи (в отличие от только что упомянутых непрерывных оптимизационных задач), где и для НС-метода наступают определенные сложности. Например, при решении задачи коммивояжера, когда для 100 объектов – точек число вариантов составляет порядка $9,332621544394418 \cdot 10^{157}$ единиц и некоторых задачах шахматного содержания.

Другой сложный набор тестов представлен в материалах отчета международной конференции по проблемам оптимизации [4], где в основном рассматриваются непрерывные задачи, а поиск оптимума «закрыт» различными формальными особенностями представленных моделей. Очевидно, для классических оптимизационных методов такие задачи не разрешимы. С использованием данного подхода были решены все задачи, а в трех из них был получен более лучший результат(рекорд).

Выводы

1. Изложен новый подход к решению задач параметрической оптимизации. Разработано программное обеспечение и несколько модификаций метода, проведена их апробация на многочисленных тестовых функциях, представляющих все многообразие задач параметрической оптимизации.

2. Компьютерные эксперименты свидетельствуют о высокой эффективности метода при решении всех типов задач параметрической оптимизации на основе единого алгоритма, не меняя программный код, фиксируя особенности конкретной задачи лишь при вводе информации. Данное обстоятельство является подтверждением достоверности названия «*универсальный подход к решению задач параметрической оптимизации*».

Список литературы

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981, – 488 с.
2. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
3. Растринин Л.А. Методы случайного поиска. – М.: Наука, 1968.

4. J.J.Liang, T.P.Runarsson, E.Mezura-Montes, M.Clerc, P.N. Suganthan, C.A.Coello, K.Deb Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2006 Special Session on Constrained Real-Parameter Optimization. Technical Report, 2006, 19 с.

5. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций, М., Наука, 1971, – 384 с.

6. Ковешников В.А., Фатуев В.А., Троицкий Д.И., Пантелеев И.Ю. Разработка и исследование универсального алгоритма случайно-генетической оптимизации. М.: Институт проблем управления (ИПУ), //Труды международной конференции SICPRO '09, 2009.

New universal approach to the solution of problems of parametrical optimization

V.A. Koveshnikov, A.Ya. Mekhtiyev, A.A. Zubarev, O.Yu. Shevtsov
Shipunov AO KBP, Tula, Russia

Метод обобщенных потенциалов для смешанной задачи синтеза коммуникационной сети

О.А. Косоруков

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет Высшая школа управления и инноваций,
Москва, Россия*

Работа основана на результатах из [1] и является дальнейшим развитием представленного в данной работе метода обобщенных потенциалов. Рассматривается задача синтеза сети для модели Гейла о спросе и предложении [2]. Пусть задан ориентированный граф с вершинами из множества $P = \{p_i : i = 1, \dots, \eta\}$ и дугами j из множества Γ . Рассмотрим также некоторую совокупность вершин A (подмножество множества P), которые будем называть источниками (или пунктами производства).

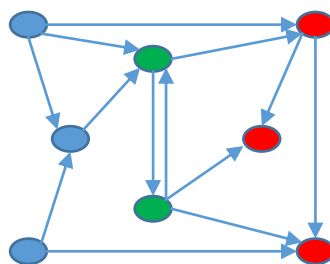


Рис. 1. Задача Гейла о спросе и предложении.

Рассмотрим также некоторое множество вершин $C = \{p_i : i = \eta - m + 1, \dots, \eta\}$, которые назовем стоками (или пунктами потребления). Пусть оставшиеся вершины образуют множество $B = \{p_i : i = n + 1, \dots, \eta - m\}$, которые мы будем называть промежуточными вершинами. Пусть каждой вершине $p_i \in A$ поставлена в соответствие некоторая неотрицательная функция $\varphi_i(x) \geq 0$, $x \in X$, где X – множество допустимых распределений ресурсов. Кроме того, известны неотрицательные функции $\varphi_j(x) \geq 0$, задающие пропускные способности дуг сети в зависимости от выбранного

распределения ресурсов. Таким образом, ресурсы распределяются как между вершинами-источниками, определяя тем самым мощности источников, так и между дугами сети, определяя их пропускные способности. Для вершин-стоков известны величины потребностей в продукте – d_j . В дальнейшем для упрощения записей будем писать $i \in A, i \in B, i \in C$ вместо $p_i \in A, p_i \in B, p_i \in C$ (рис. 1).

Известно, что модель с несколькими вершинами производства и ограниченными запасами продукции может быть сведена к задаче с одним пунктом производства с неограниченным запасом продукта (рис. 2).

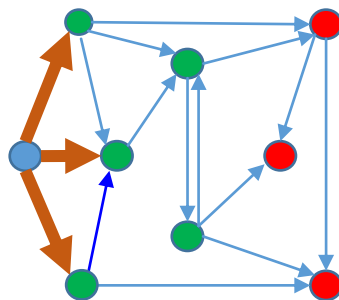


Рис. 2. Задача с одним пунктом производства

Задача состоит в рассмотрении допустимых распределений ресурсов и связанных с ними допустимых потоков, которые за счет предложения продукта в источниках удовлетворяют потребности в продукте в стоках сети. Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\min(\sum_{j \in \Gamma} x_j), \quad \sum_{j \in C(i)} y_j - \sum_{j \in D(i)} y_j = 0, \quad i \in A \cup B, \quad (1)$$

$$\sum_{j \in D(i)} y_j - \sum_{j \in C(i)} y_j = d_i, \quad i \in C, \quad y_j - a_j x_j \leq b_j, \quad j \in \Gamma,$$

$$x_j \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad j \in \Gamma.$$

Предполагаем, что: $a_j > 0, \quad b_j \geq 0, \quad j \in \Gamma$.

Задача (1) рассматривалась нами в предположении, что $a_j > 0, j \in \Gamma$. Рассмотрим теперь задачу в общем случае, когда $a_j \geq 0, j \in \Gamma$. Заметим также, что случай $a_j < 0$ не имеет содержательного смысла с точки зрения рассмотрения переменных x как ресурсных переменных. В общем случае задача имеет следующий вид:

$$\min(\sum_{j \in \Gamma_1} x_j), \quad \sum_{j \in C(i)} y_j - \sum_{j \in D(i)} y_j = 0, \quad i \in B, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in D(i)} y_j - \sum_{j \in C(i)} y_j = d_i, \quad i \in C, \quad y_j \leq b_j, \quad j \in \Gamma_2, \quad y_j - a_j x_j \leq b_j, \quad j \in \Gamma_1,$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \Gamma_1, \quad y_j \geq 0, \quad j \in \Gamma.$$

Где $\Gamma_1 = \{j \in \Gamma: a_j > 0\}$ и $\Gamma_2 = \{j \in \Gamma: a_j = 0\}$.

Задача (2), вообще говоря, может не иметь допустимых решений. Рассмотрим теперь вспомогательную задачу, введя дополнительные переменные $x_j \geq 0, j \in \Gamma_2$ и

функции пропускных способностей $\delta x_j + b_j \geq 0, j \in \Gamma_2$. Где $\delta = (2 \sum_{j \in \Gamma_1} a_j)^{-1}$.

Математическая постановка вспомогательной задачи имеет следующий вид:

$$\min_{x,y} \left(\sum_{j \in \Gamma} x_j \right), \quad \sum_{j \in C(i)} y_j - \sum_{j \in D(i)} y_j = 0, \quad i \in B,$$

$$\sum_{j \in D(i)} y_j - \sum_{j \in C(i)} y_j = d_i, \quad i \in C, \quad (3)$$

$$y_j \leq \delta x_j + b_j, \quad j \in \Gamma_2, \quad y_j - a_j x_j \leq b_j, \quad j \in \Gamma_1, \quad x_j \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad j \in \Gamma.$$

Задача (3) относится к типу задач, метод решения которых был подробно рассмотрен ранее [1], а именно метод обобщенных потенциалов. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть (x^*, y^*) есть оптимальное решение задачи (3). Если существует $i \in \Gamma_2$, такое, что $x_i^* > 0$, то множество допустимых решений задачи (2) пусто. Иначе (x^*, y^*) есть оптимальное решение задачи (2).

Доказательство. Пусть (x^*, y^*) есть оптимальное решение задачи (3). Допустим, что множество $B = \{i \in \Gamma_2 : x_i^* > 0\}$ не пусто. Если решение (x^*, y^*) не является крайней точкой допустимого множества, то оно, как известно, есть выпуклая комбинация некоторых оптимальных крайних точек. Тогда можно утверждать, что если $j_0 \in B$, то существует оптимальная крайняя точка, для которой $x_{j_0}^* > 0$. То есть множество B , для

которого не пусто. Таким образом, можно считать без ограничения общности, что

(x^*, y^*) есть оптимальная крайняя точка. Предположим теперь, что множество допустимых решений не пусто и вектор (x, y) есть некоторое допустимое решение задачи (2). Если $A = \sum_{i \in \Gamma_1} x_i$, то легко показать, что задача (2) равносильна задаче на

$$\text{компакте: } 0 \leq y_j \leq b_j, \quad j \in \Gamma_2, \quad 0 \leq y_j \leq A a_j + b_j, \quad j \in \Gamma_2,$$

$$0 \leq x_j \leq A, \quad j \in \Gamma_1.$$

Следовательно, задача имеет решение в силу теоремы Вейерштрасса. Так как задача (2) есть задача линейного программирования, то она имеет оптимальную крайнюю точку, которую обозначим (\bar{x}, \bar{y}) . Если теперь дополнить вектор (\bar{x}, \bar{y}) компонентами $x_j = 0 \quad j \in \Gamma_2$, то полученный вектор (\tilde{x}, \tilde{y}) будет крайней точкой задачи (3). Это следует из допустимости вектора (\tilde{x}, \tilde{y}) и того факта, что система столбцов, соответствующих положительным компонентам, не изменяется, то есть остается линейно независимой.

Из теории линейного программирования известно, что существует последовательность крайних точек, начинающаяся с произвольной начальной точки (\tilde{x}, \tilde{y}) и заканчивающаяся оптимальной точкой (x^*, y^*) . Соседние члены этой последовательности являются соседними крайними точками (то есть их базисы отличаются одним вектором), и значение функционала на этих точках монотонно не возрастает.

Непосредственно из обоснования алгоритма обобщенных потенциалов следует, что переход из крайней точки в соседнюю крайнюю точку с небольшим значением функционала осуществляется изменением векторов y и x вдоль некоторого цикла, для которого $E \leq 0$ и $Y > 0$. Поскольку для вектора (\tilde{x}, \tilde{y}) соответствующее ему множество B пусто, а для вектора (x^*, y^*) не пусто, то в последовательности существует пара соседних точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , для которых множество B пусто и не пусто соответственно. Такой переход можно осуществить лишь для цикла, содержащего

правильно ориентированную дугу j_0 множества Γ_2 . Но тогда $\Delta\mu_{j_0} = \frac{1}{\delta} = 2 \sum_{j \in \Gamma_1} \frac{1}{a_j}$.

Если в цикле содержатся дуги j множества Γ_2 обратной ориентации, то $\Delta\mu_j = 0$. Пусть в цикле r дуг множества Γ_2 правильной ориентации. Тогда справедливо следующее

$$E = \sum_{j \in H} \Delta\mu_j \geq r \frac{1}{\delta} - \sum_{j \in \Gamma_1} \frac{1}{a_j} > 0. \text{ Следовательно, такой переход невозможен. А,}$$

следовательно, сделанное предположение о не пустоте множества допустимых решений задачи (2) неверно. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Справедливость второй части теоремы следует непосредственно из того, что вектор (x^*, y^*) является допустимым решением задачи (2), а сама задача (2) является сужением задачи (3) на некоторое подмножество множества допустимых решений. Теорема доказана.

Список литературы

1. Косоруков О.А. Об одном алгоритме линейного синтеза коммуникационных сетей – Сб. Системное программирование и вопросы оптимизации, изд. МГУ. – 1987. - С. 174-180.
2. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. – М.: ИЛ, 1963. – 418 с.
3. Давыдов Э.Г. Игры, графы, ресурсы. – М.: Радио и связь, 1981, -112с.
4. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. - М.: Наука, 1974.
5. Kosorukov O.A., Davydov E. G. Some Questions of Nonlinear Synthesis of Communication Networks - Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics (Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 15. Vychislitel'naya Matematika i Kibernetika) Allerton Press Inc. (USA). – 1986. - № 2. - P. 31-36.

The algorithm of the method of generalized potentials for the mixed problem of optimal synthesis of communication network

O.A. Kosorukov

Lomonosov MSU, The Graduate School of Management and Innovation, Moscow, Russia

Использование алгоритмов нахождения максимального потока для построения статико-динамических расписаний*

В.А. Костенко, А.С. Смирнов
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Современные информационно управляющие системы реального времени (ИУС РВ) являются распределенными и включают в свой состав: вычислительные ресурсы, датчики, контроллеры исполнительных устройств, устройства хранения и отображения информации, которые взаимодействуют между собой. К ИУС РВ предъявляются

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-01237.

требования работы в режиме реального времени, нарушение которых недопустимо, а также предъявляются повышенные требования к надежности по сравнению с системами общего назначения.

Авиационные комплексы бортового радиоэлектронного оборудования (БРЭО) относятся к классу ИУС РВ. Для бортовых комплексов кроме требований реального времени и надежности задаются ограничения на массогабаритные и мощностные характеристики.

БРЭО летательных аппаратов предыдущих поколений имело федеративную архитектуру. Задачи каждой бортовой подсистемы (например, локационной, навигационной, управления двигателями) выполнялись на своих вычислителях, очень часто специализированных. На одном вычислителе не допускалось выполнение задач (прикладных программ) разных бортовых подсистем. Для обмена данными между вычислителем подсистемы, ее датчиками и контроллерами исполнительных устройств подсистемы использовалась своя локальная сеть информационного обмена. Подсистемы объединялись в единый комплекс посредством магистральных каналов информационного обмена. Это позволяло изолировать программы подсистем друг от друга и локализовать обмен данными между датчиками, контроллерами исполнительных устройств подсистемы и ее программами.

БРЭО летательных аппаратов нового поколения имеет интегрированную модульную архитектуру. Данный подход к построению БРЭО летательных аппаратов известен в литературе как «интегрированная модульная авионика». Этот подход предполагает построение БРЭО из унифицированных модулей с использованием стандартных сетевых протоколов и программных интерфейсов. Единый бортовой вычислитель строится из набора стандартизированных вычислительных модулей. Аппаратные ресурсы одного вычислительного модуля могут разделять прикладные программы различных бортовых подсистем. Это как правило позволяет сократить аппаратные затраты на построение вычислительных ресурсов. Однако, при этом требуется обеспечить изоляцию программ различных подсистем. Изоляция должна распространяться на все ресурсы, включая регистровую память, кэши центральных процессоров, шины ввода-вывода. Также требуется обеспечить обмен данными между датчиками, контроллерами исполнительных устройств подсистемы и ее программами через единую бортовую сеть информационного обмена.

Наиболее часто используемыми стандартами при построении БРЭО с архитектурой интегрированной модульной авионики, являются:

- ARINC 651 – основные принципы построения систем на основе интегрированной модульной авионики.
- ARINC 653 – спецификация операционных систем (Def Stan 00-74 – ее «военный вариант»).
- ARINC 664 (AFDX) – спецификация сети информационного обмена на основе Ethernet.

В информационно-управляющих системах реального времени с архитектурой интегрированной модульной авионики [1] изолированность программ (работ) различных подсистем ИУС РВ обеспечивается введением разделов и окон. Для работ каждой подсистемы выделяется свой раздел и набор временных окон (непересекающихся интервалов времени). Для каждой работы заданы время ее выполнения и директивный интервал в пределах которого она должна быть выполнена. Работы раздела могут выполняться только в рамках своих окон и каждому разделу выделяется необходимая память, к которой не могут обращаться программы других разделов. Работы раздела внутри окна запускаются на выполнение динамически. Например, по мере готовности данных в соответствии с приоритетами. Допустимо прерывание работы и ее последующее выполнение в этом окне или в одном из

следующих окон раздела. Работы различных разделов могут взаимодействовать лишь путем передачи сообщений. То есть работы выполняются в соответствии со статико-динамическим расписанием. Статико-динамическое расписание построено, если определены: привязка разделов к ядрам, для каждого раздела определен набор окон и для каждого окна определено время его открытия и время закрытия.

Наиболее близкими задачами, для которых известны алгоритмы, основанные на нахождении максимального потока в транспортной сети, являются задачи построения расписаний с прерываниями работ. Методика использования алгоритмов нахождения максимально потока в сети для построения расписаний с прерываниями, была предложена в работах [2,3].

В работе [4] был рассмотрен алгоритм построения расписаний для неоднородной многопроцессорной системы (процессоры имеют разную производительность). Прерывания и переключения работ не требуют временных затрат. В работе [5] был предложен алгоритм для задачи, в котором учитывался ограниченный объем памяти процессоров. В работе [6] предложен алгоритм для случая, когда длительности выполнения работ линейно зависят от количества выделенного им ресурса.

Основными проблемами, препятствующими непосредственному применению известных алгоритмов, основанных на нахождении максимального потока в транспортной сети, для построения статико-динамических расписаний являются: проблема учета принадлежности работ к разделам и проблема построения набора окон.

В работе [7] был предложен алгоритм, основанный на нахождении максимального потока в сети для однопроцессорного варианта задачи построения статико-динамических расписаний. В соответствии с директивными сроками работ (время начала и время завершения директивного интервала) строится упорядоченный по времени открытия набор непересекающихся временных интервалов. Работа может выполняться только в интервалах, которые пересекаются с ее директивным интервалом. Сеть представляет собой двудольный граф с источником и стоком. Первый уровень графа состоит из вершин, каждая из которых взаимно однозначно соответствует какой-либо работе (вершины-работы), второй уровень состоит из вершин, соответствующих каждому интервалу (вершины-интервалы). Источник соединен со всеми вершинами-работами. Вершина-работа соединяется со всеми вершинами-интервалами, на которых эта работа может выполняться. Все вершины-интервалы соединены со стоком.

Известные алгоритмы нахождения максимального потока в транспортной сети и построения по найденному потоку расписания выполнения работ не позволяют учитывать наличие окон, требуемое время на переключение окон разных разделов и принадлежность работ к разделам.

Проблемы учета принадлежности работ к разделам и построения набора окон решаются за счет модификации алгоритма нахождения максимального потока в сети [7]. Алгоритм основан на алгоритме проталкивания предпотока.

В докладе будет рассмотрено расширение алгоритма предложенного в [7] для многопроцессорного варианта задачи построения статико-динамических расписаний. Это достигается за счет введения в граф сети дополнительного слоя вершин соответствующих процессорам и модификации алгоритма нахождения максимального потока в сети.

На основе предложенных в [7-9] алгоритмов было разработано инструментальное средство конфигурирования операционных систем, соответствующих стандарту ARINC 653, в части построения статико-динамических расписаний. Созданное средство обладает следующими свойствами [8]:

- имеет графический интерфейс для задания и редактирования исходных данных;

- поддерживает визуализацию исходных данных и результатов работы (привязка разделов к модулям и ядрам; расписание окон и временная диаграмма выполнения программ);
- позволяет запускать алгоритмы привязки разделов к модулям и ядрам, а также построение окон выполнения разделов;
- поддерживает ручную корректировку результатов с автоматической проверкой корректности вносимых изменений;
- позволяет формировать отчеты по результатам работы, а также экспортировать построенное расписание во внешний файл для включения в состав конфигурации операционной системы;
- построено по модульной архитектуре и позволяет заменять используемые алгоритмы, что позволяет настраивать средство на специфику проектируемой системы и классы исходных данных.

Также инструментальное средство поддерживает инкрементальный режим распределения вычислительной нагрузки, при котором пользователем фиксируется привязка отдельных разделов к процессорным ядрам, и автоматически конструируемая полная привязка должна включать в себя заданную фиксированную часть. Это соответствует итеративному подходу к разработке программного обеспечения вычислительных систем ИУС РВ, при котором вычислительная нагрузка на систему наращивается поэтапно.

Список литературы

1. Костенко В. А. Архитектура программно-аппаратных комплексов бортового оборудования // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 3. С. 229—233.
2. A. Federgruen, H. Groenevelt. “Preemptive Scheduling of Uniform Machines by Ordinary Network Flow Technique”. *Management Science* Vol. 32, No. 3, March 1986.
3. T. Gonzales, S. Sanhi. “Preemptive Scheduling of Uniform Processor Systems”. *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 25, No. 1, January 1978.
4. Фуругян М.Г. Некоторые алгоритмы анализа и синтеза многопроцессорных вычислительных систем реального времени. // *Программирование*, 2014, №1, с. 36-44.
5. Гуз Д.С., Фуругян М.Г. Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с ограничениями на память процессоров // *Автоматика и телемеханика*. – 2005. – №2 – С. 138-147.
6. Косоруков Е.О., Фуругян М.Г. Некоторые алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах. // *Вестник МГУ*, сер. 15, 2009, № 4, с. 34 – 37.
7. Костенко В.А., Смирнов А.С. Алгоритм построения однопроцессорных статико-динамических расписаний// *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика*. 2018. № 1. С. 45-52.
8. Балашов В. В. Семейство систем автоматизации проектирования бортовых вычислительных систем реального времени // *Программные продукты, системы и алгоритмы*. 2017. № 4. С. 1–19.
9. Balashov V., Balakhanov V., Kostenko V. Scheduling of computational tasks in switched network-based ima systems // *Proc. International Conference on Engineering and Applied Sciences Optimization*. — National Technical University of Athens (NTUA) Athens, Greece, 2014. — P. 1001–1014.

Application of algorithms for finding the maximum flow for constructing static-dynamic schedules

V.A. Kostenko, A.S. Smirnov
Lomonosov MSU, Moscow, Russia

Решение одной задачи распределения ресурсов для рекурсивного конвейера

Куприянов Б.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

В работе предлагается решение варианта RCPSP задачи оптимизации распределения возобновляемых ресурсов конвейера, отношения предшествования для которого заданы рекурсивными функциями.

Рекурсивный конвейер [1] представляет собой ациклический ориентированный граф с n вершинами, из которых n_0 начальных вершин и одна конечная. Вершины могут быть нескольких типов. Один тип вершины - операция с временем выполнения $p_i \geq 0$. Остальные типы вершин - спуско-вые функции, управляющие процессом выполнения операций. Дуги определяют только топологическое отношение предшествования операций в графе (например, $O_j \rightarrow O_i$). Точно отношение временного предшества определяется рекурсивной функцией. Такая задача формулируется как расширение flow shop задачи теории расписаний [2]

$$Fn|prec=7,p_i|C_{max},$$

где $prec = 7$ обозначает наличие в модели 7-ти типов отношения предшествования.

Суть решения состоит в том, что задача минимизации времени выполнения партии заказов подменяется задачей максимизации производительности конвейера. Далее приведены рекурсивные функции вида $t(i,k)$, обозначающие время завершения обработки i -й операцией j -го заказа.

Для операции

$$t(i,0)=p_i \quad (1 \leq i \leq n_0);$$

$$t(i,k)=t(i,k-1)+p_i \quad (1 \leq i \leq n_0, k \geq 1);$$

$$t(i,0)=t(j,0)+p_i, \text{ если } O_j \rightarrow O_i \quad (n_0 \leq i \leq n);$$

$$t(i,k)=\max(t(j,k),t(i,k-1))+p_i, \text{ если } O_j \rightarrow O_i \quad (i > n_0, k \geq 1).$$

Для спусковой функции *and*.

$$t(i,k)=\max(t(p,k),t(q,k)), \text{ если } O_p \rightarrow O_i \text{ и } O_q \rightarrow O_i \quad (i > n_0, k \geq 0).$$

Для спусковой функции мультиплицирования операций - *mul*.

$$t(i,k)=t(j,\text{int}(k/q)), \text{ если } O_j \rightarrow O_i \quad (k \geq 0, q \geq 1), \text{ где}$$

q - коэффициент мультиплицирования.

$\text{int}(x)$ - обозначает целую часть числа x .

Спусковая функция *red* является обратной к предыдущей.

$$t(i,k)=t(j,(k+1)q-1), \text{ если } O_j \rightarrow O_i \quad (k \geq 0, q \geq 1).$$

Функция раздачи - *get* имитирует раздачу на две операции с одной и распадается на две.

$$t(i,k)=t(p,2k), \text{ если } O_p \rightarrow O_i \quad (p > n_0, i > n_0, k \geq 0);$$

$$t(j,k)=t(p,2k+1), \text{ если } O_p \rightarrow O_j \quad (p > n_0, j > n_0, k \geq 0).$$

Функция приема - *put* является обратной к *get*.

$$t(i,0)=t(p,0), \text{ если } O_p \rightarrow O_i;$$

$$t(i,k)=\max(t(i,k-1),t(q,(k-1)/2)), \text{ если } Oq \rightarrow Oi \text{ для } k=1,3,5,\dots;$$

$$t(i,k)=\max(t(i,k-1),t(p,k/2)), \text{ если } Op \rightarrow Oi \text{ для } k=0,2,4,\dots;$$

$$(i > n0, p \geq 1, q \geq 1).$$

Данные функции составлены в предположении, что каждой операции на все время процесса выделен один ресурс (одна машина).

В статье [3] показано, что рекурсивный конвейерный процесс можно охарактеризовать пятеркой параметров

$$(t0, ks, ts, D, T), \text{ где}$$

$t0$ - время завершения обслуживания нулевой заявки;

ks - номер заявки, начиная с которой конвейер переходит в стационарный режим работы ($ks \geq 0$);

ts - время завершения обслуживания заявки с номером ks ;

T - период колебания интервала обслуживания заявок ($T \geq 1$);

D - амплитуда колебаний интервала обслуживания заявок

$$D=t(n,k+T)-t(n,k) \text{ для } k \geq ks.$$

Опишем решение задачи для стационарного режима работы конвейера. Пусть Wi – производительность i -й операции конвейера, измеряется количеством выполнений операции в составе конвейера в единицу времени. Каждая операция i конвейера может быть охарактеризована [4] кратностью выполнения ωi - сколько раз выполняется операция i при производстве одного изделия конвейера. Для производительности справедливы следующие неравенства

$$Wi \leq gi xi / (pi \omega i) \text{ или } Wi \leq ci xi, ci = gi / (pi \omega i).$$

и gi коэффициент пропорциональности, а xi – количество комплектов ресурсов, используемых i -й операцией.

Постановка задачи в виде задачи целочисленного линейного программирования

$$F=W \rightarrow \max;$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq r_j \quad (1 \leq j \leq J);$$

$$W \leq c_i x_i \quad (1 \leq i \leq n);$$

$$x_i \geq 0; \quad c_i \geq 0; \quad W \geq 0;$$

r_j - количество ресурсов в j -м множестве ресурсов одного типа.

a_{ij} – коэффициент комплектации i -й операции j -м ресурсом.

Расписание конвейера вычисляется с помощью модифицированных рекурсивных функций для случая, когда i -я операция располагает xi комплектами возобновляемых ресурсов. Изменения претерпевают только функции для операции. Для спусковых функций они остаются без изменения.

$$t(i,k)=pi \quad (1 \leq i \leq n0, 0 \leq k < xi);$$

$$t(i,k)=t(i,k-xi)+pi \quad (1 \leq i \leq n0, 0 \leq k < xi);$$

$$t(i,k)=t(j,k)+pi \text{ если } Oj \rightarrow Oi \quad (i > n0, 0 \leq k < xi);$$

$$t(i,k)=\max(t(j,k),t(i,k-xi))+pi \text{ если } Oj \rightarrow Oi \quad (i > n0, k \geq xi).$$

Список литературы

1. Куприянов Б.В. Рекурсивные конвейерные процессы – основные свойства и характеристики. Экономика, статистика и информатика Вестн. УМО. 2015. № 1.
2. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.: Изд-во МГУ, 2011.
3. Куприянов Б.В. Метод эффективного анализа модели рекурсивного конвейерного процесса. Автоматика и теле-механика. 2017. № 3. С. 63-79.
4. Куприянов Б.В. Вычисление некоторых производственных характеристик рекурсивного конвейера. Открытое образование. 2016. № 1, Т. 20. С. 11-16.

Solving a single resource allocation problem for a recursive pipeline

Kupriyanov B. V.

ICS RAS named after V. A. Trapeznikov, Moscow, Russia

Вычисление верхней оценки суммы избыточностей информации в БД реального времени

С.Н. Мирошник

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Постановка задачи. Задан набор информационных полей ϕ_1, \dots, ϕ_r , содержащих входную информацию для работы программных модулей M_1, \dots, M_n в реальном времени. Эти поля с определенной частотой заполняются информацией от датчиков некоторого исследуемого объекта. Требуется построить такую БД, которая могла бы обеспечить выполнение всех модулей, причем к определенному сроку.

Одним из препятствий при решении этой задачи является избыточность БД, которая увеличивает время поиска модулями информации из БД. Проблема избыточности БД является весьма актуальной, особенно для БД реального времени. Ей посвящены многочисленные публикации, которые общеизвестны в теории информации. Понятия избыточности информации напрямую связаны с информационной энтропией. В настоящей работе терминология, связанная с классическим определением избыточности, не используется. Для минимизации избыточности в работе [1] предлагается модули M_1, \dots, M_n разделить на непересекающиеся группы $F: \{M\}_1, \dots, F_k: \{M\}_k$.

Объединение модулей в группу $F: \{M\}$ осуществляется на основе близости пары модулей или близости модуля к группе близких модулей. Определение понятия близости дано в работе [1] и основано на сравнении числа используемых и неиспользуемых полей модуля в группе F . Это объединение начинается с поиска опорного модуля M , который использует наибольшее число полей $\{\phi\}_l$. Число таких полей есть l . Далее находятся все модули, близкие к M . Построенная таким образом группа близких модулей $F: \{M\}$ определяет набор полей $\{\phi\}_L$ ($L > l$), используемых модулями этой группы.

В работе [2] информационная избыточность есть число неиспользуемых модулями $\{M\}$ полей – I_1 , а также число повторяемости используемых полей модулями $\{M\}$ – $I_2(M)$. Модули построенной группы F исключаются из исходного набора модулей. Оставшиеся модули используются для построения других групп близких модулей.

Пусть построены все группы близких модулей F_1, \dots, F_k . Тогда $I_2(F)$ – есть межфайловая избыточность, т.е. число повторяемости полей разных групп. Эта избыточность означает многократное заполнение информацией одних и тех же полей.

Рассматривается задача вычисления верхней оценки избыточности одной группы F близких модулей – I_1 и избыточности всех групп близких модулей F_1, \dots, F_k , образующих БД.

Пусть построена группа близких модулей F . Число полей, используемых этими модулями – $\{\phi\}$. Разделим модули $\{M\}$ на две подгруппы: внутренние – $\{M\}^{in}$, чьи поля есть $\{\phi\}_i$; и внешние – $\{M\}^{out}$. Внешние модули используют поля, выходящие за пределы полей $\{\phi\}_i$ числом, не больше l , оставаясь при этом близкими к опорному. Как вычислено в работе [3] число таких полей есть $d = l - 2$.

В работе [1] приведены формулы вычисления I_1 и I_2 для группы F :

$$I_1 = L \cdot n_1 - \sum_{i=1}^{n_1} l_i,$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{n_1} l_i - L$$

Здесь L – число полей группы F , l_i – число полей модуля M_i , n_1 – число модулей в группе F , $i = 1, \dots, n_1$.

Для вычисления верхней оценки избыточности I_1 группы F воспользуемся следующей гипотетической моделью. Пусть группа F состоит из всех модулей, которые являются близкими к опорному. Для вывода аналитических формул вычисления I_1^{in} упорядочим модули из $\{M\}^{in}$ в порядке убывания числа полей, используемых этими модулями.

Например: первые 2 близких модуля длиной $l - 1$, 3 модуля длиной $l - 2$ и т.д. На определенном этапе, используя определения близости модуля к набору близких модулей, этот процесс останавливается.

Пусть \tilde{v} – число модулей $\{M\}^{in}$ (без опорного). Тогда $I_1^{in} = \tilde{v} \cdot l - \sum_{i=1}^{\tilde{v}} l_i$. Нетрудно

построить конечные формулы для \tilde{v} и $\sum_{i=1}^{\tilde{v}} l_i$, l_i – длина модуля M_i :

$$\tilde{v} = \frac{1}{2}t(t+1), \quad \sum_{i=1}^{\tilde{v}} l_i = \frac{1}{6}t(t+1)(3l - 2t + 2).$$

Здесь используются вспомогательные формулы: $\tilde{v} = \sum_{i=1}^t v_i$, $v_i = i$, $\tilde{v} = v + 1$,

$t = \left\lceil \frac{1}{2}l \right\rceil + 1$. Подставляя формулы для \tilde{v} и $\sum_{i=1}^{\tilde{v}} l_i$ в I_1^{in} получаем: $I_1^{in} = \frac{1}{3}t(t^2 - 1)$.

Из полей I_1^{in} следует выделить те, которые увеличивают время поиска модулями «своих» полей в $\{\phi\}_i^{in}$. Но, как следует из структуры полей I_1^{in} (определяемая способом упорядочивания модулей) эти поля состоят из двух одинаковых наборов, один из которых требуемый. Окончательно:

$$\tilde{I}_1^{in} = \frac{1}{6}t(t^2 - 1), \quad t = \left\lceil \frac{1}{2}l \right\rceil + 1.$$

Аналогичным образом вычисляется оценка для внешних модулей: \tilde{I}_1^{out} . Количество

избыточных полей для внешних модулей есть: $I_1^{out} = (l + d)\tilde{w} - \sum_{i=1}^w l_i$. Здесь $l + d$ – число

полей, которые используют модули $\{M\}^{out}$, \tilde{w} – число модулей в $\{M\}^{out}$ (без опорного). Следует заметить, что в набор $\{M\}^{out}$ не входят модули из $\{M\}^{in}$. Построим конечные

формулы для \tilde{w} и $\sum_{i=1}^w l_i$.

Пусть определен опорный модуль M , его поля $\{\phi_{d+1}, \dots, \phi_{d+l}\}$. Здесь d – допустимое расширение полей модуля M : $d = l - 2$ (см. [2]).

Число $L = l + d$ есть длина (число полей) группы F . Упорядочим все близкие к M модули. Эти модули разделим на d наборов. Модули в наборе упорядочиваются по убыванию числа их полей. Число модулей в наборе определяется неравенством: $I_1(M_i) \leq I_2(M_i)$ причем первое поле всех модулей набора есть ϕ_{d-j+1} , $i = 1, \dots, w_j$, $j = 1, \dots, d$. Здесь j – номер набора модулей, i – свой номер модуля в наборе.

Число внешних модулей M^{out} есть: $w = \sum_{j=1}^d w_j$. Нумерация модулей в наборах отличается от нумерации исходного списка модулей.

Пусть $I_1^{out}(M_i)$ – число неиспользуемых полей модуля M_i , $I_2(M_i)$ – число используемых полей модуля M_i , $i = 1, \dots, w$.

Данный способ упорядочивания внешних модулей $\{M\}^{out}$ позволят построить аналитические формулы для вычисления \tilde{w} и $\sum_{i=1}^{\tilde{w}} l_i$.

После многочисленных вычислений получаем:

$$w = \frac{1}{2} \left(l \cdot d + \left\lceil \frac{1}{2} d^2 \right\rceil \right) - \frac{1}{2} d(d-1)$$

$$\text{и } \sum_{i=1}^{\tilde{w}} l_i = l \cdot \tilde{w} - \left[\sum_{i=1}^d w_i^2 \right] + \left[\frac{1}{2} w \right], \text{ где } w = \tilde{w} + 1.$$

Подставляя формулы для w и $\sum_{i=1}^{\tilde{w}} l_i$ в I_1^{out} получаем формулу для вычисления избыточности I_1^{out} .

Далее, также как и при вычислении, \tilde{I}_1^{in} число I_1^{out} состоит из двух частей: $2\tilde{I}_1^{out} = I_1^{out} - \tilde{w}$.

Окончательно:

$$\tilde{I}_1^{out} = \frac{1}{2} (I_1^{out} - \tilde{w}).$$

Здесь \tilde{I}_1^{out} – это поля, которые влияют на поиск модулями «своих» полей в группе F .

Таким образом, \tilde{I}_1^{out} и \tilde{I}_1^{in} есть искомая верхняя оценка избыточности группы F .

Построим верхнюю оценку для межгрупповой избыточности I_2 . Предполагаем, что построены k одинаковых групп F_1, \dots, F_k близких модулей длиной $L = l + d$ каждый. Это предположение необходимо, чтобы построить аналитическую верхнюю оценку избыточности I_2 и связанные с ней дополнительные атрибуты.

Воспользуемся формулой для $I_2(F)$ всех групп модулей: $I_2(F) = \sum_{i=1}^k L_i - r$, где r – число полей модулей всех групп. Учитывая, что $L_i = L$, $i = 1, \dots, k$ получаем $I_2(F) = k(l+d) - r$.

Нетрудно вычислить максимальное число общих полей пары групп. Это число есть $d+1$ или $l-1$. Это означает, что каждая из групп увеличивает общее число полей на $l-1$. Отсюда $r = (l-1)(k+2)$. Получаем:

$$I_2(F) = (l-1)(k-1).$$

Пусть число полей r задано. Тогда наибольшее число групп, использующих r полей есть:

$$k = \left\lceil \frac{r}{l-1} \right\rceil - 1.$$

Сумма числа групп k вместе с оценкой $I_2(k)$ являются важными вычисленными составляющими для построения БД реального времени.

Таким образом построены грубые оценки в виде аналитических формул вычисления избыточности информации в БД. Эта информация используется для вычисления максимальной задержки времени доступа модулями к информации из БД в реальном времени.

Список литературы

1. *Мирошник С.Н.* Алгоритмы оптимизации структуры базы данных реального времени с минимальной избыточностью информации. / Некоторые алгоритмы составления расписаний в многопроцессорных системах. – М: ВЦ РАН, 2015. С. 25-34.
2. *Мирошник С.Н., Гончар Д.Р., Фуругян М.Г.* Оптимизация структуры базы данных реального времени. // Управление большими системами. Выпуск 66. – М.: ИПУ РАН, 2017. – С. 158-170.
3. *Мирошник С.Н.* Алгоритмы построения базы данных с минимальной избыточностью информации для систем реального времени. / Труды межд. конф. по исследованию операций ORM-2016. М: ФИЦ ИУ РАН, 2016. С. 51-52.
4. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Изд. иностр. лит., 1963. — 830 с.
5. *Kao, Ben, and Hector Garcia-Molina.* An Overview of Real-Time Database Systems. NATO Advanced Study Institute on Real-Time Computing, 9 Oct. 1992, NATO. 13 Dec. 2006.

Calculation of the upper estimation of sum of the redundant information in a DB of real time

S.N. Miroshnik
sergeyMiroshnik@ya.ru, rtscas@ya.ru
FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Оценка эффективности биоинспирированных методов муравьиных колоний криптоанализа шифров перестановок и замены*

А.С. Сергеев
Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

В настоящее время научное направление «природные вычисления», объединяющее математические методы, в которых заложен принцип природных механизмов принятия решений, получает все более широкое распространение для решения различного круга оптимизационных задач, в том числе задач криптоанализа. Данная работа посвящена определению оценок эффективности и трудоемкости методов криптоанализа шифров перестановок и замены на основе «природных методов» (алгоритмов «муравьиных колоний»), описанных в [1].

В настоящее время представляет интерес применение эвристических подходов, инспирированных природными системами, в которых осуществляется поэтапное построение решения задачи (т.е. добавление нового оптимального частичного решения к уже построенному частичному оптимальному решению, что позволяет ликвидировать недостатки генетических методов). К данному виду относят муравьиные и пчелиные

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00375).

алгоритмы. Идея моделирования поведения муравьев состоит в их способности быстро находить кратчайший путь от муравейника к источнику пищи. Описание муравьиного алгоритма, а также его применение к решению ряда оптимизационных задач также отмечено в [1].

Возможный подход к реализации криптоанализа шифров перестановки на основе сведения данной проблемы к классической задаче о назначениях, решаемой с помощью алгоритма муравьиных колоний, также описан в [1].

Тем не менее, необходимо отметить, что, несмотря на все более широкое применение муравьиных алгоритмов для решения комбинаторных оптимизационных задач, представимых в виде взвешенных графовых моделей и связанных с определением оптимальных маршрутов, какие-либо оценки трудоемкости и сложности методов данного класса и их сравнительные характеристики в отечественных и зарубежных публикациях, а также в сети Интернет обнаружить не удалось, что, возможно, связано со случайным равновероятным характером процесса поиска в «природных» алгоритмах.

Для получения оценок трудоемкости использовались основные правила оценки, описанные, например, в [2]. Для этой цели муравьиный алгоритм криптоанализа шифров перестановок был представлен в виде псевдокода, включающего следующие основные этапы (циклические структуры).

Формирование m маршрутов муравьев длины n (операторы 1-5); подсчет критериев оптимальности маршрутов (операторы 6-11); умножение функции качества на весовой коэффициент (операторы 12-17); наращивание счетчика поколений (оператор 18); формирование матрицы результирующих концентраций феромона (операторы 19-28); проведение испарения феромона (операторы 29-33); вычисление вероятностей размещения символов в позиции (операторы 34-42); формирование новых $d * m$ маршрутов (операторы 43-49); подсчет критериев оптимальности новых $d * m$ маршрутов (операторы 50-55); умножение функции качества на весовой коэффициент для новых $d * m$ маршрутов (56-61); выбор m маршрутов с лучшими значениями функции качества (операторы 62-71); проверка достижения заданного числа поколений, если оно достигнуто, вывод популяции маршрутов муравьев и конец работы алгоритма (оператор 72). Разработанный псевдокод имитирует реализацию муравьиного алгоритма криптоанализа шифров перестановок, описанного в [1], отражает основные операции муравьиного алгоритма и позволяет оценить трудоемкость метода на основе основных правил анализа программ как сумму трудоемкостей блоков, следующих друг за другом в алгоритме [2]. На основе подсчета оценок трудоемкостей циклов псевдокода были получены следующие значения.

В цикле операторов 1-5 осуществляется формирование множества маршрутов муравьев, в соответствии с [2] трудоемкость цикла равна

$$F_{1-5} = 1 + 4 * m + 5 * m * n.$$

В цикле операторов 6-11 осуществляется оценка функции пригодности маршрутов, сформированных муравьями, с использованием матрицы вероятности соседства символов C [1].

$$F_{6-11} = 1 + 3 * m + m * [1 + 1 + 3 * (n - 1) + (n - 1) * 2] = 1 + 5 * n * m.$$

В цикле операторов 12-17 производится умножение функции пригодности маршрутов на весовой коэффициент, для чего используется функция Якобсена, отмеченная в [1], трудоемкость которой обозначена через Y . В этом случае

$$F_{12-17} = 1 + 4 * m + m * n * (6 + Y).$$

В операторе 18 производится наращивание счетчика числа итераций, его трудоемкость равна $F_{18} = 2$.

В цикле, включающем операторы 19-28, осуществляется формирование матрицы результирующих концентраций феромона Fer (методика получения данной матрицы описана в [1]). Если принять вероятность того, что символ маршрута муравья равен заданному символу алфавита, равной функции Якобсена (ее трудоемкость обозначена здесь и далее через Y), то трудоемкость цикла

$$F_{19-28} = 1 + 6 * n + n^2 * (5 + 3 * m + 2 * m * Y) .$$

Процедура имитации испарения феромона осуществляется в цикле, включающем операторы 29-33, при заданном коэффициенте испарения ρ . В этом случае

$$F_{29-33} = 1 + 3 * n + n * (1 + 3 * n + 3 * n) = 1 + 4 * n + 6 * n^2 .$$

Процедура формирования матрицы вероятностей размещения символов в позиции осуществляется в цикле, включающем операторы 34-42. В этом случае

$$F_{34-42} = 1 + 6 * n + 10 * n^2 .$$

Формирование новых $d * m$ маршрутов (где d – априорно задаваемый параметр, $d < 1$), осуществляется в цикле, включающем операторы 43-49. Процедура, имитирующая «колесо рулетки» осуществляется следующим образом: параметру w присваивается произвольное значение от 0 до 1 (вероятность выбора), параметру v присваивается произвольное значение из мощности алфавита n , если соответствующий элемент в матрице вероятностей размещения Fer в строке v (и столбце с номером l , который пробегает все значения от 1 до n в цикле) меньше вероятности w , соответствующему элементу маршрута присваивается символ алфавита, соответствующий строке v и столбцу l матрицы Fer . Таким образом, если принять в качестве вероятности выбора оптимального символа значение функции Якобсена (или ее нормированное значение), то $F_{43-49} = 1 + 4 * m * d + n * m * d * (7 + 2 * Y)$.

В цикле, содержащем операторы 50-55, осуществляется подсчет критериев оптимальности полученных $d * m$ маршрутов с помощью матрицы вероятности соседства символов S . В этом случае $F_{50-55} = 1 + 5 * n * m * d$.

Умножение функции качества на весовой коэффициент для новых $d * m$ маршрутов производится в цикле, включающем операторы 56-61. Трудоемкость внешнего цикла составит

$$F_{56-61} = 1 + 4 * m * d + n * m * d * (6 + Y) .$$

В цикле, включающем операторы 62-71, осуществляется выбор m маршрутов с лучшими значениями функции качества. Если массив целевых функций S отсортирован по возрастанию (худший случай), то трудоемкость всего цикла

$$F_{62-71} = 1 + 7 * m + 5 * m^2 * (1 + d) + 4 * m * n .$$

Трудоемкость всего оператора 72

$F_{72} = (1 + 4 * m + 4 * m * n + Iterzad) / Iterzad$ (где $Iterzad$ – заданное число итераций алгоритма).

Таким образом, общая трудоемкость выполнения одной итерации алгоритма муравьиных колоний определяется следующим выражением

$$F_{1-72} = 12 + 15 * m + 16 * n + 20 * m * n + 21 * n^2 + m * n^2 * (3 + 2 * Y) + \\ + 8 * m * d + n * m * d * (18 + 3 * Y) + m * n * Y + \\ + 5 * m^2 * (1 + d) + (1 + 4 * m + 4 * m * n + Iterzad) / Iterzad .$$

Таким образом, трудоемкость итерации алгоритма муравьиных колоний в общем случае определяется квадратичной зависимостью от количества маршрутов и длины маршрута муравья. То есть можно считать, что в общем случае трудоемкость удовлетворяет условию $F_{1-72} = O(m^2 + n^2)$.

Отметим также, что отличительные особенности использования алгоритмов муравьиных колоний также отмечены в [1] (возможность эффективного использования для задач в виде взвешенных графовых моделей и маршрутов).

Отметим, что применение алгоритмов муравьиных колоний для реализации криптоанализа шифров замены также рассмотрено в [1]. Как отмечено в [1], криптоанализ шифров замены, использующих ключевые символы, может быть сведен к задаче определения позиций для назначения символов ключа таким образом, при котором целевая функция, определяющая оптимальность исходного текста, достигает экстремума. В случае, когда ключевое слово является осмысленным словом на естественном языке, процесс криптоанализа 2 типа может быть организован путем реализации самого алгоритма шифрования для оценки оптимальности определенного на каждой итерации ключа. В [1] исследована зависимость получения строки исходного текста из строки шифра в зависимости от полученного на каждой итерации ключевого слова с оптимальным значением функции качества для системы Цезаря с ключевым словом.

Список литературы

1. Чернышев Ю. О., Сергеев А. С., Дубров Е. О., Крупенин А. В., Капустин С. А., Рязанов А. Н. Биоинспирированные алгоритмы решения задач криптоанализа классических и асимметричных криптосистем: монография. Краснодар: КВВУ, 2015. 132 с.

2. Трудоемкость алгоритмов и временные оценки. <http://fsc.bsu.by/wp-content/uploads/2015/12/AiSD-Tema-Analiz-algoritmov.pdf>

Assessment of the bioinspired methods efficiency of ant colonies for codes of shifts and replacement cryptanalysis

A.S.Sergeev

Don state technical University, Rostov-on-Don, Russia

Scheduling in Multiprocessor Real-Time Systems with Additional Restrictions

M.G. Furugyan

CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia

The problem of making a preemptive feasible schedule in a multiprocessor system in the case when the job execution intervals are given is considered. Additionally, a number of generalizations is discussed: communications between processors are arbitrary and can change over time; the costs of handling interrupts and switches from one processor to another are taken into account; additionally, besides the processor, resources are used. The algorithms based on the reducing of initial problem to the problem of finding paths of a given length in a graph, to the network flow problem and to integer system of linear constraints are developed.

1. Introduction. Multiprocessor computing real-time systems are widely used in the design and operation of complex technical objects (aircrafts, space surveillance systems, conveyor systems, nuclear reactors, etc.). One of the main tasks when developing software of such systems is to construct a feasible schedule of execution of software modules, showing when and which resources of the computing system should allocate to each module. The problems of construction of preemptive schedules without regard to restrictions on communication between processors and the cost of the interrupts and switches from one processor to another are devoted to a large number of works. We note such works as [1]

(identical processors), [2] (arbitrary processors, the same execution intervals), [3, 4] (arbitrary processors, arbitrary execution interval). In [5] the problem of constructing a multiprocessor schedules in the system with arbitrary communications among processors and cost accounting for processing switches and interrupts is considered. In [6] conditions under which there exists a polynomial-time algorithm for finding feasible schedule on a multiprocessor system with an incomplete graph links between processors were obtained. In [1 – 6] additional resource was not considered. The problem of constructing a feasible schedule in a multiprocessor system with additional resources being considered in [7] (identical processors, one type of additional resource), [8] (arbitrary processors, one type of additional resource), [9] (identical processors, several types of additional resources) and [10] (arbitrary processors, several types of additional resources).

In this article we consider the problem of constructing preemptive feasible schedule for cases where (1) there are restrictions on communication between processors, which can change over time; (2) the costs of handling interrupts and switches from one processor to another are took into account; (3) in addition to the processor, the system has more resources, and the duration of job is linearly dependent on the number of allocated these resources. These problems are reduced to problems of finding paths of a given length in a graph, to the network problem and to the system of integer linear constraints. Unlike [5, 6] a new necessary and sufficient conditions of the existence of a feasible schedule were obtained.

2. Statement of the problem. We consider a computer system consisting of m processors. The performance j -th processor is equal to s_j , $j = \overline{1, m}$. There is a set of jobs (tasks) $N = \{1, \dots, n\}$ to be performed. Each job is characterized by its execution interval $[b_i, f_i]$ (job i can be started no earlier than the point in time b_i and must be completed no later than the point in time f_i) and the workload Q_i of processors required to execute it. The work of the processors is represented as a set of sequential clock ticks. The clock ticks on all processors are synchronized in time, i.e. the beginnings and endings of clock ticks of all processors are the same. One clock tick is the time unit, the values b_i and f_i , $i \in N$, specified in clock ticks, which are numbered from 1 to T , where $\min_{i \in N} b_i = 1$, $\max_{i \in N} f_i = T$. Thus, the work i can be started no earlier than the beginning of b_i -th clock tick and must be completed no later than the end of f_i -th clock tick. Performance s_j is the amount of operation of the processor j in a single clock tick. In order to fully perform the job i , the processor j requires $\lceil Q_i / s_j \rceil$ clock ticks. On a fixed clock tick each processor can perform no more than one job, and each job is performed not more than one processor. When performing jobs allowed interrupts and switching from one processor to another. Communications between processors can vary in time and are set by the array I size $m \times T \times m \times T$. In this case $I(j_1, k_1, j_2, k_2) = 1$, if in carrying out the job i on the processor j_1 at the end of the clock tick k_1 it is possible to interrupt and to resume on the processor j_2 (maybe the same, i.e. $j_1 = j_2$) in the beginning of the clock tick k_2 , and $I(j_1, k_1, j_2, k_2) = 0$ if such switching is not possible, $1 \leq j_1, j_2 \leq m$, $1 \leq k_1 < k_2 \leq T$. The interruption of the job on the processor j_1 at the end of clock tick k_1 and the switching at the beginning of the clock tick k_2 on the processor j_2 or its renewal on the same processor ($j_1 = j_2$) requires additional work of processors j_1 and j_2 in the total volume $\tau(j_1, k_1, j_2, k_2)$.

We need to determine whether there exists a feasible schedule of execution of jobs and find it if it exists.

3. The algorithms for solving the problem. It was proved that the considered problem is NP-hard. The algorithms based on reducing the initial problem to the problem of finding

paths of a given length in a graph, to the network flow problem and to integer system of linear constraints were developed. Namely, for networks of a special type were proved the following statements.

1. For the existence of a feasible schedule of execution of jobs N it is necessary and sufficient that in the special network G there exist n pairwise disjoint paths whose lengths is not less $Q_i, i \in N$.

Note that each such path specifies the feasible execution schedule for one job i and the set of paths specifies the feasible execution schedule for all jobs N .

2. For the existence of a feasible schedule it is necessary and sufficient that there exists an integer n -product flow in a special network G_1 for which the cost of i -th product is not less $Q_i, i \in N$.

3. Necessary and sufficient conditions of the existence of a feasible schedule are described in the form of systems of integer linear constraints with $O(nmT + m^2T^2)$ variables, and $O(nmT + m^2T^2)$ constraints.

4. For the existence of a feasible schedule of the problem in question it is necessary that in the special network G_2 there exist network flow the cost of which is not less $\sum_{i \in N} Q_i$.

Checking this condition is much simpler than checking the above necessary and sufficient conditions.

5. For the feasible schedule to exist, the special network G_3 should have a simple path from source to sink with its length greater than or equivalent to $\sum_{i \in N} Q_i$.

The problem with additional resources also was considered. We assume that, apart from the processors, the system has P types of additional nonrenewable resources. The total amount of the p -th type of this resource is $R_p, p = \overline{1, P}$. If the task i has r_{ip} units of the additional resource of the p -th type allocated to it, $i \in N, p = \overline{1, P}$, the workload Q_i of the processors associated with execution of the job i is $q_i(r) = d_i - \sum_{p=1}^P a_{ip} r_{ip}$, where

$$r_{ip} \in [0, \bar{r}_{ip}], \quad i \in N, \quad p = \overline{1, P}, \quad \sum_{i \in N} r_{ip} \leq R_p, \quad p = \overline{1, P}, \quad (1)$$

and $a_{ip}, d_i, \bar{r}_{ip}$ are the given variables; $a_{ip} \geq 0, d_i > 0, \bar{r}_{ip} \geq 0, d_i$ is the workload of the processors to execute the task i if there are no additional resources allocated to it; and $q_i(\bar{r}) > 0$. Thus, $Q_i \in [q_i(\bar{r}); d_i]$. Find the allocation of resources $r_{ip}, i \in N, p = \overline{1, P}$, such that there exists a feasible schedule or establish that there exists no such resource allocation. The following statements are proved for this problem.

6. For the feasible execution schedule for the jobs N to exist, it is necessary and sufficient that there exist the allocation of resources r_{ip} satisfying restrictions (1) and n pairwise disjoint paths in the special network G_4 whose lengths is not less $q_i(r), i \in N$.

7. For the feasible execution schedule for the jobs N to exist, it is necessary and sufficient that there exist the allocation of resources r_{ip} satisfying restrictions (1) and the integer n -product flow g in the special network G_5 for which the cost of i -th product is not less $q_i(r), i \in N$.

8. For the feasible execution schedule to exist, resources r_{ip} should be allocated in such a way that satisfies restrictions (1) and the simple path in the special network G_6 from source to sink with its length greater than or equivalent to $\sum_{i \in N} q_i(r)$ exists.

Conclusion. We studied an feasible multiprocessor preemptive scheduling problem for the given execution intervals and under a number of additional restrictions – interprocessor communications are arbitrary and may vary in time; costs for processing interruptions and switches from one processor to another are taken into consideration; and apart from the processors, additional resources are used. We proved this problem to be *NP*-hard. We developed the algorithms based on reducing the original problem to the problem of searching for paths of a specific length in the special network, to a flow problem, and an integer system of linear restrictions.

References

1. Tanaev V.S., Gordon V.S., Shafranskii Ya.M. Scheduling Theory. Single-Stage Systems. Moscow: Nauka, 1984.
2. Gonzales T., Sahni S. Preemptive scheduling of uniform processor systems // J. Ass. Comput. Mach. 1978. V. 25. P. 92–101.
3. Federgruen A., Groenevel H. Preemptive scheduling of uniform machines by ordinary network flow technique // Manage. Sci. 1986. V. 32. P. 341–349.
4. Brucker P. Scheduling Algorithms. Heidelberg: Springer, 2007.
5. Guz D.S., Furugyan M.G. Computation planning in multiprocessor real-time automated control systems with restrictions on the memory of processors // Autom. Remote Control. 2005. № 2. P. 138 – 147.
6. Grechuk B.V., Furugyan M.G. Development of optimal schedules with interrupts in multiprocessor systems with incomplete graph of links // Cybernetics and system analysis. 2005. № 3. P. 94 – 102.
7. Kosorukov E.O., Furugyan M.G. Some algorithms for resource allocation in multiprocessor systems // Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. 2009. V. 33. P. 202–205.
8. Furugyan M. G. Computation planning in multiprocessor real-time automated control systems with an additional resource // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. P. 369–374.
9. Furugyan M. G. Scheduling in multiprocessor systems with a few additional resources // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. № 2. P. 57 – 66.
10. Furugyan M. G. Scheduling of computations on multiprocessor systems with several types of additional resources and arbitrary processors // Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. 2017. V. 41, № 3. P. 145 – 141.

Pseudo-polynomial Algorithm for Solving the Problem of Scheduling in Multiprocessor Real-Time Systems with Non-Fixed Job Durations

M.G. Furugyan

*Federal Research Center of Information Science and Control,
Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The problem of making a non-preemptive feasible schedule in a multiprocessor system in the case when all jobs have the same execution interval and the duration of job is linearly dependent on the number of allocated additional resource is considered. The algorithm which is pseudo-polynomial when the number of processors is fixed was developed.

1. Introduction. One of the main tasks when developing software of multiprocessor computing real-time systems is to construct a feasible schedule that show when and to which software module to allocate a particular compute resource. Most of the problems of scheduling computations in multiprocessor real-time systems when interrupts and switches are prohibited are *NP*-hard and currently they do not know the exact polynomial (effective) solution algorithms. Therefore, it is important to search for pseudo-polynomial algorithms.

The problems of construction of non-preemptive schedules without additional resource are widely covered in the papers [1] (branch and bound method), [2] (ant algorithms), [3] (probabilistic algorithms), [4] (genetic algorithms), [5, 6] (various heuristic algorithms), [6] (aggregation algorithms) and in many other papers. The problems with additional resource was previously investigated for the preemptive scheduling [7, 8].

In this article we consider the problem of constructing non-preemptive feasible schedule for case when all jobs have the same execution interval. Besides in addition to the processor, the system has more resources, and the duration of job is linearly dependent on the number of allocated these resources. For the case when the processors are identical and their number is fixed, it is proposed pseudo-polynomial algorithm for constructing a feasible schedule.

2. Statement of the problem. We consider a computer system consisting of m identical processors and a set of jobs (tasks) $W=\{1, 2, \dots, n\}$ to be performed. When performing jobs are not allowed interrupts and to switch from one processor to another. In a fixed time each processor can perform no more than one job, and each job is performed by no more than one processor. All jobs $i \in W$ have the same execution interval $[0, T]$. In addition to processors, the system also includes additional nonrenewable resource. The total amount of this resource is R . If the job i is allocated r_i units of the additional resource, then its duration is $t_i = d_i - a_i r_i$, where

$$r_i \in [0; \bar{r}_i], \quad i \in W, \quad \sum_{i \in W} r_i \leq R, \quad (1)$$

a_i, d_i, \bar{r}_i – specified values, $a_i > 0$, $0 < d_i \leq T$, $\bar{r}_i > 0$, $d_i - a_i \bar{r}_i > 0$, $a_i, d_i, r_i, \bar{r}_i \in Z$, Z – the set of integer numbers. Thus, $t_i \in [d_i - a_i \bar{r}_i; d_i]$ for all $i \in W$ and $t_i \in N$, N – the set of natural numbers.

It is required to find a resource allocation $(r_1^0, r_2^0, \dots, r_n^0)$ such that an feasible schedule (i.e. a schedule in which each job is completely executed within the specified execution interval) exists or to make sure that no such resource allocation exists. In this case, the desired resource allocation must satisfy constraints (1).

We consider the decomposition of the set W into m non-overlapping subsets W_1, W_2, \dots, W_m , $W = \bigcup_{j=1}^m W_j$; $W_{j_1} \cap W_{j_2} = \emptyset$ for $j_1 \neq j_2$, as the job execution schedule. Jobs from the set W_j are assigned to the processor j and executed on it one after another in arbitrary order.

As it is known [9], this problem is NP -hard even in the absence of additional resource and fixed m , and in the case of arbitrary m – NP -hard in a strong sense.

Let's consider examples of similar problems. In the first example, all processors are identical. In this case, usually each task is characterized not by volume, but by a long duration t_i , which depends on the amount of energy consumption r_i for this task: $t_i = d_i - a_i r_i$. The total amount of energy for all tasks is limited by the value of R . In the second example, each task is allocated additional funds r_i for the purchase of specialized processors (which can be used only to perform a specific task), which reduces the amount of work of the main processors to perform this task. In the third example, similar to the second, in addition to the main machines (processors), there is a monetary fund in the amount R to purchase additional machines or hiring labor to perform the job i , which reduces the amount of work performed by the main machines.

3. The algorithm for solving the problem. For $i \in W$ let's define sets $R_i = \{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{iu_i}\}$ и $T_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{iu_i}\}$ of possible values that can take values r_i и t_i respectively ($\theta_{ip} = d_i - a_i r_{ip}$, $r_{ip} \in [0; \bar{r}_i]$, $p = \overline{1, u_i}$, $i \in W$, $r_{ip} \in Z$, $\theta_{ip} \in N$) and let $u = \max_{i \in N} u_i$.

From the statement of the problem it follows that $r_{ip} \in Z$, $\theta_{ip} \in N$ for all $i \in W$, $p = \overline{1, u_i}$. We will construct the feasible schedule using the points having integer coordinates of an m -dimensional cube C^m with an edge T . The set of these points is divided into n levels (possibly intersecting). Each point of the level k ($k = \overline{1, n}$) corresponds to one of all possible variants for allocation of additional resource between the jobs $i = \overline{1, k}$, $k \leq n$, and allocation of these jobs to processors in a given execution interval $[0, T]$. In addition, a level number and an n -dimensional vector $(r_1, r_2, \dots, r_k, 0, \dots, 0)$ of additional resource allocation are assigned to the point of level k . The first-level points correspond to the set of all distribution variants in which the first job is assigned to one of the m processors. Each such point corresponds to the m -dimensional vector of processor load, the j -th component of which is equal to the time load of the j -th processor. Thus, the points of the first level correspond to the m -dimensional vectors of processor load $(t_1, 0, \dots, 0)$, $(0, t_1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, t_1)$ (total m vectors), where $t_1 = d_1 - a_1 r_1 \in T_1$, $r_1 \in R_1$. Each such vector is associated with the level number $l = 1$ and the resource allocation vector $(r_1, 0, \dots, 0)$. For each value r_1 have m m -dimensional vectors of processor load, and since r_1 can take u_1 possible values, the number of points of the first level is equal to mu_1 .

Each point of the first level of the cube C^m is associated with mu_2 points of the second level of the cube C^m corresponding to all possible variants for allocation of additional resource between the first two jobs and allocation of these jobs to one or two of the available m processors. For example, the point $(0, \dots, 0, t_1, 0, \dots, 0)$ of level $l = 1$ with the vector of allocation of resources $(r_1, 0, \dots, 0)$ is associated with no more than mu_2 points of level $l = 2$, which correspond to m -dimensional vectors of processor load $(t_2, 0, \dots, 0, t_1, \dots, 0)$, $(0, t_2, 0, \dots, 0, t_1, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, t_2, t_1, 0, \dots, 0)$, $(0, \dots, t_1+t_2, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, t_1, t_2, \dots, 0)$, $(0, \dots, t_1, 0, \dots, t_2)$ and to the vector of allocation of resources $(r_1, r_2, 0, \dots, 0)$, satisfying the relations (1). Here $t_2 = d_2 - a_2 r_2 \in T_2$, $r_2 \in R_2$. Further, the points of level $l = 2$ are connected with the points of the third level, etc. Generally, each point (c_1, c_2, \dots, c_m) of the level $l = k - 1$ of the cube C^m and the corresponding resource allocation vector $(r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, 0, \dots, 0)$ are associated with no more than mu_k points of the level $l = k$, which correspond to the processors load vectors $(c_1 + tk, c_2, \dots, c_m)$, $(c_1, c_2 + tk, \dots, c_m)$, \dots , $(c_1, c_2, \dots, c_m + tk)$ and the resource allocation vector $(r_1, r_2, \dots, r_k, 0, \dots, 0)$ satisfying to (1). Here $t_k = d_k - a_k r_k \in T_k$, $r_k \in R_k$.

If at least one component of the processors load vector exceeds the value T the corresponding point of the cube C^m is excluded from further consideration. The feasible schedule in the stated problem exists if at least one point of the level n is contained in the cube C^m .

To build the feasible schedule, use the following procedure. If the point of the level $l = k$, $2 \leq k \leq n$, of the cube C^m corresponds to the processors load vector $(c_1, \dots, c_{j-1}, c_j + t_k, c_{j+1}, \dots, c_m)$ and to the resource allocation vector $(r_1, r_2, \dots, r_k, 0, \dots, 0)$ and was obtained from the point of the cube C^m of level $l = k - 1$, specified by the vectors $(c_1, \dots, c_{j-1}, c_j, c_{j+1}, \dots, c_m)$ and $(r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, 0, \dots, 0)$, then the job $k \in W$ is allocated r_k units of additional resource, its duration is $t_k = d_k - a_k r_k \in T_k$ and it is assigned to the processor j .

The specified procedure is performed for $k = \overline{n, 2}$, causing the jobs $i = \overline{n, 2}$ to be assigned to the processors and, in addition, the values r_2, \dots, r_n of the additional resource

allocated to these jobs will be determined. Then, if as a result of this procedure, the point of level $l = 2$ of the cube C^m was obtained, which is associated with the processors load vector $(0, \dots, 0, t_1, 0, \dots, 0)$ of level $l = 1$, in which the j -th component $t_1 \neq 0$, and with the resource allocation vector $(r_1, 0, \dots, 0)$, then the first job is allocated an additional resource in the amount r_1 , its duration is $t_1 = d_1 - a_1 r_1 \in T_1$ and it is assigned to the j -th processor.

Comment. If at level k , $2 \leq k \leq n$, the point of the m -dimensional cube C^m was obtained, to which two different vectors of the distribution of the additional resource $(r_1, r_2, \dots, r_k, 0, \dots, 0)$ and $(r_1^1, r_2^1, \dots, r_k^1, 0, \dots, 0)$ correspond, then more economical distribution should be attributed to this point. Namely, if $\sum_{i=1}^k r_i \leq \sum_{i=1}^k r_i^1$ we leave the first of these vectors, otherwise the second.

The algorithm's complexity is $O(muT^m)$ addition and comparison operations with n - and m - dimensional vectors.

Conclusion. For the problem of making a schedule in multiprocessor real-time system without interruptions and switches in the case when all jobs have the same execution interval and the duration of job is linearly dependent on the quantity of allocated additional resource the algorithm of the solution of a problem which at the fixed number of processors is pseudo-polynomial was developed.

References

1. Alekseev O. G. Complex application of discrete optimization methods. Moscow: Nauka, 1987.
2. Shtovba S. D. Ant algorithms // ExponentaPro. Mathematics in applications. 2003. V. 4, № 4. P. 70-75.
3. Raghavan R. Probabilistic Construction of Deterministic Algorithms: Approximating Packing Integer Programs // J. Computer and System Sciences. 1988. V. 37. P. 130-143.
4. Kostenko V. A., Smeliansky R. L., Trekin A. G. Synthesis of structures of computing real-time systems using genetic algorithms // Programming. 2000. № 5. P. 63-72.
5. Brucker P. Scheduling Algorithms. Heidelberg, Springer: 2007.
6. Krasowski D. V., Furugyan M. G. Algorithms for the minimax problem of scheduling // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2008. V.47, № 5. P. 732-736.
7. Furugyan M. G. Scheduling in multiprocessor systems with a few additional resources // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. № 2. P. 57 – 66.
8. Furugyan M. G. Scheduling of computations on multiprocessor systems with several types of additional resources and arbitrary processors // Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. 2017. V. 41, № 3. P. 145 – 141.
9. Cormen T.H., Leiserson Ch.E., Rivest R.L. Algorithms. The construction and analysis. Moscow: MCNMO, 2001.

Задача планирования подготовки космонавтов как задача удовлетворения ограничениям*

Н.Ф.Хуснуллин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

В работе рассматривается задача построения расписаний подготовки космонавтов в составе экипажа для работы на Международной космической станции. Предлагается

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант 17-19-01665).

математическая модель в виде задачи удовлетворения ограничениям и ее модификация. Выполнено сравнение различных подходов решения задачи на реальных данных Центра подготовки космонавтов им.Ю.А.Гагарина (ЦПК).

В рассматриваемой задаче заранее заданы индивидуальные планы занятий для трех членов экипажа. Необходимо составить расписание занятий всех членов экипажа в соответствии со специфическими ограничениями на проведение тех или иных занятий и с учетом ограниченного количества оборудования. Для проведения тренировок космонавтов используется целый спектр комплексных и специализированных тренажеров пилотируемого корабля "Союз" и российского сегмента Международной космической станции (МКС).

Весь процесс подготовки делится на несколько этапов, последний из которых – подготовка космонавтов для работы на МКС. В статье рассматривается подготовка экипажа из 3 человек с горизонтом планирования 2,5 года.

Введем обозначения:

$I = \{1,2,3\}$ - множество космонавтов рассматриваемого экипажа;

W - множество недель горизонта планирования, $W = \{1, \dots, \omega\}$, где ω - количество рассматриваемых недель, $\omega \in W$;

D - множество рабочих дней в неделю, $D = \{1,2,3,4,5\}, d \in D$;

H - множество временных (получасовых) интервалов в день, $H = \{1, \dots, 18\}, h \in H$;

J - множество этапов подготовки (занятий) экипажа;

J_i^F - множество занятий физической подготовки космонавта $i \in I$;

J_i - множество занятий космонавта $i \in I$;

p_j - продолжительность выполнения операции $j \in J$;

$R = \{1,2, \dots, |R|\}$ - множество ресурсов;

rc_{jr} - количество ресурса $r \in R$, требуемое для операции $j \in J$;

ra_{wdh} - количество ресурса $r \in R$, доступное в момент (w, d, h) .

Занятия объединены в тематические курсы, которые далее, в соответствии с принятой на практике терминологией, будем называть бортовыми комплексами (БК). Как правило, изучение каждого БК заканчивается экзаменом или зачетом, и существует ряд ограничений по их проведению. Заметим, что наборы изучаемых БК и их структура у разных членов экипажа могут значительно отличаться.

Описание особенностей подготовки космонавтов и основных ограничений, словесной и математической постановок в виде задачи целочисленного линейного программирования (ILP) были выполнены в работах [1, 2]. В данной работе предлагается формулировка проблемы в виде задачи «удовлетворения ограничениям» (CP).

Для реализации моделей была использована среда разработки «IBM ILOG Optimizer», которая поддерживает работу с двумя типами переменных: интервальными и целочисленными. Названия функций, использующихся ниже при описании ограничений, соответствуют встроенным функциям данной среды. Набор инструментов и практик позволяет решить задачу несколькими способами. Эффективность решения задачи CP зависит от того, каким образом будут сформулированы ее ограничения. Формулировка задачи влияет на эффективность алгоритмов, которые будут применены при ее решении. Далее предлагаются два варианта формулировок и сравнивается их эффективность.

Пусть T - горизонт планирования. Переменную $s_j, j \in J$, будем называть интервальной, если она представляет из себя интервал времени $[t_1; t_2] \in T$, в течение которого будет выполнена работа j и момент старта $s_j^{start} \in [t_1; t_2)$ неизвестен. Будем

говорить, что интервальная переменная характеризуется моментом старта $s_j^{start} \in [t_1; t_2]$ и длительностью $p_j, j \in J$:

$$\text{interval } s_j \in [t_1; t_2] \text{ size } p_j \quad (1)$$

Основную формулировку будем называть CP, модифицированную - CP'. Запишем ограничения, которые будут общими для 2-ух моделей. Для соблюдения последовательности изучения воспользуемся глобальным ограничением «endBeforeStart», для исключения временных интервалов – «forbidStart» с кусочно-линейной функцией для указания доступных (недоступных) моментов времени для проведения занятий, а для проведения занятий в составе всего экипажа – «synchronize»:

$$\text{endBeforeStart } (s_{j_1}, s_{j_2}), (j_1, j_2) \in H_i, \forall i \in I \quad (2)$$

$$\text{forbidStart } (s_j, F_{[h_1; h_2]}), \forall j \in J_{[h_1; h_2]} \quad (3)$$

$$\text{synchronize } (s_{j_1}, s_{j_2}, s_{j_3}), \forall (j_1, j_2, j_3) \in J_{123} \quad (4)$$

Далее, опишем различия постановок CP и CP'. Для CP введем вспомогательные интервальные переменные $week_j$ - номер недели, в которую выполняется работа $j \in J$; day_j - номер дня, в который выполняется работа $j \in J$:

$$\text{interval } week_j \in [1..|W|] \text{ size } |D| \cdot |H| \quad (5)$$

$$\text{interval } day_j \in [1..|W| \parallel D|] \text{ size } |H| \quad (6)$$

Ограничения на количество работ в неделю перепишем используя функцию «pulse»:

$$\sum_{j \in J_i^F} \text{pulse}(week_j, 1) \leq a_f, \forall i \in I, \quad (7)$$

где a_f - количество работ в неделю.

Основная идея модифицированной постановки CP' - замена интервальных переменных day_j и $week_j$ на целочисленные day_j^{int} и $week_j^{int}$, соответственно.

$$day_j^{int} \in \{1..|W| \parallel D|\}, week_j^{int} \in \{1..|W|\} \quad (8)$$

Тогда ограничение на количество работ в неделю можно переписать, используя глобальное ограничение «count»:

$$\text{count}(week_j^{int}, w) \leq a_f, \forall i \in I, \forall j \in J_i^F, \forall w \in W. \quad (9)$$

Также, в CP' ограничение на количество экзаменов в день можно переписать с использованием глобального ограничения «all-different»:

$$\text{all-different}(day_i^{int}), \forall j \in J_i^{Exam}, \forall i \in I. \quad (10)$$

В таблице 1 представлены вычислительные эксперименты и приведено сравнение эффективности постановок. Эксперименты выполнялись как на тестовых, так и на реальных данных, предоставленные ЦПК. Сравнение результатов решения задач ILP и CP показал, что переход к CP позволил уменьшить дерево поиска с 17 млн.вершин до 3,5 тыс. Вычислительные эксперименты продемонстрировали, что с ростом горизонта планирования и количества занятий реализация модели CP' показывает лучшие результаты по времени поиска допустимого расписания, чем ILP и (CP).

Таблица 1

Результаты численного эксперимента

| | 3 нед / 100 занятий | | | 5 нед / 160 занятий | | | 8 нед / 230 занятий | | |
|-------|---------------------|----------------|--------|---------------------|----------------|----------------|---------------------|----------------|----------------|
| | ILP | CP | CP' | ILP | CP | CP' | ILP | CP | CP' |
| Время | 9 | 0,25 | 0,19 | 600 | 0,43 | 0,62 | 6657 | 1,32 | 0,58 |
| Перем | $3 \cdot 10^4$ | 290 | 303 | $7 \cdot 10^4$ | 490 | 444 | $2 \cdot 10^6$ | 852 | 714 |
| Огран | $4 \cdot 10^4$ | $2 \cdot 10^3$ | 10^3 | $8 \cdot 10^4$ | $3 \cdot 10^3$ | $2 \cdot 10^3$ | $2 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^3$ | $2 \cdot 10^3$ |
| Итер | $2 \cdot 10^4$ | 10^3 | 10^3 | $5 \cdot 10^6$ | $2 \cdot 10^4$ | 10^3 | 10^7 | $3 \cdot 10^3$ | $2 \cdot 10^3$ |

Заключение

В статье предложены модели на основе программирования в ограничениях для решения задачи построения расписаний подготовки космонавтов. Выполнено сравнение различных подходов решения задачи на реальных данных Центра подготовки космонавтов им.Ю.А.Гагарина (ЦПК). Работа еще не завершена и на данный момент преждевременно проводить сравнение с расписанием, которое строит диспетчер.

Список литературы

1. Бронников С.В., Герасимов А.Р., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Петров А.С., Пономарев К.В., Харламов М.М., Хуснуллин Н.Ф., Ядренцев Д.А. К решению задачи автоматизации планирования подготовки космонавтов для работы на МКС / Труды 7-й Международной научной конференции «Теория расписаний и методы декомпозиции. Танаевские чтения» (Беларусь, Минск, 2016). Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2016. С. 23-27.
2. Лазарев А.А., Бронников С.В., Герасимов А.Р., Мусатова Е.Г., Петров А.С., Пономарев К.В., Харламов М.М., Хуснуллин Н.Ф., Ядренцев Д.А. Математическое планирование подготовки космонавтов // Управление большими системами. 2016. Вып. 63. С. 129-154. Сидоров С.С. Статья в сборнике // Название сборника. М: Физматлит, 2012. С. 1–21.

The task of planning cosmonaut training as a task to meet the constraints

N. F.Khusnullin

ICS RAS named after V. A. Trapeznikov, Moscow, Russia

СЕКЦИЯ № 3

НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Системы линейных уравнений, неравенств и двойственность | 99 |
| Дмитрук А.В., Самыловская А.К. Условия знакоопределённости интегрального квадратичного функционала на системе линейных интегральных уравнений типа Вольтерры | 105 |
| Журбенко Н.Г. Субградиентный алгоритм с преобразованием пространства ($\alpha(\varepsilon)$ -алгоритм) | 107 |
| Khamisov O.V. Global optimization with nonlinear support functions | 108 |
| Khamisov O.O. Minimization of Frequency Deviations in Power Network by using majorant functions and zero order methods | 109 |
| Khoroshilova E.V., Antipin A.S. Saddle-point method for solving terminal control problem with state constraints | 110 |
| Карпенко А.П. Нотация для паттернов популяционных алгоритмов непрерывной глобальной оптимизации | 113 |
| Коротченко А.Г., Сморякова В.М. Об оценке наибольшего значения функций, являющихся решением систем обыкновенных дифференциальных уравнений | 115 |
| Лаптин Ю.П., Бардадым Т.А., Березовский О.А. Коническая регуляризация некоторых плохо обусловленных задач оптимизации | 120 |
| Малинов В.Г. О версии обобщённого экстраградиентного квазиньютоновского метода решения седловых и других задач | 124 |
| Нефедов В.Н. К вопросу о глобальной оптимизации полиномиальных и кусочно-полиномиальных функций на n -мерном параллелепипеде | 127 |

Системы линейных уравнений, неравенств и двойственность*

А.И. Голиков, Ю.Г.Евтушенко
ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Задачи нахождения решения недоопределённых систем линейных уравнений с неотрицательными переменными и систем линейных неравенств не относятся к классическим задачам вычислительной линейной алгебры. Как правило, эти задачи имеют неединственное решение. Они сводятся к задачам оптимизации. Для решения таких задачи полезно использовать теорию двойственности и различные методы оптимизации, например, метод Ньютона. Оптимизационные методы дают возможность выделить из множества решений линейной системы единственное решение (например, нормальное решение, проекцию заданной точки).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 17-07-00510, [17-07-00493](#)) и программы Президиума РАН П 26.

Пусть задана недоопределенная система линейных уравнений с неотрицательными переменными

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \quad (1)$$

Здесь матрица $A \in R^{m \times n}$, вектор $b \in R^m$ заданы и $m < n$. Через 0_i обозначен i -мерный нулевой вектор. Будем всюду предполагать, что система (1) разрешима. Эта система рассматривается как частный случай задачи линейного программирования (ЛП)

$$\min_{x \in X} 0_n^T x, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, \quad x \geq 0_n\}, \quad (2)$$

в которой вектор целевой функции $c = 0_n$. Двойственная к (2) имеет вид

$$\min_{u \in U} b^T u, \quad U = \{u \in R^m : A^T u \leq 0_n\}. \quad (3)$$

Хорошо известно, что если применить метод квадратичной функции к двойственной задаче ЛП, то при любом конечном коэффициенте штрафа, начиная с некоторого порогового значения по простой формуле вычисляется точное решение прямой задачи ЛП. Специфика задач ЛП (2)-(3) (нулевой вектор $c = 0_n$) позволяет использовать любое положительное значение коэффициента штрафа. Итак, из решения u_* задачи безусловной оптимизации

$$\max_{u \in R^m} (b^T u - \frac{1}{2} \|(A^T u)_+\|^2) \quad (4)$$

находим по формуле $x^* = (A^T u^*)_+$ нормальное решение задачи (2), а следовательно, и нормальное решение исходной системы (1). Здесь и ниже a_+ обозначает вектор, у которого все отрицательные компоненты заменены на нули.

Заметим, что задача (4) является взаимно двойственной к следующей задаче квадратичного программирования

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|x\|^2, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, \quad x \geq 0_n\},$$

или, что тоже самое, к регуляризованной задаче ЛП (2) с параметром регуляризации равным единице

$$\min_{x \in X} (0_n^T x + \frac{1}{2} \|x\|^2), \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, \quad x \geq 0_n\}.$$

Аналогично, найдя решение p^* следующей задачи безусловной максимизации вогнутой кусочно квадратичной функции

$$S(p^*) = \max_{p \in R^m} S(p), \quad S(p) = b^T p - \frac{1}{2} \|(\hat{x} + A^T p)_+\|^2, \quad (5)$$

где \hat{x} – заданная точка, по простой формуле вычисляется проекция \hat{x}^* заданной точки \hat{x} на множество решений системы (1):

$$\hat{x}^* = (\hat{x} + A^T p^*)_+. \quad (6)$$

Действительно, из необходимых и достаточных условий максимума $S(p)$ следует

$$S_p(p^*) = b - A(\hat{x} + A^T p^*)_+ = 0_m. \quad (7)$$

Выражение (6) можно переписать в виде

$$\hat{x}^* - \hat{x} - A^T p^* \geq 0_n, \quad \hat{x}^{*T} (\hat{x}^* - \hat{x} - A^T p^*) = 0, \quad \hat{x}^* \geq 0_n, \quad (8)$$

а (7) запишем как

$$b - A\hat{x}^* = 0_m. \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) являются выполненными в точке (\hat{x}^*, p^*) условиями Куна-Таккера строго выпуклой квадратичной задачи проектирования точки \hat{x} на множество решений системы (1). Таким образом, точка \hat{x}^* есть решение задачи

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|x - \hat{x}\|^2, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0_n\}. \quad (10)$$

Двойственной к (10) есть задача

$$\max_{p \in R^m} (b^T p - \frac{1}{2} \|(\hat{x} + A^T p)_+\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{x}\|^2) = \max_{p \in R^m} S(p) + \frac{1}{2} \|\hat{x}\|^2. \quad (11)$$

и ее решение p^* определяет по формуле (6) решение \hat{x}^* задачи (10)

Сведение системы (1) к задаче безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции полезно с вычислительной точки зрения. Число переменных в ней $m < n$ и для ее решения можно применять глобально сходящийся метод Ньютона. Градиент

$$S_p(p) = b - A(\hat{x} + A^T p)_+$$

функции $S(p)$ не дифференцируем, для нее не существует обычная матрица Гессе, но легко вычисляется обобщенная матрица Гессе, которая является $m \times m$ симметричной отрицательно полуопределенной матрицей вида

$$S_{pp}(p) = -AD(z)A^T.$$

Через $D(z)$ обозначена $n \times n$ диагональная матрица с i -м элементом, равным 1, если $(\hat{x} + A^T p^*)_i > 0$, и равным 0, если $(\hat{x} + A^T p^*)_i \leq 0, i = 1, \dots, n$. т.е. n -мерный вектор $z = \text{sign}(\hat{x} + A^T p)_+$. Так как обобщенная матрица Гессе $S_{pp}(p^k)$ на k -м шаге метода Ньютона может быть вырождена, то формируем матрицу $H^k \in R^{m \times m}$

$$H^k = -AD(z^k)A^T - \delta I_m,$$

где $I_m \in R^{m \times m}$ – единичная матрица и δ – некоторое положительное число (обычно 10^{-4}). Направление максимизации Δp в точке p^k функции $S(p)$ находится из решения системы линейных уравнений

$$H^k \Delta p = -S_p(p^k). \quad (12)$$

Переход к следующему приближению p^{k+1} производится по формуле $p^{k+1} = p^k - \tau^k \Delta p$, где шаг τ^k определяется по правилу Армико.

В [1] доказана глобальная конечная сходимость из произвольной точки p^0 метода Ньютона для безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции. Итак, за конечное число шагов находится решение p^* задачи (5) и по формуле (6) находится проекция \hat{x}^* заданной точки \hat{x} на множество решений системы (1). Таким образом, решение системы (1) с n неотрицательными переменными и m уравнениями ($m < n$) сводится к конечному числу решений систем (12) размерности $m \times m$.

Заметим, что кусочно-квадратичная функция $S(p)$ не всегда строго вогнута и задача ее максимизации может иметь неединственное решение. Обобщенный метод Ньютона строго обоснован для случая единственного решения. Однако при проведении вычислительных экспериментов не отмечалось трудностей с применением метода Ньютона. Априорное установление неединственности решения безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции не является полностью разрешенным вопросом [2].

Предложим другой подход к решению недоопределенной системы (1) линейных уравнений с неотрицательными переменными. Применением к задаче проектирования (10) метод квадратичного штрафа:

$$\min_{x \in R^n} H(x), \quad H(x) = \frac{1}{2} \|x - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|b - Ax\|^2, \quad (13)$$

где ε положительный коэффициент штрафа [3]. При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $x(\varepsilon)$ задачи (13) сходится к решению \hat{x}^* задачи (10) или, что тоже самое, к проекции \hat{x}^* точки \hat{x} на множество решений системы (1). Задача (13) есть задача безусловной минимизации строго выпуклой квадратичной функции $F(x)$ на неотрицательном ортанте. При любом $\varepsilon > 0$ она обладает единственным решением. Но с вычислительной точки зрения задача (13) имеет два существенных недостатка. Это условие неотрицательности переменных x и их размерность $n \gg m$, что существенно затрудняет применение метода Ньютона непосредственно к (13).

Этих недостатков лишена следующая задача безусловной максимизации строго вогнутой кусочно-квадратичной функции

$$\max_{p \in R^m} W(p), \quad W(p) = b^T p - \frac{1}{2} \|(\hat{x} + A^T p)_+\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|p\|^2, \quad (14)$$

через решение $u(\varepsilon)$ которой легко вычисляется решение $x(\varepsilon)$ задачи (13).

Теорема 1. При любом $\varepsilon > 0$ единственное решение $x(\varepsilon) = \arg \min_{x \in R_+^n} H(x)$ задачи (13) и единственное решение $p(\varepsilon) = \arg \max_{p \in R^m} W(p)$ задачи (14) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x(\varepsilon) &= (\hat{x} + A^T p(\varepsilon))_+, \\ p(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} (b - Ax(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Задачи (13) и (14) являются взаимно двойственными. Доказательство теоремы основано на сведении задачи безусловной оптимизации к эквивалентной задаче на условный экстремум с помощью дополнительных переменных и ограничений.

Для квадратичного метода штрафа из теоремы следует новый оригинальный результат: для оштрафованной задачи квадратичного программирования (10) вместо задачи минимизации (13) на неотрицательном квадранте можно решать двойственную задачу безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции. По ее решению легко вычисляется решение оштрафованной задачи. Двойственная задача (14) к оштрафованной (13) имеет существенно меньшую размерность m , чем размерность оштрафованной задачи n .

Нахождение произвольного решения системы (1) можно рассматривать как задачу метода наименьших квадратов на неотрицательном ортанте или как применение метода квадратичного штрафа к задаче ЛП (2)

$$\min_{x \in R_+^n} \frac{1}{2} \|b - Ax\|^2. \quad (15)$$

Двойственной задачей к (15) является следующая задача строго вогнутого квадратичного программирования при ограничениях (возмущенная двойственная задача ЛП (2))

$$\max_{u \in U} (b^T u - \frac{1}{2} \|u\|^2), \quad U = \{u \in R^m : A^T u \leq 0_n\}. \quad (16)$$

Решение u^* задачи (16) выражается через решение x^* задачи (15) по формуле $u^* = b - Ax^*$. Очевидно, что $\|u^*\| \neq 0$ в случае несовместности исходной системы (1).

Регуляризованная по Тихонову [4] задача (15) имеет вид

$$\min_{x \in R_+^n} F(x), \quad F(x) = \frac{1}{2} \|b - Ax\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|x - \hat{x}\|^2 \quad (17)$$

и позволяет из всех решений задачи (15) выделить проекцию \hat{x}^* точки \hat{x} . При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $x(\varepsilon)$ задачи (17) сходится к проекции \hat{x}^* . Аналогично теореме 1 можно показать, что двойственной к регуляризованной задаче (17) является задача безусловной максимизации строго вогнутой кусочно квадратичной функции

$$\max_{u \in R^m} W(u), \quad W(u) = b^T u - \frac{\varepsilon}{2} \|(\hat{x} + \frac{1}{\varepsilon} A^T u)_+\|^2 - \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{x}\|^2 \quad (18)$$

и при любом $\varepsilon > 0$ их решения выражаются друг через друга по формулам

$$x(\varepsilon) = (\hat{x} + \frac{1}{\varepsilon} A^T u(\varepsilon))_+, \quad u(\varepsilon) = b - Ax(\varepsilon)$$

и имеет место $F(x(\varepsilon)) = W(u(\varepsilon))$. Отметим, что двойственные переменные p и u соответственно в задачах (14) и (18) связаны между собой соотношением $p = \varepsilon u$.

Ниже приведены некоторые результаты расчетов в системе MATLAB 2014b на персональном компьютере с процессором AMD FX-8350 частотой 3,90GHz и 8GB оперативной памяти. Решались сгенерированные случайным образом системы линейных уравнений с большим числом n неотрицательных переменных (до миллиона) и средним числом m уравнений (до нескольких тысяч), т.е. имело место условие $n \gg m$. Задавались числа m , n и плотность d заполнения матрицы A ненулевыми элементами. В частности, значение $d=1$ означает, что случайным образом генерировались все элементы матрицы A , а значение $d=0.1$ указывает, что в матрице A генерировались только 10% элементов, а остальные полагались равными нулю. Элементы матрицы A задавались случайным образом из интервала $[-50,50]$, а проектируемый вектор – из $[0,10]$. Решение двойственной задачи (11) выбиралось случайным образом из интервала $[-10,10]$. По формуле (6) вычислялась проекция и затем вектор правых частей системы линейных уравнений.

Таблица. Сравнительные результаты работы программ для нахождения \hat{x}^* и $x(\varepsilon)$

| | | Задача (10)-(11) | | | Задача (13)-(14) | | |
|--------------------|-------|------------------|-----------------------|----------|------------------|-----------------------|----------|
| $m \times n$ | d | it | $\ Ax-b\ _\infty$ | t, sec | it | $\ Ax-b\ _\infty$ | t, sec |
| 500×10^4 | 1 | 6 | $5,6 \times 10^{-11}$ | 8,7 | 6 | $3,7 \times 10^{-11}$ | 8,9 |
| 1000×10^4 | 1 | 7 | $6,0 \times 10^{-11}$ | 35,5 | 7 | $4,1 \times 10^{-11}$ | 35,1 |
| 2000×10^4 | 1 | 8 | $4,4 \times 10^{-11}$ | 166,3 | 8 | $3,7 \times 10^{-11}$ | 156,1 |
| 4000×10^4 | 1 | 10 | $7,4 \times 10^{-11}$ | 822,1 | 10 | $7,0 \times 10^{-11}$ | 825,1 |
| 1000×10^5 | 0,5 | 6 | $1,8 \times 10^{-10}$ | 167,6 | 6 | $1,4 \times 10^{-10}$ | 164,9 |
| 2000×10^5 | 0,5 | 6 | $5,8 \times 10^{-10}$ | 671,7 | 6 | $5,0 \times 10^{-10}$ | 658,9 |
| 4000×10^5 | 0,5 | 6 | $5,2 \times 10^{-10}$ | 2508,5 | 6 | $5,9 \times 10^{-10}$ | 2470,3 |
| 500×10^6 | 0,1 | 6 | $1,5 \times 10^{-10}$ | 57,4 | 6 | $2,2 \times 10^{-10}$ | 59,3 |
| 1000×10^6 | 0,1 | 6 | $1,5 \times 10^{-09}$ | 180,5 | 6 | $1,6 \times 10^{-09}$ | 180,1 |
| 2000×10^6 | 0,1 | 6 | $1,2 \times 10^{-09}$ | 685,8 | 6 | $1,1 \times 10^{-09}$ | 687,6 |
| 4000×10^6 | 0,01 | 7 | $3,2 \times 10^{-11}$ | 106,5 | 7 | $3,4 \times 10^{-11}$ | 105,6 |
| 6000×10^6 | 0,01 | 7 | $4,3 \times 10^{-11}$ | 209,4 | 7 | $4,4 \times 10^{-11}$ | 208,0 |
| 4000×10^6 | 0,001 | 7 | $6,8 \times 10^{-12}$ | 19,9 | 7 | $7,1 \times 10^{-12}$ | 20,4 |
| 8000×10^6 | 0,001 | 9 | $1,0 \times 10^{-09}$ | 114,5 | 9 | $1,1 \times 10^{-09}$ | 113,8 |
| 2000×10^7 | 0,001 | 7 | $3,2 \times 10^{-11}$ | 46,6 | 7 | $3,1 \times 10^{-11}$ | 47,0 |

В таблице представлены размерности задач, плотность матрицы, число итераций метода Ньютона, чебышевская норма невязки системы и время счета для нахождения проекции \hat{x}^* в задаче (10) методом Ньютона, примененным к двойственной задаче (11), а также для нахождения $x(\varepsilon)$ в задаче (13) с помощью метода Ньютона, примененного к двойственной задаче (14). В методе штрафа коэффициент штрафа ε полагался равным 10^{-9} , т.е. решалась только одна задача безусловной максимизации (14). Из результатов вычислений видно, что задача проекции и оштрафования (регуляризованная) задача показали примерно одинаковую точность и время решения.

Аналогично метод Ньютона можно применять для нахождения решения системы линейных неравенств

$$Ax \leq b, \quad (19)$$

где матрица $A \in R^{m \times n}$ и пусть $m > n$. По аналогии с (15) для нахождения произвольного решения системы (19) можно решать следующую задачу безусловной минимизации выпуклой кусочно квадратичной функции методом Ньютона:

$$\min_{x \in R^n} \frac{1}{2} \|(Ax - b)_+\|^2 \quad (20)$$

Для задачи (20) легко вычисляется положительно полуопределенная обобщенная матрица Гессе $A^T D(z) A$, где $D(z)$ – $m \times m$ диагональная матрица с i -м диагональным элементом, равным i -й компоненте вектора $z = \text{sign}(Ax - b)_+$. Таким образом, в методе Ньютона решается конечное число систем линейных уравнений размерности $n \times n$ ($n < m$). Задача (20) в общем случае имеет неединственное решение.

Для выделения из множества решений системы неравенств одного решения можно перейти к задаче нахождения проекции \hat{x}^* произвольной точки \hat{x}

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|x - \hat{x}\|^2, \quad X = \{x \in R^n : Ax \leq b\}. \quad (21)$$

Двойственная к (21) является задачей максимизации вогнутой квадратичной функции от m переменных на положительном ортанте

$$\max_{p \in R_+^m} (A\hat{x} - b)^T p - \frac{1}{2} \|A^T p\|^2. \quad (22)$$

Проекция \hat{x}^* точки \hat{x} выражается через решение p^* задачи (22) по простой формуле $\hat{x}^* = \hat{x} - A^T p^*$.

Применение к задаче (21) метода квадратичного штрафа, приводит к строго выпуклой кусочно-квадратичной задаче безусловной минимизации

$$\min_{x \in R^n} \frac{1}{2} \|x - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|(Ax - b)_+\|^2. \quad (23)$$

Аналогично теореме 1 можно показать, что двойственная к (23) имеет вид

$$\max_{p \in R_+^m} (A\hat{x} - b)^T p - \frac{1}{2} \|A^T p\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|p\|^2, \quad (24)$$

и при любом $\varepsilon > 0$ решение $x(\varepsilon)$ задачи (23) выражается через решение $p(\varepsilon)$ задачи (24) и обратно: $x(\varepsilon) = \hat{x} - A^T p(\varepsilon)$, $p(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (Ax(\varepsilon) - b)_+$.

Список литературы

1. Mangasarian O.L. A Newton Method for Linear Programming // J. of Optim. Theory and Appl. 2004. Vol.~121. P.~1 – 18.
2. Luis Contesse, Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Jean-Paul Penot. Least squares solutions of linear inequality systems: a pedestrian approach <https://www.rairo-ro.org/articles/ro/abs/2017/03/ro160047/ro160047.html> - FN1 // RAIRO-Oper. Res. 2017. V. 51 N. 3. P. 567 – 575.
3. Ганин Б.В., Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Проективно-двойственный метод решения систем линейных уравнений с неотрицательными переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 2. С. 169 – 180.
7. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Докл. Академии наук СССР. 1965. Т.~163. №~4. С.~591 – 594.

Systems of linear equations, inequalities and duality

A.I. Golikov, Y.G. Evtushenko
FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Условия знакоопределённости интегрального квадратичного функционала на системе линейных интегральных уравнений типа Вольтерры*

А.В. Дмитрук, А.К. Самыловская
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Постановка задачи

Рассмотрим квадратичный функционал

$$\Omega = g(x(0), x(T)) + \int_0^T (Qx, x) + (Px, u) dt, \quad (1)$$

где u – n -мерная измеримая ограниченная функция, x – n -мерная липшицева на $[0, T]$ функция, связанные линейным интегральным уравнением

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (A(t, \tau)x(\tau) + B(t, \tau)u(\tau)) d\tau, \quad (2)$$

а g – квадратичная форма.

Здесь и далее полагаем, что матрицы Q , P , A , B имеют размерности, «соответствующие» уравнениям (1) и (2), матрица Q измерима и ограничена, матрица P липшицева на $[0, T]$, матрица A липшицева на $[0, T]$ по первому аргументу и измерима и ограничена по второму; матрица B липшицева на $[0, T]$ по обоим аргументам.

Нас интересует вопрос о знакоопределённости функционала (1) на паре (x, u) , где x, u связаны уравнением (2) и системой конечных ограничений

$$K = \left\{ (x, u) \left| \begin{array}{l} \mu_0 x(0) + \mu_T x(T) \leq 0, \\ \eta_0 x(0) + \eta_T x(T) \leq 0 \end{array} \right. \right\}. \quad (3)$$

Этот вопрос возникает при изучении условий оптимальности второго порядка в задачах оптимального управления с интегральным функционалом типа Вольтерры, линейных по управлению. Целью настоящей работы является получение условий знакоопределённости квадратичной формы Ω , заданной на K . Отметим, что если функционал содержит «стандартный» лежандров член (Ru, u) , то из условия $\Omega \geq 0$ на K легко получить «классическое» условие Лежандра $R(t) \geq 0$ для почти всех t . Однако в нашем случае $R(t) \equiv 0$, но возможны дальнейшие условия, отсутствующие в общем случае. В работе показано, как специальными методами свести имеющееся представление квадратичной формы к стандартному виду.

Частный случай (отсутствие зависимости по первому аргументу)

Рассмотрим сначала случай, когда матрицы A , B не зависят от первого аргумента, т.е. $A = A(\tau)$, $B = B(\tau)$. Тогда (2) сводится к дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = Ax = Bu, \quad x(0) = x_0.$$

В этом случае можно сделать замену переменных, после которой в квадратичной форме появляется член, квадратично зависящий от нового управления. Эта замена известна как преобразование Гоха. В результате этой, вообще говоря, эквивалентной, дифференциальной замены мы не только получаем необходимый для дальнейших исследований условий оптимальности квадратичный относительно нового управления член в составе подынтегрального выражения, но и сохраняем прежний вид управляемой системы.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-01-00585

Общий случай

Аналогичную схему можно применить в общем случае, когда матрицы A, B зависят от двух аргументов и интегральная система имеет вид (2). В этом случае путём интегральной замены вместо исходной пары $(x(t), u(t))$ мы получаем $(\omega(t), y(t))$, удовлетворяющую новому уравнению

$$\omega(t) = \omega(0) + \int_0^t \Gamma(t, \tau)\omega(\tau) + \Lambda(t, \tau)y(\tau)d\tau.$$

После указанных преобразований функционал примет вид

$$\Omega = S(\omega(0), \omega(0)) + \int_0^T (\tilde{Q}\omega, \omega) + (\tilde{P}\omega, y) + (\tilde{R}y, y) + (Vy, \dot{y})dt.$$

Далее мы вводим функцию $\rho = (\omega, y, u) \in C \times C \times L_\infty = W$ с заданной нормой $\|\rho\| = \|\omega\|_C + \|y\|_C + \|u\|_\infty$, определяем конус

$$\tilde{K} = \left\{ (\omega, y, u) = \rho \in W \left| \begin{array}{l} M_0\omega_0 + M_T\omega_T + M_y\omega(T) \leq 0, \\ N_0\omega_0 + N_T\omega_T + N_y\omega(T) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

и формулируем следующее основное утверждение.

Теорема 1. Если $\Omega \geq 0$ на \tilde{K} , то $V(t) \equiv 0$.

Следствие 1. Если выполнено условие теоремы 1, то $R(t) \geq 0$.

Таким образом, имеющаяся вырожденная по управлению квадратичная форма сведена к «стандартному» виду, который может быть исследован с использованием «интегрального аналога» известного математического аппарата (теория условий высших порядков Левитина-Милютин-Осмоловского).

Заключение

Исследованы условия знакоопределённости интегрального квадратичного функционала на системе линейных интегральных уравнений типа Вольтерры. Показано, как вырожденную по управлению квадратичную форму свести к стандартному виду, допускающему исследование с помощью «интегрального аналога» известного математического аппарата. Таким образом, мы продемонстрировали возможность исследования условий второго порядка в одном классе задач с интегральным функционалом типа Вольтерры, линейных по управлению. Продемонстрированные методы могут быть применены и в других классах задач.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983
2. Sethi S.P., Thompson G.L. Optimal Control Theory. Berlin: Springer, 2005.
3. Geering H.P. Optimal Control with Engineering Applications. Berlin: Springer, 2007.
4. Artstein Z. Continuous dependence of solutions of Volterra integral equations // SIAM J. Math. Anal. 1975. V. 6. № 3. Pp. 446–456.
5. Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н. П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35 № 6. С. 11–46.
6. Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Calculus of Variations and Optimal Control. Providence, RI: American Math. Society, 1999.

Conditions for the sign definiteness of an integral quadratic functional on a system of Volterra type linear integral equations

A.V. Dmitruk, A.K. Samylovskaya
Lomonosov's MSU, Moscow, Russia

Субградиентный алгоритм с преобразованием пространства

($\alpha(\varepsilon)$ – алгоритм)*

Н.Г. Журбенко

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев, Украина

$\alpha(\varepsilon)$ – алгоритм [1] предназначен для решения задачи ε -минимизации выпуклой функции $f(x)$ в R^n (задачи минимизации с заданной точностью по функционалу). Он является результатом разработки субградиентного алгоритма с эффективностью, сравнимой с r -алгоритмом [2], и с его основными характеристиками: использованием процедуры одномерной минимизации и растяжением пространства с большими коэффициентами растяжения (по сравнению с методом эллипсоидов).

Алгоритм основан на существенном использовании ε -субградиентов и операторов преобразования пространства [1]. На каждой итерации алгоритма применяются операторы растяжения пространства по ортогональным направлениям. Параметры преобразования определяются построением эллипсоидов локализации ε -решения. Они строятся на основе информации, получаемой в результате применения процедуры одномерной минимизации. На каждой итерации обеспечивается уменьшение объема локализации ε -решения не менее чем в q раз (параметр алгоритма). Если в результате процедур одномерной минимизации происходит существенное улучшение рекордного значения функции, то преобразование пространства определяется оператором растяжения по направлению агрегатного ε -субградиента. В противном случае за конечное число одномерных процедур минимизации гарантируется генерация ε -субградиентов, которые обеспечивают построение эллипсоида локализации ε -решения с уменьшением объема локализации не менее чем в q раз. При этом преобразование пространства определяется операторами растяжения по $n-1$ ортогональным направлениям. В некотором смысле $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритм объединяет алгоритмы Н.З. Шора с растяжением пространства по субградиенту и по разности двух последовательных субградиентов.

Теоретическую оценку эффективности $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритма дает

Утверждение. Для числа итераций k $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритма, за которые он обеспечивает решение 2ε -оптимизации, справедлива следующая оценка

$$k \leq \lceil n \ln(1/\gamma) / \ln(1/q) \rceil$$

где γ – относительная точность решения задачи (по функционалу).

Численная эффективность $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритма исследовалась на тестовых задачах:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^n \rho_n^{i-1} x_i^2, \quad f_2(x) = \sum_{i=1}^n \rho_n^{i-1} |x_i|, \quad \text{где } \rho_n = 10^{6/(n-1)}.$$

Степень вытянутости линий уровня («овражности») функций не зависит от размерности и равна 10^6 . Начальная точка $x_i = 1.0, i = 1, \dots, n$. Параметр точности решения по функционалу $\bar{\varepsilon} = 10^{-6}$.

Обозначения колонок таблицы: nVarbl – число переменных; qVolum – значение параметра уменьшения объема локализации $\bar{\varepsilon}$ -решения на итерации (параметр алгоритма); nIter – число итераций; nLStep – среднее число применения алгоритма одномерной минимизации на одной итерации; Alpha – среднее значение коэффициента растяжения пространства; r-алгоритм – число итераций r -алгоритма.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Volkswagen Foundation (грант № 90 306).

| Минимизация функции $f_1(x)$. | | | | | | |
|--------------------------------|--------|-------|--------|-------|-------|------------|
| nVarbl | qVolum | nIter | nLStep | Alpha | nIter | r-алгоритм |
| 10 | 0.99 | 107 | 1.36 | 1.66 | 107 | 72 |
| 10 | 0.70 | 56 | 3.21 | 3.03 | 56 | |
| 20 | 0.99 | 195 | 1.30 | 1.62 | 195 | 103 |
| 20 | 0.70 | 86 | 3.69 | 2.72 | 86 | |
| 40 | 0.99 | 360 | 1.23 | 1.61 | 360 | 157 |
| 40 | 0.70 | 134 | 4.13 | 2.76 | 134 | |
| 50 | 0.99 | 435 | 1.20 | 1.60 | 435 | 190 |
| 50 | 0.70 | 153 | 4.25 | 2.76 | 153 | |
| 100 | 0.99 | 711 | 1.14 | 1.59 | 711 | 577 |
| 100 | 0.70 | 243 | 4.40 | 2.74 | 243 | |
| Минимизация функции $f_2(x)$. | | | | | | |
| nVarbl | qVolum | nIter | nLStep | Alpha | nIter | r-алгоритм |
| 10 | 0.99 | 413 | 1.16 | 1.85 | 413 | 141 |
| 10 | 0.70 | 133 | 3.01 | 3.38 | 133 | |
| 20 | 0.99 | 1274 | 1.09 | 1.55 | 1274 | 204 |
| 20 | 0.70 | 289 | 4.17 | 2.84 | 289 | |
| 40 | 0.99 | 1930 | 1.09 | 1.51 | 1930 | 349 |
| 40 | 0.70 | 374 | 6.03 | 2.61 | 374 | |
| 50 | 0.99 | 2594 | 1.08 | 1.46 | 2594 | 435 |
| 50 | 0.70 | 455 | 6.87 | 2.60 | 455 | |
| 100 | 0.99 | 4062 | 2.60 | 1.75 | 4062 | 888 |
| 100 | 0.70 | 1559 | 9.20 | 2.55 | 1559 | |

Численные эксперименты показывают, что по числу итераций эффективность $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритма сравнима с эффективностью r -алгоритма Н.З. Шора [2, 3]. Однако трудоемкость одной итерации $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритма существенно больше.

Список литературы

1. Журбенко Н.Г. Субградиентный алгоритм минимизации с преобразованием пространства $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритм // Стохастическое программирование и его приложения П.С.Кнопов, В.И.Зоркальцев, Я.М. и др. – Иркутск: Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2012. С. 36–51
2. Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. // Кибернетика. 1971. №3. С. 51-59.
3. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979.

Subgradient algorithm with space transformation ($\alpha(\varepsilon)$ -algorithm)

N.G. Zhurbenko

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv, Ukraine

Global optimization with nonlinear support functions

O.V. Khamisov

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia

We describe a global optimization technique for nonlinear nonconvex optimization problems with nonlinear inequality and inequality constraints. The main idea of the suggested

approach is to use convex support majorant functions and concave support minorant functions to separate a given point from a compact set. Similar idea is used in Lipschitzian optimization. However here we do not need to calculate or estimate the Lipschitz constant. Support functions give more flexibility for creating effective global optimization methods. Moreover, it is possible to use support functions in a number implicit mathematical programming problems like inverse optimization problems and parametric optimization. Sometimes we have nothing except a concave or convex support functions for approximation of an implicit problem. We provide local and global convergence conditions as well as some results of computational testing.

References

1. Khamisov O.V. Nonconvex optimization with nonlinear support functions // Trudy IMM UrO RAN. 2013. V. 19. №2. P. 209-306 (in Russian)

Minimization of Frequency Deviations in Power Network by using majorant functions and zero order methods

O.O. Khamisov

Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia

Power networks are susceptible to power imbalances due to changes in power demand. Additionally generator or line failure may result in significant disturbance in power balance and power flows. As a result, frequency of the power network oscillates [1], [2], [3], and large oscillations may result in equipment damage or emergency shutdown or lines overload. In order to counter this effects frequency control is used. It adjusts power generation in order to restore power balance and deliver frequency to its nominal value (e.g. 50 Hz).

Currently used traditional version of frequency control consists of three different parts. Its first part called Droop control (or Primary Frequency control), is aimed to reduce initial frequency drop after power disturbance appearance and works at timescale of tens of seconds. During this period the system is most vulnerable due to frequency oscillations. There exist various other versions of frequency control schemes [4], [5] however they are not implemented in power systems, therefore they are not considered within this paper.

Droop control has a set of control parameters, which are chosen to ensure system's stability. However it is possible to adjust these parameters to reduce frequency oscillations without losing stability of the system. There is no agreed way to describe system's behavior with a set of particular parameters without simulations. In particular maximal frequency deviations (nadir) from the nominal value are the key factors, that influence system's reliability. Aim of the paper is development of approach, that would minimize maximal absolute value of frequency oscillations without loss of system's stability.

Dynamics of power network are described by system of linear differential equations. Frequency deviations on each bus of the system is highly oscillatory and has infinite number of extremums, therefore calculation of maximum of their absolute values among all buses is computationally difficult.

Additionally, as a function of control parameters, this maximum is defined by eigenvectors and eigenvalues of the system's matrix, which cannot be calculated analytically. As a result maximum of frequency deviations is a complicated function with many extremums. Applying zero order method for its minimization results in obtaining local minimum.

In order to counter this effects majorants for absolute values of frequency deviations are derived. These majorants still depend on eigenvalues and eigenvectors of the system's matrix, but have simpler structure. As a result, zero order method often finds not local, but global

optimum and does that in a much faster time, since there is no need in maximization of oscillatory function for every bus.

Classical linearized model of transmission power network is considered. It is assumed that several buses (both loads and generators) suffer from a step change of power generation or consumption, what results in frequency oscillations. Aim of this work is derivation of analytical estimations nadir and convergence rate of frequency to the nominal value.

Since control and system's model are described by linear system of differential equations, eigenvalue analysis is applied to obtain necessary estimations.

References

1. A. R. Bergen, V. Vittal. Power Systems Analysis, 3d ed. Prentice Hall, 2000.
2. J. Machowski, J. Bialek, and J. Bumby. Power System Dynamics: Stability and Control, 3 ed. NJ, US: John Wiley & Sons, Inc., 2008.
3. A. J. Wood, B. F. Wollenberg. Power Generation, Operation, and Control, 3rd ed. NJ, US: John Wiley & Sons, Inc., 1996.
4. C. Zhao, E. Mallada, S. Low. Distributed generator and load-side secondary frequency control in power networks // 49th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS). 2015. P. 1-6.
5. C. Zhao, E. Mallada, S. Low; J. Bialek. A unified framework for frequency control and congestion management // Power Systems Computation Conference (PSCC). 2016. P. 1-7

Saddle-point method for solving terminal control problem with state constraints*

E.V. Khoroshilova

Lomonosov MSU, Moscow, Russia

A.S. Antipin

CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Abstracts. A problem of terminal control with linear controlled dynamics, state constraints and boundary-value problem is considered. Using the Lagrange function, sufficient optimality conditions are obtained. Given sufficient conditions, a saddle-point extragradient method is proposed. State constraints on the trajectory are taken into account in the iterative method. The convergence of the method in all components of saddle-point solution is proved.

Problem statement. The paper continues the study of saddle-point methods for solving terminal control problems with boundary-value problems at the ends of the time interval [1,2,3,4,5,6,7,8]. At a fixed time interval, the following linear dynamical control system is considered

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Here $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ is the vector of trajectories (state variables), matrices $D(t), B(t)$ of size $n \times n$, $n \times r$ ($r < n$), respectively, are continuous. The controls $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T \in U$ are bounded in the norm L_2^r :

$$U = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] \mid \|u(\cdot)\|^2 \leq C^2\}.$$

For all possible controls in U and a given $x(t_0)$, the system of differential equations generates trajectories $x(t)$, whose right-hand ends $x(t_1)$ describe the terminal attainability set

* This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 18-01-00312).

$X_1 \subset \mathbb{R}^n$. The trajectory $x(t)$ is an absolutely continuous function. The class of absolutely continuous functions will be denoted as $AC_2^n[t_0, t_1]$.

Let the right-hand end $x_1 = x(t_1)$ of the trajectory $x(t)$ satisfy a system of linear constraints $G_1 x_1 \leq g_1$ that defines a non-empty convex polytope (G_1 is a fixed $m \times n$ -matrix ($m > n$), g_1 is a known vector), $\varphi_1(x_1)$ is a convex scalar function.

We have the following terminal control problem with state constraints on the entire time interval: to find the control $u^*(t) \in U$ and the corresponding trajectory $x^*(\cdot) \in AC_2^n[t_0, t_1]$, which connects the initial value x_0 with the solution $x_1^* = x^*(t_1)$ of the finite-dimensional convex programming problem. Moreover, at an arbitrary instant of time $t \in [t_0, t_1]$, the trajectory satisfies the state constraints $G(t)x(t) \leq g(t)$. Thus, we have the problem formulation:

$$\begin{cases} (x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \text{Argmin}\{\varphi_1(x_1) \mid G_1 x_1 \leq g_1, x_1 \in X_1 \subset \mathbb{R}^n, \\ \frac{d}{dt} x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1^*, \\ G(t)x(t) \leq g(t), t \in [t_0, t_1], x(\cdot) \in AC_2^n[t_0, t_1], u(\cdot) \in U. \end{cases} \quad (1)$$

where $G(t)$ is a continuous matrix of size $m \times n$. In the convex case, the objective function $\varphi_1(x_1)$ can be replaced at the minimum point by its linear approximation. As a result of this linearization, the original problem reduces to finding the fixed point of the extremal mapping:

$$\begin{cases} (x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \text{Argmin}\{\varphi_1(x_1) \mid G_1 x_1 \leq g_1, x_1 \in X_1 \subset \mathbb{R}^n, \\ \frac{d}{dt} x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1^*, \\ G(t)x(t) \leq g(t), t \in [t_0, t_1], x(\cdot) \in AC_2^n[t_0, t_1], u(\cdot) \in U. \end{cases} \quad (2)$$

The problem (2) can be interpreted as a linear programming problem in a functional space. As it is well-known, the solution $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times AC_2^n[t_0, t_1] \times U$ of the problem exists. The regularity conditions of Slater type are satisfied.

The classical Lagrangian and the primal problem. The problem considered is a problem of terminal control with state constraints along the entire length of the trajectory, formulated in Hilbert space. In the theory of linear programming in finite-dimensional space, it is known that, in addition to the primal problem, there always exists a dual problem in the dual space. Carrying out analogies for functional spaces, we obtain the dual problem for the problem (2) in an explicit form. To this end, we introduce the linearized Lagrange function

$$\begin{aligned} L(x_1, x(\cdot), u(\cdot); p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) &= \langle \nabla \varphi_1(x_1^*), x_1 - x_1^* \rangle + \langle p_1, G_1 x_1 - g_1 \rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt} x(t) \rangle dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta(t), G(t)x(t) - g(t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (3)$$

defined for all $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times AC_2^n[t_0, t_1] \times U$, $(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi^n[t_0, t_1] \times \Psi_+^n[t_0, t_1]$. Here $\Psi^n[t_0, t_1]$, $\Psi_+^n[t_0, t_1]$ are linear varieties of absolutely continuous and, respectively, nonnegative absolutely continuous functions from the space conjugate to the Cartesian product of primal variables spaces.

In the regular case, there exists a saddle point $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot); p_1^*, \psi^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$ of the Lagrange function. By definition, the saddle point satisfies the system

$$\begin{aligned} &\langle \nabla \varphi_1(x_1^*), x_1^* - x_1^* \rangle + \langle p_1, G_1 x_1^* - g_1 \rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt} x^*(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta(t), G(t)x^*(t) - g(t) \rangle dt \leq \\ &\leq \langle \nabla \varphi_1(x_1^*), x_1^* - x_1^* \rangle + \langle p_1, G_1 x_1^* - g_1 \rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt} x^*(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta^*(t), G(t)x^*(t) - g(t) \rangle dt \leq \\ &\leq \langle \nabla \varphi_1(x_1^*), x_1^* - x_1^* \rangle + \langle p_1^*, G_1 x_1^* - g_1 \rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt} x(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta^*(t), G(t)x(t) - g(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

for all $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times AC_2^n[t_0, t_1] \times U$, $(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi^n[t_0, t_1] \times \Psi_+^n[t_0, t_1]$. This point generates primal $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ and dual $(p_1^*, \psi^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$ solutions, the first of which forms the solution of the problem (2). From the classical theory it is known that the converse theorem is also true. Together, these statements form the necessary and sufficient conditions for extremality, which are satisfied on the solution of the problem.

The dual Lagrangian and the dual problem. The Lagrange function in dynamic problems allows us to pass from the initial problem in the space of primal variables to the

dual problem in the dual space. Using the formulas for the transition to conjugate linear operators and the integration-by-parts formula, we write out the conjugate (dual) Lagrange function with respect to (3):

$$\begin{aligned} L^T(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot), x_1, x(\cdot), u(\cdot)) &= \langle \nabla \varphi_1(x_1^*) + G_1^T p_1 - \psi_1, x_1 \rangle + \langle -p_1, g_1 \rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle D^T(t) \psi(t) + \frac{d}{dt} \psi(t) + G^T(t) \eta(t), x(t) \rangle dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t) \psi(t), u(t) \rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta(t), g(t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (4)$$

for all $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in R^n \times AC_2^n[t_0, t_1] \times U$, $(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) \in R_+^m \times \Psi^n[t_0, t_1] \times \Psi_+^n[t_0, t_1]$.

From the saddle-point system for dual Lagrangian (4) we obtain a problem that is dual with respect to the problem (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1^*, \psi^*(\cdot), \eta^*(\cdot)) \in \\ \text{Argmax}\{ \langle -p_1, g_1 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t) \psi(t), u(t) \rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta(t), g(t) \rangle dt \mid \\ D^T(t) \psi(t) + \frac{d}{dt} \psi(t) + G^T(t) \eta(t) = 0, \psi_1 = \nabla \varphi_1(x_1^*) + G_1^T p_1, \\ \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t) \psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \leq 0, u(\cdot) \in U. \end{array} \right. \quad (5)$$

where $\psi_1 = \nabla \varphi_1(x_1^*) + G_1^T p_1$ is the transversality condition.

Saddle-point differential system. Combining in one system the basic elements of primal and dual problems, we eventually arrive at a saddle-point differential system:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x^*(t) &= D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), x^*(t_0) = x_0, \\ \langle G_1 x_1 - g_1, p_1 - p_1^* \rangle &\leq 0, p_1 \geq 0, \\ \int_{t_0}^{t_1} \langle G(t)x^*(t) - g(t), \eta(t) - \eta^*(t) \rangle dt &\leq 0, \eta(t) \geq 0, \\ D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt} \psi^*(t) + G^T(t)\eta^*(t) &= 0, \psi_1^* = \nabla \varphi_1(x_1^*) + G_1^T p_1^* \\ \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt &\leq 0, u(\cdot) \in U. \end{aligned} \quad (6)$$

Saddle-point method of extragradient type. The extragradient method is a controlled process in which each iteration breaks down into two half-steps:

1) predictive half-step:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x^k(t) &= D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), x^k(t_0) = x_0, \\ \bar{p}_1^k &= \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1 x_1^k - g_1)), \\ \bar{\eta}^k(t) &= \pi_+(\eta^k(t) + \alpha(G(t)x^k(t) - g(t)), \\ D^T(t)\psi^k(t) + \frac{d}{dt} \psi^k(t) + G^T(t)\bar{\eta}^k(t) &= 0, \psi_1^k = \nabla \varphi_1(x_1^k) + G_1^T p_1^k \\ \bar{u}^k(t) &= \pi_U(u^k(t) + \alpha B^T(t)\psi^k(t)); \end{aligned} \quad (7)$$

2) basic half-step:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x}^k(t) &= D(t)\bar{x}^k(t) + B(t)\bar{u}^k(t), \bar{x}^k(t_0) = x_0, \\ p_1^{k+1} &= \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1 \bar{x}_1^k - g_1)), \\ \eta^{k+1}(t) &= \pi_+(\eta^k(t) + \alpha(G(t)\bar{x}^k(t) - g(t)), \\ D^T(t)\bar{\psi}^k(t) + \frac{d}{dt} \bar{\psi}^k(t) + G^T(t)\bar{\eta}^k(t) &= 0, \bar{\psi}_1^k = \nabla \varphi_1(\bar{x}_1^k) + G_1^T \bar{p}_1^k \\ u^{k+1}(t) &= \pi_U(u^k(t) + \alpha B^T(t)\bar{\psi}^k(t)), k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

The theorem on convergence of the method (7)–(8) to the solution of (2) in all components was proved.

Theorem (on convergence of the method). If the set of solutions $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot); p_1^*, \psi^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$ of the problem (6) is not empty and belongs to the Cartesian product $R^n \times AC_2^n[t_0, t_1] \times U \times R_+^m \times \Psi^n[t_0, t_1] \times \Psi_+^n[t_0, t_1]$, the function $\varphi_1(x_1)$ is differentiable with gradient satisfying the Lipschitz condition, then the sequence $(x_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot); p_1^k, \psi^k(\cdot), \eta^k(\cdot))$ generated by the computational process (7)–(8) with the step length α chosen from some condition, contains a subsequence $(x_1^{k_i}, x^{k_i}(\cdot), u^{k_i}(\cdot); p_1^{k_i}, \psi^{k_i}(\cdot), \eta^{k_i}(\cdot))$, which converges to the solution of the problem. Namely, the convergence in controls is weak, the convergence in phase and conjugate trajectories and in terminal variables is strong.

In particular, the sequence

$$\left\{ |p_1^k - p_1^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 + \|\eta^k(\cdot) - \eta^*(\cdot)\|^2 \right\}$$

decreases monotonically on the Cartesian product $R_+^m \times \Psi_+^n[t_0, t_1] \times L_2^r[t_0, t_1]$.

Conclusion. The paper deals with the problem of terminal control with a finite-dimensional boundary-value problem at the right-hand end of the time interval, and with state constraints on the whole interval. The problem has a convex structure. The latter makes it possible, within the framework of the duality theory and using the saddle-point properties of the Lagrangian, to develop a theory of saddle-point methods for solving terminal control problems. The proposed approach allows us to cover a hard case with state constraints on a controlled state trajectory. The convergence of the computational process in all components of the solution is proved. In detail, the convergence in controls is weak, the convergence in phase and conjugate trajectories and in terminal variables is strong.

References

1. Vasil'ev F.P., Khoroshilova E.V., Antipin A.S. [Regularized extragradient method for finding a saddle point in an optimal control problem](#) // [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics](#). 2011. Vol. 275, Issue 1 Suppl., P. 186–196.
2. Khoroshilova E.V. Extragradient-type method for optimal control problem with linear constraints and convex objective function // *Optim. Lett.* 2013. Vol. 7, № 6. P. 1193–1214.
3. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Optimal control with connected initial and terminal conditions // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2015. V. 289, №1. Suppl., P. 9–25.
4. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Linear Programming and Dynamics // *Ural Mathematical Journal*. 2015. V. 1, № 1, P. 3–19.
5. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Saddle-point approach to solving problem of optimal control with fixed ends // *J. Global Optim.* 2016. V. 65, №1, P. 3–17.
6. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. On methods of terminal control with boundary-value problems: Lagrange approach. In B. Goldengorin (Ed.) *Optimization and Applications in Control and Data Sciences, Springer Optimization and Its Applications*. 2016. V. 115, P. 17–49.
7. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Controlled dynamic model with boundary-value problem of minimizing a sensitivity function // *Optim. Lett.* 2017. P. 1–23.
8. Antipin A.S., Jacimovic V., and Jacimovic M. Dynamics and Variational Inequalities // *Comp. Maths. Math. Phys.* 2017. Vol. 57, № 5, P. 784–801.

Нотация для паттернов популяционных алгоритмов непрерывной глобальной оптимизации

А.П. Карпенко

МГТУ имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Популяционные алгоритмы (population-based algorithms) непрерывной глобальной оптимизации в разных публикациях называют поведенческими, интеллектуальными, метаэвристическими, вдохновленными (инспирированными) природой, роевыми, многоагентными и т.д. [1]. К настоящему времени разработано более 100 таких алгоритмов (П-алгоритмов), но известно небольшое число работ посвященных их анализу.

Рассматриваем детерминированную задачу непрерывной глобальной безусловной минимизации

$$\min_{X \in R^{|X|}} f(X) = f(X^*) = f^*, \quad (1)$$

где $|X|$ - размерность вектора X ; $f(X) \in R^1$ - целевая функция; X^* , f^* - искомые решения. Поиск решения задачи начинается в $|X|$ -мерном параллелепипеде Π с границами X^- , X^+ .

Различаем детерминированные (deterministic) и стохастические (stochastic) сущности П-алгоритмов. С другой стороны, выделяем статические (static) и динамические программно изменяемые (program) и динамические адаптивные (adaptive) сущности. Таким образом, определение сущности содержит следующие описатели: $system \in \{det, stoch\}$; $control \in \{stat, prog, adapt\}$; ID – остальные описатели. Выделяем следующие сущности: свободные параметры и мета-параметры, пространство соседства, особь, популяция особей, объединение особей, окрестность особи, след особи, эволюционный оператор и др. Формат описания пространства соседства особей, например, имеет вид

$$space NAME(A, P) \Big|_{ID}^{system, control} : \langle \text{метрика пространства} \rangle,$$

где $NAME \in \{R_\phi, R_X, R_T\}$; R_ϕ , R_X , R_T - фитнес-пространство, пространство поиска и топологическое пространство соответственно; A, P – списки аргументов и свободных параметров соответственно.

С помощью предложенной нотации для сущностей П-алгоритмов могут быть лаконично записаны паттерны этих алгоритмов. Рассмотрим в качестве примера П-алгоритм оптимизации роем частиц PSO [1], схема которого имеет следующий вид.

1) Инициализация.

- Инициализация пользователем (decision-maker, DM) детерминированных статических свободных параметров алгоритма $|S|, |X|, X^-, X^+, b_I, b_C, b_S$ (оператор $init P \Big|_{DM}^{det, stat}$).

- Программная инициализация популяции: равномерно случайно распределяем особей популяции в области Π , а векторы их начальных скоростей $\Delta X_i, i \in [1:|S|]$ в области Π_Δ (оператор $init S \Big|_{uniform}^{stoch, stat}$).

2) Эволюция популяции

Применение рандомизирующего оператора скрещивания $rand.crossover \Big|_{|S| \times 1, PSO}^{stoch, stat}$:

$$X'_i = X_i + b_I \Delta X_i (t-1) + U_{|X|}(0; b_C) \otimes (X_i^* - X_i) + \\ + U_{|X|}(0; b_S) \otimes (X_i^{**} - X_i), \quad \min_{\tau \in [0: t]} \varphi(X_i(\tau)) = \varphi(X_i^*),$$

$$\min_{j \in N_i} \varphi(X_j^*) = \varphi(X_i^{**}); \quad i \in [1:|S|].$$

Здесь $U_{|X|}(0; b)$ - $|X|$ -мерный вектор случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[0; b]$; N_i - множество соседей частицы s_i [1].

3) Завершение эволюционного процесса (оператор $end \Big|^{any}$).

В предложенных в работе обозначениях паттерн алгоритма PSO может быть записан в следующем виде.

specifications

$$parameters P \Big|_{DM}^{det, stat} = (|S|, |X|, X^-, X^+, b_I, b_C, b_S):$$

$$b_I = 0,7298, \quad b_C = b_S = 1,49618.$$

$$individual s : X = (x_j, j \in [1:|X|]) \in \Pi \subset R^{|X|}.$$

population $S = \{s_i, i \in [1:|S|]\}$.

space $R_T \Big|_{det.stat} : \mu_{R_T}(s_i, s_j) = r(s_i, s_j), i, j \in [1:|S|]$.

track $Tr(s_i, t, P) \Big|_{[1:t]}^{det.stat} = \{X_i^0, X_i^1, \dots, X_i^t\}, i \in [1:|S|]$.

initialization

init $P(P) \Big|_{DM}^{det.stat} = P$.

init $S(S, P) \Big|_{uniform}^{stoch.stat} = \{X_i(0), i \in [1:|S|]\}$.

evolution

select $(Tr_i, P) \Big|_{best}^{det.stat} = X_i^*, i \in [1:|S|]$.

select $(G_i, P) \Big|_{best}^{det.stat} = X_i^{**}, i \in [1:|S|]$.

rand.crossing $(s_i, X_i^*, X_i^{**}, P) \Big|_{|S| \times 1.PSO}^{stoch.stat} = s_i(t+1); i \in [1:|S|]$.

termination

end $(S, P) \Big|^{any} = (\tilde{X}^*, \tilde{f}^*)$.

Здесь $\mu_{R_T}(s_i, s_j)$ - метрика пространства R_T ; $r(s_i, s_j)$ - расстояние между вершинами s_i, s_j в графе соседства $G = G_T(S)$; $Tr_i(s_i, t, P)$ - след частицы s_i ; описатель any указывает на то, что условия окончания поиска в алгоритме не определены [1].

В развитие работы автор планирует использовать предложенную формализацию выразительных средств П-алгоритмов для их автоматизированного синтеза.

Список литературы

1. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы вдохновленные природой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 446 с.

Notation for the patterns of population-based algorithms for continuous global optimization

A.P. Karpenko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Об оценке наибольшего значения функций, являющихся решением систем обыкновенных дифференциальных уравнений

А.Г. Коротченко, В.М. Сморякова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} Y' &= F(x, Y), Y(x_0) = Y_0, \\ Y &= Y(x) = (y^1(x), \dots, y^n(x)), x_0 \leq x < t, \end{aligned} \tag{1}$$

где значение параметра t неизвестно априори и определяется в процессе интегрирования системы.

Пусть требуется найти решение $Y = Y(x)$ (предполагается, что решение - единственно и трижды непрерывно дифференцируемо на отрезке $[x_0, t]$) задачи (1).

В случае, когда система (1) линейна $F(x, Y) = B(x)Y + b(x)$, где $B(x)$ - $(n \times n)$ -матрица, $b(x)$ - n -мерный вектор.

Для определения численных значений $Y_i = (y_1^i, \dots, y_n^i)$, $i = 1, 2, \dots$, решения системы (1) будем использовать метод, основанный на применении конечно-разностной формулы.

Рассмотрим одну конечно-разностную формулу:

$$Y_i = a_{i-2}Y_{i-2} + a_{i-1}Y_{i-1} + \tau_i a_i q_i, \quad (2)$$

где

$$q_i = F(x_i, Y_i),$$

$$a_{i-2} = -\tau_{i-1}^{-1} d_i^{-1} \tau_i^2, \quad a_{i-1} = \tau_{i-1}^{-1} d_i^{-1} (\tau_{i-1} + \tau_i)^2,$$

$$a_i = d_i^{-1} (\tau_{i-1} + \tau_i), \quad d_i = \tau_{i-1} + 2\tau_i, \quad \tau_i = x_i - x_{i-1} - \text{шаг интегрирования.}$$

Будем считать, что система (1) удовлетворяет условиям, при выполнении которых вектор $Y_i = (y_1^i, \dots, y_n^i)$ может быть определён из решения системы уравнений

$$Y_i = a_{i-2}Y_{i-2} + a_{i-1}Y_{i-1} + \tau_i a_i F(x_i, Y_i). \quad (3)$$

Если система (1) линейна, то (3) принимает вид

$$C_i Y_i = c_i, \quad (4)$$

где $C_i = E - \tau_i a_i B(x_i)$, $c_i = a_{i-2}Y_{i-2} + a_{i-1}Y_{i-1} + \tau_i a_i b(x_i)$, E - единичная матрица.

Будем считать, что система (3) может быть решена каким-либо методом решения нелинейных систем уравнений, а система (4) - методом Гаусса.

Локальная ошибка, получаемая на i -ом шаге для каждой j -ой компоненты решения $Y_i = (y_1^i, \dots, y_n^i)$ для формулы (2) имеет вид:

$$R_i^j = -\frac{\tau_i^4 + 2\tau_{i-1}\tau_i^3 + \tau_{i-1}^2\tau_i^2}{2(6\tau_i + 3\tau_{i-1})} (y'''(\Theta_i))^j, \quad (5)$$

где $x_{i-1} - \tau_{i-1} \leq \Theta_i \leq x_{i-1} + \tau_i$ и $(y'''(\Theta_i))^j$ - значение третьей производной от j -ой компоненты вектора решения $Y(x)$ в точке Θ_i .

Пусть третья производная от компонент вектора решения $Y(x)$ удовлетворяет на отрезке $[x_0, x_0 + z]$ условию:

$$\max_{1 \leq j \leq n} |y'''(x)^j| \leq P,$$

где $z > 0$, $P > 0$ - вещественные константы.

Тогда получаем, что ограничение на формулу (2), обусловленное точностью вычислений на i -ом шаге интегрирования, сводится к выполнению неравенства:

$$f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = \tau_i^4 + 2\tau_{i-1}\tau_i^3 + \tau_{i-1}^2\tau_i^2 - 6\Delta_i\tau_i - 3\Delta_i\tau_{i-1} \leq 0, \quad (6)$$

где $\Delta_i = 2\varepsilon_i P^{-1}$, $i = 1, 2, \dots$.

Пусть τ_0 - заданное положительное число. Найдём решение системы (1) Y_{-1} , Y_{-2} в узлах интегрирования $x_{-1} = x_0 - \tau_0$, $x_{-2} = x_{-1} - \tau_0$, используя какой-либо одношаговый метод, например, метод Эйлера.

Определим процедуру выбора шагов интегрирования конечно-разностной формулы (2) на отрезке $[x_0, x_0 + z]$ при условии, что число узлов интегрирования априори не задано, а определяется в процессе интегрирования системы (1).

Пусть процесс интегрирования с использованием формулы (2) начинается с узла x_0 , тогда при известном значении τ_{j-1} значение τ_j находим таким образом, чтобы выполнялось неравенство (6) при $i = j, j = 1, 2, \dots$.

Если процесс интегрирования на отрезке $[x_0, x_0 + z]$ заканчивается в узле $x_{2\mu}$, $\mu \geq 1$, то вектор $X(\mu) = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2\mu-1}, \tau_{2\mu})$, получаемый с помощью описанной процедуры, будем называть стратегией интегрирования или просто стратегией. Пусть $\bar{X}(\mu)$ - стратегия, в которой на каждом шаге значении τ_i выбирается максимальным при выполнении ограничения (6).

Как было указано в [3], стратегия $\bar{X}(\mu)$ оптимальна в том смысле, что число узлов интегрирования минимально на отрезке $[x_0, x_0 + z]$ при соблюдении соответствующих ограничений. Для реализации стратегии $\bar{X}(\mu)$ на отрезке $[x_0, x_0 + z]$ при заданном значении $\bar{\tau}_0$ необходимо находить $\bar{\tau}_i$ как единственный положительный корень уравнения $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 0$, где $i = 1, 2, \dots$, и нужно знать оценку третьей производной от компонент решения системы дифференциальных уравнений (1). Будем находить указанные оценки, используя в качестве аппроксимации решения интерполяционные полиномы Лагранжа третьей степени. Для этого нужно знать решение $Y(x_0 + z)$, которое будем находить по формуле (2), где решение Y_{-2}, Y_{-1} в узлах x_{-2}, x_{-1} уже найдены с помощью какого-либо одношагового метода. Заметим, что Y_0 - начальное условие в узле x_0 .

В общем случае, как описано в [3, 4, 5, 8], при интегрировании на отрезке $[x_0, t]$, данный отрезок разбивается на несколько отрезков длины z . Процесс интегрирования начинается на отрезке $[x_0, x_0 + z]$. Переход к новому отрезку длины z осуществляется при условии выполнения неравенства $x_{2\mu+2} > x_0 + z$, где в качестве x_0 выбирается значение $x_{2\mu}$, и оценка четвёртой производной на данном отрезке вычисляется так же, как было описано выше для отрезка $[x_0, x_0 + z]$. Дальнейший переход к новому отрезку длины z производится аналогичным образом. Описанная процедура заканчивается, когда будет выполнено условия окончания процесса интегрирования.

Рассмотрим задачу отыскания наибольшего значения функций, являющихся решением систем обыкновенных дифференциальных уравнений на каждом из отрезков длины z при условии, что с помощью конечно-разностной формулы получены значения этих функций в соответствующих узлах интегрирования. При этом для определённости будем рассматривать одну из компонент вектора решения системы (1), которую обозначим через $y(x)$. Кроме того, будем рассматривать первый из указанных отрезков длины z , который обозначим $[z_1, z_2]$, где $z_1 = x_0$, а $z_2 = x_0 + z$.

Пусть $D_S = \{x_1, x_2, \dots, x_S\}$, $z_1 < x_1 < x_2 < \dots < x_S < z_2$, $y_j = y(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, S$, где x_1, x_2, \dots, x_S - узлы интегрирования, полученные с помощью конечно-разностной формулы (2).

Обозначим через $\varphi_{ji}(x) = y_j + \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}(x - x_j)$, $i = j+1, \dots, s$, $j = 1, \dots, s-1$.

Пусть

$$w_{1j} = \min_{i=j+1, s} \varphi_{ji}(z_1), \quad w_{2j} = \min_{i=j+1, s} \varphi_{ji}(z_2), \quad j = 1, \dots, s-1,$$

$$K_1 = \min_{j=1, s-1} w_{1j} - \delta, \quad K_2 = \min_{j=1, s-1} w_{2j} - \delta.$$

Здесь $\delta > 0$ - коэффициент «осторожности», при этом если коэффициент осторожности не используется, то $\delta = 0$.

Пусть $K = \min(K_1, K_2)$.

Рассмотрим класс функций $F(D_S, K)$, заданных на множестве D_S условиями:

$$\frac{y(x_2) - K}{x_2 - x_1} \leq \frac{y(x_1) - K}{x_1 - z_1}, \quad \frac{y(x_2) - K}{z_2 - x_2} \geq \frac{y(x_1) - K}{z_2 - x_1}, \quad (7)$$

где $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in D_S$, $K \in R$.

Обозначим через $F(z_1, z_2, K)$ класс непрерывных функций, заданных на отрезке $[z_1, z_2]$, удовлетворяющих условиям (7) при $x_1, x_2 \in [z_1, z_2]$.

Предположим, что функция $y(x) \in F(z_1, z_2, K)$. Данный факт объясняется тем, что указанный класс достаточно широк. Класс функций $F(z_1, z_2, K)$ замкнут относительно операций суммирования с неотрицательными коэффициентами, взятия минимума, максимума по конечному набору функций и содержит вогнутые, выпуклые и удовлетворяющие условию Липшица функции [1, 2, 6, 7]. Тогда для оценки наибольшего значения можно использовать одношаговый алгоритм α_1 , описанный в [7]. Данный алгоритм основан на оптимальной одношаговой процедуре, построенной в [1]. При использовании алгоритма α_1 строится кусочно-линейная функция $g(x)$, которая является точной верхней мажорантой всех функций из класса $F(z_1, z_2, K)$ таких, что $y_j = y(x_j)$, $j = 1, \dots, s$. Рассмотрим отрезок $[u, v]$ такой, что $g(x) \geq h$, при $x \in [u, v]$, а $h = g(u)$, $h = g(v)$, при чём на отрезке $[u, v]$ функция $g(x)$ достигает своего наибольшего значения. Здесь $h = \max_{j=1, s} y_j$. Тогда в алгоритме α_1 очередная

точка вычисления функции $y(x)$ определяется, как $x' = \frac{u+v}{2}$.

Для вычисления значения функции $y(x)$ в точке x' находится ближайший слева к x' узел сетки D_S x_ν , вычисление производится по конечно-разностной формуле (2) с шагом интегрирования $\tau = x' - x_\nu$, с использованием узлов x_ν , $x_{\nu-1}$. Если $y(x') \leq g(x')$, то алгоритм α_1 продолжает свою работу так как это описано в [8]. При $y(x') > g(x')$ происходит перестройка класса $F(D_S, K)$ с учётом того, что к множеству D_S добавляется ещё одна точка, тем самым изменяется значение константы K . Отметим, что с помощью одношагового алгоритма α_1 к множеству узлов D_S добавляются новые узлы интегрирования, позволяющие уточнить наибольшее значение функции.

В качестве примера рассмотрим систему с начальными условиями $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$:

$$\begin{aligned}
y_1' &= \left(5 - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3} \right) y_1 + \left(-3 + \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x+1)^4} \right) y_2 + \\
&\quad + \left(-3 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^4} \right) y_3 + e^{\frac{1}{x+1}} + e^{\frac{1}{(x+1)^2}} + e^{\frac{1}{(x+1)^3}}; \\
y_2' &= \left(12 - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} \right) y_1 + \left(-10 - \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x+1)^4} \right) y_2 + \\
&\quad + \left(-3 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^4} \right) y_3 + e^{\frac{1}{x+1}} + 2e^{\frac{1}{(x+1)^2}} + e^{\frac{1}{(x+1)^3}}; \\
y_3' &= \left(12 - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} \right) y_1 + \left(-6 - \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{6}{(x+1)^4} \right) y_2 + \\
&\quad + \left(-7 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{6}{(x+1)^4} \right) y_3 + e^{\frac{1}{x+1}} + 2e^{\frac{1}{(x+1)^2}} + 2e^{\frac{1}{(x+1)^3}}.
\end{aligned}$$

Для оценки наибольшего значения функции $y_1(x)$ был выбран интервал (1,2). Для интегрирования использовались параметры $z=1$ и $\varepsilon=0.001$. Первоначальная сетка содержала 8 узлов. Количество точек для уточнения сетки алгоритмом α_1 – 24. Начальное наибольшее значение равно 1.546, после уточнения 1.559. Точность алгоритма α_1 была равна 0.001.

Список литературы

1. Коротченко А.Г. Об одном алгоритме поиска наибольшего значения одномерных функций //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т.18 №3. С. 563-573.
2. Коротченко А.Г. Приближенно-оптимальный алгоритм поиска экстремума для одного класса функций //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т.36. №5. С. 30-39.
3. Коротченко А.Г., Лапин А.В. Об одном алгоритме численного интегрирования с оптимальным выбором шага // Вестник нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, сер. математическое моделирование и оптимальное управление, 2001, вып. 2(24), С. 270-278.
4. Коротченко А.Г., Лапин А.В. О построении приближенно оптимального алгоритма численного интегрирования // Вестник нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, сер. математическое моделирование и оптимальное управление, 2003, вып. 1(26), С. 189-195.
5. Коротченко А.Г. О задачах математического программирования, имеющих многоэтапный характер // Вестник нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, Т. 1, С. 183-187.
6. Коротченко А.Г., Сморякова В.М. Об оценке погрешности алгоритмов поиска экстремума в классах функций, определяемых кусочно-линейной мажорантой //

Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование. Оптимальное управление, 2013, №3(1), С. 188-194.

7. Коротченко А.Г., Сморякова В.М. Об одном алгоритме поиска максимума в классе функций, определяемом кусочно-линейной мажорантой. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование. Оптимальное управление, 2014, №4(1), С. 409-415.
8. Korotchenko A.G., Smoryakova V.M. On a method of construction of numerical integration formulas // AIP Conference Proceedings, V. 1776, №9780735414389, 2016, P.090012-1 -- 090012-4.

On the estimation of the highest value of functions that are the solution of systems of ordinary differential equations

A. G. Korotchenko, V. M. Smoryakova

N. I. Lobachevsky Nizhny Novgorod state University, Nizhny Novgorod, Russia

Коническая регуляризация некоторых плохо обусловленных задач оптимизации

Ю.П. Лаптин, Т.А. Бардадым, О.А. Березовский

Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

Коническая регуляризация была предложена как способ формирования вспомогательной задачи безусловной оптимизации, которая эквивалентна исходной задаче с ограничениями [1, 2]. Функции, описывающие исходную задачу, могут быть не определены вне допустимого множества, целевая функция при приближении к границе допустимого множества может неограниченно возрастать. При этом целевая функция вспомогательной задачи оказывается липшицевой и определена на всем пространстве переменных. Предложенный подход позволяет эффективно решать задачи с плохим масштабированием ограничений. Для решения вспомогательной задачи безусловной оптимизации используются методы негладкой оптимизации [3]. Проведены вычислительные эксперименты по сравнению с существующим программным обеспечением. Результаты этих экспериментов показали преимущества разработанных программных средств на специальных тестовых задачах.

Существенным при использовании конической регуляризации является учет особенностей рассматриваемой исходной задачи. В работах [3, 4] рассматриваются задачи вычисления оценок значений глобальных экстремумов невыпуклых задач квадратичной оптимизации. Для вычисления оценки используется лагранжева релаксация. Формулируется задача минимизации двойственной функции при ограничении на неположительную определенность матрицы, зависящей от двойственных переменных. Особенности такой двойственной задачи позволяют предложить эффективные вспомогательные процедуры, необходимые для конической регуляризации [4].

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$\psi^* = \inf \{ \psi(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in C \}, \quad (1)$$

где $C = \{ \mathbf{u} \in R^n : h(\mathbf{u}) \leq 0 \}$, $\psi, h : R^n \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ – выпуклые замкнутые функции.

Предполагается, что $\text{int } C \subseteq \text{dom } \psi$ и задана допустимая точка $\mathbf{u}^0 \in C$ такая, что $h(\mathbf{u}^0) < 0$. На границе множества C функция ψ может быть не определена.

Положим $\mathbf{z} = (\lambda, \mathbf{u})$, $\mathbf{z} \in R \times R^n$. Обозначим F надграфик функции ψ на множестве C . Пусть задано некоторое число $E < \psi(\mathbf{u}^0)$. Рассмотрим замыкание $\bar{K}(E)$ конической оболочки надграфика F с вершиной в точке $\mathbf{z}_E^0 = (E, \mathbf{u}^0)$

$$\bar{K}(E) = \text{cl} \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v} \in R \times R^n, \mathbf{v} = \mathbf{z}_E^0 + \alpha(\mathbf{z} - \mathbf{z}_E^0), \alpha \geq 0, \mathbf{z} \in F \right\}. \quad (2)$$

Множество $\bar{K}(E)$ может рассматриваться как надграфик некоторой выпуклой функции $\gamma_E(\mathbf{u})$, которую будем называть конической аппроксимацией функции ψ на множестве C . Функция $\gamma_E(\mathbf{u})$ определена на всем пространстве R^n и принимает конечные значения при любых \mathbf{u} .

Утверждение 1. Пусть множество C ограничено. Тогда для произвольной точки $\mathbf{u} \in R^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}^0$, на луче, выходящем из точки \mathbf{u}^0 и проходящем через \mathbf{u} , найдется точка $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{u}} \in C$ (возможно не одна) такая, что $\psi(\bar{\mathbf{u}}) = \gamma_E(\bar{\mathbf{u}})$ (если множество C не ограничено, такая точка может не существовать).

Обозначим $\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u})$ такую точку, ближайшую к \mathbf{u}^0 . Положим

$$\varphi_E(\mathbf{u}) = \begin{cases} \psi(\mathbf{u}), & \text{если } \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\| \leq \|\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^0\|, \\ \gamma_E(\mathbf{u}), & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

Можно показать, что $\varphi_E : R^n \rightarrow R$ – выпуклая и является липшицевой. Рассмотрим задачу, которую будем называть конической регуляризацией исходной задачи (1)

$$\varphi_E^* = \inf \left\{ \varphi_E(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R^n \right\}. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть $E < \psi^*$, тогда $\varphi_E^* = \psi^*$ и решения задач (1), (4) совпадают.

При вычислении значения функции φ_E в точке \mathbf{u} необходимо решать задачу одномерного поиска точки $\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u})$ на луче, выходящем из \mathbf{u}^0 и проходящем через \mathbf{u} .

Обозначим $\psi'(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ производную функции ψ в точке $\mathbf{u} \in C$ по направлению \mathbf{p} . Пусть зафиксирована некоторая точка \mathbf{u}^1 , положим $\mathbf{p} = (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0) / \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0\|$, $t^* = \|\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}^1) - \mathbf{u}^0\|$, если точка $\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}^1)$ не существует, полагаем $t^* = +\infty$. Тогда

$$t^* = \sup \left\{ t : (\psi(\mathbf{u}^0 + t\mathbf{p}) - E) / t > \psi'(\mathbf{u}^0 + t\mathbf{p}, \mathbf{p}), t \geq 0, \mathbf{u}^0 + t\mathbf{p} \in \text{int } C \right\}. \quad (5)$$

Эта задача поиска точки $\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}^1) = \mathbf{u}^0 + t^*\mathbf{p}$, а также правила вычисления субградиентов функции φ_E , рассматривались в [1, 2].

Необходимо отметить, что функция φ_E оказывается инвариантной относительно умножения ограничений исходной задачи на произвольную строго положительную (дифференцируемую) функцию (множество C при этом не изменяется). Это свойство позволяет преодолевать некоторые проблемы, связанные с особенностями ограничений

исходной задачи. Вычислительные эксперименты на специальных плохо обусловленных тестовых задачах (например, ограничения умножались на осциллирующую строго положительную функцию) подтверждают эффективность предложенного подхода [1]. Разработанные программные средства совместимы со стандартной программной средой AMPL и выложены для свободного доступа на сайте http://www.icyb.kiev.ua/file/NonDiffOpt_Nurm/indexk.htm (представлены также тестовые задачи). Там же представлена программная реализация r -алгоритма Н.З.Шора – AmplRalg. Сравнение проводилось с современными эффективными солверами (SNOPT, MINOS, LOQO). Для многих тестовых задач решение удалось получить только при использовании разработанных программных средств.

В общем случае одномерный поиск точки $\mu_E(\mathbf{u})$ при вычислении значения функции Φ_E достаточно трудоемкий. Однако для специальных задач эта вычислительная процедура может быть реализована достаточно эффективно.

В работах [3, 4] рассматривались невыпуклые квадратичные задачи:

$$K^* = \sup \left\{ \langle \mathbf{A}_0 \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{l}_0, \mathbf{x} \rangle + c_0 : \langle \mathbf{A}_i \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{l}_i, \mathbf{x} \rangle + c_i \leq 0, i = 1, \dots, N \right\},$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, \mathbf{A}_i – симметричные матрицы, $\mathbf{l}_i \in R^n$, $c_i \in R$, $i = 0, \dots, N$.

Для вычисления оценки величины K^* использовалась лагранжева релаксация. Двойственная функция имеет вид

$$\psi(\mathbf{u}) = \sup \left\{ L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbf{x} \in R^n \right\}, \quad (6)$$

где $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{A}(\mathbf{u}) \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{l}(\mathbf{u}), \mathbf{x} \rangle + c(\mathbf{u})$, $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{A}_i$, $\mathbf{l}(\mathbf{u}) = \mathbf{l}_0 + \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{l}_i$, $c(\mathbf{u}) = c_0 + \sum_{i=1}^N u_i c_i$.

Обозначим \bar{D} множество таких векторов $\mathbf{u} \in R^N$, $\mathbf{u} \geq 0$, в которых $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ является неположительно определенной матрицей.

Оценкой оптимального значения K^* является величина

$$\psi^* = \inf \left\{ \psi(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \bar{D} \right\}. \quad (7)$$

Функция $\psi(\mathbf{u})$ – выпуклая. Если $\mathbf{u} \in \text{int } \bar{D}$, то $\psi(\mathbf{u})$ принимает конечное значение, если $\mathbf{u} \notin \bar{D}$, то $\psi(\mathbf{u}) = +\infty$, на границе множества \bar{D} функция $\psi(\mathbf{u})$ может принимать как конечные значения, так и значение $+\infty$.

В [4] коническая регуляризация использовалась для решения задачи (7). Пусть заданы точка \mathbf{u}^0 , такая что $\mathbf{u}^0 \in \text{int } \bar{D}$, и произвольная точка $\mathbf{u}^1 \in R^N$. Рассмотрим точки $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^0 + t(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0)$, расположенные на прямой, проходящей через точки \mathbf{u}^0 и

\mathbf{u}^1 . Пусть $\mathbf{u}(t) \in \bar{D}$, $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$ – решение задачи (6). Из условий оптимальности для задачи (6) следует, что вектор $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$ является решением системы уравнений

$$2\mathbf{A}(\mathbf{u}(t))\mathbf{x} + \mathbf{I}(\mathbf{u}(t)) = 0. \quad (8)$$

Обозначим $\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}(\mathbf{u}^0)$, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}(\mathbf{u}^1)$. Известно, что для вещественных симметричных матриц $-\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1$ при условии, что матрица $-\mathbf{A}^0$ положительно определена, существует невырожденная матрица \mathbf{T} такая, что $\mathbf{T}'(-\mathbf{A}^0)\mathbf{T} = \mathbf{I}$, $\mathbf{T}'\mathbf{A}^1\mathbf{T} = \mathbf{B}$, где \mathbf{I} – единичная, \mathbf{B} – диагональная матрицы. Если положить $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, система уравнений (8) приводится к диагональному виду, ее решение определяется явно, функция $\psi(t) = \psi(\mathbf{u}(t))$ выписывается аналитически и имеет простой вид

$$\psi(t) = \psi(\mathbf{u}(t)) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{(\eta_i^0 + t\Delta\eta_i)^2}{(-1 + (B_{ii} + 1)t)} + c^0 + t\Delta c.$$

Здесь величины $\eta_i^0, \Delta\eta_i, B_{ii}, c^0, \Delta c, i=1, \dots, n$, определяются при приведении системы уравнений (8) к диагональному виду. После этого решается задача (5) одномерного поиска точки $\mu_E(\mathbf{u}^1)$. Наиболее трудоемким при таком подходе является построение матрицы \mathbf{T} . Предложенный алгоритм одномерного поиска близок процедуре граничного оракула, используемого в HR-алгоритме [5].

Список литературы

1. Лаптин Ю.П., Лиховид А.П. Использование выпуклых продолжений функций для решения нелинейных задач оптимизации // Управляющие машины и системы. 2010. № 6. С. 25–31.
2. Лаптин Ю.П., Бардадым Т.А. Некоторые подходы к регуляризации нелинейных задач оптимизации // Проблемы управления и информатики. 2011. № 3. С. 57–68.
3. Shor N. Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Amsterdam/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
4. Лаптин Ю.П., Березовский О.А. Использование конической регуляризации при вычислении лагранжевых оценок в задачах квадратичной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2017. Том 53. № 5. С. 67–81.
5. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Рандомизированный метод решения задач полуопределенного программирования // Стохастическая оптимизация в информатике. 2006. Т. 2. С. 38-70.

Conic regularization of some ill-defined optimization problems

Yu.P. Laptin, T.A. Bardadym, and O.A. Berezovskyi

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv, Ukraine

О версии обобщённого экстраградиентного квазиньютоновского метода решения седловых и других задач

В.Г. Малинов

Ульяновский госуниверситет, Ульяновск, Россия

1. Рассмотрим метод решения задачи об отыскании седловой точки выпукло вогнутой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, выпуклой по $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ и вогнутой по $\mathbf{u} \in U \subset E^m$ на выпуклом замкнутом множестве $Q \times U \subset E^n \times E^m$, то есть об отыскании точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q \times U$,

$$\varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}) \leq \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \leq \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{x} \in Q, \mathbf{u} \in U, \quad (1.1)$$

где предполагаем: а) множества $Q \subset E^n$ и $U \subset E^m$ непустые выпуклые замкнутые; б) функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ с овражными гиперповерхностями уровней определена в окрестности подмножества $W \subset Q \times U \subset E^{n+m}$, для всех фиксированных $\mathbf{u} \in U$ функция $g(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ выпукла на $Q \subset E^n$, а для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in Q$ функция $h(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ вогнута на $U \subset E^m$; в) множество $W_* = Q_* \times U^*$ седловых точек $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ на $W \subset E^{n+m}$ непустое; г) частные градиенты $\varphi_x(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $\varphi_u(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ Липшицевы на $Q \times U$, с константами Липшица соответственно $L > 0$, $L^0 > 0$.

Поставленная задача связана с решением различных классов экстремальных задач математической физики, оптимального управления, теории игр, математической экономики [1]–[4].

2. Методы решения седловых задач вида (1.1) сравнительно малочисленны (см. [1]–[4]) и разработка их актуальна. Здесь предлагаем следующий обобщённый экстраградиентный квазиньютоновский метод:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^k &= P_Q[\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k], \quad \mathbf{w}^k = P_U[\mathbf{u}^k + \alpha_k \mathbf{v}^k], \\ \mathbf{x}^{k+1} &= P_Q[\mathbf{z}^k - \beta_k [A(\mathbf{z}^k)]^{-1} \nabla \varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k)], \quad k \geq 0, \\ \mathbf{u}^{k+1} &= P_U[\mathbf{w}^k + \lambda_k \mathbf{B}_k^{-1} \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k)], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\forall (\mathbf{x}^{-1}, \mathbf{u}^{-1}) \in E^n \times E^m$ – начальная точка; $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$, $\mathbf{v}^k = \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}$; в этой версии (2.1) полагаем $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}^0$; параметры метода $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, $\lambda_k > 0$; оператор $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in E^n$ таков, что

$$m \|\mathbf{v}\|^2 \leq (\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq M \|\mathbf{v}\|^2, \quad 0 < m \leq M, \quad \mathbf{v}, \mathbf{x} \in E^n; \quad (2.2)$$

оператор $\mathbf{B}(\mathbf{u}) \forall \mathbf{u} \in E^m$ (в (2.1) $\mathbf{B}_k = \mathbf{B}(\mathbf{w}^k)$) таков, что

$$m \|\mathbf{v}\|^2 \leq (\mathbf{B}(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq M \|\mathbf{v}\|^2, \quad 0 < m \leq M, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^m; \quad (2.3)$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 / M \leq (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{v}\|^2 / m, \quad \mathbf{v}, \mathbf{x} \in E^n,$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 / M \leq (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{v}\|^2 / m, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^m. \quad (2.4)$$

Здесь для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in E^n$ $\mathbf{A}(\mathbf{x}) : E^n \rightarrow E^n$ и для каждого фиксированного $\mathbf{u} \in E^m$ $\mathbf{B}(\mathbf{u}) : E^m \rightarrow E^m$ — положительно определённые самосопряжённые линейные операторы, изменяющие метрику пространства.

Метод (2.1) построен на основе проекционного обобщённого двухшагового квазиньютоновского метода из работы [5].

3. Сходимость метода (2.1).

3.1. **Теорема 1.** Пусть выполнены предположения а)–г) из п.1 о задаче (1.1) и функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, неравенства (2.2)–(2.4), а параметры метода (2.1) таковы, что

$$0 < \alpha < 1/4, \quad 0 < \beta < (3 - 8\alpha)t / (6L), \\ 0 < \lambda < 2m / L^0. \quad (3.1)$$

Тогда найдётся седловая точка $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U^*$ функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, такая, что процесс (2.1), (3.1) по норме пространства $E^n \times E^m$ к ней сходится, то есть $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^* \in Q_*$, $\mathbf{u}^k \rightarrow \mathbf{u}^* \in U^*$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \in E^{n+m}$.

3.2. **Следствие.** Из теоремы 1 следует, что для последовательности $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$ метода (2.1) имеют место неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\| \leq \dots \leq \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|, \\ \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| \leq \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\| \leq \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\| \leq \dots \leq \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|, \\ \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\| \geq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| \geq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k+2}\| \geq \dots, \\ \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^k\| \geq \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k+1}\| \geq \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+2}\| \geq \dots$$

3.3. Следующая лемма необходима для доказательства оценки скорости сходимости метода (2.1) для выпукло вогнутой функции.

Лемма 1. Для $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E^n$ (и $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E^m$)

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \geq (\varepsilon - 1)\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2 - (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2, \quad (3.2)$$

где $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$; $\varepsilon_{1,2} = (s \mp (s^2 - 4l_2l_3)^{1/2}) / (2l_2)$ решение неравенства

$$l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \leq 0; \quad (3.3)$$

$$l_1 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2, \quad l_2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2, \quad l_3 = \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2, \quad s = l_1 + l_2 + l_3.$$

Доказательство неравенства (3.2) можно найти в работе [5].

3.4. **Примечание.** Верхняя и нижняя границы числа $\varepsilon > 0$ в (3.2) зависят от соотношения длин сторон треугольника с вершинами $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{x}$; случай их расположения на одной прямой возможен. Пример необременительных ограничений, при которых допустимы конкретные значения $\varepsilon > 0$ в доказательствах теорем:

$$\|0.5(\mathbf{v} - \mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (3.4)$$

Для вычисления границ множества $\varepsilon > 0$ в (3.2), при ограничениях (3.4) решаем неравенство вида (3.3), положив $0.25l_3 = l_1 = l_2$ в (3.2): то есть неравенство

$$l_3 \geq (\varepsilon - 1)l_3 - 4(1 - \varepsilon^{-1})l_3, \quad \text{или} \quad \varepsilon^2 - 6\varepsilon + 4 \leq 0, \quad \text{и находим} \quad \varepsilon_{1,2} = 3 \mp \sqrt{5},$$

$\varepsilon_1 = 0.764$, $\varepsilon_2 = 5.236$; тогда можно принять приближенное множество возможных значений $\varepsilon \in [0.8; 5.0]$.

4. Оценка скорости сходимости метода (2.1), (3.1) для выпукло вогнутой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, неравенства (3.4) по обоим переменным функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ $\mathbf{x} \in E^n$ и $\mathbf{u} \in E^m$, условия для параметров метода:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < (\sqrt{3} - 1) / 4 \cong 0.18; \quad 0 < \lambda < m(2 - 5\alpha) / L^0; \\ 0 < 16L\beta + 5m\alpha < 2m + 3L^0\lambda, \\ 0 < \beta < (1 - 4\alpha - 8\alpha^2)m / [2L(1 + 4\alpha^2)]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k; \mathbf{u}^k\}$ метода (2.1), (3.1), (4.1) сходится к некоторой седловой точке $(\mathbf{x}^*; \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U^*$ задачи (1.1) со скоростью геометрической прогрессии с оценкой

$$\rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) \leq q^k \rho(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0),$$

где $q = \frac{[25/4 + 2\alpha - 9L^0\lambda / (8m)]^{1/2}}{[7 - 6L\beta / m]^{1/2}}$, $\rho^2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2$, $0 < q < 1$

при условиях теоремы на параметры метода.

5. В докладе обсуждается доказательство сходимости и оценка скорости сходимости метода (2.1).

Список литературы

1. Демьянов В.Ф., Певный А.Б. Численные методы разыскания седловых точек // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т.12, № 5. С. 1099–1127.
2. Антипин А.С. Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном и равновесном программировании. М.: Издательство ВЦ РАН, 2002.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
4. Малинов В.Г. Проекционные обобщённые двухшаговые экстраградиентные методы для решения равновесных задач // Журнал Средневолжского математического общества. 2012. Т. 14. № 2. С. 87–104.
5. Малинов В.Г. О проекционном квазиньютоновском обобщённом двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Том 12. № 4. С. 37–48.

On the version of the generalized extra-gradient quasi-Newtonian method for solving saddle and other problems

V.G. Malinov
Ulyanovsk state University, Ulyanovsk, Russia

К вопросу о глобальной оптимизации полиномиальных и кусочно-полиномиальных функций на n -мерном параллелепипеде

В.Н. Нефедов
МАИ, Москва, Россия

Рассматривается задача глобальной оптимизации

$$p(x) \rightarrow \min ; x \in \Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (1)$$

где $a_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n$, $p(x)$ – полином или (в более общем случае) $p(x) = \max\{p_1(x), \dots, p_s(x)\}$, где $p_1(x), \dots, p_s(x)$ – полиномы. Решение задачи (1) ищется приближенно с заданной точностью. Для решения задачи (1) используется метод ветвей и границ. Предлагаются некоторые условия отсечения кубов, являющихся элементами дробления параллелепипеда Π , оценивается сложность методов. Различные схемы, основанные на идее применения к задачам глобальной оптимизации вида (1) метода ветвей и границ и близкого к нему метода покрытий предлагались многими авторами (см., например, библиографию из [1]). В настоящей работе в предлагаемых подходах существенно используется вид функции $p(x)$, т.е. ее полиномиальность (или кусочная полиномиальность).

Рассмотрим задачу (1) для случая, когда $p(x)$ – полином (кусочно-полиномиальный случай см. в [1]). Пусть требуется решить задачу (1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$, т.е. найти точку $x^\varepsilon : x^\varepsilon \in \Pi, p(x^\varepsilon) \leq \min p(\Pi) + \varepsilon$. Воспользуемся методом ветвей и границ. Для описания используемой схемы ветвления (см., например, библиографию из [1]) воспользуемся процессом многоэтапного дробления параллелепипеда Π на кубы с одинаковыми на каждом i -м этапе дробления длинами ребер $2\tau_i$. Кубы i -го этапа дробления (где $i \geq 2$) получаются в результате дробления кубов $(i-1)$ -го этапа делением ребер пополам. Отметим, что в процессе многоэтапного дробления Π по краям Π могут оказаться параллелепипеды. Тем не менее, для простоты можно говорить лишь о кубах, предполагая, что, начиная с некоторого этапа, элементы дробления Π являются кубами. Будем для простоты Π также считать кубом. Элементами первого этапа дробления Π являются кубы с длинами ребер $2\tau_1$, где $\tau_1 = d/4, d = b_i - a_i, i = 1, 2, \dots, m$, получаемые делением ребер куба Π пополам. После дробления некоторого очередного куба Q (начинаем с $Q = \Pi$) на кубы Q_1, \dots, Q_{2^n} определяем величины $\alpha(Q_i), \beta(Q_i)$, а также точки $x(Q_i) \in Q_i$, удовлетворяющие условиям: $\alpha(Q_i) \leq \min p(Q_i) \leq \beta(Q_i) \leq \max p(Q_i), \beta(Q_i) = p(x(Q_i))$. Обозначим через β достигнутый «рекорд», т.е. минимальное значение среди всех уже вычисленных величин $\beta(\cdot)$. Пусть Q – некоторый текущий куб, выбранный из кубов $Q_i, i = 1, 2, \dots, 2^n$, для очередного дробления. Проверим выполнение условия отсечения $\alpha(Q) \geq \beta - \varepsilon$. В случае его выполнения Q исключается из дальнейшего рассмотрения и тогда $\beta \leq \min p(Q) + \varepsilon$. Процесс заканчивается, когда куб Π оказывается полностью покрытым отсеченными кубами. При этом полагаем $x^\varepsilon = x(Q)$, где $p(x(Q)) = \beta(Q) = \beta$. Следует отметить, что основной объем вычислений приходится на вычисление точек $x(Q)$ и величин $\alpha(Q), \beta(Q)$. Поэтому возникает вопрос об оценивании сверху общего числа вычислений этих точек и величин.

Лемма 1. Пусть задача (1) решается с точностью $\varepsilon > 0$ методом ветвей и границ с использованием любого порядка продолжения ветвления (т.е. порядка выбора для очередного дробления куба из неотсеченных кубов). Пусть, далее, для некоторых чисел $C, \gamma > 0$, для любого куба Q , являющегося элементом многоэтапного дробления куба

Π , выполняется $\beta(Q) - \alpha(Q) \leq C\tau_Q^\gamma$, где $2\tau_Q$ – длина ребер Q . Тогда для $N(\varepsilon)$ – количества вычислений $\alpha(Q), \beta(Q), x(Q)$, необходимых для определения x^ε , выполняется $N(\varepsilon) < B\varepsilon^{-n/\gamma}$, где $B = [2^n \setminus (2^n - 1)]d^n C^{n/\gamma}$.

Одним из возможных подходов к вычислению оценок $\alpha(Q), \beta(Q)$ является использование константы Липшица функции $p(x)$ на Π , т.е. величины L , удовлетворяющей условию $\forall x, x' \in \Pi \quad |p(x) - p(x')| \leq L\|x - x'\|$, где $\|x\| = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$. Зная величину L , можно вычислять $\alpha(Q), \beta(Q)$ по формулам $\alpha(Q) = p(c(Q)) - L\tau_Q$, $\beta(Q) = p(c(Q))$, где $c(Q)$ – центр куба Q . При этом $\beta(Q) - \alpha(Q) = O(\tau_Q)$ при $\tau_Q \rightarrow 0+$, т.е. в этом случае может оказаться $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-n})$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ (см. лемму 1). Заметим, однако, что константа Липшица для полинома (даже сравнительно небольшой степени) на Π часто оказывается слишком большой и трудно вычислимой величиной, что делает невозможным практическое использование метода. В [1] предлагаются некоторые другие более эффективные методы вычисления величин $\alpha(Q), \beta(Q)$, обеспечивающие меньшую по порядку сложность вычислений точки x^ε , в зависимости от ε . Хорошо известно, что задача минимизации квадратичной функции на многогранном множестве может быть сведена к конечной последовательности алгебраических задач простого вида. Пусть $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $p_Q(x) = p(x + c(Q))$, $p_Q(x) = q_Q(x) + r_Q(x)$, где $q_Q(x)$ – квадратичная функция, $r_Q(x)$ – полином, степени одночленов которого больше 2, $Q' = Q - c(Q)$. Тогда (используем обозначения из [1]), положив $\alpha(Q) = \min q_Q(Q') - \sum_{k \in N(Q)} |\text{coef}(r_Q, k)| \tau_Q^{<e, k>}$, где $N(Q) = N_{r_Q}$ (N_{r_Q} – множество векторов степеней переменных при членах из $r_Q(x)$), $\beta(Q) = p(x(Q))$, $x(Q) = u(Q) + c(Q)$, $u(Q) \in \text{Arg min } q_Q(Q')$, имеем: $\alpha(Q) \leq \min p(Q) \leq \beta(Q)$, $\beta(Q) - \alpha(Q) = p(x(Q)) - \alpha(Q) \leq 2 \sum_{k \in N(Q)} |\text{coef}(r_Q, k)| \tau_Q^{<e, k>} = O(\tau_Q^3)$ при $\tau_Q \rightarrow 0+$.

Как уже говорилось, основной объем вычислений при определении точки x^ε приходится на вычисление $x(Q)$. Используя лемму 1, получаем, что количество вычислений $\alpha(Q), \beta(Q), x(Q)$ при этом подходе есть величина порядка $O(\varepsilon^{-n/3})$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и при этом мы уходим от необходимости вычислять константу Липшица.

Многие другие идеи, связанные с этой тематикой, изложены в [1].

Список литературы

1. Нефедов В.Н. О глобальной оптимизации полиномиальных и кусочно-полиномиальных функций на n -мерном параллелепипеде. Деп. в ВИНТИ 25.082016 №114-B2016.

On the global optimization of polynomial and piecewise polynomial functions on the n-dimensional parallelepiped

V.N. Nefedov
MAI, Moscow, Russia

СЕКЦИЯ № 4

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Белоусов Ф.А., Марков Б.В. Построение Парето-границы в задаче оптимального распределения работ в сетевых канонических структурах. Реализация на примере проекта в нефтегазовой отрасли тезисов | 129 |
| Березкин В.Е. Программное обеспечение диалоговой аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в нелинейных многокритериальных задачах | 130 |
| Каменев Г.К. Неадаптивная аппроксимация выпуклых тел, оптимальная по скорости роста числа гиперграней | 133 |
| Ногин В.Д. Оптимизация числовой функции на нечетком множестве | 138 |
| Подиновский В.В. Анализ чувствительности выбора к изменению параметров частичных отношений предпочтений | 141 |
| Рабинович Я.И. Аппроксимация множества эффективных векторных оценок на основе универсальной вычислительной процедуры | 144 |
| Yatsalo B., Korobov A., Martinez L. Fuzzy MCDA: Evident Advantages and Nontrivial Drawb | 147 |

Построение Парето-границы в задаче оптимального распределения работ в сетевых канонических структурах. Реализация на примере проекта в нефтегазовой отрасли тезисов.*

Белоусов Ф.А.

ЦЭМИ РАН, Москва, Россия

Марков Б.В.

НОВАТЭК, Москва, Россия

Для вертикально-интегрированных нефтегазовых компаний (ВИНК), занимающихся разведкой, добычей, переработкой и реализацией жидких углеводородов, в рамках задачи разработки месторождения и увеличения мощностей, возникает потребность в организации и проведении общестроительных работ. В следствие этого остро встает вопрос оптимизации (как по стоимости строительного проекта, так и по времени его выполнения). Фактором управления в данной задаче является выбор подрядчиков, каждый из которых на этапе проведения тендерных мероприятий указывает, в числе прочего, стоимость и срок выполнения соответствующей подрядной работы. Например, при проведении комплекса строительных работ по укреплению кустового основания и подключению новых скважин на нем, число потенциальных подрядных организаций может варьироваться от нескольких штук до нескольких десятков. Оптимальным решением для заказчика (ВИНК) при выборе потенциального подрядчика (строительной компании) в такой ситуации является некоторая точка на Парето-границе, которая построена, исходя из

* Работы выполнены при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-51-45001.

минимизации стоимости и времени строительства. В работе приведен алгоритм построения такой Парето-оптимальной границы. Отдельно решается задача построения Парето-границы в трехмерном пространстве, в котором кроме временной и стоимостной составляющих добавляется еще одна характеристика, отвечающая за качество выполнения работ.

Исходная задача может быть сведена к минимизации линейного функционала при условии выполнения ограничений, близких к линейным, которые строятся в соответствии с диаграммой Ганта для рассматриваемого проекта. Задача построения Парето-границы решена на примере конкретного проекта в нефтегазовой сфере.

Задачи поиска оптимального распределения работ хорошо известны. Примерами таких работ служат работы [1-4]. Отличительной особенностью представленной работы является многокритериальность задачи, построение Парето-оптимальной границы и включение в качестве дополнительного критерия качество выполненной работы.

Список литературы

1. Новикова Т.П., Новиков А.И. Алгоритм решения задачи оптимального распределения работ в сетевых канонических структурах. // Лесотехнический журнал. 2014. №4. с. 309-317.
2. Пулицкий М.Х., Кумагина Е.А. Управляемый фронтальный алгоритм решения задачи распределения ресурсов в сетевых канонических структурах. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. Изд-во: ННГУ, 2008, № 6, с. 152-155.
3. Прилуцкий М.Х. Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах. // Автоматика и телемеханика. 1996. № 2. с. 24-29.
4. Пулицкий М.Х., Кумагина Е.А. Методические указания по проведению лабораторных работ «Распределение ресурсов в сетевых канонических структурах» по курсу «Математические основы информатики» для студентов факультета ВМК специальности «Прикладная информатика». // Нижегородский государственный университет, 2001, 13 с.

Construction of Pareto-boundary in the problem of optimal distribution of works in network canonical structures. Implementation of theses on the example of the project in the oil and gas industry

F.A. Belousov

CEMI, Moscow, Russia

B.V. Markov

NOVATEK, Moscow, Russia

Программное обеспечение диалоговой аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в нелинейных многокритериальных задачах

В.Е.Березкин

*Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ «Информатика и управление»
РАН, Москва, РФ*

Одним из эффективных подходов к решению многокритериальных проблем является подход, основанный на визуализации границы Парето множество достижимых критериальных векторов. Этот подход привлекает все большее внимание лиц, принимающих решение (ЛПР), в различных областях практической деятельности в связи с его простотой для ЛПР, которым не приходится отвечать на многочисленные сложные вопросы о своих предпочтениях. В то же время, этот подход требует развития

математических методов аппроксимации границы Парето, что особенно затруднительно в нелинейном случае при значительном числе переменных в задаче, а также разработки соответствующего программного обеспечения.

В [1-2] подробно описана методика, основанная на аппроксимации оболочки Эджворта-Парето (ОЭП), т.е. максимального (по включению) множества, имеющего ту же границу Парето, что и множество достижимых критериальных векторов. Аппроксимация ОЭП в невыпуклом случае осуществляется в виде объединения конечного числа конусов. Диалоговая визуализация ОЭП оказалась эффективным средством информирования ЛПР о границе Парето при 3-8 критериях. При этом ЛПР получает представление о возможных значениях критериев и об их замещениях на границе Парето, после чего назначает предпочтительную точку на границе Парето (достижимую цель), по которой компьютер находит эффективное решение.

Для аппроксимации ОЭП в нелинейных задачах были разработаны гибридные методы, предназначенные для моделей, заданных вычислительным модулем, не требующие знания постоянных Липшица критериальных функций, градиентов и т.д. В гибридных методах интегрируются методы случайного поиска, методы классической оптимизации, использующие имитацию, и генетические методы.

Программное обеспечение FGNL, предназначенное для диалоговой аппроксимации ОЭП в случае нелинейных моделей, реализовано на персональных компьютерах для платформ MS Windows на языке C++. Оно позволяет аппроксимировать ОЭП в интерактивном режиме. При этом исследуемая модель должна быть задана либо в виде динамически загружаемой библиотеки, либо в виде исполняемого файла. Таким образом, пользователь получает возможность использовать уже имеющиеся модули, описывающие объект исследования в виде черного ящика.

Программное обеспечение состоит из четырех следующих подсистем:

- подсистемы подготовки исходной модели и задачи;
- подсистемы выбора методов и параметров расчета;
- подсистемы построения аппроксимации ОЭП;
- подсистемы визуализации границы Парето и выбора предпочтительного варианта.

Первая подсистема позволяет задать модель, в том числе критерии оптимизации. С помощью второй подсистемы пользователь выбирает методы аппроксимации из заранее подготовленного набора и задает их параметры. Третья подсистема осуществляет аппроксимацию ОЭП и строит функцию полноты аппроксимации, которая позволяет ЛПР решить вопрос о своевременном окончании расчета. Четвертая подсистема позволяет визуализировать границу Парето на основе изображения серии двумерных сечений построенной аппроксимации ОЭП. В рамках этой же подсистемы пользователь может указать предпочтительное достижимое недоминируемое сочетание критериев и получить соответствующее решение.

Отметим, что в данном программном обеспечении для построения аппроксимации ОЭП при желании можно ограничиться заданием параметров процесса аппроксимации. Промежуточные операции типа статистической оценки промежуточных баз аппроксимации и другие будут при этом полностью скрыты от пользователя. Статистическая оценка будет приведена лишь для окончательной базы аппроксимации.

Подготовка исходной модели состоит из следующих шагов:

- Подготовки расчетного модуля;
- Интерфейса расчетного модуля с программным обеспечением FGNL;
- Импорта базы аппроксимации.

При подготовке расчетного модуля пользователь должен подготовить модуль, который будет осуществлять расчет функции отклика, к работе с описываемым

программным обеспечением. Такой модуль должен представлять собой экспортируемую функцию динамически подгружаемой библиотеки (DLL) или выполняемый программный модуль (EXE). Отметим, что использование выполняемых EXE модулей приводит к значительным затратам времени на обмен информацией между модулем и FGNL, поэтому предпочтительно использование DLL файлов.

Хотя создание DLL-библиотеки является стандартной практикой программирования под MS Windows, многолетнее применение FGNL показало, что пользователи испытывают определенные трудности на этом этапе. Одно из затруднений связано с выбором компилятора: как правило, это MS Visual Studio, который занимает много ресурсов на компьютере и, к тому же, не является бесплатным. Другим затруднением является то, что, хотя пользователи FGNL и умели программировать на C/C++, но практики создания DLL у них не было, и попытки скомпилировать DLL терпели неудачу. В связи со сказанным была разработана новая версия системы FGNL.

В новой версии FGNL добавлена возможность задавать функцию расчета непосредственно из C/C++ файла. Это избавляет от необходимости создавать DLL-модуль самостоятельно – система FGNL делает это за пользователя. При этом не требуется каких-то специальных установок компилятора на компьютер. Если по каким-то причинам создание DLL-модуля вызывает трудности, задать функцию расчета можно следующим образом.

Заранее должен быть подготовлен C или CPP файл с текстом функции. В диалоговом окне задания параметров экспортируемой из DLL функции расчета требуется нажать кнопку «Build from C/C++ file» В появившемся окне надо нажать кнопку «Select C/C++ file...» и выбрать подготовленный файл (его название и текст отобразятся в том же окне). Далее следует нажать кнопку «Build». Если ошибок в коде файла не было, DLL-модуль будет создан в той же папке, что и исходный файл, и с тем же названием. В противном случае окно не будет закрыто, а в нем будет напечатан текст ошибок компилятора.

Список литературы

1. Лотов А.В. Компьютерная визуализация оболочки Эджворта-Парето и ее применение в интеллектуальных системах поддержки принятия решений // Информационные Технологии и Вычислительные Системы. 2002, № 1. С. 83-100.
2. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.

Software for dialog approximation of the Edgeworth-Pareto shell in nonlinear multicriteria problems

V.E. Berezkin
CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Неадаптивная аппроксимация выпуклых тел, оптимальная по скорости роста числа гиперграней*

Г.К. Каменев

Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Рассматривается проблема аппроксимации многогранниками выпуклых компактных тел, имеющая важное практическое значение в многокритериальных задачах принятия решений на основе использования математических моделей, в частности, в методе достижимых целей [1, 2]. Оптимальные возможности аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками с заданным числом вершин или гиперграней достаточно хорошо изучены теоретически [3, 4]. Различаются адаптивные (активные) и неадаптивные (пассивные) алгоритмы полиэдральной аппроксимации. И те, и другие используют априорную информацию об аппроксимируемом теле, однако в активных алгоритмах она уточняется информацией, полученной в процессе аппроксимации и учитывается в нем. Большинство современных адаптивных и неадаптивных алгоритмов полиэдральной аппроксимации предполагают возможность вычисления опорной функции (максимума линейной формы) на аппроксимируемом теле. При наличии априорной информации о гладкости аппроксимируемого тела и максимальном радиусе кривизны его поверхности адаптивный и неадаптивный подходы дают один и тот же, оптимальный, порядок скорости сходимости по числу гиперграней аппроксимирующего многогранника [5]. В негладком случае, а также при отсутствии информации о гладкости или максимальном радиусе кривизны аппроксимируемого тела, порядок скорости сходимости по числу гиперграней неадаптивных алгоритмов, основанных на вычислении опорной функции, существенно ниже. В настоящей работе предлагается неадаптивный метод аппроксимации произвольных выпуклых тел, основанный на операции проектирования внешней точки (нахождения минимума квадратичной формы), имеющий оптимальный порядок скорости сходимости по числу гиперграней.

Рассмотрим евклидово пространство E^d со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, расстоянием $\rho(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Пусть B_r обозначает шар радиуса r и B – единичный шар с центром в начале координат, S – сферу направлений, т.е. ∂B . Пусть $C \subset E^d$ – выпуклое компактное тело и $P \subset E^d$ – выпуклый компактный многогранник. Через $m^t(P)$ обозначим число его вершин, а через $m^f(P)$ – число его гиперграней (граней максимальной размерности). Для определенности будем считать, что $C \subset B$. Для выпуклых тел C_1 и C_2 рассмотрим метрику Хаусдорфа (метрику Бляшке)

$$\delta(C_1, C_2) = \max \{ \sup \{ \rho(x, C_2) : x \in C_1 \}, \sup \{ \rho(x, C_1) : x \in C_2 \} \}.$$

Для некоторых констант c_1 и c_2 доказано [1, 2] существование таких многогранников P , что при любых $m^t(P)$ или $m^f(P)$ выполняется $\delta(C, P) \leq c_1 / [m^t(P)]^{2/(d-1)}$ или $\delta(C, P) \leq c_2 / [m^f(P)]^{2/(d-1)}$, причем для тел с дважды непрерывно дифференцируемой границей эти оценки являются неулучшаемыми. Метод полиэдральной аппроксимации, позволяющий строить аппроксимирующие многогранники со свойством $\delta(C, P) \leq c / [m^f(P)]^{2/(d-1)}$, $m^f(P) \rightarrow \infty$, будем называть *оптимальным методом* (точнее, оптимальным по порядку) *по числу гиперграней*.

Для $u \in S$ введем обозначения опорной функции, опорного полупространства и опорной гиперплоскости: $g(u, C) = \max \{ \langle u, x \rangle : x \in C \}$, $L(u, C) = \{ x \in E^d : \langle u, x \rangle \leq g(u, C) \}$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00465).

$l(u, C) = \{x \in E^d: \langle u, x \rangle = g(u, C)\}$. Для произвольного $p \in E^d$ нам будет удобно использовать обозначения $g(u, p) = \langle u, p \rangle$, $l(u, p) = \{x \in E^d: \langle u, x \rangle = \langle u, p \rangle\}$, $L(u, p) = \{x \in E^d: \langle u, x \rangle \leq \langle u, p \rangle\}$, что не противоречит введенным ранее определениям опорных функции, гиперплоскости и полупространства.

Для заданного $U \subset S$ обозначим

$$P(C, U) = \bigcap \{L(u, C): u \in U\} = \bigcap \{ \{x \in E^d: \langle u, x \rangle \leq g(u, C)\} : u \in U \}.$$

Пусть $U(m)$ – подмножество S , состоящее из m элементов. Очевидно, что, если $P(C, U)$ – многогранник, $m^f(P(C, U(m))) \leq m$. Через $\delta(U(m))$ обозначим *гарантированную* множеством $U(m)$ *точность аппроксимации*:

$$\delta(U(m)) = \max \{ \delta(C, P(C, U(m))) : C \subset B \}.$$

Будем говорить, что задан **неадаптивный метод аппроксимации, основанный на вычислении опорной функции**, если для любого m задано множество $U(m)$ такое, что $\delta(U(m)) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$. Существует неадаптивные методы аппроксимации, основанные на вычислении опорной функции выпуклых компактных тел (например, [6]), в которых для любых m справедливо $\delta(U(m)) \leq c / m^{1/(d-1)}$ при некоторой константе c . Однако, как показано в [7, 8], при любом методе выбора $U(m)$ существует константа c^* такая, что для каждого m существует $C \subset B$, для которого справедливо $\delta(C, P(C, U(m))) \geq c^* / [m^f(P(C, U(m)))]^{1/(d-1)}$, откуда $\delta(U(m)) \geq c^* / m^{1/(d-1)}$. Таким образом, *неадаптивные методы аппроксимации выпуклых тел, основанные на вычислении его опорной функции, не являются оптимальными по числу гиперграней*.

Множество U называется ε -сетью некоторого множества, если любая точка множества находится от U на расстоянии, не большем ε . Для $p \notin C$ обозначим через $\text{proj}(p, C)$ проекцию точки p на C . Точка $\text{proj}(p, C)$ – единственная и является решением квадратичной задачи минимизации:

$$\text{proj}(p, C) = \arg \min \{ \rho(p, x) : x \in C \}, p \notin C.$$

Обозначим $F: E^d \setminus C \rightarrow S$,

$$F(p) = (p - \text{proj}(p, C)) / \|p - \text{proj}(p, C)\|.$$

В [9] показано, что с помощью ε -сети шара B_2 , состоящей из m точек, и проектирования на поверхность тела $C \subset B$ можно построить многогранник со свойством $\delta(C, P) \leq c / [m^f(P)]^{2/(d-1)}$. В [10] предложен способ построения многогранника со свойством $\delta(C, P) \leq c / [m^f(P)]^{2/(d-1)}$. Мы воспользуемся основными идеями из работы [9], разработав свою технику для построения оптимального неадаптивного метода на основе операции проектирования.

Пусть задано $\beta > 0$ и $U \subset \partial B_{(1+\beta)}$. Обозначим

$$P^+(C, U) = P(C, F(U)) = \bigcap \{L(u, C) : u \in F(U)\}.$$

Для построения $P^+(C, U)$ необходимо для каждой точки $p \in U$ найти $p^+ = \text{proj}(p, C)$ (т.е. решить на C задачу билинейного программирования) и положить $u = (p - p^+) / \|p - p^+\|$, $g(u, C) = \langle u, p^+ \rangle$.

Теорема 1. Пусть задано $\beta > 0$ и U есть ε -сеть $\partial B_{(1+\beta)}$, $\varepsilon < \beta$. Тогда

$$\delta(C, P^+(C, U)) \leq \varepsilon^2 / (\beta^2 - \varepsilon^2)^{1/2}.$$

Заметим, что фактор $1/(\beta^2 - \varepsilon^2)^{1/2}$ может быть выбрана сколь угодно близким к $1/\beta$ при выборе достаточно малого ε по сравнению с β .

Доказательство теоремы. Пусть $C \subset B$ и $P = P^+(C, U)$. Пусть $p \in \partial P$: $\rho(p, C) = \delta(C, P^+(C, U))$. Пусть $x = \text{proj}(p, C)$ и $p^{**} \in \partial B_{(1+\beta)}$, такая что $x = \text{proj}(p^{**}, C)$. Так как U есть ε -сеть $\partial B_{(1+\beta)}$, то существует $q^{**} \in U$, такая что $\rho(p^{**}, q^{**}) \leq \varepsilon$. Обозначим $y = \text{proj}(q^{**}, C)$, $u = F(p^{**}) = (p^{**} - x) / \|p^{**} - x\|$, $v = F(q^{**}) = (q^{**} - y) / \|q^{**} - y\|$. Пусть $p^* = x + \beta u$, $q^* = y + \beta v$. Поскольку x и y принадлежат ∂C , то p^* и q^* принадлежат $\partial(C + B_\beta)$. Проектирование извне на выпуклое множество не увеличивает расстояние, поэтому $\rho(p^*, q^*) \leq \varepsilon$ и $\rho(x, y) \leq \varepsilon$.

Имеем $\|(x+\beta u) - (y+\beta v)\| = \rho(p^*, q^*) \leq \varepsilon$. Откуда $\max\{\|x-y\|, \beta\|u-v\|\} \leq \varepsilon$. Пусть α – угол между u и v . Так как $\sin \alpha \leq \|u - v\|$, то $\sin \alpha \leq \varepsilon/\beta$.

Пусть z – проекция x на $l = l(u, x) \cap l(v, y)$ и m – проекция x на $l(v, y)$. Проекция t на l есть z (иначе бы z не была проекцией x , так как $\rho(z, x) = (\rho(z, m)^2 + \rho(x, m)^2)^{1/2}$, и величина угла $\angle xzm$ равна α (см. двумерную иллюстрацию на рис. 1). Пусть p^{***} есть пересечение луча $[x, p^{**}]$ с $l(v, y)$. Очевидно, что $p \in [x, p^{**}]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \delta(C, P^+(C, U)) &= \rho(x, p^*) \leq \rho(x, p^{***}) = \rho(x, m) / \cos \alpha = \\ &= \rho(x, z) \sin \alpha / \cos \alpha \leq \rho(x, y) \sin \alpha / \cos \alpha \leq \varepsilon^2 / \beta [1 - (\varepsilon/\beta)^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение теоремы.

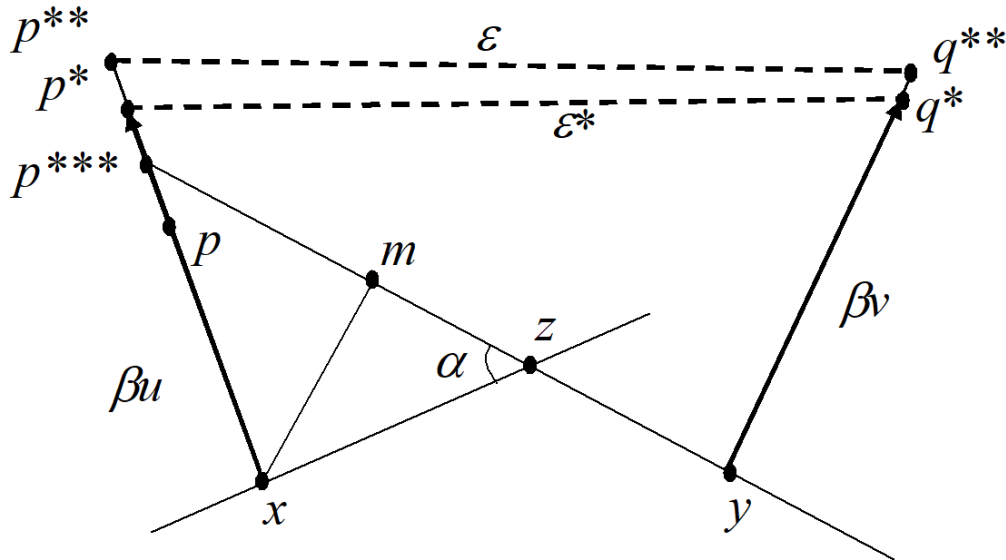


Рис. 1. Двумерная иллюстрация к доказательству теоремы 1.

Рассмотрим теперь возможности построения ε -сетей на поверхности сферы. Обозначим через $m(\varepsilon)$ минимальное число точек ε -сети S . Для заданных конечных ε известно достаточно мало [11], хотя этому вопросу посвящена значительная литература. Вместе с тем для асимптотики значение $m(\varepsilon)$ известно с точностью до константы: $m(\varepsilon) \approx \mathcal{G}/\varepsilon^{d-1}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{d-1}(d\pi_d/\pi_{d-1})$. Здесь \mathcal{G}_d обозначает минимальную плотность покрытия пространства E^d шарами фиксированного радиуса [11] и $\pi_d = \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ – объем единичного шара, Γ – гамма-функция. Точно известны только величины $\mathcal{G}_1=1$, $\mathcal{G}_2=2\pi\sqrt{27}$. Метод построения ε -сетей $U(m)$, $m \rightarrow \infty$, таких, что существует константа Θ , для которой $m \leq \Theta/\varepsilon^{d-1}$, будем называть методом построения **эффективных покрытий сферы** (с константой Θ). Величину $\eta = (\mathcal{G}/\Theta)^{(d-1)}$ назовем асимптотической эффективностью такого метода. Она показывает, во сколько раз хуже в асимптотике, при одном и том же числе точек ε -сети, метод позволяет покрывать поверхность сферы, по сравнению с оптимальным.

Наиболее распространенным в приложениях является использование равномерной сетки (решетки) в полярных координатах. В этом случае справедливо [12] $m \leq \Theta_1/\varepsilon^{d-1}$, $m \rightarrow \infty$, где $\Theta_1 = 2[\pi^2(d-1)/4]^{(d-1)/2}$. Асимптотическая эффективность этого метода при больших d не превышает $2e/(\pi\sqrt{d})$ [2]. Таким образом, эффективность метода построения ε -сети с помощью равномерной сетки в полярных координатах быстро падает с размерностью задачи. Другим недостатком такого подхода является необходимость резким скачком увеличивать число точек ε -сети (m от k^{d-1} до $(k+1)^{d-1}$, где k – число покоординатных делений) при необходимости увеличить точность покрытия, с одновременным изменением всех точек. Эта же проблема характерна и для других методов построения ε -сетей на основе решетчатых покрытий пространства.

Указанных недостатком лишен метод [13, 14] построения ε -сетей сферы, реализованный с помощью аппроксимации единичного шара многогранниками адаптивным методом «Уточнения оценок» (см. подробности в [2]). В этом методе строится монотонно растущая по числу m последовательность точек на поверхности сферы, так что каждая ее начальная часть образует субоптимальную $\varepsilon(m)$ -сеть с рассчитанной в процессе аппроксимации величиной $\varepsilon(m)$. Хотя сам алгоритм метода «Уточнения оценок» достаточно сложен в реализации, такая последовательность рассчитывается однажды и далее может применяться непосредственно в неадаптивных методах полиэдральной аппроксимации. Соответствующие $\varepsilon(m)$ -сети приведены в [15] для размерностей от 3 до 10. Как показано в [13, 14], асимптотическая эффективность рассматриваемой последовательности не ниже $(\varrho_{d-1}/\delta_{d-1})^{1/(d-1)}/2 \geq [2(d-1)/d]^{1/2}/2$, где δ_d обозначает максимальную плотность упаковки пространства E^d шарами фиксированного радиуса [11]. Таким образом, нижняя оценка асимптотической эффективности метода [13, 14] с ростом размерности приближается к $\sqrt{2}/2$.

Пусть теперь имеется некоторый метод построения эффективных покрытий сферы. Построим с помощью него оптимальный неадаптивный метод полиэдральной аппроксимации на основе операции проектирования и эффективного покрытия сферы.

Лемма 1. Пусть задано $\beta > 0$ и $U(m)$ есть $\varepsilon(m)$ -сеть на S . Тогда при $(1+\beta)\varepsilon(m) < \beta$ справедливо

$$\delta(C, P^+(C, (1+\beta)U(m))) \leq (1+\beta)^2 \varepsilon(m)^2 / (\beta^2 - [(1+\beta)\varepsilon(m)]^2)^{1/2}.$$

Доказательство леммы. Так как $U(m)$ есть $\varepsilon(m)$ -сеть на S , то $(1+\beta)U(m)$ есть $(1+\beta)\varepsilon(m)$ -сеть на $\partial B_{(1+\beta)}$, поэтому из теоремы 1 следует при $(1+\beta)\varepsilon(m) < \beta$ утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть задано $\beta > 0$. Пусть $U(m)$ есть $\varepsilon(m)$ -сеть на S со свойством $m \leq \Theta/\varepsilon^{d-1}$, для некоторой константы Θ . Тогда для любого $\lambda > 0$ существует $m(\lambda)$, такое что при $m \geq m(\lambda)$ справедливо

$$\delta(C, P^+(C, (1+\beta)U(m))) \leq (1+\lambda)A(\beta)/m^{2/(d-1)}, A(\beta) = (1+\beta)^2 \Theta^{2/(d-1)}/\beta.$$

Доказательство леммы. Величина $\varepsilon(m)$ может быть выбрана сколь угодно малой, откуда из леммы 1 получаем утверждение леммы.

Теорема 2. Пусть $P^m = P^+(C, 2U(m))$, $m \rightarrow \infty$, есть последовательность многогранников, порождаемая неадаптивным методом полиэдральной аппроксимации на основе операции проектирования и построения эффективных покрытий сферы $U(m)$ с константой Θ . Тогда для любого $\lambda > 0$ существует $m(\lambda)$, такое что при $m \geq m(\lambda)$ справедливо

$$\delta(C, P^m) \leq (1+\lambda)A/m^{2/(d-1)}, A = 4\Theta^{2/(d-1)}.$$

Доказательство теоремы. Достаточно заметить, что минимум величины $A(\beta)$ в лемме 2 достигается при $\beta=1$ и равен $A = 4\Theta^{2/(d-1)}$.

В заключение приведем само описание метода.

НЕАДАПТИВНЫЙ МЕТОД ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НА ОСНОВЕ ОПЕРАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ЭФФЕКТИВНОГО ПОКРЫТИЯ СФЕРЫ

Пусть требуется построить аппроксимацию выпуклого компактного тела $C \subset B$ с точностью δ в метрике Хаусдорфа. Тогда необходимо:

- выбрать $\varepsilon < 1/2$: $4\varepsilon^2/(1-4\varepsilon^2)^{1/2} \leq \delta$;
- с помощью имеющегося метода эффективного покрытия сферы построить ε -сеть U на S ;
- для каждой точки $u \in U$ найти $v = F(2u) = (2u - \text{proj}(2u, C)) / \|2u - \text{proj}(2u, C)\|$, решив для этого задачу квадратичной минимизации на C , и определить $g(v, C) = \langle v, \text{proj}(2u, C) \rangle$.
- в качестве решения взять многогранник

$$P^+(C, 2U) = \cap \{ \{x \in E^d: \langle v, x \rangle = g(v, C)\}: v \in F(2U) \}.$$

Следствие. Неадаптивный метод полиэдральной аппроксимации на основе операции проектирования и эффективного покрытия сферы оптимален по порядку числа гиперграней аппроксимирующего многогранника.

Утверждение следствия вытекает из теоремы 2 с учетом того, что $m^f(P^+(C, U(m))) \leq m$.

Приведенный метод легко обобщается на случай аппроксимации произвольного выпуклого компактного тела. Для этого достаточно найти внешний для тела шар и отмасштабировать параметры метода на его радиус.

Список литературы

1. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
2. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. - 310 P.
3. Gruber P.M. Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M. Gruber and J.M. Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
4. Бронштейн Е.М. Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 22, Геометрия, 2007. С. 5–37.
5. Каменев Г.К. Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007. – 230 с.
6. Васильев Н. С. К отысканию глобального минимума квазивогнутой функции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т23. N2. С. 307-313.
7. Sonnevend G. Asymptotically optimal, sequential methods for the approximation of convex, compact sets in R^n in the Hausdorff metrics // Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai. 1980. V. 35 (2). P. 1075-1089.
8. Sonnevend G. An optimal sequential algorithm for the uniform approximation of convex functions on $[0, 1]$ // Appl. Math. and Optimizat. 1983. № 10. P. 127-142.
9. Dudley R. Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries // J. Approximat. Theory. 1974. V. 10. P. 227-236; Corr., ibid, 1979. V. 26. P. 192-193.
10. Бронштейн Е.М., Иванов Л.Д. О приближении выпуклых множеств многогранниками // Сибирский матем. ж. 1975. Т. 26. № 5. С.1110-1112.
11. Conway J.H., Sloane N.J.A. Sphere Packings, Lattices and Groups. Third Edition. Springer, 1999.
12. Майская Т.С. Оценка радиуса покрытия многомерной единичной сферы метрической сетью, порожденной сферической системой координат // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, вып. 8. М.: изд. ВМК МГУ, 2011. С. 83-98.
13. Каменев Г.К., Лотов А.В., Майская Т.С. Построение субоптимальных покрытий многомерной единичной сферы // Докл. Академии наук. 2012. Т.444. N2. С. 153-155.
14. Каменев Г.К., Лотов А.В., Майская Т.С. Итеративный метод построения покрытий многомерной единичной сферы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013, Т. 53. N2. С. 181-194.
15. <http://www.ccas.ru/mmes/mmeda/covering/index.htm>

Passive polyhedral approximation of convex bodies optimal on faces number growth rate

G.K.Kamenev

Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, RF

Оптимизация числовой функции на нечетком множестве*

В.Д. Ногин

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Исследования в области оптимизации числовой функции на нечетком множестве берут свое начало с известной статьи Р. Беллмана и Л. Заде «Decision-Making in a Fuzzy Environment», опубликованной в 1970 г. К настоящему времени разработано широкое множество моделей и методов решения задач нечеткого линейного и нелинейного программирования, нечеткого многоцелевого, целочисленного и динамического программирования. В этих задачах элементы нечеткости присутствуют как в ограничениях, так и в целевой функции.

В данной работе задачу оптимизации числовой функции на нечетком множестве предлагается рассматривать и решать как задачу поиска парето-оптимального решения в двухкритериальной задаче, в которой участвует исходная целевая функция и функция принадлежности нечеткого множества допустимых решений. Решение предлагается осуществлять с помощью двухэтапной процедуры, в соответствии с которой на первом этапе используется аксиоматический подход автора, а на втором – тот или иной способ скаляризации многокритериальной задачи. Необходимо заметить, что идея о том, что в качестве решения задачи оптимизации функции на нечетком множестве следует рассматривать множество Парето, принадлежит С.А. Орловскому [1]. В данной работе эта идея получает свое дальнейшее развитие.

Напомним некоторые базисные понятия теории нечетких множеств. Пусть U означает обычное (четкое) множество. Нечеткое множество X в U определяется своей функцией принадлежности $\lambda_X : U \rightarrow [0, 1]$. Для каждого элемента $x \in U$ число $\lambda_X(x) \in [0, 1]$ интерпретируется как степень уверенности в том, что данный элемент принадлежит множеству X . В случае, когда функция принадлежности нечеткого множества принимает лишь два значения 0 или 1, она представляет собой характеристическую функцию данного четкого множества X . Все элементы x множества U , удовлетворяющие неравенству $\lambda_X(x) > 0$, образуют носитель или суппорт множества X , обозначаемый $\text{supp}(X)$.

Для нечетких множеств X и Y в U отношение включения, а также операции объединения и пересечения в терминах их функций принадлежности определяются следующим образом

$$\begin{aligned} X \subset Y &\Leftrightarrow \lambda_X(x) \leq \lambda_Y(x) && \text{для всех } x \in U \\ \lambda_{X \cup Y}(x) &= \max\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\} && \text{для всех } x \in U \\ \lambda_{X \cap Y}(x) &= \min\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\} && \text{для всех } x \in U. \end{aligned}$$

Пусть числовая функция f определена на множестве U и X есть нечеткое множество в U с функцией принадлежности $\lambda : U \rightarrow [0, 1]$. Введем образ $Y = f(\text{supp}(X)) \subset R^1$, представляющий собой четкое множество. На основе принципа продолжения Л. Заде определим образ $\hat{Y} = f(X)$ нечеткого множества X при помощи функции принадлежности

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 16-29-12864, 17-07-00899, 17-29-03236).

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\alpha \in [0,1] \mid \lambda(x) = \alpha\}, & \text{если } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мы вправе ссылаться на нечеткое множество, как на подмножество 1-одномерного нечеткого пространства $F^1 = R^1 \times [0,1]$ (см. [2]). Поскольку формально $F^1 \subset R^2$, множество \hat{Y} можно рассматривать как некоторое четкое подмножество 2-мерных векторов, вторая компонента которых меняется в пределах отрезка $[0,1]$.

Целью решения задачи оптимизации (далее мы будем иметь дело с максимизацией) функции f на нечетком множестве X является отыскание в общем случае некоторого множества «максимальных» (наилучших) элементов $Max(\hat{Y})$ нечеткого множества \hat{Y} . Иными словами, нечеткое множество, обозначаемое $Max(\hat{Y})$, представляет собой результат решения задачи максимизация числовой функции f на нечетком множестве X .

Введем в рассмотрение следующую 2-мерную вектор-функцию

$$\hat{y} = \hat{f}(x) = \begin{cases} (f(x), \mu(f(x))), & \text{если } x \in \text{supp}(X) \\ (f(x), 0) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно понять, что имеет место равенство $\hat{Y} = \hat{f}(U)$.

Введем бинарное отношение \succ_f на множестве $\hat{Y} = \hat{f}(\text{supp}(X))$, с помощью которого далее будет осуществляться компромисс. Запись $\hat{y} \succ_f \hat{y}'$ означает, что $Max(\{\hat{y}, \hat{y}'\}) = \{\hat{y}\}$, т.е. вектор \hat{y} является более предпочтительным для нас в контексте решаемой задачи, чем \hat{y}' , и именно его мы выберем из данной пары векторов. Будем считать это отношение асимметричным. Полностью это отношение на практике, как правило, неизвестно.

Примем следующие «разумные» аксиомы, которые очерчивают класс бинарных отношений, с которыми мы далее будем иметь дело.

Аксиома 1. Если для векторов \hat{y}, \hat{y}' имеет место соотношение $\hat{y} \succ_f \hat{y}'$, то $\hat{y}' \notin Max(\hat{Y})$.

В соответствии с этой аксиомой не выбираемый в паре вектор не должен выбираться и из всего множества \hat{Y} .

Аксиома 2. Бинарное отношение \succ_f является транзитивным. Кроме того, существует бинарное отношение \succ , представляющее собой продолжение отношения \succ_f на все пространство R^2 , которое также является транзитивным.

Аксиома 3. Для любой пары двумерных векторов $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ и $\hat{y}' = (\hat{y}'_1, \hat{y}'_2)$, таких что $\hat{y}_1 > \hat{y}'_1$, $\hat{y}_2 = \hat{y}'_2$ или $\hat{y}_1 = \hat{y}'_1$, $\hat{y}_2 > \hat{y}'_2$, выполняется соотношение $\hat{y} \succ \hat{y}'$.

Данная аксиома свидетельствует, что мы заинтересованы как в увеличении значения исходной целевой функции, так и в увеличении степени принадлежности выбираемого решения. Иными словами, мы имеем дело с двухкритериальной задачей максимизации.

Аксиома 4. Отношение \succ является инвариантным относительно положительного линейного преобразования, т.е. для всякой пары двумерных векторов \hat{y}, \hat{y}' , таких что $\hat{y} \succ \hat{y}'$, свойства аддитивности $(\hat{y}+c) \succ (\hat{y}'+c)$ и однородности $v \cdot \hat{y} \succ v \cdot \hat{y}'$ имеют место для любого вектора $c \in R^2$ и произвольного положительного числа v .

Из Аксиом 1 - 3 вытекает следующий фундаментальный результат (см. [3]).

Принцип Эджворта-Парето. Для любого множества $\text{Max}(\hat{Y})$ имеет место включение

$$\text{Max}(\hat{Y}) \subset P(\hat{Y}),$$

где

$$P(\hat{Y}) = \{\hat{y}^* \in \hat{Y} \mid \text{не существует } \hat{y} \in \hat{Y} \text{ такого, что } \hat{y}_i \geq \hat{y}_i^*, i=1,2, \text{ и } \hat{y} \neq \hat{y}^*\}$$

есть множество парето-оптимальных векторов.

Множество Парето, как правило, оказывается довольно широким. Для того чтобы сузить его, предлагается использовать сведения об отношении предпочтения \succ в форме простейшего кванта информации (см. [3]).

Определение. Пусть $\hat{y} = \hat{f}(x) = (h_1(x), h_2(x))$. Говорят, что задан *простейший квант информации об отношении \succ с парой положительных параметров w_i and w_j* , если для некоторой пары двумерных векторов $y', y'' \in R^2$, вида $y'_i - y''_i = w_i > 0$, $y''_j - y'_j = w_j > 0$, $i, j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, выполняется $y' \succ y''$. В этом случае говорят, что *i -й критерий значимее (важнее) j -го критерия*.

Из результатов автора [3] вытекает следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\hat{y} = \hat{f}(x) = (h_1(x), h_2(x))$, $i, j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, и задан *простейший квант информации с положительными параметрами w_i and w_j* . Тогда для любого множества $\text{Max}(\hat{Y})$ верно $\text{Max}(\hat{Y}) \subset \tilde{P}(\hat{Y}) \subset P(\hat{Y})$, где $\tilde{P}(\hat{Y}) = \hat{f}(P_g(\text{supp}(X)))$,

$$P_g(\text{supp}(X)) = \{x^* \in \text{supp}(X) \mid \text{не существует } x \in \text{supp}(X),$$

$$\text{такого что } g_i(x) \geq g_i(x^*), i=1,2; g(x) \neq g(x^*)\}$$

и двумерная вектор-функция $g = (g_1, g_2)$ составлена из компонент h_i and $w_j h_i + w_i h_j$.

С помощью приведенной Теоремы на основе простейших квантов информации можно сузить множество Парето до нового множества Парето $\tilde{P}(\hat{Y})$, которое заведомо содержит $\text{Max}(\hat{Y})$. В этом заключается первая фаза предлагаемого двухэтапного подхода к решению исходной задачи оптимизации числовой функции на нечетком множестве.

Вторая фаза состоит в применении подходящего способа скаляризации данной двухкритериальной задачи. Выбор того или иного способа скаляризации зависит от специфики решаемой задачи.

Пример. Рассмотрим задачу максимизации линейной функции двух переменных $f(x) = x_1 + x_2$ на нечетком множестве X с функцией принадлежности $\mu(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$, заданной на множестве $U = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Нетрудно найти множество Парето в двухкритериальной задаче с указанными функциями f и μ . А именно,

$$P_f(U) = \{x = (k, k) \mid k \in [0, \sqrt{2}/2]\}.$$

Предположим, что максимизируемая функция f является для нас более значимой, чем функция принадлежности μ нечеткого множества X , причем соответствующие параметры суть $w_1 = 0.15$, $w_2 = 0.1$. В соответствии с Теоремой имеем

$$g_2 = 0.1 \cdot f + 0.15 \cdot \mu = 0.1 \cdot (x_1 + x_2) + 0.15 \cdot (1 - x_1^2 - x_2^2), \quad g_1 = f = x_1 + x_2$$

$$P_g(U) = \{x = (k, k) \mid k \in [0.33, 1]\}.$$

В данном случае для выполнения второй фазы поиска решения применим, например, метод целевого программирования с евклидовой метрикой, изложенный в [3]. Несложные вычисления приводят к точке

$$x_1 = x_2 \approx 0.6, f(x_1, x_2) \approx 1.2, \mu(x_1, x_2) \approx 0.28,$$

которая является ближайшей в множестве $g(P_g(U))$ к так называемому надир вектору $(1.4, 0.734)$, компоненты которого представляют собой минимальные значения критериев f и μ соответственно на множестве Парето $P_g(U)$.

Заметим, что без указанного кванта информации наилучшим решением, полученным аналогично с помощью того же целевого программирования и надир вектора $(1.4, 1)$, является другое решение

$$x_1 = x_2 \approx 0.43, f(x_1, x_2) \approx 0.86, \mu(x_1, x_2) \approx 0.63.$$

Как видим, использование кванта информации привело к решению с бóльшим значением целевой функции f , но с меньшей величиной степени принадлежности μ полученного решения (x_1, x_2) .

Список литературы

1. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
2. Noghin V.D., Approximation of Convex Fuzzy Sets. In Proc. of Intern. Conf. Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 2017, pp. 127-129.
3. Noghin V.D. Pareto Set Reduction: an Axiomatic Approach. Springer, 2018.

Optimization of a numerical function on a fuzzy set

V.D. Nogin

St. Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

Анализ чувствительности выбора к изменению параметров частичных отношений предпочтений*

В.В. Подиновский

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Москва, Россия*

Параметрические многокритериальные модели предпочтений широко используются при анализе и выборе решений. Поскольку назначение точных значений параметров – непростая проблема, и такие значения оказываются недостаточно надежными, то обязательным этапом анализа прикладных задач является оценка чувствительности (устойчивости) результатов выбора.

Для многокритериальных задач методы анализа чувствительности первоначально разрабатывались применительно к модели предпочтений в виде аддитивной функции

* Исследование финансировалось в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

ценности, в которой параметрами являлись веса критериев, а затем и значения частных функций ценности (см., например, [1]). Разработанные для параметрических функций ценности подходы к анализу чувствительности в принципе не годятся для моделей с частичными бинарными отношениями: здесь требуются иные методы, основанные на новых идеях. Такие методы были разработаны в последнее десятилетие и представлены в ряде публикаций, указанных в списке литературы в конце данной работы, которая является, по сути, их обзором.

Далее рассматривается случай, когда множество стратегий X конечно: $X = \{x^1, \dots, x^n\}$, на нем задан векторный критерий $f = (f_1, \dots, f_m)$, состоящий из $m \geq 2$ частных критериев f_i – функций $X \rightarrow Z_i$, где Z_i – числовая область значений f_i . На множестве векторных оценок $Z = Z_1 \times \dots \times Z_m$ определено параметрическое отношение строгого предпочтения $P^0(\gamma)$: при фиксированном значении параметра γ из области его значений Γ это отношение есть строгий частичный порядок. Оно задается на основе накопленной информации о предпочтениях ЛПР (лица, принимающего решение) при помощи подходящего решающего правила. Отношение $P^0(\gamma)$ порождает на X аналогичное отношение $P(\gamma): x'P(\gamma)x'' \Leftrightarrow f(x')P^0(\gamma)f(x'')$. Последнее выделяет из X недоминируемых (по $P(\gamma)$) стратегий $X(\gamma)$. Анализ устойчивости может проводиться как для отдельных недоминируемых стратегий, так и для всего их множества в целом. В этом анализе базовую роль играет понятие потенциально доминирующей стратегии (стратегия x^k называется потенциально доминирующей над x^l , если найдется такое значение $\gamma \in \Gamma$, при котором верно $x^kP(\gamma)x^l$). Обозначим через Γ^{kl} множество значений параметра γ , при которых x^k доминирует над x^l . Пусть $X^{\downarrow l}$ – множество стратегий, потенциально доминирующих над x^l , а $N^{\downarrow l}$ – множество номеров таких стратегий. В [4, 5] доказывается ряд общих утверждений, упрощающих поиск потенциально доминирующих стратегий.

В многокритериальных моделях предпочтений, основанных на частичных бинарных отношениях, можно выделить два класса – модели с однородными (обычно безразмерными) параметрами и модели с неоднородными (имеющими разную «физическую» размерность) параметрами. Примерами моделей первого из указанных классов являются модели из теории (симметрической, или истинной) важности (однородных, т.е. имеющих общую шкалу, а потому и единую область значений $Z_0 = Z_1 = \dots = Z_n$) критериев [2]. Примерами моделей второго класса служат модели из теории параметрической важности неоднородных критериев и, в частности, из теории интервальных замещений критериев [3].

Устойчивость выбора к изменению оценок важности однородных критериев с порядковой шкалой или шкалой первой порядковой метрики и конечным множеством значений Z_0 изучена в [4 – 7]. Множество Γ формируется как «техническими» ограничениями (условиями положительности коэффициентов важности α_i , образующими вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, и их нормировки), так и ограничениями, основанными на качественной информации о важности (сведениях типа «Один критерий важнее другого» или «Критерии равноважны»).

В [4, 5] рассматривается случай точечной оценки важности, когда задается значение $\alpha^* \in A$, где $A = \Gamma$ – область значений α . Для α^* решением задачи выбора является множество $X(\alpha^*) = \{x^{*1}, \dots, x^{*l}, \dots, x^{*L}\}$ стратегий, недоминируемых по $P(\alpha^*)$. Проверка потенциальной доминированности одной стратегии над другой сводится к решению задачи линейного программирования. Степень устойчивости x^{*l} относительно потенциально доминирующей над ней x^k оценивается при помощи расстояния d^{kl} от точки α^* до множества A^{kl} : $d^{kl} = \inf_{\alpha \in A^{kl}} d(\alpha, \alpha^*)$. Расчет этой величины при помощи известных приемов, основанных на введении новых переменных, сводится к задаче линейного программирования, если расстояние определять одной из следующих формул:

$$d^{\Sigma}(\alpha', \alpha'') = \sum_{i=1}^m |\alpha'_i - \alpha''_i|, \quad d^{-}(\alpha', \alpha'') = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |\alpha'_i - \alpha''_i|.$$

Степень чувствительности (устойчивости) стратегии x^{*l} характеризуется наименьшим относительным значением δ^l величин d^{kl} для всех потенциально доминирующих над ней стратегий: $\delta^l = d^l/D$, $D = \sup_{\alpha \in A} d(\alpha, \alpha^{*l})$, $d^l = \min_{k \in N^l} d^{kl}$.

В [6, 7] рассматривается случай интервальных оценок степеней превосходства в важности $h_{ij} = \alpha_i / \alpha_j$ одних критериев над другими, которые предварительно упорядочены по важности на основе качественной информации и перенумерованы в порядке невозрастания их важности: $1 \leq a_i \leq h_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, m-1$ (если критерии равноважны, то обе соответствующие границы равны 1). Здесь роль параметра γ играют границы интервалов, образующие вектор $s = (a_1, b_1, \dots, a_{m-1}, b_{m-1})$. Область $S = \Gamma$ значений s задается указанными выше двойными неравенствами. Интервальной оценкой является значение $s^* = (a_1^*, b_1^*, \dots, a_{m-1}^*, b_{m-1}^*) \in S$. Излагается подход к анализу чувствительности к изменению только отдельных интервалов. Проверка потенциальной доминируемости и оценка чувствительности осуществляется путем проверки выполнения или решения ряда двойных неравенств. Показателем чувствительности служат модули возможных изменений границ рассматриваемого интервала.

В [8, 9] рассматриваются параметрические модели пред-почтений, возникающие при использовании методов параметрической важности (неоднородных) критериев. Предпочтения представляются в форме интервалов неопределенности замещения (ИНЗ) критерия f_i критерием f_j : $\lambda_{ij} = (\lambda_{ij}^-, \lambda_{ij}^+)$, где $0 < \lambda_{ij}^- < \lambda_{ij}^+$, обладающих следующими свойствами:

$$(y \| y_i - t, y_j + \lambda_{ij}^+ t) P y, \quad \forall y \in Z, t > 0, y_i - t \in Z, y_j + \lambda_{ij}^+ t \in Z;$$

$$y P (y \| y_i - t, y_j + \lambda_{ij}^- t), \quad \forall y \in Z, t > 0, y_i - t \in Z, y_j + \lambda_{ij}^- t \in Z.$$

Выделяется случай, когда ИНЗ заданы для каждого из $m-1$ критериев базовым критерием f_1 , так что здесь $\gamma = \lambda = (\lambda_{21}^-, \lambda_{21}^+, \dots, \lambda_{m1}^-, \lambda_{m1}^+)$ и область $\Gamma = \Lambda$ значений параметра λ задается $m-1$ двойными неравенствами. Оценкой ИНЗ являются значения его границ. Решающее правило выглядит в виде одного двойного неравенства, линейного относительно границ ИНЗ. Поэтому проверка потенциальной доминируемости стратегии сводится к решению задачи линейного программирования.

Поскольку «физическая» размерность границ ИНЗ может быть различной, то для соизмерения степеней сужения разных ИНЗ из $\{\lambda_{21}, \dots, \lambda_{m1}\}$ до $\{\hat{\lambda}_{21}, \dots, \hat{\lambda}_{m1}\}$, где $(\hat{\lambda}_{i1}^-, \hat{\lambda}_{i1}^+) \subseteq (\lambda_{i1}^-, \lambda_{i1}^+)$, $i \in M' = \{2, \dots, m\}$, вводятся величины $d_i = \lambda_{i1}^+ - \hat{\lambda}_{i1}^-$, где $\hat{\lambda}_{i1}^- = \lambda_{i1}^- + t_i^- d_i$, $\hat{\lambda}_{i1}^+ = \lambda_{i1}^+ - t_i^+ d_i$, $t_i^- \geq 0$, $t_i^+ \geq 0$, $i \in M'$, так что неотрицательные переменные t_i^- и t_i^+ должны удовлетворять условиям: $t_i^- + t_i^+ < 1$, $i \in M'$. Относительная длина суженного ИНЗ равна $(\hat{\lambda}_{i1}^+ - \hat{\lambda}_{i1}^-) / d_i = 1 - (t_i^+ + t_i^-) > 0$. Поэтому степени сужения ИНЗ можно оценивать величинами t_i^- и t_i^+ : чем они больше, тем сильнее сужение соответствующего ИНЗ. В итоге приходим к многокритериальной задаче максимизации с $2(m-1)$ равноважными критериями – величинами t_i^- и t_i^+ .

Если степень сужения всех ИНЗ оценивать одним обобщенным показателем $\min_{i \in M'} \min\{t_i^-, t_i^+\}$, то задачу его максимизации, которая возникает при анализе чувствительности, можно свести к задаче линейного программирования. Можно использовать и более тонкий, лексимаксный подход, предполагающий решение нескольких задач линейного программирования [9]. Если же применять другие показатели, то придется решать нелинейные оптимизационные задачи [8].

Список литературы

1. Insua D.A., French S. A framework for sensitivity analysis in discrete multi-objective decision-making // *European Journal of Operational Research*. 1991. V. 54. P. 176–190.
2. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Учебное пособие. М.: Физматлит, 2007.
3. Подиновский В.В. Параметрическая важность критериев и интервалы неопределенности замещений в анализе многокритериальных задач // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2008. Т. 48, № 11. С. 1979–1998. Английский перевод: Podinovski V.V. Parametric importance of criteria and intervals of value tradeoffs uncertainty in the analysis of multicriteria problems // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2008. V. 48, № 11. P. 1981–1998.
4. Подиновский В.В. Анализ устойчивости результатов выбора при частичном отношении предпочтения // *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2009. № 4. С. 45–52.
5. Podinovski V.V. Sensitivity analysis for choice problems with partial preference relations // *European Journal of Operational Research*. 2012. V. 221. P. 198–204.
6. Нелюбин А.П. Анализ устойчивости многокритериального выбора методами теории важности критериев при изменении интервальных оценок важности // *Открытое образование*. 2012. № 2. С. 47–51.
7. Nelyubin A.P. Criteria importance theory: Sensitivity analysis of multicriterial choice using interval importance information // *American Journal of Control System and Information Technology*. 2013. No 1. P. 13–17.
8. Подиновский В.В. Чувствительность многокритериального выбора к изменению оценок важности неоднородных критериев // *Информационные технологии в науке, образовании и управлении*. 2017. № 4. С. 23–27.
9. Подиновский В.В. Анализ чувствительности многокритериального выбора к изменению интервальных оценок замещений критериев // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2018. Т. 58, № 3. (В печати). Английский перевод: Podinovski V.V. Sensitivity analysis of mulcriteria choice to changes in intervals of value tradeoffs // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018, V. 48, No 3. (In press).

Analysis of the sensitivity of the choice to change the parameters of partial preference relations

V.V.Podinovski

National research University "Higher school of Economics", Moscow, Russia

Аппроксимация множества эффективных векторных оценок на основе универсальной вычислительной процедуры

Я.И. Рабинович

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Разработана новая методология решения задачи многокритериальной оптимизации, позволяющая в рамках универсальной вычислительной процедуры адаптировать и модифицировать существующие численные методы скалярной оптимизации для построения множества эффективных векторных оценок [1].

Универсальная процедура опирается на ряд неформальных соображений. Пусть в евклидовом пространстве \mathbf{R}^s на непустом компактном множестве допустимых решений $X \subset \mathbf{R}^s$ задана составленная из m частных критериев эффективности

$$\{w_k(x)\}_{k \in I}, \quad I = \{k | 1 \leq k \leq m\} \quad (1)$$

вектор-функция $w(x) \in \mathbf{R}^m$, каждую компоненту которой желательно увеличивать на допустимом множестве X . Для построения множества векторных оценок, эффективных по критерию $w(x)$, недостаточно стремиться к увеличению каждого частного критерия из набора (1), поскольку в этом случае достигаются лишь «рекордные» на множестве X значения каждого из частных критериев, а не множество эффективных векторных оценок в целом. Необходимо, вообще говоря, добиваться увеличения значений частных критериев в каждом *подмножестве* критериев из набора (1), с той лишь оговоркой, что добившись улучшения значений критериев для фиксированного подмножества $\{w_k(x)\}_{k \in M}$, где $\emptyset \neq M \subset I$, можно не беспокоиться о значениях критериев в любом вложенном подмножестве $\{w_k(x)\}_{k \in K}$, $K \subset M$.

Дадим строгое описание универсальной вычислительной процедуры аппроксимация множества эффективных векторных оценок.

На множестве допустимых решений $X \subset \mathbf{R}^s$ строится последовательность множеств $\{X_t\}_{t=1}^\infty \subset X$, где по-прежнему X – непустое компактное множество. Если $x^1 \in X$ – произвольное допустимое решение, $X_1 = \{x^1\}$ – произвольное начальное приближение, и известно множество X_t , $t \geq 1$, то следующее за ним множество X_{t+1} подчиняется соотношениям

$$X_{t+1} = \bigcup_{x \in X_t} X_{t+1}(x), \quad X_{t+1}(x) = \{x\} + \bigcup_{J \in M_t(x)} \{h(x, J)\} \subset X. \quad (2)$$

В согласии с соотношениями (2) всякая точка $x \in X_t$ порождает на следующем $t+1$ – ом уровне непустую векторную сумму множеств $X_{t+1}(x)$, причем направление $h(x, J)$ перехода из опорной точки $x \in X_t$ в следующую точку $x+h(x, J) \in X_{t+1}(x)$, $J \in M_t(x)$ удовлетворяет условиям

$$h(x, \emptyset) = 0, \quad h(x, J) \neq 0, \quad \emptyset \neq J \subset I = \{k | 1 \leq k \leq m\}, \quad (3)$$

где ненулевые направления $h(x, J) \neq 0$ подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} x+h(x, J) &\in Y(x, \varepsilon) \cap Y_J(x, \varepsilon), \quad \emptyset \neq J \subset I = \{k | 1 \leq k \leq m\}, \\ Y(x, \varepsilon) &= \left\{ y \in X \left| \left| \frac{w_k(y)}{w_k(x)} - 1 \right| \leq \frac{\gamma \varepsilon}{2\eta}, \quad k \in I \right\}, \\ Y_J(x, \varepsilon) &= \left\{ y \in X \left| \frac{w_k(y)}{w_k(x)} - 1 \geq \frac{\gamma \varepsilon^2}{2\eta}, \quad k \in J \right\}, \\ \varepsilon = \varepsilon_t(x) &\in [0, 1), \quad \gamma = \min_{z \in X} \min_{k \in I} w_k(z), \quad \eta = \max_{z \in X} \sum_{k \in I} w_k(z), \end{aligned} \quad (4)$$

причем составленная из частных критериев эффективности (1) m – мерная вектор-функция $w(x)$ положительно определена и непрерывна на множестве допустимых решений X .

Последовательность множеств (2) в каждой опорной точке $x \in X_t$ ветвится, причем степень ее ветвления $|M_t(x)|$ определяет множество не вложенных друг в друга подмножеств $M_t(x) \subset 2^I$, заданное соотношениями

$$M_t(x) = \begin{cases} N_t(x), & \text{если } N_t(x) \neq \emptyset, \\ \{\emptyset\}, & \text{если } N_t(x) = \emptyset, \end{cases} \quad (5)$$

$$N_t(x) = \left\{ J \subset I \left| \begin{array}{l} Y(x, \varepsilon) \cap Y_J(x, \varepsilon) \neq \emptyset, \\ Y(x, \varepsilon) \cap Y_M(x, \varepsilon) = \emptyset, \quad M \neq J \subset M \subset I \end{array} \right. \right\}.$$

Наибольшая степень ветвления последовательности (2) совпадает с наибольшим числом не вложенных друг в друга подмножеств множества номеров частных критериев эффективности $I = \{k | 1 \leq k \leq m\}$, так что

$$|M_t(x)| \leq \frac{m!}{\lfloor m/2 \rfloor! (m - \lfloor m/2 \rfloor)!},$$

где $\lfloor z \rfloor$ – целая часть z .

Соотношения (4), (5) включают величину $\varepsilon = \varepsilon_t(x) \in [0, 1)$ – параметр возмущения, который в начальной точке x^1 и в любых соседних точках $x^t \in X_t$, $x^{t+1} \in X_{t+1}(x^t)$ последовательности (2) таких, что

$$x^{t+1} = x^t + h(x^t, J_t), \quad J_t \in M_t(x), \quad (6)$$

удовлетворяет условиям

$$\varepsilon_1(x^1) = \kappa \in (0, 1), \quad \varepsilon_{t+1}(x^{t+1}) = \begin{cases} \kappa \varepsilon_t(x^t), & \text{если } Q_t = \emptyset, \\ \varepsilon_t(x^t), & \text{если } Q_t \neq \emptyset, \end{cases} \quad (7)$$

$$Q_t = \bigcap_{q \leq t, \varepsilon_q(x^q) = \varepsilon_t(x^t)} J_q,$$

где величина κ определяет степень дробления параметра возмущения. Эта величина может быть выбрана любой на интервале $(0, 1)$, но является фиксированной на протяжении всей вычислительной процедуры.

В качестве точки $y = x + h(x, J) \in Y(x, \varepsilon) \cap Y_J(x, \varepsilon)$ в соотношениях (2) можно использовать любую конкретную (например, первую) из точек, которую строит стартующий в точке $x \in X_t$ последовательный скалярный алгоритм внутренней точки, решая задачу скалярной максимизации

$$\varphi(y) = \min_{k \in J} \left\{ \frac{w_k(y)}{w_k(x)} \right\} \xrightarrow{y \in Y(x, \varepsilon_t(x))} \max, \quad (8)$$

если в этой точке достигается требуемое в (3) значение максимизируемой функции $\varphi(y)$:

$$\min_{k \in J} \left\{ \frac{w_k(y)}{w_k(x)} \right\} \geq 1 + \frac{\gamma \varepsilon_t(x)^2}{2\eta};$$

Тем самым критерием применимости такого скалярного алгоритма в рамках универсальной процедуры (1)–(7) является его способность решать в любой фиксированной опорной точке $x \in X$ задачу (8): задачу максимизации непрерывной функции минимума $\varphi(y)$ на заданном соотношениями (4) компактном множестве $Y(x, \varepsilon)$.

Если вектор–функция $w(x) \in \mathbf{R}^m$ положительно определена и псевдовогнута на непустом выпуклом компакте X , то последовательность множеств $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$, заданная соотношениями (1)–(7), аппроксимирует множество эффективных векторных оценок в следующем смысле. Справедлива

Теорема. Отклонение множества эффективных векторных оценок W_e от аппроксимирующего множества $w(X_t)$ и отклонение множества $w(X_t)$ от множества слабо эффективных векторных оценок W_0 стремятся к нулю с ростом номера аппроксимации t :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(W_e, w(X_t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} D(w(X_t), W_0) = 0,$$

где величина

$$D(W, U) = \sup_{w \in W} \inf_{u \in U} \|w - u\|, \quad \emptyset \neq W, U \subset \mathbf{R}^m,$$

– отклонение множества W от множества U .

Замечание. Утверждение теоремы остается справедливым, если предположение о псевдогогнутости вектор-функции $w(x) \in \mathbf{R}^m$ заменить следующим более слабым предположением.

На непустом выпуклом компакте X вектор-функция $w(x)$ удовлетворяет условию Липшица, а каждая ее компонента w_k подчиняется соотношениям: для любых фиксированных $x, y \in X$ при условии $w_k(y) \geq w_k(x)$ можно указать величину $\omega = \omega(x, y) \in (0, 1]$ такую, что при всех $z \in [x, y]$ выполняется неравенство

$$\|y - x\| [w_k(z) - w_k(x)] \geq \omega \|z - x\| [w_k(y) - w_k(x)];$$

знание точных значений константы Липшица либо величин ω не предполагается.

В заключение отметим, что существует основанный на принципах универсальной процедуры численный метод аппроксимации множества эффективных векторных оценок, обладающий следующим свойством [2]: если предположение о псевдогогнутости векторного критерия эффективности $w(x) \in \mathbf{R}^m$ и выпуклости допустимого множества X не выполняется, то множество предельных векторных оценок определенной в (2) последовательности $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$ включает в себя множество оценок, удовлетворяющих необходимым условиям слабой эффективности.

Список литературы

1. Рабинович Я.И. Универсальная процедура построения множества Парето. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017, Т. 57 № 1. С. 28-47.
2. Рабинович Я.И. Построение множества эффективных векторных оценок и задача сравнения аппроксимаций. М.: ВЦ РАН, 2012.

Approximation of the set of effective vector estimates based on a universal computational procedure

Y. I. Rabinovich

A. A. Dorodnicyn's Computer center FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Fuzzy MCDA: Evident Advantages and Nontrivial Drawbacks*

B. Yatsalo¹, A. Korobov¹, and L. Martinez¹

¹IATE NRNU MEPhI, Obninsk, RF, ²University of Jaen, Jaen, Spain

Abstract. Fuzzy Multi-Criteria Decision Analysis (FMCDA) models, as a rule, are based on an extension of classical MCDA methods. For justified use of an FMCDA model, the fulfillment of

* This research is supported by Russian Fund RFBR: project 18-29-03166

corresponding axioms (requirements), associated with this model, should be analyzed. In this paper, violation of basic axioms for FMCDAs is discussed for FTOPSIS as an example.

The most challenging difficulty in which decision analysis methods sometimes fail is the uncertainty. In such cases, the use of fuzzy methods, that have been included in the multi-criteria decision analysis, provides a useful approach for handling three main MCDA problematics: choosing, ranking and sorting.

FMCDAs [1] present a claiming and popular approach to treatment and analysis of uncertainties of objective data and subjective judgments. In [2], the statistical data on usage of existing FMCDAs methods (FTOPSIS, FELECTRE, FVIKOR, FPROMETHEE, and others) are presented. E.g., a literature review for FTOPSIS (using SCOPUS) gives 4,010 published papers; FELECTRE and FVIKOR have been used in more than 1,100 and 950 papers correspondingly.

The management and analysis of uncertainties by fuzzy modeling in real-world decision problems not only requires the use of various fuzzy functions and models, but also inevitably leads to comparison of fuzzy quantities. Thus, in fuzzy decision analysis, ranking of fuzzy quantities plays a key role [3, 4].

For empirical methods, such as, e.g., TOPSIS, PROMETHEE, and AHP, a key requirement/axiom concerns the generalized (or overall) criterion $V(\cdot)$ (as a rule, benefit one, i.e., the more the better): if alternative A exceeds alternative B according to Pareto, then $(A) \geq (B)$.

In this contribution, a fuzzy extension of TOPSIS method, FTOPSIS, is considered. FTOPSIS is among of the most popular methods in applications [2]. The violation of the key axiom for generalized criterion (fuzzy coefficient of closeness) of FTOPSIS are explored here for several ranking methods along with simplified and proper assessing functions of fuzzy variables based on transformation methods to overcome the overestimation problem [5].

Below, the definitions of Fuzzy Number (FN), α -cut, and Fuzzy Preference Relation (FPR) are considered.

Definition 1. A fuzzy number (FN) Z is considered here as a convex, normal, and restricted fuzzy set in \mathbb{R} with a continuous or upper-continuous membership function $\mu_Z(x)$. It means, we assume that there exist two real numbers c_1 and c_2 , $c_1 \leq c_2$, such that:

$$Z = \{(x, \mu_Z(x)): \mu_Z(x) > 0 \ x \in (c_1, c_2), \mu_Z(x) = 0, x \notin [c_1, c_2]\} \quad (1)$$

\mathbb{F} denotes the set of FNs according to (1).

Definition 2. Let $Z \in \mathbb{F}$ be a fuzzy number and $\alpha \in (0,1]$. An α -cut [6, 7] of FN Z is defined as:

$$Z_\alpha = [A_\alpha, B_\alpha] = \{x \in \mathbb{R}: \mu_Z(x) \geq \alpha\}. \quad (2)$$

If $\alpha = 0$ and $[A_0, B_0] = [c_1, c_2]$, then FN Z can be identified with the family of intervals

$$Z = \{[A_\alpha, B_\alpha]\} (\alpha \in [0,1]). \quad (3)$$

Definition 3. Fuzzy preference relation R is a fuzzy relation on $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$: $R = ((Z_i, Z_j), \mu_R(Z_i, Z_j))$, where membership function $\mu_R(Z_i, Z_j) \in [0,1]$ indicates the degree of preference Z_i over Z_j .

Definition 4. Let R be a fuzzy preference relation on $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. For any $Z_i, Z_j \in \mathbb{F}$, their fuzzy ranking is defined as:

$$Z_i \succcurlyeq Z_j \text{ if } \mu_R(Z_i, Z_j) \geq 0.5, \ Z_i \succ Z_j \text{ if } \mu_R(Z_i, Z_j) > 0.5, \text{ and } Z_i \sim Z_j \text{ if } \mu_R(Z_i, Z_j) = 0.5 \quad (4)$$

The following denotations are also used for fuzzy preference relation $R(Z_i, Z_j) \equiv (Z_i \geq Z_j) \equiv (Z_j \leq Z_i)$:

$$\mu_{ij} = \mu_R(Z_i, Z_j) = \mu_R(Z_i \geq Z_j) = \mu_R(Z_j \leq Z_i) \quad (5)$$

Note also that the symbols \geq, \leq used here for notational purposes are different from the symbols $\succcurlyeq, \preccurlyeq$, which are associated with ranking FNs.

The ranking of FNs is a key stage in FMCDA. Below, the main classes of fuzzy ranking methods are briefly provided [7-9].

1. *Defuzzification based ranking methods.* Within these methods, FNs are represented by real numbers with their subsequent ranking [7, 8]. In this contribution, Centroid Index (*CI*) and Integral of Mean for α -cut (*IM*) defuzzification based methods are used. According to the *CI* method, defuzzification of FN Z is based on the following formula:

$$CI(A) = \int_{c_1}^{c_2} x \mu_A(x) dx / \int_{c_1}^{c_2} \mu_A(x) dx \quad (6)$$

(with denotations according to (1)). Within *IM* method, the following value for FN $Z = \{[A_\alpha, B_\alpha]\}$ is assessed:

$$IM(Z) = \int_0^1 (A_\alpha + B_\alpha) / 2 d\alpha \quad (7)$$

FN with higher *CI/IM* value has a higher rank.

2. *Ranking fuzzy methods based on the distance to a reference (etalon) set.* These methods define the reference sets and evaluate each fuzzy number Z_i by computing and comparing its distance to the reference set (the less distance corresponds the higher rank) [7, 8].

3. *Ranking fuzzy methods based on pairwise comparison.* The ordering of fuzzy quantities in this case consists of pairwise comparisons, and it is the most extensively studied approach [9].

In this paper, the two defuzzification based ranking methods, Centroid Index (*CI*) and Integral of Mean values for α -cuts (*IM*), along with pairwise comparison method based on the Yuan's fuzzy preference relation are considered. The latest method is presented below.

For FNs $Z_i = \{[A_\alpha^i, B_\alpha^i]\}$ and $Z_j = \{[A_\alpha^j, B_\alpha^j]\} \in \mathbb{F}$,

$$Z_{ij} = Z_i - Z_j = \{[A_\alpha, B_\alpha]\} = \{[A_\alpha^i - B_\alpha^j, B_\alpha^i - A_\alpha^j]\}. \quad (8)$$

Within the *Yuan's fuzzy preference relation* [4], $R_Y = ((Z_i, Z_j), \mu_Y(Z_i, Z_j))$, the area, S_Y^+ , is considered as a distance of the positive part of $Z_{ij} = \{[A_\alpha, B_\alpha]\}$ to the axis *OY*, that is computed as:

$$S_Y^+(Z_{ij}) = \int_0^1 (B_\alpha \theta(B_\alpha) + A_\alpha \theta(A_\alpha)) d\alpha \quad (9)$$

where $\theta(x)$ – is the Heaviside function: $\theta(x) = \{1, x \geq 0; 0, x < 0\}$.

Consider $S_Y^-(Z_{ij}) = S_Y^+(Z_{ji})$. The total adjusted area under FN Z_{ij} is assessed as $S_Y(Z_{ij}) = S_Y^+(Z_{ij}) + S_Y^-(Z_{ij})$.

Definition 5. Let Z_i and $Z_j \in \mathbb{F}$, and $Z_{ij} = Z_i - Z_j$. The Yuan's fuzzy preference relation, $R_Y(Z_i, Z_j)$, in which $\mu_Y(Z_i, Z_j) = \mu_Y(Z_i \geq Z_j)$ represents the degree of preference of Z_i over Z_j , is defined as follows:

$$\mu_{ij} = \mu_Y(Z_i \geq Z_j) = S_Y^+(Z_{ij}) / S_Y(Z_{ij}), \quad S_Y(Z_{ij}) > 0; \quad (10)$$

for singletons $Z_i = c_i, Z_j = c_j, c_{ij} = c_i - c_j$: $\mu_{ij} = \mu_Y(Z_i \geq Z_j) = \{(1 \text{ if } c_{ij} > 0), (0 \text{ if } c_{ij} < 0), (0.5 \text{ if } c_{ij} = 0)\}$.

The properties of Yuan's preference relation have been analyzed in [4, 9].

Seven axioms have been suggested [8] within ranking of FNs with the use of a ranking method \mathbb{M} . Among them, the axioms A1 (reflexivity), A2 (antisymmetry), A3 (transitivity), A4 (distinguishability), and A5 (absence of ranks reversal) were analyzed. In this paper, the axioms A6 and A7 are considered:

- A6: Let $A, B, A + C$ and $B + C$ be elements of \mathbb{S} . If $A \succcurlyeq B$ by \mathbb{M} on \mathbb{S} , then $A + C \succcurlyeq B + C$ by \mathbb{M} on \mathbb{S} ;
- A7: Let A, B, AC and BC be elements of \mathbb{S} and $C > 0$. If $A \succcurlyeq B$ by \mathbb{M} on \mathbb{S} , then $AC \succcurlyeq BC$ by \mathbb{M} on \mathbb{S} .

It was proved [7, 8] that ranking of FNs by IM and R_Y satisfies the axioms A1 - A6 and both do not satisfy the axiom A7. Ranking by CI satisfies the axioms A1 - A5 and does not satisfy the axioms A6 and A7.

There are different variants of transition from classical TOPSIS model(s) to FTOPSIS, e.g., [10, 11]. In this paper, a general approach to FTOPSIS is considered: fuzzy criterion values and fuzzy weight coefficients are FNs of the general type. The following steps are implemented within FTOPSIS.

1. Setting the list of alternatives $\mathbf{a}_i; i = 1, \dots, n$, and criteria, $C_j, j=1, \dots, m$, for the multicriteria problem under investigation. Evaluating criterion values $C_{ij} = \{[A_\alpha^{ij}, B_\alpha^{ij}]\}$.
2. Normalization of the criterion values. For alternative $\mathbf{a}_i = (C_{i1}, \dots, C_{im})$, the following linear transformation of criterion values, $c_{ij} \rightarrow x_{ij}$ is applied:
 - (i) for benefit criteria $\{j\}$: $x_{ij} = (C_{ij} - A_0^{0j}) / (B_0^{0j} - A_0^{0j})$; (ii) for cost criteria: $x_{ij} = (B_0^{0j} - C_{ij}) / (B_0^{0j} - A_0^{0j})$; $\overline{supp}(x_{ij}) \subseteq [0,1]$, and in new dimensionless x -scale all the criteria are benefit ones. The suggested approach for normalization of criterion values is effective for computations within FTOPSIS.
3. Choice of ideal and ant-ideal alternatives. The following *ideal*, I^+ , and *anti-ideal*, I^- , solutions (m -dimensional crisp points) are considered: $I^+ = (1, \dots, 1)$, $I^- = (0, \dots, 0)$.
4. Setting weight coefficients $\{w_j\}, j = 1, \dots, m$, for the criteria [10, 11].
5. Calculating the distances of each alternative $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$ to the ideal and anti-ideal alternatives (below, $p=2$):

$$D_i^+ = d(\mathbf{x}_i, I^+) = (\sum w_k^p (1 - x_{ik})^p)^{1/p}, \quad D_i^- = d(\mathbf{x}_i, I^-) = (\sum w_k^p x_{ik}^p)^{1/p} \quad (11)$$

6. Assessing generalized criterion D_i for alternative x_i :

$$D_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-} = \frac{(\sum w_k^p x_{ik}^p)^{1/p}}{(\sum w_k^p (1 - x_{ik})^p)^{1/p} + (\sum w_k^p x_{ik}^p)^{1/p}} \quad (12)$$

7. Ranking alternatives based on the chosen method(s) for ranking of FNs $\{D_i, i = 1, \dots, n\}$.

In fuzzy modeling with the use of standard fuzzy arithmetic, the overestimation problem [5] has often the place, and the level of overestimation depends on the form of fuzzy expression. To overcome the overestimation problem, the Transformation Method(s) (TM) may be used [5]. The overestimation in FTOPSIS, when using standard fuzzy arithmetic, has the place as FNs w_k and x_{ik} are in nominator and denominator in (12) (dependent fuzzy variables). Here, the following denotations are used: Model-O (Overestimation), when standard fuzzy arithmetic is used, and Model-T (Transformation), when (Reduced) Transformation method is implemented.

Definition 5. Let $C_{ij} = C_j(\mathbf{a}_i)$ is a criterion value of alternative \mathbf{a}_i for criterion $C_j, j=1, \dots, m; i = 1, \dots, n$. Alternative \mathbf{a}_i dominates alternative \mathbf{a}_k according to *Pareto*, $\mathbf{a}_i \succ_p \mathbf{a}_k$, if \mathbf{a}_i is not worse than \mathbf{a}_k for all criteria and a chosen ranking method, i.e., $C_{ij} \succcurlyeq C_{ik}$ for all benefit criteria $\{j\}$, and $C_{ij} \preccurlyeq C_{ik}$ for all cost criteria $\{j\}$, and at least for one of the criteria at least one of the indicated inequalities is strong.

The basic and intuitively understandable axioms for the generalized criterion $D(\cdot)$ of an FTOPSIS model (criterion $D(\cdot)$ is considered as a benefit one, i.e., the more the better), are as follows:

- *Axiom* AG1: if alternative \mathbf{a} dominates alternative \mathbf{b} according to Pareto, and $D(\cdot)$ is a generalized criterion for an FTOPSIS model, then $D(\mathbf{a}) \succcurlyeq D(\mathbf{b})$.
- *Axiom* AG2: if $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ then $D(\mathbf{a}) \sim D(\mathbf{b})$.

For classical MCDA methods, including TOPSIS, axioms A_{G1} and A_{G2} have the place. Below, the fulfillment of these axioms for FTOPSIS model is explored. Within FTOPSIS model under consideration, criterion values, weight coefficients, and the values of generalized criterion, $D(\mathbf{a}_i)$, are FNs. Therefore, signs \succ and \preceq in Definition 5 and axioms A_{G1} and A_{G2} correspond to the comparison of FNs in accordance with the ranking method chosen (in our research, methods CI , IM , or R_Y).

FTOPSIS models are based on implementing the functions (11) and (12). These formulas include, among others, the following functions $f(x)$ and $f(x; y)$: xy , x^2 , \sqrt{x} , x/y , $x+y$. The use of each of these functions can lead to “violation of original order of FNs” for ranking methods under consideration. E.g., for triangular FNs (TrFNs), $A=(0,2,3,4)$ and $B=(0.2,1.55,4.5)$, $CI(A)=3.833 > CI(B)=3.667$, however, $CI(\sqrt{B})=1.853 > CI(\sqrt{A})=1.745$.

Thus, taking into account violation of axioms $A6$ and/or $A7$ for three ranking methods under consideration, violation of the basic axioms A_{G1} and A_{G2} for FTOPSIS is expected (both for Model-O and Model-T). To demonstrate this, consider three alternatives, a_1 , a_2 and a_3 with the following criterion values: $\mathbf{a}_1 = (c_{11}, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (c_{21}, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = ((2, 2.7, 6), 0.9, 0.9)$, and weight coefficients: $w_1 = (0.183, 0.1915, 0.2)$ (w_1 is TrFN), $w_2 = 0.383$, and $w_3 = 0.426$; in the case $c_{11} = (1, 4, 4)$ and $c_{21} = (1, 1, 9)$, for ranking by Yuan's preference relation R_Y , $\mu_Y(c_{11}, c_{21}) = 0.54$, correspondingly, $\mathbf{a}_1 \succ_P \mathbf{a}_2$, however for generalized criterion $D(\mathbf{a})$, $D(\mathbf{a}_2) \succ_Y D(\mathbf{a}_1)$, as $\mu_Y(D(\mathbf{a}_2), D(\mathbf{a}_1)) = 0.51$ for TOPSIS-O, and $\mu_Y(D(\mathbf{a}_2), D(\mathbf{a}_1)) = 0.53$ for TOPSIS-T model. It may be added that axiom A_{G2} is violated for FTOPSIS models in (almost) all cases.

The similar examples of the axioms A_{G1} and A_{G2} violation for CI - and IM -ranking methods can also be presented.

In addition to the model TOPSIS-O/T (12), a simplified “triangular” FTOPSIS model was also considered. Within this model, input data are triangular FNs (TrFNs), results of all the indicated above algebraic functions within FTOPSIS are approximated by corresponding TrFNs; the resulting generalized criterion values D_i are TrFNs, and defuzzification based methods are implemented for ranking D_i , $i = 1, \dots, n$. Violation of the axioms A_{G1} and A_{G2} for such a simplified FTOPSIS/TrFNs model and CI - IM ranking methods are presented similarly.

Thus, the following proposition has the place for all ranking methods under consideration.

Proposition 1. In the general case, when there is no restrictions on input data (fuzzy criterion values and fuzzy weight coefficients), the Axioms A_{G1} and A_{G2} for FTOPSIS models are violated.

Conclusions. In this contribution, violation of the basic requirements/axioms (A_{G1} and A_{G2}) for generalized criterion of FTOPSIS models is analyzed. The key question in such a situation is as follows: are there the approaches to correct the use of FTOPSIS model(s) under the additional requirements or constraints?

There may be several approaches to overcoming this problem. One of them includes an extension of the notion of equivalence of two FNs (alternatives) to make the axiom A_{G2} more flexible. For this, Definition 2 for equivalent FNs can be modified. To hold the axiom A_{G1} , some restrictions on the use of allowable input values (e.g., the use of distinguishable FNs [12] or FNs presented with linguistic variables) can be considered.

Thus, correctness of different Fuzzy MCDA methods regarding the fulfillment of basic axioms requires a careful exploring along with effective approaches to overcoming corresponding problems.

References

1. S.J. Chen and C.L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*. V. 375. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

2. C. Kahraman, S. Cevik Onar, and B. Oztaysi. Fuzzy multicriteria decision-making: A literature review //International Journal of Computational Intelligence Systems, 8(4):637-666, 2015.
3. R.E. Bellman and L.A. Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment //Management Science, 17:141-163, 1970.
4. Y. Yuan. Criteria for evaluating fuzzy ranking methods //Fuzzy Sets and Systems, 44:139-157, 1991.
5. M. Hanss. *Applied Fuzzy Arithmetic*. Springer-Verlag, 2005.
6. D. Dubois and H. Prade. Operations on fuzzy numbers. //International Journal of Systems Science, 9(6):613-626, 1978.
7. X. Wang, D. Ruan, and E.E. Kerre. *Mathematics of Fuzziness Basic Issues*. Springer-Verlag, 2009.
8. X. Wang and E.E. Kerre. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). //Fuzzy Sets and Systems, 118(3):375-385, 2001.
9. X. Wang and E.E. Kerre. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II). //Fuzzy Sets and Systems, 118(3):387-405, 2001.
10. C.-T. Chen. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. //Fuzzy Sets and Systems, 114(1):1-9, 2000.
11. T. Kayaand and C.Kahraman. Multicriteria decision making in energy planning using a modified fuzzy TOPSIS methodology. //Expert Systems with Applications, 38(6):6577-6585, 2011.
12. B. Yatsalo and L. Martinez. Fuzzy rank acceptability analysis: A confidence measure of ranking fuzzy numbers. //IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018 (accepted to publication).

СЕКЦИЯ № 5

НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Дикусар В.В. Решение несобственных задач методами факторного анализа | 153 |
| Трембачёва О.С. Коррекция задач классификации в подпространстве признаков по минимуму полиэдральных норм | 155 |

Решение несобственных задач методами факторного анализа

В.В.Дикусар

МФТИ, Москва, Россия

Несобственными принято называть те задачи, которые в силу тех или иных причин не имеют решения.

Частным случаем модели с несовместной системой ограничений являются несобственные задачи линейного программирования как задачи, имеющие множества допустимых решений, определяемые несовместными системами линейных алгебраических уравнений или неравенств. Решение задачи коррекции позволяет выявить «узкие места», а также исключить неточности измерений, внешнее воздействие и т. п.

Среди отечественных математиков матричной коррекцией впервые занялся в середине 80-х годов XX в А.А. Ватолин. Работы в этом направлении, но с упором на несобственные задачи математического программирования, проводились под руководством академика РАН И.И. Еремина научной школой Института математики и механики УрОРАН.

В конце 90-х годов XX в. исследования уральской школы были продолжены в ВЦ РАН и МПГУ В.А. Гореликом и его учениками: В.И. Ерохиным, И.А. Золтоевой, Р.Р. Ибатуллиным, О.А. Клименко, В.А. Кондратьевой, О.В. Муравьёвой, Р.В. Печёнкиным и другими. В основном в качестве критерия оптимальности решения задачи коррекции использовался минимум евклидовой нормы матрицы коррекции. Исследованы вопросы существования решения, вид решения скорректированной системы, структурной коррекции (когда матрица коррекции имеет фиксированные строки и/или столбцы, отдельные элементы, является разреженной, матрицей Теплица, комбинаторного типа, имеет блочную структуру и пр.).

Р.Р. Ибатуллиным был рассмотрен минимаксный критерий оптимальности для коррекции систем линейных уравнений; описана коррекция линейных управляемых систем при ограничениях на управляющие переменные, значения входа и выхода системы. Предложены методы минимаксной коррекции, сводящие их к решению задач линейного программирования. И.А. Золтоевой исследованы вопросы многокритериальной коррекции, в том числе с использованием минимаксного критерия, и коррекции несовместных линейных систем с разреженными матрицами коэффициентов. Также В.А. Гореликом и О.В. Муравьёвой задачи коррекции по минимуму евклидовой нормы применены к проблемам оптимизации и распознавания.

Хорошо известно, что совместность или несовместность линейных моделей, заданных системами уравнений, неравенств или смешанными системами уравнений и неравенств представляют собой фундаментальные свойства, связанные с так называемыми теоремами об альтернативах --- классической основой теорем существования решений задач оптимизации и возможным инструментом их

эффективного численного решения, развитым в работах Бирюкова А.Г., А.И. Голикова, Дикусара В.В., Ю.Г.Евтушенко, Жадана В.Г., Капорина И.Е., Посыпкина М.А., Чекарева Д.А., Умнова Е.А., Умнова Е.Е. и др. Метод штрафных функций и функций Лагранжа является универсальным средством решения экстремальных задач различной природы.

Актуальность исследования несобственных математических объектов была хорошо обозначена И. И. Ереминым, в частности, он указал, что в теории математических моделей и классов задач прослеживается эволюция в сторону ослабления требований, накладываемых на исследуемый математический объект. Возникает последовательность постановок задач: единственность решения и устойчивость; единственность, неустойчивость (некорректность); неединственность и неустойчивость; несобственность; несобственность и плохая формализуемость; гибкое моделирование и т.д.

Несовместная (несобственная) модель не позволяет получить содержательную информацию об исследуемом процессе или явлении непосредственно. Для этой цели требуется исправление модели и ее коррекция. Виды и способы коррекции могут быть различными. Наиболее общая форма коррекции заключается в изменении коэффициентов левых и правых частей соответствующих уравнений и неравенств. Соответствующую коррекцию называют матричной. Систематическое исследование несобственных задач линейного и выпуклого программирования было начато в 70-х гг. прошлого столетия И. И. Ереминым и его учениками. В работах Н.Н. Астафьева, А.А. Ватолина, В.Д. Мазурова, Л. Д. Попова, В.Д. Скарин, С.П. Трофимова, В.Н. Фролова, Хачая М.Ю. и др. рассматривались несобственные задачи линейного и выпуклого программирования, проводилась классификация, строилась и исследовалась теория двойственности. При этом вводились и исследовались дискретные аппроксимации решений, т.н. комитетные конструкции. Отметим, что в большинстве исследований рассматривалась коррекция по вектору правой части ограничений и коэффициентом вектора целевой функции.

Матричная коррекция впервые была рассмотрена в работах А.А. Ватолина. Исследования А.А. Ватолина были продолжены в ВЦ им. А.А. Дородницына РАН и МПГУ В.А. Гореликом и его учениками: В. А. Кондратьевым, О.В. Муравьевым, Р.Р. Ибатулиным, Р.В. Печенкиным, В.И. Ерохиным и др. Указанными авторами были уточнены результаты А.А. Ватолина. В методах матричной коррекции остались нерешенными очень многие важные проблемы. Первая проблема связана с неединственностью решения задачи матричной коррекции. Естественно, что в прикладных задачах важна единственность и устойчивость решения скорректированной линейной модели. Следует признать, что систематизированное исследование указанной проблемы и методов их решения в настоящее время не существует. Другой аспект связан с выбором показателя качества матричной коррекции, который диктуется прикладной задачей. Он, например, связан с некоторой статистической гипотезой (Евклидова норма --- нормальное распределение ошибок, чебышевская норма --- равномерное распределение, октаэдрическое --- наличие случайных выбросов). Указанные обстоятельства влияют на методы исследования и решения задач матричной коррекции.

В настоящей работе предложены методы решения несобственных задач за счет использования факторного анализа и метода продолжения по параметру.

Список литературы

1. Дикусар В.В., Оленёв Н.Н., Яцко А. Применение факторного анализа при решении несобственных задач линейного программирования //Компьютерная алгебра: материалы международной конференции. Москва, 30 октября - 3 ноября 2017г. М.: ФГБОУ ВО "РЭУ им. Г.В. Плеханова", 2017. С.102-108. ISBN 978-5-7307-1266-9.

Solution of non-standard tasks by factor analysis methods

V.V. Dikusar
MFTI, Moscow, Russia

Коррекция задач классификации в подпространстве признаков по минимуму полиэдральных норм

О.С. Трёмбачева
МПГУ, Москва, Россия

Процесс классификации представляет собой преобразование входной информации об объекте в выходную информацию, представляющую собой заключение об отнесении его к какому-либо классу объектов.

С учетом имеющихся ограничений по ресурсам и возможностям создания средств измерения признаков генерируется набор признаков и формируется решающее правило. Если полученная задача является собственной, то решение находится стандартными методами, например, методом опорных векторов. Но зачастую задача классификации по различным причинам является несобственной. Кроме того, условия могут иметь приближенный характер в силу неточного задания параметров. В этом случае рассматривается задача оптимальной коррекции (аппроксимации) несовместной системы неравенств, в виде которой формализуется задача классификации. В монографии [1] исследованы вопросы матричной коррекции системы по минимуму евклидовой нормы, а также построения линейного решающего правила по минимаксному критерию, устойчивого к изменениям обучающей выборки.

Если измерение каждого признака сопровождается некоторыми затратами, то при ограниченности средств возникает задача отбора (селекции) признаков таким образом, чтобы имеющиеся средства были максимально эффективно использованы. Связано это с тем, что определение каждого признака требует проведения соответствующего эксперимента и, следовательно, сопряжено с затратами материальных и временных ресурсов. В то же время объекты некоторых классов могут распознаваться и при использовании лишь части признаков рабочего словаря.

Рассмотрим задачу классификации в подпространстве критериев. Пусть заданы m объектов своими векторами признаков, при этом класс K_1 представлен объектами $x^1, \dots, x^l \in R^n$, а класс K_2 – выборкой $x^{l+1}, \dots, x^m \in R^n$. Если признак с номером j не учитывается, то будем считать $x_j^i = 0, i = \overline{1, m}$.

Обозначим через $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T, s_j \in \{0, 1\}$ вектор селекции признаков, где $s_j = 0$, если j -й признак не учитывается и $s_j = 1$ в противном случае.

Пусть также $c_j > 0, j = \overline{1, n}$ – стоимость измерения j -го критерия, а $c_0 > 0$ – лимит средств на измерение. Тогда для нахождения вектора селекции, при котором средства будут наиболее эффективно использованы, получаем следующую задачу бинарной оптимизации:

$$(c, s) \rightarrow \max_s, \sum_{j=1}^n c_j \leq c_0 \quad (1)$$

Пусть \bar{s} – решение задачи (1). Введём следующие обозначения:

$$X_1^s = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^l & \dots & x_n^l \end{pmatrix} \cdot \bar{s}, \quad X_2^s = \begin{pmatrix} x_1^{l+1} & \dots & x_n^{l+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^m & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \cdot \bar{s}, \quad X^s = \begin{pmatrix} X_1^s \\ -X_2^s \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix} \in R^m.$$

Обозначим аффинную разделяющую функцию

$$F(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - b = (a, x) - b. \quad (2)$$

Таким образом, если объект x принадлежит классу K_1 , то должно выполняться неравенство $F(x) \leq 0$, а если $x \in K_2$, то $F(x) \geq 0$. Имеем систему m линейных алгебраических неравенств относительно $n + 1$ переменной a_1, a_2, \dots, a_n, b :

$$\begin{cases} (a, x^i) \leq b, & i = \overline{1, l}, \\ (a, x^i) \geq b, & i = \overline{l+1, m}, \end{cases}$$

которая преобразуется к виду

$$X^s \cdot a \leq bp. \quad (3)$$

В случае несовместности системы (3) можно воспользоваться методами коррекции, описанными ранее в [2] и [3]. Задача коррекции данной системы будет иметь следующий вид:

$$\inf_{H, a, b} \left\{ \|[H]\|_{\varphi, \psi} : [X^s + H \quad -p] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \leq 0 \right\} = h_{ineq}^0, \quad (4)$$

где $\|[H]\|_{\varphi, \psi}$ – какая-либо полиэдральная норма матрицы, то есть

$$\|H\|_{\varphi, \psi} \triangleq \max_{x \neq 0} \frac{\psi(Hx)}{\varphi(x)},$$

для которой показатели соответствующих гёльдеровых векторных норм принимают значения из множества $\{1, \infty\}$.

Коррекции может подвергаться только левая часть системы (4), причём последний столбец фиксирован (свободен от коррекции).

Критерии оптимальности, заключающиеся в минимизации какой-либо полиэдральной нормы матрицы коррекции, будут интерпретироваться следующими критериями «близости» гиперплоскости к исходным точкам:

1) максимальное изменение (по модулю) среди всех координат всех точек минимально (для нормы $\|\cdot\|_{1, \infty}$);

2) максимальная сумма изменений по каждой координате точек минимальна (для нормы $\|\cdot\|_{1, 1}$);

3) сумма изменений всех координат всех точек минимальна (для нормы $\|\cdot\|_{\infty, 1}$);

4) максимальная сумма изменений координат каждой точки минимальна (для нормы $\|\cdot\|_{\infty, \infty}$).

Для третьего критерия сформулируем следующую теорему.

Теорема. Пусть в пространстве R^n даны l точек $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1), \dots, (x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l)$, принадлежащих классу K_1 , и $m-l$ точек $(x_1^{l+1}, x_2^{l+1}, \dots, x_n^{l+1}), \dots, (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$, принадлежащих классу K_2 , и не существует функции, их разделяющей в подпространстве признаков, определяемом вектором s . Тогда задача нахождения минимального изменения матрицы координат X^s в смысле минимума $\|\cdot\|_{\infty, 1}$ - нормы, в результате которого разделяющая аффинная функция существует, эквивалентна задаче математического программирования

$$\sum_{i \in I^-} d_i \rightarrow \min_{\substack{d, q, q_b, r \\ \hat{X}a \leq b\hat{p}}} \text{при условиях} \begin{cases} d_i \geq -\bar{x}^i q + \bar{p}_i q_b, i \in I^-, \\ d_i \geq \bar{x}^i q - \bar{p}_i q_b, i \in I^-, \\ 0 < q_j \leq 1, j = \overline{1, n}, \\ q_k = 1, k \in \overline{1, n}, \\ t \geq 0, d \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где \bar{X} – подматрица X^s , состоящая из строк с номерами $i \in I^-$, \bar{p} – соответствующий вектор из элементов вектора p , а $\hat{X}a \leq b\hat{p}$ – подсистема, составленная из остальных неравенств системы (3)

Если существует (d^0, q^0, q_b^0, t^0) – решение задачи (5), то коэффициенты разделяющей аффинной функции (2) и скорректированные значения параметров находим по формулам

$$h^0 = \sum_{i \in I^-} d_i^0, a^0 = \frac{q^0}{r^0}, b^0 = \frac{q_b^0}{r^0}, r^0 \in R^+;$$

$$H = (-\bar{X}a^0 - \bar{p}b^0)y^0;$$

$$x_H^i = \bar{x}^i + h^i, i \in I^-, 1 \leq i \leq l,$$

$$x_H^i = \bar{x}^i - h^i, i \in I^-, l+1 \leq i \leq m,$$

$$x_H^i = x^i, i \notin I^-, 1 \leq i \leq m.$$

где y^0 – вектор, двойственный к вектору a относительно нормы $\|\cdot\|_1$.

Заметим, что решение скорректированной системы будет определяться не однозначно, а с точностью до пропорциональности. Для простоты программной реализации методов решения задачи, для системы (3) можно рассмотреть два случая:

$$\begin{cases} X^s \cdot \bar{a} \leq p, \bar{a} = \left(\frac{a_1}{b}; \dots; \frac{a_n}{b}\right)^T, \text{ если } b \neq 0, \\ X^s \cdot a \leq 0, \text{ если } b = 0. \end{cases}$$

Затем, в качестве оптимального взять решение задачи с меньшим значением критерия.

Пример. Пусть в пространстве R^2 класс K_1 представлен точками

$$x^1 = (-1, 5, 2); \quad x^2 = (10, 7, 3); \quad x^3 = (8, 9, -1);$$

$$x^4 = (1, 12, 2); \quad x^5 = (4, 2, 6);$$

а класс K_2 – точками

$$x^6 = (0, 0, 7); \quad x^7 = (7, -2, 1); \quad x^8 = (7, 6, 3);$$

$$x^9 = (3, -3, 9); \quad x^{10} = (5, 3, 7).$$

$$c = (17, 13, 21), c_0 = 42.$$

Решив задачу (1), получаем вектор селекции $s = (1, 0, 1)$. Решение задачи классификации элементов по первому и третьему критериям даёт следующие результаты:

$$F(x) = 0.1035x_1 - 0.0663x_2 + 0.1429x_3 + 1,$$

$$h^0 = 2.6812,$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9710 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.7101 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1.1491 \\ 0 \\ 0.9110 \\ 0.5487 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7950 \\ 0.3188 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 10 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & -1 \\ 1 & 12 & 8 \\ 4 & 2 & 5.029 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 7 & -2 & 1 \\ 7 & 6 & 4.7101 \\ 3 & -3 & 9 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

1. Горелик В.А., Муравьева О.В. Методы коррекции несобственных задач и их применение к проблемам оптимизации и классификации. М.: ВЦ РАН, 2012. С. 148.
2. Баркалова О.С. Коррекция несобственных задач линейного программирования в канонической форме по минимаксному критерию // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012, Т. 52, №12. С. 2178–2189.
3. Баркалова О.С. Коррекция несобственных задач классификации по минимуму различных видов полиэдральных норм // Качество. Инновации. Образование. 2013, №2. С. 39-43.

Correction of classification problems in criteria subspace by applying minimum of polyhedral norms

O.S. Trembacheva
MSPU, Moscow, Russia

СЕКЦИЯ № 6

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Алимов Д.А., Обросова Н.К., Шананин А.А. Анализ показателей производства с помощью моделей с учетом дефицита оборотных средств | 159 |
| Белоусов Ф.А. Применение вейвлет-преобразований для анализа временных рядов на классе моделей взаимодействия «кочевников» и «землепашцев» | 164 |
| Белянкин Г.А., Васин А.А., Савадян А.С. Пример инновации, приводящей к снижению ВВП и росту общественного благосостояния | 165 |
| Ермолова М.А., Хоботов Е.Н. Построение расписаний работ на предприятиях с конвейерной сборкой готовой продукции | 170 |
| Каменев Г.К. Идентификация моделей при плохих данных | 175 |
| Каменев И.Г. Моделирование человека как носителя информации с применением метода метрического анализа данных | 179 |
| Катаргин Н.В. Исследование системы с экспоненциальной реакцией на воздействие и случайными возмущениями | 184 |
| Катаргин Н.В., Богомолов А.И. Оптимизация планирования инвестиций в регионе на основе показателей качества жизни | 187 |
| Кипяткова В.А., Полякова Е.В. Образование как фактор социальной мобильности в моделях с гетерогенными агентами и эндогенной рождаемостью | 191 |
| Кишмария Н.Г., Оленёв Н.Н. Модель экономики замкнутого цикла | 194 |
| Кононов Д.А. Сценарный подход к исследованию уязвимости сложных систем | 195 |
| Крейнес М.Г. Карта науки и задачи анализа научных текстов | 200 |
| Куркин Е.В., Баева Н.Б. Производственная лагуна как инновационный фактор региона | 205 |
| Мадера А.Г. Моделирование и оптимизация процессного управления в условиях неопределенности | 208 |
| Матвеев В.Д., Гармаш М.В., Гармашов И.А., Королев А.В. Модель динамики объединения инновационных сетей с производством и экстерналиями знаний | 210 |
| Нижегородцев Р.М. Исследование операций в управлении наукой: инструменты функционально-институционального анализа | 214 |
| Павлова Н.Г., Черникова Н.Ю. Приложения результатов теории накрывающих отображений к исследованию экономико-математических моделей | 218 |
| Сагирова А.Р., Поспелов И.Г., Жукова А.А. Идентификация модели банковской системы России с помощью метода решения обратных задач | |

| | |
|---|-----|
| | 221 |
| Соломаха А.Г., Соломаха Г.М. Теоретико-игровой подход к определению параметров франчайзингового договора в сфере производства | 226 |
| Суслов Н.И. Оптимальное разнообразие в социально-экономической системе: формальные аспекты | 229 |
| Цодиков Ю.М. Интерпретация несовместного решения задачи оптимального планирования работы НПЗ | 233 |
| Чечулин В. Л. О жёстком экономическом равновесии | 237 |
| Эдиев Д.М. О математико-демографических подходах к устранению искажений показателей смертности и продолжительности жизни престарелого населения | 238 |

Анализ показателей производства с помощью моделей с учетом дефицита оборотных средств*

Д.А.Алимов

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
МФТИ(ГУ), Долгопрудный, Россия*

Н.К.Обросова, А.А.Шананин

*ВЦ ФИЦ ИУ РАН им. Дородницына, Москва, Россия
МФТИ(ГУ), Долгопрудный, Россия*

В условиях неоднородной экономической среды актуальной проблемой является создание условий для эффективного функционирования и модернизации производственных комплексов, находящихся на более низком технологическом уровне по сравнению с зарубежными аналогами. Реализация программ модернизации технологически отсталых отраслей определяет потенциал развития государств с экономикой догоняющего типа. Разработка таких программ должна проводиться на основе подробного анализа, учитывающего особенности функционирования технологически отсталых предприятий, а также возможные косвенные последствия реализации программ для экономики в целом. Проведение такого анализа возможно в терминах вычислимых экономико-математических моделей.

В рамках методологии вычислимых моделей разработан новый класс математических моделей производства с учетом дефицита оборотных средств и нестабильности реализации продукции, позволяющий анализировать проблемы низко конкурентоспособных производств. Используемый подход основан на модели Хаутеккера-Иохансена [1], однако учитывает не только технологические, но и финансово-экономические механизмы регулирования производства. Разработанные модели описывают механизмы адаптации предприятий низко конкурентоспособного сектора на последовательных этапах эволюции российской экономики. Современная версия модели отражает особенности производства, сложившиеся в период после 2008г. Модель позволяет оценивать влияние внешней конъюнктуры (процентных ставок, структуры цен на ресурсы и продукцию и т.д.) на показатели деятельности предприятия в квазистабильных экономических условиях с учетом влияния ограничения торговой инфраструктуры (период 2008-2014г.), а также в кризисных

* Работа выполнена при финансовой поддержке по гранту РФФИ №17-07-00507.

условиях, когда в условиях снижения спроса и роста процентных ставок существенное влияние на производство начинает оказывать долговая нагрузка, а производство вынуждено работать под заказ (период после 2014г.). В условиях зависимости от кредитных рейтингов одним из наиболее важных показателей деятельности предприятия является капитализация компании, являющаяся залогом при обращении компании за кредитом. На основе разработанной модели впервые предложена методика оценки капитализации компании, основанная на дисконтировании ее финансовых потоков в условиях дефицита оборотных средств и нестабильности реализации продукции. Методика позволяет дать оценку реальной стоимости компании (фундаментальной составляющей капитализации) на основе анализа показателей ее деятельности в сложившихся конъюнктурных условиях, очищенную от спекулятивных скачков, отражающихся на величине рыночной оценки капитализации, формируемой на основе результатов биржевых торгов акциями компании.

Рассмотрим функционирование производства мощностью η , выпускающего однородную продукцию. Обозначим: y - себестоимость выпуска единицы продукта, P - цена продукта, Y^* - максимальный объем одновременно реализуемой партии товара, Y_0 - текущий запас продукции на производственном складе. Предположим, что

1) моменты реализации продукции случайны и образуют пуассоновский поток с параметром λ ;

2) пополнение оборотных фондов предприятия возможно исключительно за счет кредитной линии;

3) между моментами реализации продукции производство сначала функционирует на полную мощность за счет кредитной линии $K(t)$ под процент r в течение выбранного собственником производства периода времени τ ; если по истечении периода времени τ реализация не наступила, производство останавливается до момента прихода покупателя;

4) в момент реализации продукции производитель получает выручку, погашает максимально возможную сумму накопленной ссудной задолженности и может вновь обратиться в банк за кредитной линией;

5) если дохода от реализации не достаточно для полного погашения накопленной ссудной задолженности, то долг гасится не полностью и увеличивает долговую нагрузку на производство;

6) оставшийся после выплаты ссудной задолженности доход от реализации продукции выводится из оборота;

7) кредит берется исключительно на пополнение оборотных фондов.

Тогда

$$K(t) = y\eta\theta(\tau - t), \text{ где } \theta(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0 \\ 0, \text{ если } x \leq 0 \end{cases}.$$

Объем выпуска к моменту времени t равен

$$Y(t) = Y_0 + \eta \min(t, \tau). \quad (1)$$

Динамика ссудной задолженности определяется выражением

$$L(t) = \frac{y\eta}{r} (e^{rt} - e^{r(t-\tau)_+}) + L_0 e^{rt}. \quad (2)$$

Задача собственника производства заключается в выборе времени τ , в течение которого авансируются производственные затраты за счет кредита, с целью максимизации математического ожидания дисконтированного с коэффициентом Δ дохода $V(Y_0, L_0)$ от реализации продукции

$$V(Y_0, L_0) = \sup_{\tau \geq 0} \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda + \Delta)t} \left[(p \min(Y(t), Y^*) - L(t))_+ + V\left(\left(Y(t) - Y^*\right)_+, \left(L(t) - p \min(Y(t), Y^*)\right)_+\right) \right] dt. \quad (3)$$

Уравнение Беллмана (3) описывает динамику капитализации $V(Y_0, L_0)$ компании с запасом продукта Y_0 и долгом L_0 в зависимости от производственных показателей деятельности компании и параметров экономической конъюнктуры (процентной ставки, структуры цен и т.д.). Точнее, величина $V(Y_0, L_0)$ соответствует фундаментальной капитализации и характеризует реальное положение компании на рынке и уровень ее кредитоспособности без учета спекулятивной составляющей, влияющей на биржевую оценку стоимости компании.

Существенное влияние на показатели деятельности производства в условиях квазистабильной экономической ситуации, сложившейся в России после 2008г, стало оказывать ограничение на максимально возможный объем единовременно реализуемой партии товара Y^* , связанное с неразвитостью торговой инфраструктуры. Рынок кредитов производству в этот период можно считать конкурентным. В этих условиях относительная стабильность процентных ставок позволяет не учитывать влияние долговой нагрузки на деятельность предприятия. Будем считать, что непокрытая выручкой часть долга подлежит списанию, т.е. $L_0 = 0$. При выполнении перечисленных условий модель производства в низко конкурентоспособном секторе с учетом дефицита оборотных средств (1)-(3) преобразуется к виду

$$W(Y_0) = \sup_{\tau \geq 0} \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda + \Delta)t} \left[p \min(Y_0 + \eta \min(t, \tau), Y^*) - \frac{y\eta}{r} (e^{rt} - e^{r(t-\tau)_+}) + W\left((Y_0 + \eta \min(t, \tau) - Y^*)_+\right) \right] dt. \quad (4)$$

Решение $W(Y_0)$ уравнения Беллмана (4) может интерпретироваться как оценка стоимости производственной компании с запасом продукта Y_0 . Величина $\frac{\lambda W(0)}{y\eta}$ характеризует фундаментальную составляющую капитализации компании без учета накопленных запасов по отношению к ее оборотным фондам. С изменением этого показателя связаны изменения положения компании на рынке и уровня ее кредитоспособности. Значения $\frac{\lambda W(0)}{y\eta}$, близкие к 1, соответствуют границе рентабельности производства. Исследование решения уравнения Беллмана (4) проведено в [2], [3].

Доказано, что при выполнении условий рентабельности

$$\lambda + \Delta > r, \quad Y^* > 0, \quad p > y \frac{\lambda + \Delta}{\lambda + \Delta - r}$$

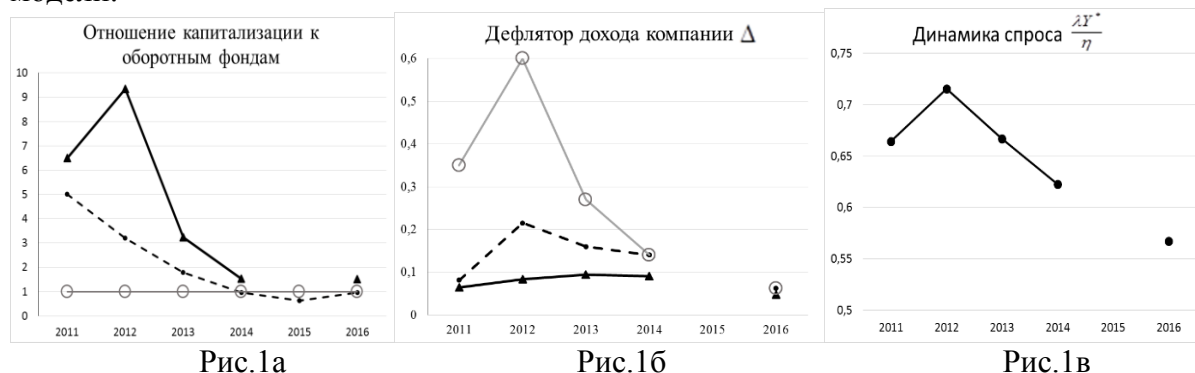
уравнение (4) имеет единственное решение в классе непрерывных, неотрицательных, неубывающих, вогнутых функций, ограниченных вместе со своей производной на полуинтервале $[0, +\infty)$. Решение уравнения (4) найдено в явном виде. Показано, что соответствующее решению уравнения Беллмана оптимальное поведение производителя описывается следующим образом: в условиях отсутствия реализации продукции производство работает на полную мощность за счет кредита до достижения величины запаса $(\zeta_0 + 1)Y^*$, а далее останавливается до момента реализации.

Для идентификации параметров необходимо вычислить усредненные показатели деятельности производства в модели, так как эти данные содержит официальная отчетность компаний. Решение этой задачи основано на результатах анализа марковского случайного процесса динамики товарных запасов на складе $X(z, t): X(z, 0) = z, X(z, t) \in [0, (1 + \zeta_0)Y^*]$. В [3] доказано, что случайный процесс $X(z, t)$ является эргодическим (любое начальное распределение сходится к финальному распределению). Свойство эргодичности позволило предложить методику вычисления показателей деятельности производства в модели, сопоставимых с

данными официальной отчетности компаний. Отчетность содержит усредненные по времени показатели. Методика основана на вычислении в терминах модели показателей, усредненных по финальному распределению $\rho_0(z)$ вероятностей случайного процесса $x(z,t)$ изменения запаса. В силу свойства эргодичности усреднение по времени сопоставимо с усреднением по финальному распределению. Аналитическое выражение для финального распределения $\rho_0(z)$ найдено в явном виде в [3].

Построена полная система алгебраических уравнений модели, входные и выходные переменные которой интерпретированы в терминах официальной отчетности компаний. Модель идентифицирована по данным компании ПАО КАМАЗ за 2011-2016гг. В терминах модели отражением ожиданий рынка, характеризующим спекулятивную составляющую, является дефлятор дохода компании Δ . Проведенные расчеты методом сравнительной статики [4] подтверждают, что дефлятор дохода компании Δ существенно влияет на величину фундаментальной капитализации.

На рис.1б показана динамика дефлятора дохода компании Δ , соответствующая базовому сценарию (сплошная жирная кривая, треугольный маркер точки) и реальному изменению рыночной капитализации (пунктирная кривая, круглый маркер точки), рассчитанная с помощью модели. Тонкая кривая на рис.1а (прозрачный маркер точки) соответствует границе рентабельности компании в терминах модели, т.е. значениям $\frac{\lambda W(0)}{u\eta}$, близким к 1. Тонкая кривая на рис.1б (прозрачный маркер точки) определяет соответствующие значения дефлятора дохода компании Δ , рассчитанные с помощью модели.



Проведенные расчеты показывают, что в 2012г. в условиях ожидания резкого падения продаж на фоне вступления в ВТО произошло снижение рыночной капитализации компании при росте фундаментальной составляющей капитализации (рис.1а). Однако ожидания не оправдались - в 2012г. наблюдался рост продаж продукции компании (рис.1в). Это привело к некоторому улучшению ожиданий рынка и снижению дефлятора дохода Δ к 2013г. (пунктирная линия, рис.1б) на фоне продолжающегося падения рыночной капитализации (пунктирная кривая, рис.1а). Падение спроса в 2013г. (рис.1в) и рост процентных ставок привели к существенному снижению фундаментальной составляющей капитализации компании в 2013г. Дальнейшее падение спроса в условиях наступающего кризиса 2014г. привело к снижению фундаментальной и рыночной капитализации. Ожидания рынка в отношении компании в 2014г. оказались ниже фундаментальной составляющей капитализации, которая еще соответствовала рентабельному значению дефлятора дохода (треугольный маркер, рис.1б). В 2015г., несмотря на формирование крупного госзаказа, компания и по фундаментальным показателям оказалась ниже границы рентабельности (расчет по модели в 2015г. невозможен). Мощная государственная поддержка КАМАЗа в 2015-2016гг. привела к тому, что компания в 2016г. вышла на

границу рентабельности и по фундаментальным показателям оказалась несколько выше ожиданий рынка (рис. 1а) даже в условиях продолжающегося снижения спроса (рис. 1в).

В работе [4] в терминах разработанной модели проведен анализ экономических условий функционирования компании Sollers.

В условиях финансового кризиса существенное влияние на показатели деятельности производства начинает оказывать долговая нагрузка. Причиной этого является падение спроса и рост процентных ставок по кредитам. Влияние ограничения торговой инфраструктуры на показатели деятельности компании в этих условиях можно считать несущественным. В этой ситуации в модели необходимо учитывать влияние долговой нагрузки на производство, то есть в (2) $L_0 > 0$. В условиях кризиса и нестабильных процентных ставок горизонт планирования сужается и производство переходит на систему кризисного управления. Основной проблемой для производителя является погашение долга, поэтому коэффициент дисконтирования дохода собственника компании оказывается близким к величине процентной ставки по кредиту, т.е. $\Delta = r$. В этих предположениях модель (1) преобразуется к виду:

$$W(Y_0, L_0) = \sup_{\tau \geq 0} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda+r)t} \left[\left(pY_0 + p\eta \min(t, \tau) - \frac{\eta y}{r} (e^{rt} - e^{r(t-\tau)_+}) - L_0 e^{rt} \right)_+ + W \left(0, \left(\frac{\eta y}{r} (e^{rt} - e^{r(t-\tau)_+}) + L_0 e^{rt} - pY_0 - p\eta \min(t, \tau) \right)_+ \right) \right] dt. \quad (5)$$

В [5] показано, что решение этого уравнения в общем случае не единственно и найден класс функций, в котором решение существует и единственно. Пусть

$$q = \max \left(-\frac{p\lambda}{y(\lambda+r)}, -\frac{\lambda+r}{\lambda} \right) \text{ и } L_0^* = \frac{\eta}{r} (p-y).$$

Класс $F([0, L_0^*], h)$ - множество функций, удовлетворяющих следующим условиям: непрерывность, вогнутость, линейность с коэффициентом $-1 \geq h \geq q$ при $L_0 \geq L_0^*$, убывание и ограниченность сверху и снизу односторонних производных. Для этого класса функций доказано существование и единственность решения уравнения (5). Параметр h определяет единственное решение уравнения Беллмана (5). С экономической точки зрения этот параметр можно интерпретировать как коэффициент учета долгов при банкротстве компании. Кредиторы требуют с компаний – банкротов уплату штрафа за невыплаченные задолженности. Данный штраф равен $-(1+h)L_0$, где коэффициент $k = -h$ назначается на законодательном уровне.

С использованием статистических данных по запасам ПАО КАМАЗ за 2016 год с помощью разработанной версии модели найдена оценка относительной капитализации компании при $k = 1.0056$: $\frac{\lambda W(0)}{y\eta} = 3.9935$.

Список литературы

1. Houthakker H. The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis // Review of Economic Studies. 1955. Vol. 23, № 1. P. 27-31.
2. Обросова Н. К., Шананин А. А. Исследование уравнения Беллмана в модели производства с нестабильным спросом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, № 9. С. 1465–1496.
3. Обросова Н. К., Шананин А. А. Модель производства в условиях нестабильного спроса с учетом влияния торговой инфраструктуры. Эргодичность и ее приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 4. С. 704–729.
4. Obrosova N.K., Shanin A.A. About an Estimation of Company's Capitalization in the Conditions of Prices Changing // Proceedings of the VIII International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA-2017). 2017. P. 420–427.

5. Алимов Д.А. О существовании и единственности решения уравнения Беллмана в модели функционирования производственной компании с учётом влияния долговой нагрузки // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 3. С. 398–407.

Analysis of production parameters with the help of models with regard to working capital deficit

A.D.Alimov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

MIPT (GU), Dolgoprudny, Russia

N.K.Obrasova, A.A.Shananin

*Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS,
Moscow, Russia*

MIPT (GU), Dolgoprudny, Russia

Применение вейвлет-преобразований для анализа временных рядов на классе моделей взаимодействия «кочевников» и «землепашцев»*

Ф.А. Белоусов

ЦЭМИ РАН

В статье [1] была представлена и изучена агент-ориентированная модель «кочевников» и «землепашцев». Была проведена серия экспериментов и получен большой объем данных. В частности, получена динамика численности популяции кочевников и землепашцев за 20000 периодов, а также динамика численности так называемого ресурса (еда), необходимого для выживания обоих видов агентов. Представленный доклад посвящен изучению взаимозависимостей полученных временных рядов с помощью эконометрического и вейвлет-анализа. На первом этапе данного исследования был проведен эконометрический анализ, была построена регрессия, с помощью которой изучалось влияние численности кочевников и количества ресурса на численность землепашцев. Коэффициент детерминации (R^2) построенной регрессии получился равным 0,81, статистика Дарбина-Уотсона равна 0,94, что свидетельствует о наличии положительной автокорреляции ошибок первого порядка. На следующем этапе осуществляется анализ на основе вейвлет-преобразований, с помощью которого удается избавиться от высокочастотных «шумов» и помехи в исследуемых временных рядах. В рамках данной работы были рассмотрены вейвлет Хаара и вейвлет Добеши порядка 2 (остальные вейвлеты дают похожие результаты). После того, как с помощью вейвлет-анализа временные ряды были очищены от помех, снова был применен регрессионный анализ. Коэффициент детерминации новых регрессий в зависимости от того, какой вейвлет был применен и помехи какой частоты были убраны, принял значения в диапазоне от 0,86 до 0,93. Однако статистика Дарбина-Уотсона уменьшила свои значения и стала принимать значения в пределах от 0,01 до 0,46, что по-прежнему говорит о наличии положительной автокорреляции ошибок первого порядка. В итоге получаем, что в данной ситуации применение вейвлет-анализа заметно увеличивает объясняющую способность регрессии, с другой стороны проблему автокорреляции ошибок разрешить таким способом не удастся, в некотором смысле она только усугубилась.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №15-51-05011.

Список литературы

1. Белоусов Ф.А. Модель сообществ с двумя способами воспроизводства продукта (модель "кочевников" и "землепашцев"). Экономика и математические методы. Том 53, №3, 2017. с. 93-109.
2. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
3. Штарк Г.Г. Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.
4. Астафьев Н.М. Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения. Успехи физических наук. 1998. Т.166. № 11. – с. 1145-1170.
5. Киселев А. Непрерывные вейвлет-преобразования в анализе бизнес-информации // А. Киселев. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://basegroup.ru/community/articles/wavelet-applications>
6. Огородов А.П. Применение теории вейвлет-преобразований в исследовании финансовых временных рядов / А.П. Огородов // Электроника информационные технологии. – Саранск: МРГУ. – Выпуск 2(7). 2009 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fetmag.mrsu.ru/2009-3/pdf/Financial_transient_series.pdf

The use of wavelet transforms for the analysis of time series on the class of interaction models of "nomads" and "tillers".

F.A. Belousov

Central Economic Mathematical Institute

Пример инновации, приводящей к снижению ВВП и росту общественного благосостояния

Г.А. Белянкин, А.А. Васин, А.С. Савадян
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Данная работа представляет собой исследование влияния внедрения более эффективных технологий производства на общественное благосостояние и внутренний валовой продукт (ВВП) экономической системы.

Интерес к данной теме вызван участвовавшей критикой использования ВВП в качестве индикатора общественного благосостояния. В 2008 году Правительством Франции была учреждена международная комиссия по основным показателям экономической деятельности и социального прогресса под руководством Джозефа Стиглица. Главной задачей комиссии была разработка альтернативного ВВП показателя оценки экономической деятельности (подробнее см. [1]). В результате работы комиссии было признано несовершенство применения ВВП в качестве критерия общественного благосостояния. В частности, было показано, что между интересами общества и показателем ВВП могут возникать противоречия, когда статистика говорит о росте ВВП, а граждане ощущают ухудшение экономического положения (см. [2]). В данной статье мы продемонстрируем обратный эффект, когда в предлагаемой модели происходит снижение ВВП экономической системы при одновременном росте общественного благосостояния.

Исследуемая в работе экономическая система соответствует модели Эрроу-Дебре, изложенной в [3, 4]. Внедрение новой технологии в излагаемой модели приведет к скачкообразному изменению технологических параметров, соответствующему увеличению эффективности труда и уменьшению трудового ресурса, затрачиваемого на производство единицы товара. Процесс перехода между состояниями конкурентного равновесия до и после внедрения новой технологии рассмотрен в соответствии с моделью динамики цен, предложенной П. Самуэльсоном и подробно изложенной в [3].

Рассмотрим экономическую систему, в которой действуют n производителей и m потребителей. В системе производится один товар, единственным фактором производства является труд. Потребители закупают производимую продукцию и одновременно являются продавцами рабочей силы. Экономика функционирует в условиях совершенной конкуренции. Следовательно, в конкурентном равновесии на рынке определяются единые для всех производителей и потребителей цены p_0 за условную единицу труда и p_1 за единицу товара, совместно составляющие вектор равновесных цен $p = (p_0, p_1)$.

Стратегия потребителя j включает объем труда l_j и объем потребляемой продукции x_j . Он стремится максимизировать функцию полезности, которая определяется как полезность потребления закупаемой продукции за вычетом ценности потраченного на труд времени (labor disutility): $U_j(l_j, x_j) = U(x_j) - l_j$, где $U(x_j) = \begin{cases} K_2 x_j, & \text{при } x_j < \bar{x}_j \\ K_2 \bar{x}_j + K_1(x_j - \bar{x}_j), & \text{при } x_j \geq \bar{x}_j \end{cases}$, где $K_1 < K_2$ - некоторые константы.

В описываемой модели ценность потраченного на труд времени линейна. Поскольку товар потребления единственен, потребитель все заработанные деньги тратит на его покупку, отсюда получаем соотношение между объемами труда и потреблением товара $l_j p_0 = p_1 x_j$. Следовательно, стратегия потребителя может быть определена единственным параметром – объемом потребляемой продукции x_j . Тогда функция полезности принимает вид: $U_j(p, x_j) = U(x_j) - \frac{p_1}{p_0} x_j$. Для удобства формализации допустим, что для каждого j объем потребления x_j ограничен сверху величиной M_x , где M_x удовлетворяет соотношению:

$$M_x > \sum_{j=1}^m \bar{x}_j. \quad (1)$$

Каждый производитель характеризуется объемом производимой продукции y_i , объемом закупаемого труда d_i и функцией прибыли $V_i(p, y_i, d_i)$. Он стремится максимизировать функцию прибыли, которая определяется как доход от продажи производимой продукции за вычетом издержек на оплату потребляемого в производственном процессе труда: $V_i(p, y_i, d_i) = p_1 y_i - p_0 d_i$.

Производственная функция в рассматриваемой модели линейна, одинакова для всех производителей и определяется технологическим параметром c_1 , характеризующим объем труда, затрачиваемого на производство единицы товара: $d_i = c_1 y_i$. Следовательно стратегия производителя может быть определена единственным параметром – объемом выпуска y_i , а функция прибыли принимает вид: $V_i(p, y_i) = (p_1 - p_0 c_1) y_i$.

Объем выпускаемой каждым производителем продукции ограничен сверху величиной M_y : $y_i < M_y \forall i = \overline{1, n}$. При этом M_y удовлетворяет соотношению:

$$M_y > \sum_{j=1}^m \bar{x}_j. \quad (2)$$

Дополнительно предположим, что параметры удовлетворяют соотношению:

$$K_1 < c_1 < K_2. \quad (3)$$

Суммарный выигрыш всех агентов в описанной экономике характеризуется величиной общественного благосостояния W , определяемой суммой полезностей всех потребителей и суммой прибылей всех производств: $W = \sum_{j=1}^m U_j(p, x) + \sum_{i=1}^n V_i(p, y)$.

Согласно [5] внутренний валовый продукт (ВВП) для данной экономики рассчитывается как суммарная стоимость произведенной в экономической системе продукции: $G = p_1 (\sum_{j=1}^m x_j)$.

Обозначим $y = (y_1, \dots, y_n)$ - вектор объемов продукции, выпускаемой производителями, $x = (x_1, \dots, x_m)$ - вектор объемов продукции, закупаемой потребителями.

Поскольку экономика находится в условиях совершенной конкуренции, каждый участник рассматривает цены на товары и услуги как фиксированные и принимает решения, руководствуясь максимизацией индивидуальной функции полезности. Тогда стратегии в ситуации конкурентного равновесия удовлетворяют соотношениям:

$$x_j^* = \operatorname{argmax}_{x_j} (U_j(p^*, x_j)), j = \overline{1, m}; y_i^* = \operatorname{argmax}_{y_i} (V_i(p^*, y_i)), i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Согласно [3], состоянием конкурентного равновесия называется тройка векторов (p^*, x^*, y^*) , для которой выполнены соотношения (4), а также условие, что вся произведенная продукция потреблена:

$$\sum_{i=1}^n y_i^* = \sum_{j=1}^m x_j^* \quad (5)$$

Модель в данной постановке является частным случаем модели Эрроу-Дебре (см. [3]) для конкретного вида функции полезности и одного товара.

Утверждение 1. Максимум функции прибыли i -ого производителя $V_i(p^*, y_i)$ достигается при

$$y_i^* = \begin{cases} M_y, & \text{если } \frac{p_1}{p_0} > c_1; \\ [0; M_y], & \text{если } \frac{p_1}{p_0} = c_1; \\ 0, & \text{если } \frac{p_1}{p_0} < c_1. \end{cases} \quad (6)$$

Утверждение 2. Максимум функции полезности j -ого потребителя $U_j(p^*, x_j)$ достигается при

$$x_j^* = \begin{cases} 0, & \text{если } K_2 < \frac{p_1}{p_0}; \\ \bar{x}_j, & \text{если } K_1 < \frac{p_1}{p_0} < K_2; \\ M_x, & \text{если } \frac{p_1}{p_0} < K_1. \end{cases} \quad (7)$$

Из утверждений 1, 2 следует, что в рамках индивидуально оптимальных стратегий производителей и потребителей баланс спроса и предложения описанной экономической системы может достигаться только при выполнении соотношения:

$$\frac{p_1^*}{p_0^*} = c_1 \quad (8)$$

Таким образом, тройка (p^*, x^*, y^*) является состоянием равновесия описанной системы тогда и только тогда, когда $x^* = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ и выполнены соотношения (5), (8).

Величины общественного благосостояния и внутреннего валового продукта (ВВП) для описанной системы в состоянии равновесия вычисляются по формулам:

$$W = \sum_{j=1}^m U_j(p^*, \bar{x}_j) + \sum_{i=1}^n V_i(p^*, y_i^*) = (K_1 - c_1) \left(\sum_{j=1}^m \bar{x}_j \right), \quad (9)$$

$$G = p_1^* \left(\sum_{j=1}^m x_j^* \right) = p_0^* c_1 \left(\sum_{j=1}^m \bar{x}_j \right). \quad (10)$$

Рассмотрим ситуацию появления на рынке новой, более эффективной технологии производства, позволяющей затрачивать меньший объем труда на производство единицы продукции. Технология носит открытый характер, не требует дополнительных инвестиций для начала использования и была одновременно внедрена всеми участниками рынка. Предположим, что при использовании новой технологии на производство единицы товара затрачивается \bar{c}_1 единиц труда. При этом:

$$K_1 < \bar{c}_1 < c_1 < K_2 \quad (11)$$

В результате изменения технологического параметра тройка (p^*, x^*, y^*) перестанет соответствовать состоянию конкурентного равновесия системы, поскольку при изменении параметра c_1 для сложившегося вектора цен p^* не будет выполнено соотношение (8).

Внедрение новой технологии нарушает в системе баланс спроса и предложения и запускает процесс «нащупывания» новых равновесных цен, подробно описанный в [4]. Избыточный спрос задается разностью между суммарным спросом $D_0(p), D_1(p)$ и суммарным предложением $S_0(p), S_1(p)$ труда и товаров на рынке:

$$E_1(p) = D_1(p) - S_1(p) = \begin{cases} nM_x, & \text{если } \frac{p_1}{p_0} < K_1 < \bar{c}_1 < K_2; \\ \sum_{j=1}^m \bar{x}_j, & \text{если } K_1 < \frac{p_1}{p_0} < \bar{c}_1 < K_2; \\ \sum_{j=1}^m \bar{x}_j - nM_y, & \text{если } K_1 < \bar{c}_1 < \frac{p_1}{p_0} < K_2; \\ -nM_y, & \text{если } K_1 < \bar{c}_1 < K_2 < \frac{p_1}{p_0}. \end{cases}$$

$$E_0(p) = D_0(p) - S_0(p) = \begin{cases} -\frac{p_1}{p_0} nM_x, & \text{если } \frac{p_1}{p_0} < K_1 < \bar{c}_1 < K_2; \\ -\frac{p_1}{p_0} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j, & \text{если } K_1 < \frac{p_1}{p_0} < \bar{c}_1 < K_2; \\ \bar{c}_1 nM_y - \frac{p_1}{p_0} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j, & \text{если } K_1 < \bar{c}_1 < \frac{p_1}{p_0} < K_2; \\ \bar{c}_1 nM_y, & \text{если } K_1 < \bar{c}_1 < K_2 < \frac{p_1}{p_0}. \end{cases}$$

Согласно [3] изменения цен описываются системой дифференциальных уравнений $\frac{dp_k}{dt} = a_k E_k(p)$, $k = 0, 1$, где $E_k(p)$ – функция избыточного спроса на труд, товар, $a_k > 0$ – коэффициент подстройки цены, характеризующий уровень волатильности цены товара или труда. Будем также считать, что до момента внедрения новой технологии система находилась в состоянии конкурентного равновесия, то есть $p(0) = p^*$. Тогда задача моделирования динамики цен сводится к решению задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = a_k E_k(p), k = 0, 1; \\ p(0) = p^*. \end{cases} \quad (12)$$

Отметим, что в момент достижения соотношения цен $\frac{p_1}{p_0} = \bar{c}_1$ в системе будут выполнены все условия конкурентного равновесия для нового технологического параметра.

Функции $E_0(p), E_1(p)$ определены в четырех областях плоскости $p_0 p_1$, указанных на рис.1:

$$O_I = \{(p_0, p_1) : p_0 > 0, p_1 > 0, \frac{p_1}{p_0} < K_1\}; O_{II} = \{(p_0, p_1) : p_0 > 0, p_1 > 0, K_1 < \frac{p_1}{p_0} < \bar{c}_1\};$$

$$O_{III} = \{(p_0, p_1) : p_0 > 0, p_1 > 0, \bar{c}_1 < \frac{p_1}{p_0} < K_2\}; O_{IV} = \{(p_0, p_1) : p_0 > 0, p_1 > 0, K_2 < \frac{p_1}{p_0}\}.$$

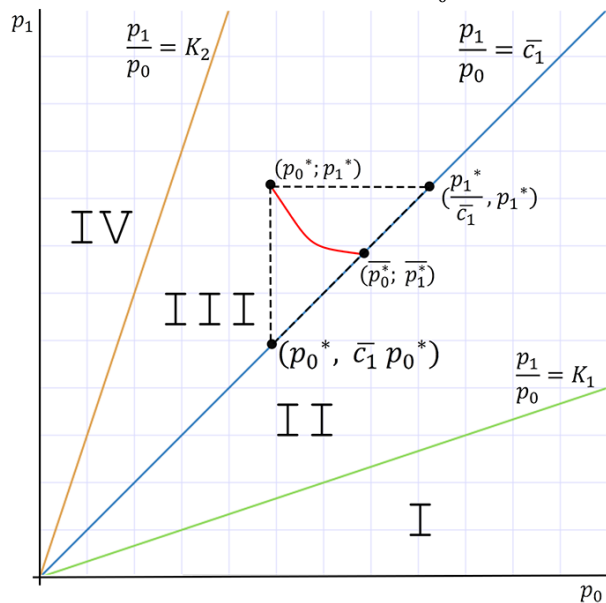


рис.1

Из (8) и (11) следует, что $p(0) \in O_{III}$. В этой области система (12) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = a_0(\bar{c}_1 n M_y - \frac{p_1}{p_0} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j), \\ \frac{dp_1}{dt} = a_1(\sum_{j=1}^m \bar{x}_j - n M_y), \\ p(0) = p^*. \end{cases} \quad (13)$$

И, согласно (2), $p_0(t)$ возрастает, а $p_1(t)$ убывает.

Решением дифференциального уравнения (13) для компоненты $p_1(t)$ будет функция: $p_1(t) = p_1^* - a_1(n M_y - \sum_{j=1}^m \bar{x}_j) t$.

Поскольку $\frac{d^2 p_1(t)}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2 p_0(t)}{dt^2} > 0$, то траектория $p(t)$ в области O_{III} представляет из себя выпуклую кривую, достигающую границу области O_{III} и O_{II} в некоторой точке на прямой $p_1 = \bar{c}_1 p_0$. Обозначим точку пересечения $\bar{p}^* = (\bar{p}_0^*, \bar{p}_1^*)$, а момент пересечения - T : $p(T) = \bar{p}^*$ (см. рис.1).

Утверждение 3. Траектория системы (13) достигает новой точки равновесия \bar{p}^* за время $T < \bar{T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_1^* - \bar{c}_1 p_0^*}{a_1(n M_y - \sum_{j=1}^m \bar{x}_j)}$.

Динамика итогового состояния системы зависит от параметров a_0, a_1 , при этом: $p(T)$ лежит на отрезке между точками $(p_0^*, \bar{c}_1 p_0^*)$ и $(\frac{p_1^*}{\bar{c}_1}, p_1^*)$ (см. рис. 1); при $\frac{a_0}{a_1} \rightarrow 0$ $p(T) \rightarrow (p_0^*, \bar{c}_1 p_0^*)$; при $\frac{a_1}{a_0} \rightarrow 0$ $p(T) \rightarrow (\frac{p_1^*}{\bar{c}_1}, p_1^*)$.

Таким образом, после внедрения новой технологии и по прошествии достаточного времени T система достигнет состояния конкурентного равновесия, при котором вектор цен $\bar{p}^* = (\bar{p}_0^*, \bar{p}_1^*)$ будет удовлетворять следующим условиям:

$$\bar{p}_1^* = p_1^* - (\sum_{j=1}^m \bar{x}_j - n M_y) T < p_1^*, \quad \bar{p}_0^* = \frac{\bar{p}_1^*}{\bar{c}_1}.$$

Поскольку для нового технологического параметра выполняются все исходные ограничения модели, общественное благосостояние и ВВП в состоянии конкурентного равновесия могут быть найдены в соответствии с (9), (10):

$$\bar{W} = (K_1 - \bar{c}_1)(\sum_{j=1}^m \bar{x}_j), \quad \bar{G} = \bar{p}_0^* \bar{c}_1 (\sum_{j=1}^m \bar{x}_j).$$

Тогда для указанных величин в конечный и начальный момент времени получаем следующие соотношения:

$$\bar{W} = (K_1 - \bar{c}_1)(\sum_{j=1}^m \bar{x}_j) > (K_1 - c_1)(\sum_{j=1}^m \bar{x}_j) = W,$$

$$\bar{G} = \bar{p}_1^* (\sum_{j=1}^m \bar{x}_j) < p_1^* (\sum_{j=1}^m \bar{x}_j) = G.$$

Таким образом, появление новой более эффективной технологии приводит к ситуации, когда общественное благосостояние возрастает, а ВВП экономической системы снижается.

Список литературы

1. Jolly, David «G.D.P. Seen as Inadequate Measure of Economic Health». // The New York Times. September 14, 2009.
2. Joseph E Stiglitz, Amartya Sen, Jean-Paul Fitoussi «Mismeasuring our lives : why GDP doesn't add up». // New York, N.Y. : New Press. 2010.
3. Ашманов С. А. «Математические модели и методы в экономике». М: Издательство Московского Университета, 1980.
4. Ашманов С.А. «Введение в математическую экономику». М.: Наука, 1984.
5. Макконнелл К. Р., Брю С.Л. «Экономикс: принципы, проблемы и политика». М.: Республика, 1992.

Example of innovation

leading to decrease of GDP and social welfare growth

G.A. Belyankin, A.A. Vasin, A.S. Savadian
Lomonosov's MSU, Moscow, Russia

Построение расписаний работ на предприятиях с конвейерной сборкой готовой продукции

М.А.Ермолова, Е.Н.Хоботов
ИПУ РАН, МФТИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Для повышения эффективности в работе машиностроительных предприятий в [1] предлагалось строить планы и расписания работ по изготовлению комплектующих на уровне предприятий, когда планы и расписания работ по изготовлению комплектующих для всех подразделений предприятия оказываются согласованными между собой. Необходимость построения таких планов вызвана тем, что на основе планов и расписаний работ отдельных подразделений предприятия, даже удачных, редко удается сформировать подходящие планы работы предприятий [1-2]. Для построения планов и расписаний работ на уровне предприятий в [1] был предложен подход, в основу которого была положена идея агрегирования информации.

В представленном докладе рассматриваются методы построения согласованные планы и расписания работ для всех производственных подразделений предприятий, в которых сборка выпускаемых изделий производится на конвейерах. Особенности подобных предприятий позволяют создавать на основе методов агрегирования информации более эффективные алгоритмы построения согласованных планов и расписания работ на уровне этих предприятий.

Задачи планирования и построения расписаний работ на предприятиях

Рассмотрим машиностроительное предприятие, в состав которого входит несколько механообрабатывающих и механосборочных подразделений, а сборка выпускаемых изделий производится на конвейерах.

Для любого выпускаемого изделия известны времена и последовательность обработки каждой комплектующей детали на всем используемом оборудовании предприятия, размеры партии этих деталей, а также времена переналадки оборудования для их обработки. Для узла и агрегата каждого типа известны размеры собираемой партии, комплектующие детали, узлы и агрегаты, время и порядок сборки, а также времена сборок и переналадок оборудования для их сборки.

Сборка выпускаемых изделий осуществляется на одном или нескольких конвейерах из изготовленных на предприятии, а также из закупленных на стороне комплектующих деталей, узлов и агрегатов. На каждом конвейере осуществляется сборка только «своих» изделий и каждый тип изделия может собираться только на «своем» конвейере. Для каждого конвейера известна его производительность по выпуску всех типов собираемых на нем изделий, количество рабочих мест при сборке любого выпускаемого изделия, а также времена и стоимость переналадки конвейера на выпуск всех партий собираемых на нем изделий.

Изделия собираются на конвейерах обычно партиями, размеры которых ограничены, поскольку изготовление большого количества комплектующих займет значительное время, приведет к большим простоям конвейера в ожидании их готовности, и потребует создания больших складов для их хранения.

Сборка любой партии изделий начинается после доставки на каждое рабочее место конвейера определенного количества комплектов комплектующих, как правило, одинакового для всех рабочих мест.

В одной из задач требуется построить расписание работ на предприятии, чтобы обеспечить выполнение поступившего заказа на изготовление определенного количества изделий разных типов по возможности за минимальное время.

В другой задаче требуется построить расписание работ на предприятии, имеющем один конвейер, на котором последовательно собирается L типов изделий. При сборке

любой партии изделий ее определенная часть отправляется на склад, чтобы в течение выпуска других изделий обеспечивать потребителей запасенной на складе продукцией требуемого типа до возобновления ее сборки.

Объемы выпуска и величину запасаемой продукции следует определять таким образом, чтобы в соответствии с имеющимся спросом на продукцию увеличить прибыль от ее реализации, а также сократить затраты на ее хранение и на переналадки конвейера.

Построение планов и расписаний работ.

Как уже отмечалось выше, планы и расписания работ для повышения эффективности функционирования предприятий следует строить для всех подразделений предприятия таким образом, чтобы они были согласованными между собой, т.е. осуществлять планирование и построение расписаний по изготовлению комплектующих на уровне предприятий. Для этих целей в [1] был предложен подход, основанный на использовании методов агрегирования информации.

Идея агрегирования информации состоит в формировании из деталей, подлежащих изготовлению, таких групп, в которых каждая деталь группы проходит при своей обработке производственные подразделения предприятия в одном порядке. При этом любая деталь группы может обрабатываться в каждом подразделении предприятия, где она изготавливается, по «своему» технологическому маршруту.

Такие группы рассматриваются как обобщенные детали, производственные подразделения предприятия, как обобщенные станки, а задача построения расписания работ на предприятии, как задача построения расписания обработки обобщенных деталей на обобщенных станках.

Для построения такого расписания должно быть определено время обработки каждой обобщенной детали на всех используемых обобщенных станках, т.е. время обработки каждой группы деталей на тех производственных подразделениях предприятия, где эта группа обрабатывается.

Эти времена могут определяться как с использованием традиционных методов построения расписаний [3], так и оценочных моделей [1]. На рис. 1 приведен пример расписания обработки i -й группы деталей в l -м производственном подразделении и через T_{il} обозначено время этой обработки.

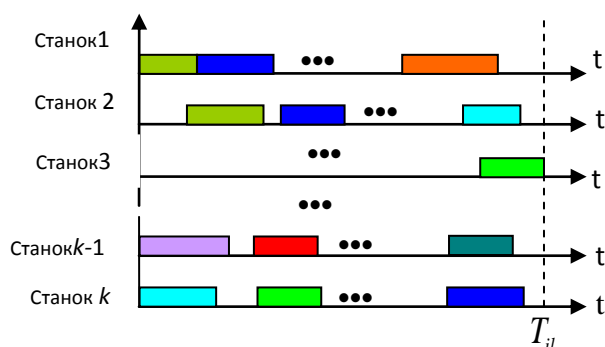


Рис. 1. Диаграмма Гантта, представляющая расписание обработки i -й группы деталей в l -м производственном подразделении.

После определения этих времен фактически возникает традиционная задача теории расписаний, связанная с построением расписания обработки обобщенных деталей в производственном подразделении, состоящем из обобщенных станков. В [1] подобное расписание изготовления групп деталей в подразделениях предприятия названо «каркасным». Для построения «каркасных» расписаний с успехом могут использоваться традиционные методы построения расписаний [3], поскольку размерность задач при агрегировании значительно снижается. «Каркасное» расписание

оказывается согласованным, т.е. расписанием изготовления деталей на уровне предприятия, поскольку порядок обработки таких групп в подразделениях предприятия определяется с помощью методов теории расписаний. Как правило, строится несколько таких расписаний, до 15 - 25 и из них выбирается лучшее. Пример такого расписания приведен на рисунке 2.

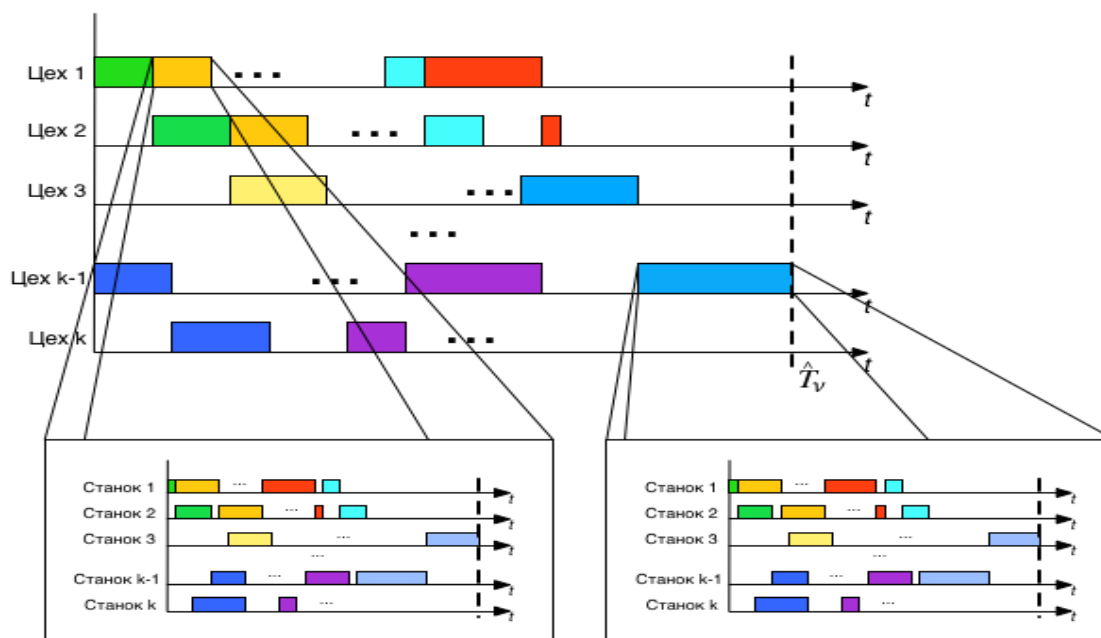


Рис. 2. Фрагмент «каркасного» расписания обработки групп деталей на уровне предприятия.

Это расписание, как видно из рис. 2, имеет практически такой же вид, как и расписание обработки деталей на участке, представленное на рис. 1. Однако в диаграмме Ганта, представляющей «каркасное» расписание вместо станков по оси ординат откладываются производственные подразделения предприятия (участки, цеха), а вместо времени обработки деталей по каждой из осей абсцисс откладываются времена обработки групп деталей в соответствующих подразделениях.

Обычно такое распределение комплектующих по группам производится крайне редко, когда происходит освоение выпуска этих типов деталей на предприятии и корректируется только после включения в производственную программу новых комплектующих или при изменении состава оборудования производственных подразделений.

Времена обработки деталей каждой группы на производственных подразделениях предприятия могут вычисляться независимо друг от друга в любой последовательности. Поэтому на многопроцессорных вычислительных средствах можно организовать параллельные вычисления этих времен. Это позволяет заметно сократить время вычислений, что подтвердили результаты вычислительных экспериментов [2].

Особенности построения планов и расписаний работ для предприятий с конвейерной сборкой изделий

Проведенные исследования и построенные примеры показали, что от порядка сборки партий изделий зависит и порядок обработки комплектующих, и в значительной степени общее время изготовления изделий. «Каркасное» расписание изготовления комплектующих, предназначенных для сборки любой партии изделий, в свою очередь можно рассматривать как «каркас» изготовления комплектующих для этой партии в производственных подразделениях предприятия.

Пример такого «каркаса» по изготовлению комплектующих для каждой партии изделий имеет вид, аналогичный «каркасному» расписанию, представленному на рис. 2, где время изготовления этого «каркаса» комплектующих обозначено через \hat{T}_v . Время сборки любой партии изделий можно определить, зная ее размеры, количество рабочих мест на конвейере и его производительность.

В этом случае, зная времена изготовления «каркасов» комплектующих и времена сборок из них партий изделий, можно построить оптимальное по времени «каркасное» расписание сборки нескольких партий различных изделий, если рассматривать время изготовления «каркаса» комплектующих для сборки j -й партии изделий через A_j как время обработки j -й детали на первом станке, а время сборки этой партии изделий на конвейере через B_j как время обработки j -й детали на втором станке, то такая задача оказывается аналогичной задаче Джонсона [3] (Рис. 3).

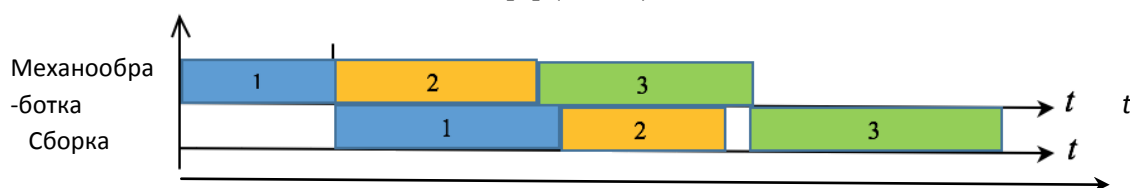


Рис. 3. Диаграмма Ганта «каркасного» расписания изготовления комплектующих и сборки из них изделий

Последовательность сборки партии изделий и соответственно изготовления комплектующих для этого может быть определена с использованием результатов следующей теоремы, которая аналогична теореме Джонсона [3].

Теорема 1. Пусть на конвейере требуется собрать несколько партий изделий различных типов, сборка каждой из которых начинается после изготовления всех комплектующих для этой партии изделий.

Тогда при одновременной доступности всех работ «каркасное» расписание, которое минимизирует общее время изготовления всех изделий, таково, что сборка j -й по порядку изготовления партии изделий предшествует сборке $(j+1)$ -й, если $\min(A_j, B_{j+1}) \leq \min(A_{j+1}, B_j)$ и $A_{j+1} \neq B_{j+1}$.

Если $A_{j+1} = B_{j+1}$ и имеется k ($k = 1, \dots, n$) следующих за ней работ по изготовлению партий изделий, для которых также выполняются равенства $A_{j+k+1} = B_{j+k+1}$, то для этих работ кроме выполнения условий $\min(A_{j+k}, B_{j+k+1}) \leq \min(A_{j+k+1}, B_{j+k})$ для всех k ($k = 0, \dots, n$) должно также выполняться условие $\min(A_j, B_{j+n+1}) \leq \min(A_{j+n+1}, B_j)$, где через $j+n+1$ обозначена первая работа, следующая за работой $j+n$, и для которой $A_{j+n+1} \neq B_{j+n+1}$.

Рассмотрим принципы и методы построения планов и расписаний работ на предприятиях с конвейерной сборкой изделий, когда на одном конвейере последовательно может собираться L различных типов изделий, объемы выпуска изделий каждого типа определяются имеющимся на них спросом r_i ($i = 1, \dots, L$). Обозначим через \tilde{C}_{si} финансовые, а через τ_i временные затраты на подготовку и переналадку конвейера для сборки i -х изделий ($i = 1, \dots, L$).

В задаче требуется таким образом определить объемы выпуска изделий каждого типа, чтобы на складе не было излишков и дефицита производимой продукции, а

количество переналадок конвейера с выпуска одних изделий на другие за время планирования было бы по возможности минимальным.

Для обеспечения последовательного изготовления изделий L типов и наличия их на складе, времена между началом смежных выпусков изделий каждого типа t_s предлагается сделать одинаковыми и в соответствии с [4] определять с помощью следующего соотношения:

$$t_s = \max \left\{ \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^L \tilde{C}_{si}}{\sum_{i=1}^L C_i \bar{r}_i \left(1 - \frac{\bar{r}_i}{p_i}\right)}}, \frac{\sum_{i=1}^L \tau_i}{1 - \sum_{i=1}^L \frac{\bar{r}_i}{p_i}} \right\},$$

где \bar{r}_i – величина среднего спроса на изделия i -го типа ($i = 1, \dots, L$) в течение интервала планирования T .

Величины q_i и \tilde{q}_i , обозначающие количество изделий в производимой партии и количество изделий из этой партии, которое отправляется на склад, определяются с помощью соотношений:

$$q_i = (p_i - \bar{r}_i) t_{li}, \quad \tilde{q}_i = \bar{r}_i t_s = p_i t_{li}, \quad i = 1, \dots, L.$$

Расчет расписаний работ на таких предприятиях в условиях случайного спроса \bar{r}_i ($i = 1, \dots, L$) после определения величин \tilde{q}_i ($i = 1, \dots, L$) может производиться в соответствии со схемой, которая описана в предыдущем пункте.

В условиях традиционной обработки комплектующих, когда детали после завершения обработки в одном производственном подразделении поступают для продолжения обработки в разные подразделения, эффективную транспортировку деталей организовать весьма сложно.

В данной работе обработку деталей в производственных подразделениях предприятий предлагается производить группами, которые при своей обработке производственные подразделения предприятия в одном порядке. Это позволяет не только строить расписания работ на уровне предприятий, но и организовывать эффективную транспортировку деталей между производственными подразделениями и строить расписание их транспортировки.

Список литературы

1. Хоботов Е.Н. О некоторых моделях и методах решения задач планирования в дискретных производственных системах // *АиТ*. 2007. №12.
2. Сидоренко А.М., Хоботов Е.Н. Агрегирование при планировании работ на машиностроительных предприятиях // *Теория и системы управления*. – 2013. – № 5. С. 132-144.
3. Bruker P. *Scheduling Algorithms*. Leipzig: Springer – 2007.
4. Хоботов Е.Н. Задачи и методы управления многономенклатурными запасами в условиях производства продукции // *Изв. РАН ТИСУ*. 2011. № 6. 221-232 стр.

Building schedule of works at enterprises with conveyor assembly of finished products

Khobotov E.N., Ermolova M.A
 IPP RAS, MIPT, BMSTU, Moscow, Russia

Идентификация моделей при плохих данных*

Г.К. Каменев

Вычислительный Центр ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Рассматривается задача идентификации моделей в случае, отсутствия информации о законе распределения или частичном отсутствии данных, характерная для экономических, социальных и биологических проблем. Неполнота или ошибки в данных приводят к вариации критерия качества идентификации, так что оптимальное решение невозмущенного критерия становится субоптимальным. Если же рассматриваемый критерий оптимальности имеет несколько локальных оптимумов, то при его вариации из-за низкого качества данных или их отсутствия должны учитываться все близкие по функционалу, но далекие по решению локальные минимумы, так как любой из таких локальных минимумов может претендовать на роль глобального, в окрестности которых лежит решение невозмущенной задачи. Предлагается подход метода множеств идентификации (ММИ) [1, 2], позволяющий с необходимой точностью строить и визуально исследовать многомерную поверхность функции идентификации, исследовать ее локальные минимумы и субоптимальные множества параметров. В этом подходе используются алгоритмы построения явного описания (аппроксимации) множеств идентификации (с размерностью от 2 до 5 переменных) в случае идентификации моделей, заданных алгоритмически в виде «черного ящика» [3]. Для визуализации аппроксимированных множеств идентификации используется технология диалоговых карт решений [4]. Технология идентификации при плохих данных рассматривается на примере модели поведения популяции леммингов [5, 6, 7] с данными из [8].

Рассмотрим модель популяции леммингов. Обозначим через $L(t)$ численность популяции, $L(t) = L_{\max} Y(t)$, где L_{\max} – максимальная численность популяции. Тогда рассматриваемая модель имеет вид: $Y(t+1) = F(Y(t), P, r, d)$, где

$$F(Y, P, r, d) = \begin{cases} PY, & Y \leq 1/P \\ 1 - r(Y - 1/P), & 1/P < Y \leq 1/P + (1-d)/r \\ d, & 1/P + (1-d)/r < Y \leq 1 \end{cases}$$

Здесь P – прирост биомассы леммингов в благоприятный год; величина d – нормированная биомасса леммингов в оптимальном биотопе, коэффициент r характеризует изменение биомассы леммингов в условиях нехватки кормов в весенний период. Пусть имеются данные о динамике численности популяции в некотором регионе вида $LE(t)$, $t=0, \dots, T$. В том случае, если для данного региона в отдельные годы данные отсутствуют, соответствующие годы при идентификации игнорируются.

Если задано сочетание значение параметров $P, d, r, L_{\max}, Y(0)$, то, рассчитав по модели ряд $L(t)$, можно сравнить его с рядом данных $LE(t)$. Чтобы численно измерить близость расчетного ряда с рядом данных, определим ошибку идентификации на участке времени от T_1 до T_2 (средне-квадратичное нормированное отклонение от данных):

$$\text{ErrMn} = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \frac{1}{(LE_{\max})^2} \sum_{t=T_1, \dots, T_2} (L(t) - LE(t))^2.$$

Таким образом, задана функция ошибки идентификации $\psi(\lambda)$, ставящая в соответствие каждому набору параметров $\lambda = (P, d, r, L_{\max}, Y(0))$ значение ошибки идентификации ErrMn на порождаемом этими параметрами ряде $L(t)$. Эта функция позволяет перейти от сравнения рядов к сравнению численных значений: чем меньше

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00465).

значение функции ψ для набора значений параметров λ , тем лучше модельный ряд приближает данные.

Проблемы идентификации рассматриваемой модели будем иллюстрировать на примере данных о популяции обских, или сибирских леммингов (*Lemmus sibiricus*) [8].

Сначала рассмотрим популяцию в **Ненецком национальном округе** с 1945 г. по 1978 г. Здесь $t=0$ соответствует 1945-1946 гг., ... $t=32$ – 1977-1978 гг., $T=32$. Первые пять лет мы оставим для настройки модели на режим данных, поэтому ошибку идентификации мы будем рассчитывать на участке времени от $T_1=5$ до $T_2=T=32$.

Традиционно, после выбора вида функции ошибок, задача идентификации состоит в нахождении такого сочетания параметров, чтобы значение функции ошибок идентификации было минимальным: $\psi(\lambda) \rightarrow \min \{\lambda \in A\}$. В нашем случае это означает, что требуется решить задачу оптимизации (поиска минимума) для функции ошибок:

$$\text{ErrMn} \rightarrow \min \{(P, d, r, L_{\max}, Y(0)) \in A\},$$

где A – область допустимого варьирования параметров.

Исходя из смысла рассматриваемых параметров и экспертных оценок, определим область допустимого варьирования параметров A следующим образом: $1.1 \leq P \leq 10$, $0.8LE_{\min} \leq d \leq 1$, $1.1 \leq r \leq 10$, $0.8LE_{\max} \leq L_{\max} \leq 1.2LE_{\max}$, $0.6LE(0)/LE_{\max} \leq Y(0) \leq 1.4LE(0)/LE_{\max}$.

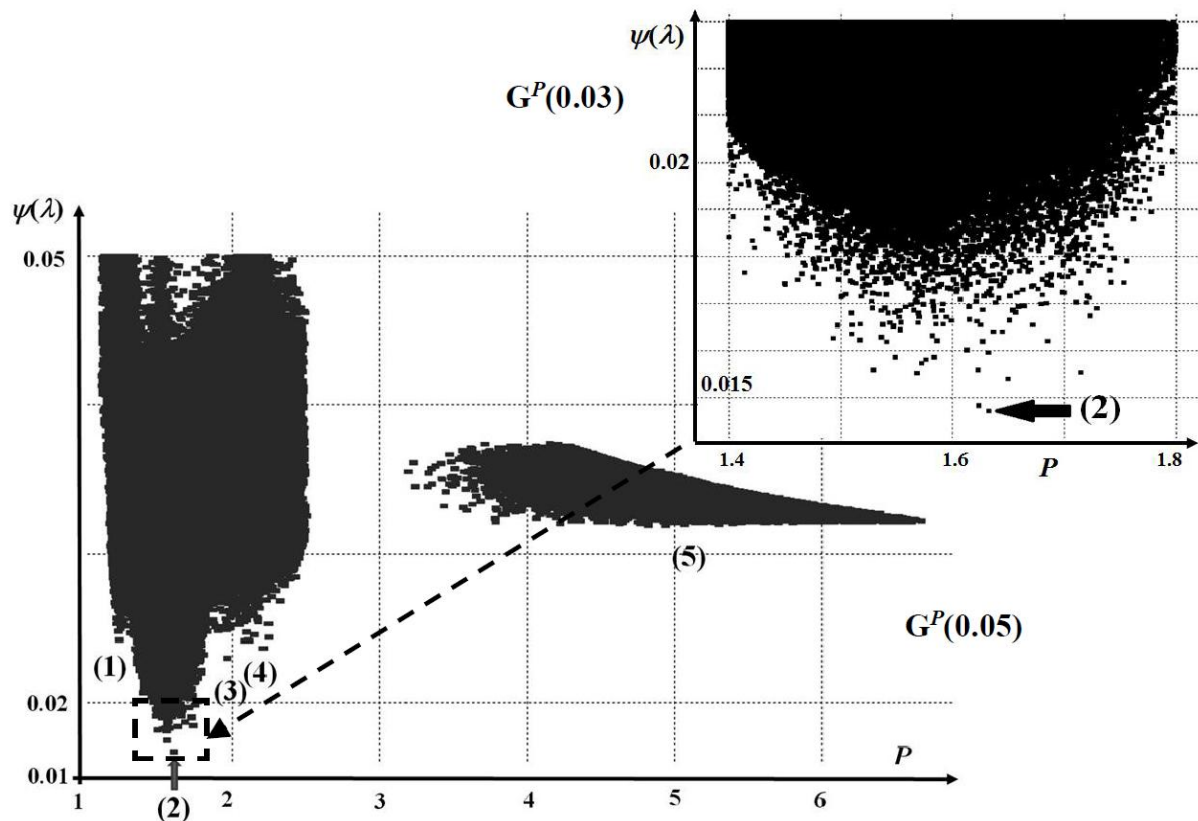


Рис. 1. Множества идентификации в пространстве (P, ψ) , Ненецкий округ

Рассматриваемая функция $\psi(\lambda)=\text{ErrMn}$ является нелинейной, негладкой и многоэкстремальной. Для таких функций необходимо нахождение *глобального минимума*, т.е. сочетания значений параметров, при котором значение функции не может быть уменьшено не только в окрестности решения, но и во всем множестве допустимого варьирования параметров A .

При плохих данных необходимо не только найти глобальный минимум функции ошибок, но и исследовать его устойчивость. Заметим, что *случай моделирования популяции леммингов является случаем с плохими данными, так как оценки популяции делаются на основании приблизительных оценок экспертов в баллах или по*

результатам ловли животных в ловушки, причем для многих регионов характерно отсутствие данных по отдельным годам или даже на протяжении нескольких лет.

В рассматриваемом случае используемый нами ММИ состоит в: поэтапном поиске глобального минимума функции ошибок; визуализации поведения этой функции вблизи оптимума; исследовании его метрической устойчивости.

Обозначим $G(\delta)=\{(\lambda, \psi(\lambda)): \lambda \in \Lambda, \psi(\lambda) \leq \delta\}$, и пусть $G^P(\delta)$ есть проекция $G(\delta)$ в пространство (P, ψ) , т.е.

$$G^P(\delta)=\{(P, \psi(P, d, r, L_{\text{ма}}, Y(0))): (P, d, r, L_{\text{ма}}, Y(0)) \in \Lambda, \psi(P, d, r, L_{\text{ма}}, Y(0)) \leq \delta\}.$$

Такое множество (проекция графика функции ошибок в подпространство критерия и части параметров) называется в ММИ *множеством идентификации*. На рис. 1 представлена достаточно точная аппроксимация $G^P(0.05)$ и $G^P(0.03)$ полученная методами из [2] для данных [7] по Ненецкому округу. Порог $\psi(\lambda) \leq 0.05$ (множество $G^P(0.05)$) выбирается на предварительном этапе исследования, порог $\psi(\lambda) \leq 0.03$ выбирается после визуализации множества $G^P(0.05)$. По оси абсцисс на этом рисунке отложено значение параметра P , по оси ординат – значение функции ошибок ψ . Видно, что каждому значению параметра P соответствует множество точек с близкими значениями P и разными значениями остальных параметров, которые в совокупности приводят к разным значениям ψ .

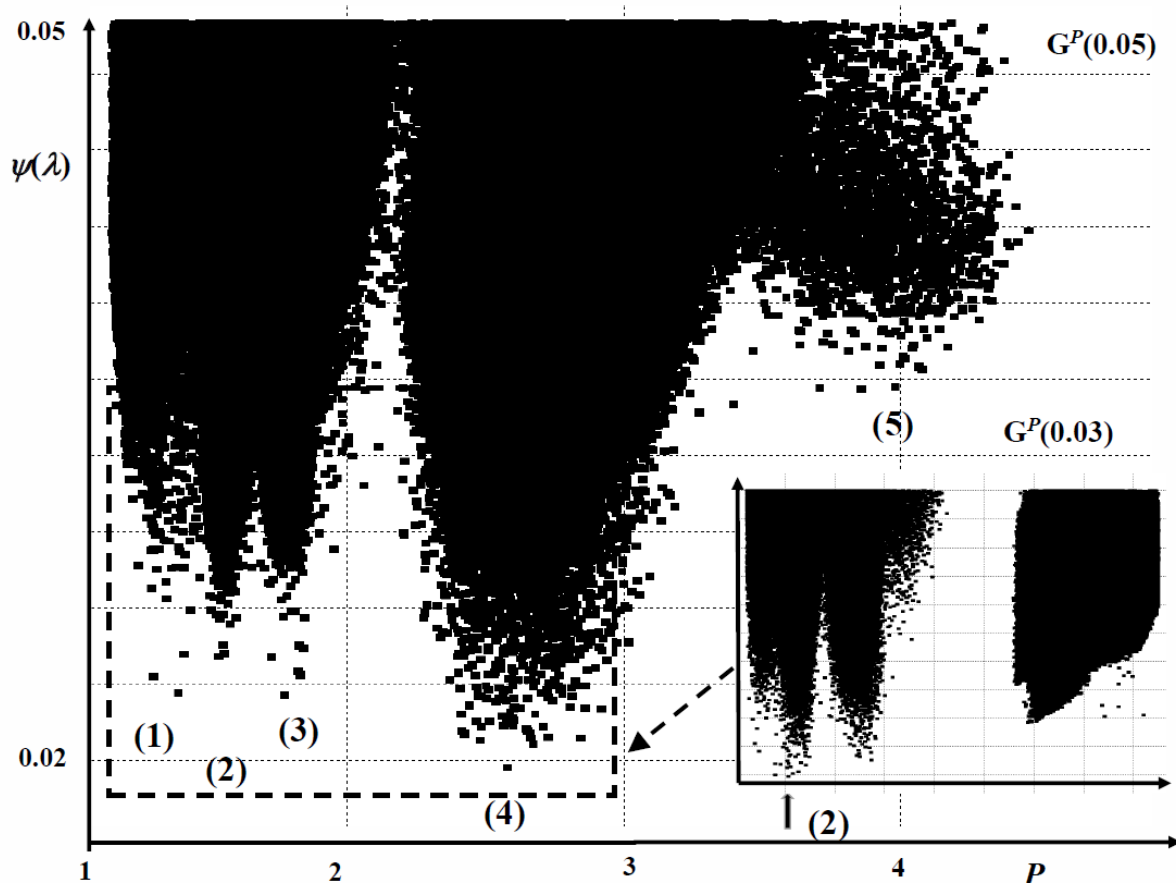


Рис. 2. Множества идентификации в пространстве (P, ψ) , Обской Север

Из рисунка видно, что множество идентификации по параметру P имеет несколько локальных минимумов для P между 1 и 2.5: на рисунке они имеют обозначения от (1) до (4). Среди локальных есть и глобальный минимум (2). Заметим, что разница между значениями функции ошибок в локальных минимумах составляет примерно 0.01. В рассматриваемом регионе для параметра P глобальный минимум устойчив в своей окрестности. Однако в случае ошибки данных наблюдений за популяцией выше 10% ($0.1^2=0.01$, т.к. функция ошибки – квадратичная) глобальный минимум может оказаться

в любом из локальных. Тем не менее глобальный минимум является достаточно устойчивым, поэтому найденное решение задачи идентификации является обоснованным. Кроме рассмотренных минимумов в области сравнительно малых значений P имеется очень неустойчивый локальный минимум в области больших значений параметра P – от 4.5 до 6. Заметим, что именно туда сходятся обычные методы оптимизации.

У каждого региона – свой, хотя и сходный, вид множества идентификации, свои локальные минимумы. От региона к региону локальные минимумы сдвигаются вверх или в бок, локальный становится глобальным, и наоборот. Рассмотрим регион **Обский Север**. В этом случае задача характеризуется отсутствием данных за некоторые годы (неполные данные, см. ряд $LE(n)$ на рис. 3).

На рис. 2 представлена аппроксимация множества идентификации $G^P(0.05)$ и $G^P(0.03)$ для данных из [8] по Обскому северу. На рисунке в диапазон $1.2 < P \leq 3$ видно несколько локальных оптимумов, сравнимых по минимально достижимому значению величины функции ошибки. Кажется, что глобальный минимум достигается в (4) при $P=2.6$. Но это не так. Из изображения $G^P(0.03)$ видно, что глобальный минимум (2) оказывается в среднем «зубце» при $P=1.52$. Соответствующая динамика популяции (ряд $L(n)$) в сравнении с исходными данными (ряд $LE(n)$) представлены на рис. 3.

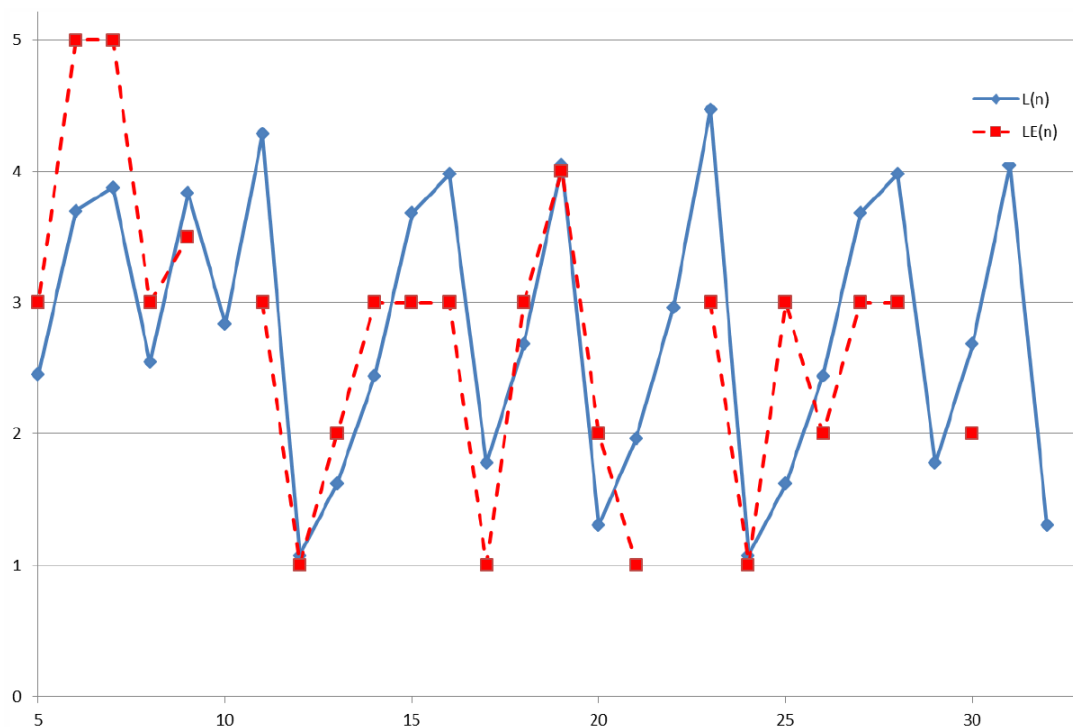


Рис. 3. Сравнение рядов модели $L(n)$ и данных $LE(n)$ для глобального минимума функции ошибок идентификации, Обский север

Из рис. 2 видно, что разница между значениями функции ошибок в локальных минимумах (1)-(4) незначительна ($\psi=0.019$ при $P=1.38$; $\psi=0.018$ при $P=1.52$; $\psi=0.019$ при $P=1.83$; $\psi=0.020$ при $P=2.47$). Поэтому несмотря на локальную устойчивость каждого из минимумов в своей окрестности параметра P , при ошибке данных наблюдений популяцией даже в 1% в рассматриваемом регионе глобальный минимум может оказаться в любом из перечисленных ниже локальных.

Таким образом, сочетание плохих (неточных) данных и их неполноты приводит к необходимости учитывать несколько метрически локально устойчивых вариантов идентификации по рассматриваемому параметру. На основе идентификации параметров в различных регионах России в [9] показано, что параметр P , имеющий в рассматриваемой модели смысл прироста биомассы леммингов в благоприятный год, хорошо соотносится с абсолютным максимумом температуры в регионе.

Список литературы

1. Каменев Г.К. Визуальный метод идентификации параметров // Доклады Академии наук. 1998. Т.359. N 3. С. 319-322.
2. Каменев Г.К. Многокритериальный метод множеств идентификации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т56. N11. С. 1872-1888.
3. Каменев Г.К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. №11. С. 1751-1760.
4. Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. – 310 pp.
5. Орлов В.А., Саранча Д.А., Шелепова О.А. Математическая модель численности популяции леммингов (*Lemmus, Diorostonyx*) и ее использование для описания популяций восточного Таймыра. // Экология. 1986. Т. 2. С. 43-51.
6. Недоступов Э.В., Саранча Д.А., Чигерев Е.Н., Юрезанская Ю.С. О некоторых свойствах одномерных унимодальных отображений // ДАН. 2010. Т. 430. №1. С. 23-28.
7. Georgy K. Kamenev, Oleg P. Lyulyakin, Dmitry A. Sarancha, Nikolai A. Lysenko, and Valery O. Polyakovskii. From chaos to order. Difference equations in one ecological problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling 2016, 31 (5), pp. 253-265.
8. Шиляева Л.М. (ВНИИ Охотоведения и звероводства, г. Киров), частное сообщение, 1978 г.
9. Каменев Г.К., Саранча Д.А., Поляновский В.О. Оценка влияния изменений климатических показателей на популяции леммингов // Сборник трудов конференции "Моделирование коэволюции природы и общества: проблемы и опыт. К 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Моисеева". М.: ФИЦ ИУ РАН, 2017. Стр. 327-335.

Models identification under bad data

G.K.Kamenev

CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Моделирование человека как носителя информации с применением метода метрического анализа данных*

И.Г. Каменев

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

НИУ ВШЭ, Москва

Модель человека в информационном обществе

Модель человека как носителя информации [1] предназначена для описания наиболее существенных закономерностей динамики человеческой личности в условиях информационной экономики. В ней экономическое развитие прямо связано с технологиями создания, хранения и обработки информации. Однако часто забывается, что важнейшим и наиболее продуктивным инструментом работы с информацией является сам человек. Экономическая наука последние годы активно изучает феномен человеческого капитала и его вклад в информационную экономику. В данной работе

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00465 а).

мы предлагаем абстрагироваться от сложной социальной природы человека и рассмотреть его, концентрируясь именно на его роли в работе с информацией. Такой подход позволяет выявить и экономически обосновать новые требования, предъявляемые к системе образования и информационной среде существования человека.

Психика человека традиционно описывается через психические процессы.

Данная модель предполагает группировку психических процессов в два:

1) память трактуется как единый процесс хранения информации, пригодной к извлечению;

2) все прочие когнитивные процессы (прежде всего, восприятие, представление, мышление, воображение) трактуются как единый процесс создания новой информации.

Такая упрощенная схема, безусловно, является грубой аналогией к техническим средствам хранения информации, и на ее основе в будущем могут строиться более сложные модели. Однако и в таком виде модель является двухфакторной, что позволяет настроить ее для описания многих реальных закономерностей человеческой жизни.

X – когнитивные способности человека

Положительные значения X означают, что человеческая психика развивается

Y – накопленная человеком информация

$$x_{t+1} = a1 * x_t^2 + a2 * y_t^2 + a3 * x_t + c1$$

$$y_{t+1} = b1 * x_t * y_t + b2 * y_t + c2$$

Интерпретация параметров:

a1 – развитие психики за счет установления новых связей (медленное во взрослом возрасте)

Квадратичный характер зависимости отражает самоускоряющийся характер рефлексии: если человек имеет возможность выделять ресурсы психики на саморазвитие, то оно происходит быстро за счет множественности нейронных связей; если же он не может выделять достаточно ресурсов на поддержание психики, то происходит ее ускоренная деградация (так же за счет множественности связей: нарушения в работе любого элемента осложняют работу других).

a2 – расход ресурсов психики на хранение информации и доступ к ней (меньше 0)

Квадратичный характер зависимости отражает множественность бессознательных связей, устанавливаемых при хранении информации (и проявляющихся в т.н. «интуиции»).

a3 – перенос ресурсов психики в следующий период

b1 – усвоение новой информации

Считается, что усвоение новой информации зависит от объема уже усвоенной (за счет аналогий, ассоциаций и т.п.). С другой стороны, усвоение новой информации зависит от когнитивных способностей. Отрицательные значения когнитивных способностей обращают этот компонент в минус: происходит дисфункция представления, т.е. человек не может вспомнить хранящуюся у него информацию (эффективный объем доступной информации начинает уменьшаться).

b2 – сохранение информации из прошлого периода

c1 – культурно обусловленная информация (бессознательное усвоение информации в форме неявных знаний от других людей)

c2 – освоение человеком новых когнитивных схем (когнитивных установок и стереотипов и т.п.) в процессе взаимодействия с другими людьми

t – возраст человека, причем t_0 – не возраст рождения, а возраст окончания детства (т.к. в процессе первичной социализации психика человека еще не является сформированной, а мы описываем ее как уже сформированную и закономерно эволюционирующую). Для простоты расчетов условно принимаем t_0 за 20 лет.

Методология исследования модели человека в информационном обществе

Метод метрического анализа данных (metric data analysis, MDA) (разработан Г.К. Каменевым и И.Г. Каменевым) включает в себя математическую теорию, на базе которой создан прикладной математический инструментарий и комплекс аппаратно-программных средств, предназначенных для анализа данных в многомерном пространстве (социальных) характеристик.

Многомерное пространство характеристик представляет собой совокупность свойств, одновременно приписываемых субъекту (актору, агенту: потребителю, избирателю, работнику, предприятию, сообществу и др.). В социологии это может быть пространство социальных характеристик (пол, возраст, образование, здоровье и т.п.). Метод метрического анализа данных (Method of metric data analysis, MMDA) позволяет оценить полноту и надежность представления генеральной совокупности субъектов имеющимся массивом социальных данных, выявить особенности его топологии и распределения.

Данные рассматриваются как элементы многомерного евклидова пространства R^d , т.е. как записи, содержащие d численных компонент $x=(x_1, \dots, x_d)$ из R^d . Могут рассматриваться различные виды расстояний (метрики).

Математическая основа метода состоит в построении (ϵ, δ) -сетей ((эпсилон, дельта)-сетей) и (ϵ, δ) -покрытий ((эпсилон, дельта)-покрытий) генеральной совокупности [2] с метрической точностью ϵ и *полнотой* по мере δ , обеспечивающей топологический и метрический анализ структуры G . Для построения (ϵ, δ) -покрытий используется метод глубоких ям (МГЯ) [3], скорость сходимости которого определяется ϵ -емкостью аппроксимируемого множества, которая при высокой точности определяется метрической (фрактальной) размерностью. Стохастическая реализация МГЯ [3] позволяет строить (ϵ, δ) -покрытия с заданными характеристиками *надежности*.

Одним из возможных направлений применения MMDA является исследование математических моделей (в частности, динамических), в задачах, постановка которых затрудняет или исключает аналитическое решение. В этом случае перебор начальных (входных) значений переменных формирует массив или поток данных. Генерация показателей модели при заданных начальных условиях обозначается как модельный эксперимент, а совокупность результатов экспериментов – как данные модельной генерации. В свою очередь, совокупность показателей модели образует многомерное пространство данных (в котором каждый результат эксперимента может быть представлен как точка с координатами). Поскольку (при наличии нецелочисленных начальных значений) количество возможных начальных значений бесконечно, то экспериментальное исследование этого пространства возможно только на основе стохастической аппроксимации. В зависимости от сложности вычислений в каждом эксперименте массив может содержать различное количество данных. Массивы размером свыше 10^6 экспериментов требуют применения специальных методов обработки (big data), требующих особого описания. На основной стадии данного исследования нами было сгенерировано $4.5 \cdot 10^6$ экспериментов.

Одним из важнейших этапов исследования моделей является их калибровка. Модели часто содержат большое количество констант, значение которых необходимо подобрать таким образом, чтобы они соответствовали реальным статистическим данным. Это может быть сделано с помощью метода множеств идентификации [4], накладывая ограничение на значение определенных показателей.

Калибровка данной модели производилась по ограничениям:

На текущем этапе анализа c_1 и c_2 приняты равными нулю, т.е. мы моделируем человека как автономное устройство обработки информации. При построении модели человека в обществе c_1 и c_2 могут быть не только параметрами, но и функциями (например, от уровня культуры общества).

a_3 и b_2 приняты за 1, т.к. отражают динамический характер системы (человеческой психики). Т.е. психика следующего периода является психикой предыдущего периода,

подвергшейся некоторым закономерным изменениям. (Если включить в модель биологическое старение как фактор психического развития, то a_3 и b_2 должны быть менее 1, но более 0, очевидно, ближе к 1).

Когнитивные способности могут изменяться в диапазоне от 1 до -1. Модель настраивается таким образом, чтобы максимум когнитивных способностей был равен 1. Достижение когнитивными способностями рубежа в -1 трактуется как дисфункция сознания (потеря человеком способности к сознательной деятельности, например, кома или смерть). Граница сверху является жесткой (т.е. не может быть превышена), граница снизу – мягкой.

Работы психологов и социологов по динамике когнитивных способностей и их измерителей, например, тестов IQ, крайне противоречивы [5]. В целом они существенно отодвигают «пик» интеллектуальных способностей с возрастом. Поэтому мы принимаем $X_0 = 0,62 + 0,18t$, и $\max(X_{20}) \approx 1$, т.е. максимум когнитивных способностей достигается наиболее интеллектуально развитыми индивидами в $t = 20$, после чего начинается их снижение (напомним, что это в нашей шкале это 20 и 40 лет). Также на основе исследований когнитивных способностей человека можно установить следующий диапазон возможных стартовых когнитивных способностей: $0.44 \leq x(t_0) \leq 0.8$, кроме того должно выполняться калибровочное требование $x(t) \leq 1$. Общий объем стартовый освоенной человеком информации $y(t_0)$ является трудно верифицируемой характеристикой, принято, что в стартовой (возраст 20 лет) популяции она должна различаться на 25-50%. Предварительное исследование (в настоящей работе мы его опускаем) показало, что для рассматриваемой задачи удобно принять этот диапазон в виде $0.23 \leq y(t_0) \leq 0.33$. Максимальным возрастом считается $t = 100$ (т.е. 120 лет), что считается теоретическим пределом ожидаемой продолжительности жизни.

На информированность в модели особых ограничений не накладывается. Параметры a_1 , a_2 и b_1 являются настраиваемыми (в пределах от 0 до 1), их подбор обеспечивает достижение моделью реалистичных значений

Помимо пика когнитивных способностей критерием реалистичности принято:

- а) отрицательное значение X (когнитивных способностей) 80-летних ($t = 60$) людей;
- б) положительное значение X (когнитивных способностей) 40-летних ($t = 20$) людей.

С помощью MMAD построим теперь трубку траекторий для исходного стартового множества при установленных ограничениях параметров ($a_1=0.0210$, $a_2=0.0650$, $b_1=0.0415$). Все требования калибровки выполнены, в частности: множество почти касается уровня $x=1$, множество при $x(20)$ лежит в полуплоскости $x \geq 0$; множество при $x(20)$ лежит в полуплоскости $x \leq 0$. Сама искомая трубка траекторий изображена на рис. 1.

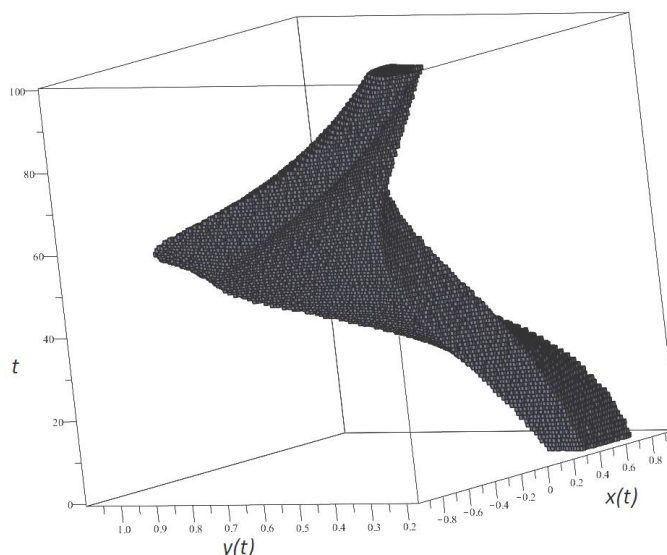


Рис. 1. Откалиброванная трубка траекторий

Исследование откалиброванной модели методом MMDA показало, что объем информации, носителем которой выступает человек, постепенно увеличивается, что требует все больших ресурсов психики на сохранение ее в упорядоченном виде. Это приводит к постепенному снижению когнитивных способностей и, в конечном счете, к недееспособности человека. Показано, что достижение максимального уровня информированности происходит тогда, когда начальные значения когнитивных способностей высоки, а информированности - низки. При этом максимальные значения информированности и когнитивных способностей тесно связаны: наибольшего уровня информированности достигает тот, кто достигает максимальных когнитивных способностей (см. Рис. 2.). Это возможно в странах, системы общего образования которых ориентированы не на передачу информации учащимся, а на максимальное развитие их когнитивных способностей.

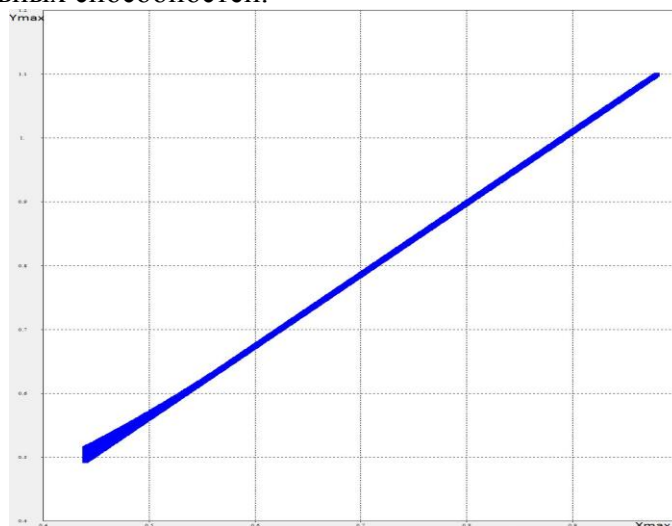


Рис. 2. Соотношение X_{max} и Y_{max}

Список литературы

1. Каменев Г.К., Каменев И.Г. Применение методов многомерного анализа для изучения социологических совокупностей // Труды отдела математического моделирования экономических систем ВЦ ФИЦ ИУ РАН, 2018 (в печати).
2. Шеннон К. Математическая теория связи (1948), приложение 7. В кн. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд. Иностранной Литературы, 1963.

3. Каменев Г.К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. №11. С. 1751-1760.
4. Каменев Г.К. Многокритериальный метод множеств идентификации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т56. N11. С. 1872-1888.
5. Salthouse T.A. Within-Cohort Age-Related Differences in Cognitive Functioning / Psychol Sci. 2013 Feb 1; 24(2): 123–130.

Modeling of a human as an information carrier using the method of metric data analysis

I.G. Kamenev

*CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia
NEPI HE «Synergy»*

Исследование системы с экспоненциальной реакцией на воздействие и случайными возмущениями

Катаргин Н.В.

Финансовый университет при Правительстве РФ

“Большинство экономистов и учёных придерживаются мнения, что в экономике не просто все колеблется вследствие какого-либо внешнего воздействия, а поддерживается изнутри самой колебательной системой” [1]. Экономическую систему часто рассматривают как совокупность взаимодействующих агентов (акторов, игроков), действие одних агентов вызывает противодействие других, что и приводит к колебаниям. Простейшая механическая система такого типа – маятник: отклонение X от равновесия приводит к появлению силы, направленной в противоположную сторону, и пропорционального этой силе ускорения – второй производной отклонения X . Пример линейной реакции на воздействие – закон Гука: при растяжении пружины возникает сила, пропорциональная отклонению и направленная в противоположную сторону. Ускорение массы m на конце пружины пропорционально этой силе:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

где k – жесткость пружины,
 x – отклонение.

Решение такого уравнения – бесконечная синусоида, то есть система бесконечно совершает колебания одинаковой амплитуды около положения равновесия.

Цитата из книги Эдгара Петерса “Порядок и хаос на рынках капитала” [2]: “Последние сорок лет в теории финансов доминировала линейная парадигма. Согласно этой парадигме каждое действие вызывает пропорциональную реакцию. Однако рынки редко бывают столь упорядоченными. Весьма часто, когда вы меньше всего ожидаете этого, возникает экспоненциальная суперреакция на воздействие – это и есть сущность нелинейности, и большинство практиков осознают ее связь с реальностью. Многие ученые и аналитики согласны с тем, что рынки реагируют нелинейно”. В [1] также предлагается рассматривать “экономику государства как сложную систему из агентов, объединённых нелинейными связями”.

Если вдруг возникнет “экспоненциальная суперреакция на воздействие”, то сила резко возрастёт и пружина (система) сломается, произойдёт катастрофа. А как поведёт себя система при экспоненциальной реакции и параметрах, не приводящих к быстрой катастрофе? Мы исследовали уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(\exp(ax) - 1)$$

Появление -1 связано с тем, что $\exp(0)=1$. При обучении студентов можно использовать

$-kx^3$. Исследование проводилось методом конечных разностей в среде Excel. Алгоритм расчётов представлен в Таблице 1.

Таблица 1. Алгоритм расчётов в Excel.

| | A | B | C | D | E |
|--|-----------|-----------|-----------------|----------|-------------------|
| | <i>a</i> | <i>k</i> | <i>dt</i> | | |
| | 0,093 | 0,002 | 1 | | |
| | <i>x</i> | <i>x'</i> | <i>x''</i> | | |
| | 100 | 10 | | | |
| | =A5+B6*dt | =B5+C6*dt | =k*EXP(a*D6)*E6 | =ABS(A5) | =ЕСЛИ(A5>0; -1;1) |
| | 68,9985 | -19,13 | -7,24941 | 88,124 | -1 |
| | 48,6489 | -20,35 | -1,22416 | 68,999 | -1 |

В таблице заданы параметры модели: временной интервал dt , a , k , начальные значения $x = 100$ и $x' = 10$ (скорость). Ускорение x'' вычисляется в столбце C. Чтобы аргумент экспоненты был всегда положительным, в столбце D формируется его абсолютное значение, а в столбце E запоминается знак отклонения x . Скорость x' и отклонение x вычисляются по формулам

$$x' = x'_{t-1} + x''dt$$

$$x = x_{t-1} + x'dt$$

В результате проведённых расчётов были построены графики x , x' , x'' , частично представленные на Рисунке 1. Вид функций отличается от синусоиды: волны x треугольные, волны x' почти прямоугольные, для x'' характерны резкие скачки. Существуют критические значения коэффициентов уравнения, при которых после некоторого количества колебаний амплитуда, ускорение и скорость устремляются к бесконечности, то есть наступает катастрофа. В данном случае при $a < 0,09$ колебания могут продолжаться бесконечно, а при $a = 0,093367$ катастрофа наступает при $t=5790$, при большем a катастрофа наступает раньше. Накануне катастрофы период колебаний уменьшается, амплитуды x' и x'' начинают нарастать.

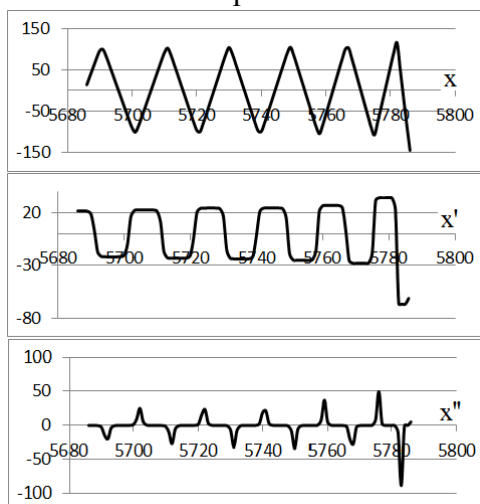


Рис. 1. Графики отклонения, скорости и ускорения накануне катастрофы.

Можно интерпретировать x как “видимые” показатели состояния производства и рынка, а x'' как показатель напряжённости в экономических и общественных

отношениях. Обычно общество пребывает в спокойном состоянии, но периодически возникают напряжения (выборы, забастовки), влияющие на экономические показатели x . Нарастание амплитуд x' и сокращение периода колебаний, предшествующие катастрофе, при отсутствии возмущений связано, скорее всего, с применяемой дискретной технологией расчётов. Роль спускового крючка играет случайное сочетание событий. Но в реальной жизни события также имеют случайный и дискретный характер, и данный пример объясняет некоторые закономерности социально-экономического развития.

Расчёты методом Монте Карло показали, что случайные возмущения x , то есть отдельные случайные события, служат “спусковым крючком” катастрофы, если она в принципе возможна. На гистограмме, представленной на рисунке 2, видно, что при добавке возмущений со стандартным отклонением, равным 1% амплитуды колебаний x , значительная часть катастроф в той же модели происходит в интервале $t < 400$, остальные растянуты в интервале до 6000 и далее.

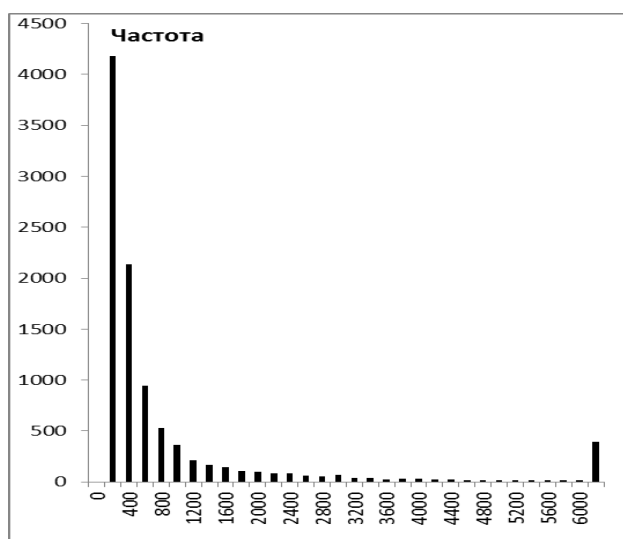


Рис.2. Частотное распределение интервалов времени до катастрофы.

В социально-экономической среде взаимодействуют множество игроков, и модель гораздо сложнее. Но данная модель позволяет понять некоторые закономерности возникновения социально-экономической катастрофы, в том числе – резкое сокращение срока её наступления и невозможность его точного прогнозирования из-за влияния малых возмущений.

Список литературы

1. Богомолов А.И., Иванус А.И., Неужин В.П. Управление экономической системой на основе её фундаментальных свойств // Корпоративное управление и инновационное развитие экономики Севера: Вестник Научно-исследовательского центра корпоративного права, управления и венчурного инвестирования Сыктывкарского государственного университета №1, 2016.
2. Петерс Э. Порядок и хаос на рынках капитала // М.: – Мир, 2000.

Investigation of a system with an exponential response to an impact and random perturbations

Katargin N.V.

Finance Academy under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

Оптимизация планирования инвестиций в регионе на основе показателей качества жизни

Н.В.Катаргин, А.И.Богомолов

Финансовый университет при Правительстве РФ, г.Москва

Президент России В.В.Путин неоднократно указывал, что главная задача органов власти – повышение качества жизни людей, выполнение социальных обязательств государства. На встрече с губернаторами 20.09.17 он напомнил: благосостояние жителей будет главным критерием оценки работы новых руководителей. Но в настоящее время эффективность управления регионом и городом оценивают по привлечённым инвестициям, произведённым затратам и по количеству введённых в строй объектов. Такой подход не позволяет оптимизировать финансовую политику в регионе, так как не учитывает социально значимые показатели, отражающие качество жизни в регионе. В данной работе предлагается модель, позволяющая распределять бюджет на основе этих показателей.

Развитие региона предполагает эффективное распределение средств между различными проектами при наличии бюджетных ограничений. При оценке вклада проекта в общее благо региона мы будем учитывать его полезность (в относительных единицах, через функцию полезности), определяемую экспертным путём. Полезность мы будем считать основным показателем в рейтинговой оценке проекта. Мы выдвигаем гипотезу, что полезность проекта для региона монотонно возрастает с увеличением затрачиваемых на него средств, но предельная полезность, то есть приращение полезности на каждый следующий рубль, убывает при превышении некоторой величины. Это соответствует таким функциям как логистическая или логарифм. Главное – проект важен не сам по себе, а важно его воздействие на социально значимые параметры региона: уровни образования, заболеваемости, смертности, рождаемости, преступности, социальной напряжённости и т.д.

Предположим, что в портфеле может находиться от 2 до N проектов и имеются группы экспертов, которые могут оценить относительную полезность каждого проекта в зависимости от затрачиваемых на него средств и его воздействие на социально значимые параметры региона. В тех случаях, когда можно измерить эффект от инвестиций, полезность будет измеряться в соответствующих единицах, взятых из таблиц статистической отчётности. В тех случаях, когда непосредственное измерение полезности затруднительно, мы будем оценивать порядковую полезность, вводя соответствующую шкалу сравнения полезностей.

Общая схема оптимального распределения средств при наличии бюджетного ограничения приведена на Рисунке 1.

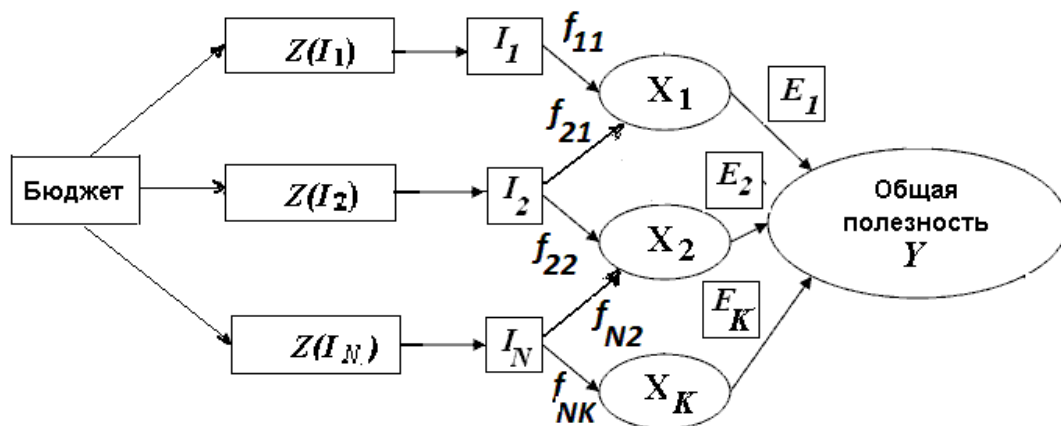


Рис. 1. Общая схема оптимального распределения средств.

Здесь:

I_i – i -й проект (внедрение новых технологий, модернизация транспортной системы, улучшение экологии и др.), его результаты в натуральных показателях;

$Z(I_i)$ – затраты на i -й проект, $i = 1, \dots, N$;

X_k – статистический показатель или экспертная оценка социально значимого параметра региона (уровни образования, заболеваемости, смертности, рождаемости, преступности, социальной напряжённости и т.д., преобразованные, чтобы с ростом показателя увеличивался Y ; например, ранжировать от 0 до 100);

E_k – эксперты k -й группы; $k = 1, \dots, K$.

Построение функции полезности отдельного проекта и его влияние на показатели региона реализуется экспертными методами. Общую полезность Y , полученную в результате бюджетных затрат, можно оценить как сумму показателей:

$$Y = \sum a_k X_k, k=1, 2, \dots, K. \quad (1)$$

Можно предложить социально-экономико-математическую модель, аналогичную модели Стоуна для формирования потребительской корзины:

$$Y = \prod (X_k - X_{min k})^{a_k} \quad k=1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

$$X_k = \prod f_{ik}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N) \quad k=1, 2, \dots, K.$$

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N = \text{бюджет} \quad (3)$$

где

Y – результирующий показатель, характеризующий качество жизни в регионе;

X_k – статистические показатели: уровни образования, заболеваемости, смертности, рождаемости, преступности, социальной напряжённости и т.д., преобразованные, чтобы с ростом показателя увеличивался Y ; целесообразно включить в модели (1) и (2) приращения ΔX_k , чтобы оценивать динамику развития региона;

$X_{min k}$ – критические значения показателей;

a_k – значимости показателей (эластичности), устанавливаемые экспертами;

Z_1, Z_2, \dots, Z_N – затраты, влияющие на статистические показатели;

$f_{ik}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ – функции, описывающие влияние затрат на статистические показатели, построенные на основе экспертных оценок и экономико-математического моделирования, например, логистическая функция:

$$X_k = \prod_{i=1}^N f_{ik} = \prod_{i=1}^N \frac{A_{ik}}{1 + \exp(-d_{ik} - b_{ik} Z_i)}$$

Выражения (1) и (2) представляют собой целевые функции, которые надо максимизировать; возможно строить модель как их комбинацию. Выражение (3) представляет собой бюджетное ограничение.

Таким образом, нахождение оптимального распределения ресурсов на реализацию отдельных проектов мы свели к решению задачи математического программирования. Модель позволит оптимизировать затраты по разным статьям с точки зрения достижения максимального результата Y при ограниченности бюджета.

Рассмотрим условный пример оптимального распределения бюджета региона между проектами трёх видов. Объём финансирования по соответствующим инновациям может меняться от 1 до 7 млрд. руб., т.е. бюджет составляет 7 млрд. руб. В приведённом примере мы предполагаем, что каждый проект влияет только на один показатель, то есть $i=k$:

$$X_k = \frac{A_i}{1 + \exp(-d_i - b_i Z_i)}$$

Бюджетное ограничение записывается в виде:

$$Z(I_1) + Z(I_2) + Z(I_3) = 7$$

Логистические функции полезности (линии), построенные по экспертным данным (чёрные фигуры), представлены на Рисунке 2. По оси абсцисс отложены ресурсы (деньги Z), необходимые для проекта, по оси ординат – его полезность X .

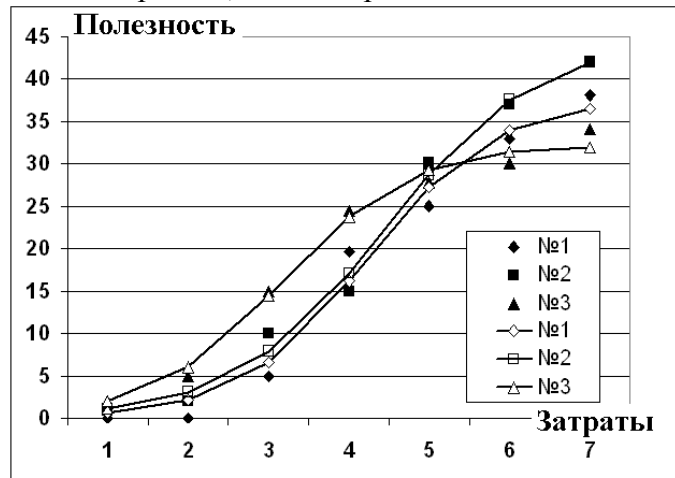


Рис. 2. Исходные данные и функции полезности проектов.

Аналитические выражения получены методом наименьших квадратов с помощью функции *Поиск решения* MS Excel. Вместо логистической функции мы используем интеграл функции нормального распределения Гаусса, которая имеется в наборе функций Excel в разделе “Статистические”. Параметры функции – математическое ожидание (среднее значение) M , стандартное отклонение S и амплитуда A . В приведённом примере формула

$$=НОРМ.РАСП(\$C7;G\$2;G\$3;1)*G\$4$$

помещается в ячейку G7. Обратите внимание на фиксацию столбца Z и строк коэффициентов M , S , A . Применяется технология МНК с *Поиском решения*: задаются приблизительные значения M , S , A , по ним вычисляются оценённые полезности χ_1 , χ_2 , χ_3 , квадраты остатков e_1^2 , e_2^2 , e_3^2 и их сумма, которая является минимизируемой целевой функцией. Изменяемые ячейки – коэффициенты, ограничений нет.

Таблица 1. Настройка параметров интегралов функций Гаусса.

| | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|----|---|-----------------|----------|----------|--------------------|----------|----------|-------------------|--------------|---------|
| 2 | | | | M | 4,15 | 4,43 | 3,20 | | Target | |
| 3 | | | | S | 1,27 | 1,57 | 1,38 | | Sum e^2 | 47,02 |
| 4 | | | | A | 36,33 | 44,31 | 32,23 | | | |
| 5 | | Реальные данные | | | Оценённые значения | | | Квадраты остатков | | |
| 6 | Z | χ_1 | χ_2 | χ_3 | χ_1 | χ_2 | χ_3 | e_1^2 | e_2^2 | e_3^2 |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0,25 | 0,64 | 1,79 | 0,06 | 0,13 | 0,04 |
| 8 | 2 | 0 | 2 | 5 | 1,67 | 2,70 | 6,21 | 2,80 | 0,49 | 1,47 |
| 9 | 3 | 5 | 10 | 15 | 6,70 | 8,04 | 14,28 | 2,88 | 3,82 | 0,52 |
| 10 | 4 | 20 | 15 | 24 | 16,52 | 17,41 | 23,19 | 12,13 | 5,81 | 0,66 |
| 11 | 5 | 25 | 30 | 28 | 27,21 | 28,48 | 29,14 | 4,88 | 2,30 | 1,30 |
| 12 | 6 | 33 | 37 | 30 | 33,69 | 37,32 | 31,55 | 0,48 | 0,10 | 2,39 |
| 13 | 7 | 37 | 42 | 34 | 35,88 | 42,08 | 32,13 | 1,26 | 0,01 | 3,48 |

Процедура оптимизации затрат на проекты представлена в Таблице 2. Были выбраны следующие константы для проектов. Минимумы: Проект1 – 1, Проект2 – 1,

Проект3 – 2. Показатели эффективности (эластичности) : 0,25; 0,4; 0,35. Приблизительные Z вводятся в строку 17 (опорный план), значения X вычислены в строке 18. В ячейку G19 введена формула

$$=НОРМ.РАСП(G\$17;G\$2;G\$3;1)*G\$4$$

В строке 20 реализуются формулы $(X - X_{min})^a$, эффективность администрации Y равна их произведению. Максимизируя Y в ячейке K20 при бюджетном ограничении (3), мы использовали Поиск решения для получения искомых значений Z_i . В результате были получены следующие значения для мультипликативной модели (2): $Z_1 = 2,41$; $Z_2 = 2,58$; $Z_3 = 2,01$.

Таблица 2. Оптимизация затрат на проекты.

| | F | G | H | I | J | K |
|----|-------------|------|-------|-------|-----------|-------|
| 15 | min | 1 | 1 | 2 | | Sum |
| 16 | a | 0,25 | 0,4 | 0,35 | | 1 |
| 17 | Z | 2,72 | 2,11 | 2,17 | | 7,00 |
| 18 | X | 1,20 | 1,24 | 2,56 | | 5,00 |
| 19 | | | | | | |
| 20 | $(X-min)^a$ | 1,39 | 1,35 | 1,80 | Y | 3,38 |
| 21 | | | | | Y/Risk | 0,34 |
| 22 | Risk | 1 | 4 | 2 | Risk | 9,88 |
| 23 | Risk*Z | 2,72 | 8,46 | 4,33 | | Sum |
| 24 | 2 | 7,40 | 71,53 | 18,75 | Risk 2 | 97,68 |

Методика усовершенствована на основе оценки рисков принимаемых решений по реализации проектов. Риск потерь по отдельному проекту вычисляется как произведение баллов на затраты (строка 23), а суммарный риск как корень из дисперсии суммы этих (независимых) величин

$$Risk = \sqrt{\sum_{i=1}^N (R_i Z(I_i))^2}$$

в ячейке K22. Максимизируется величина $Y/Risk$ в ячейке K21.

Например, эксперты оценили в баллах риски проектов: $R_1 = 1$; $R_2 = 4$; $R_3 = 2$ (строка 23). Результаты расчётов для мультипликативной модели (2):

$$Z_1 = 2,72; Z_2 = 2,11; Z_3 = 2,16.$$

Методика используется для обучения студентов эконометрике и методам принятия решений в экономике. Развитие данной методики может привести к весьма интересным и полезным результатам, как в научном плане, так и в практическом – для повышения качества планирования развития региона.

Optimization of investment planning in the region based on quality of life indicators

Katargin N.V., Bogomolov A.I.

Finance Academy under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

Образование как фактор социальной мобильности в моделях с гетерогенными агентами и эндогенной рождаемостью

В.А.Кипяткова¹, Е.В.Полякова²

¹ЕУСПб, СПб ЭМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия,

²ЕУСПб, Санкт-Петербург, Россия

1 Введение

В предлагаемой работе с использованием динамических моделей с дискретным временем проводится исследование характера влияния института образования на процессы рождаемости. Предполагается, что в начальный момент времени задана структура населения в соответствии с уровнем полученного образования. В каждом периоде индивиды принимают решение о количестве и, частично, о «качестве» своих потомков, решая задачи оптимизации функций полезности в соответствии с «беккериянским» подходом [1]. «Качество» потомков в рамках одной из предлагаемых моделей формируется за счет двух каналов: вертикального и горизонтального. Вертикальный канал, как и в работах Бизина и Вердье [2], питается усилиями родителя по воспитанию детей (фактически, временем, которое родитель готов уделять своему потомку, жертвуя своим карьерным ростом/заработной платой). «Надежность» вертикального канала растет с увеличением усилий родителя. Горизонтальный канал обеспечивается формируемым случайным образом окружением потомка. Таким образом, предполагается, что образование может служить механизмом социального лифта и сделать возможным переход из одного класса в другой, причем уровень образования, передаваемого родителями своим детям, является эндогенной величиной и определяется в результате решения родителями некоторой оптимизационной задачи. По сравнению с работой [3], представлены теоретические обобщения на более широкий класс функций, некоторые новые утверждения и результаты численного анализа.

2 Формализация модели

Предположим, что население некоторой закрытой страны состоит из индивидов нескольких типов $i = 1, \dots, N$, где индекс i отвечает за уровень образования (в порядке возрастания).

Доли указанных типов в населении обозначим через q_i , $\sum_{i=1}^N q_i = 1$. Каждый индивид живет в течение одного периода, в начале которого он выбирает уровень потребления c и количество n своих потомков, решая задачу максимизации функции полезности при соответствующем бюджетном ограничении (индекс принадлежности к определенному типу опущен):

$$\begin{cases} \ln c + \beta nV \rightarrow \max_{c, n \geq 0} \\ \frac{c}{w} + nr(w) \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

где β – коэффициент, характеризующий альтруизм родителя по отношению к своим потомкам, V – полезность каждого из потомков, w – заработная плата индивида в рассматриваемом периоде, $r(w)$ – функция, определяющая затраты родителя на воспитание одного потомка.

Исследование аналитических решений (c^*, n^*) задачи (1) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1. Предположим, что функция $r(w)$ является монотонно убывающей, ограниченной снизу и сверху, и ее эластичность по w меньше единицы. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^*}{\partial V} < 0, & \quad \frac{\partial c^*}{\partial w} > 0, \\ \frac{\partial n^*}{\partial V} > 0, & \quad \frac{\partial n^*}{\partial w} > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Переходя к описанию динамической модели, будем обозначать решение оптимизационной задачи индивида типа i в периоде t через $(c_i^*(t), n_i^*(t))$. Переменные состояния определяются парой векторов $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))$, где $q_i(t)$ – доля агента типа i в общей численности населения в периоде t ; и $\mathbf{V}(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_N(t))$, где $V_i(t)$ – полезность потомков агента типа i в периоде t . Начальное состояние системы характеризуется парой векторов $\{\mathbf{q}(0), \mathbf{V}(0)\}$. Тогда динамика системы описывается соотношениями

$$\begin{cases} V_i(t+1) = \ln c_i^*(t) + \beta n_i^*(t) V_i(t), \\ q_i(t+1) = \frac{n_i^*(t) q_i(t)}{\sum_{j=1}^N n_j^*(t) q_j(t)}, \end{cases} \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, N.$

Введение института образования предполагает появление «социального лифта», обеспечивающего возможность перехода потомков агентов в классы, отличные от классов родителей. В этом случае мы отказываемся от предположения о безусловном наследовании потомком типа родителя, считая, что передача своего типа ребенку становится для агента затратной и требует некоторых усилий. Пусть e_i – усилия (временные затраты), которые прикладывает индивид типа i , воспитывая каждого из своих потомков. Тогда совокупное время, затрачиваемое на воспитание детей, составит $n_i(r(w_i) + e_i)$. Эти усилия определяют долю $d_i(e_i)$ потомков, которые унаследуют тип родителя. Функция $d_i(e_i)$ является монотонно возрастающей функцией, удовлетворяющей условиям $d_i(0) = 0$, $d_i(1) = 1$. Следуя подходу, предложенному в работах Бизина и Вердые [2], мы считаем, что культурная трансмиссия в популяции может осуществляться двумя возможными способами: за счет вертикальной (от родителя) и горизонтальной (от того или иного окружения) социализации. При этом горизонтальная социализация реализуется с вероятностью, пропорциональной доле соответствующего типа агентов в населении. Таким образом, доля потомков типа j агента типа i определяется величиной

$$\begin{aligned} p_{ij}(e_i) &= \delta_{ij} d_i(e_i) + (1 - d_i(e_i)) q_j, \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Полезность, которую получает родитель типа i от всех своих потомков, определяется взвешенной суммой $\sum_{j=1}^N p_{ij}(e_i) V_j$.

Оптимизационная задача агента типа i при сделанных предположениях имеет вид

$$\begin{cases} \ln c_i + \beta n_i \sum_{j=1}^N p_{ij}(e_i) V_j \rightarrow \max_{c_i, n_i, e_i \geq 0} \\ \frac{c_i}{w_i} + n_i(r(w_i) + e_i) \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

При решении задачи (5) может быть использовано следующее очевидное соображение: если полезность V_i , соответствующая образованию агента типа i , не превышает среднего уровня в популяции $\bar{V} = \sum_{j=1}^N q_j V_j$, то усилия по вертикальной социализации становятся бессмысленными, поскольку приводят к снижению полезности потомка. Таким образом, оптимальным решением является $e_i^* = 0$. Если же $V_i \geq \bar{V}$, то оптимальный уровень усилий зависит от разности $\Delta V_i = V_i - \bar{V}$. С учетом данного соображения из условий первого порядка в данном случае будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{cases} r(w_i) + e_i^* = \frac{1}{d'(e_i^*)} \left(d(e_i^*) - \frac{\bar{V}}{\Delta V_i} \right) \\ n_i^* = \max \left\{ \frac{1}{r(w_i) + e_i^*} \left(1 - \frac{1}{\beta d'(e_i^*) \Delta V_i} \right), 0 \right\} \\ c_i^* = w_i (1 - n_i^* (r(w_i) + e_i^*)), \end{cases} \quad (6)$$

Утверждение 2. Задача (5) имеет единственное решение (c_i^*, n_i^*, e_i^*) , удовлетворяющее соотношениям (6), при условии, что функция $\frac{d''}{(d')^2}$ является убывающей. При этом $\frac{\partial e_i^*}{\partial \Delta V_i} > 0$, $\frac{\partial e_i^*}{\partial w_i} < 0$.

Динамика системы при наличии социальной мобильности описывается соотношениями

$$\begin{cases} V_i(t+1) = \ln c_i^*(t) + \beta n_i^*(t) V_i(t), \\ q_i(t+1) = \frac{\sum_{j=1}^N p_{ij}(e_j^*(t)) n_j^*(t) q_j(t)}{\sum_{j=1}^N n_j^*(t) q_j(t)}, \\ i = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (7)$$

и демонстрирует достаточно быструю сходимость к равновесным значениям.

Заключение

В работе предложены подходы к моделированию динамики численности населения с учетом процессов групповой социализации в обществе с гетерогенными агентами. В результате численного анализа выявлена сходимость долей индивидов различных типов в населении к соответствующим равновесным значениям. По сравнению с работой [3] основные теоретические положения распространены на более широкий класс функций.

Список литературы

1. Gary S. Becker, H. Gregg Lewis. On the Interaction between the Quantity and Quality of Children // The Journal of Political Economy, - Vol. 81, - No. 2, Part 2: New Economic Approaches to Fertility (Mar. -Apr., 1973), pp. 279-288.

2. Bisin A., Verdier T. The economics of cultural transmission and the dynamics of preferences.// *Journal of Economic Theory* – 2001 - №97 - pp.298 - 319
3. Кипяткова В.А., Полякова Е.В. Процессы групповой социализации в модели культурной трансмиссии с гетерогенными агентами.// *Финансы и бизнес* – 2014 - №4.

Education as a factor of social mobility in models with heterogeneous agents and endogenous fertility

Kipyatkova V.A., Polyakova E.V.

The European University at Saint Petersburg, Sankt-Peterburgskiy Ekonomiko-Matematicheskij Institut Rossiyskoy Akademii Nauk, St. Petersburg, Russia

Модель экономики замкнутого цикла*

Н.Г.Кишмария¹, Н.Н. Оленёв^{1,2}

¹*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

²*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Устойчиво развивающиеся экологические системы представляют собою замкнутые циклы, и соответствующим образом выглядят их модели. Часто модели экологических систем описывают за счет учета круговорота биогеохимических элементов. В [1], например, для описания воздействия экономики на экологию используется круговорот углерода. Пример круговорота углерода в степной экосистеме, как одной из наиболее простых, представлен на рис.1. Здесь кружочками показаны запасы углерода в атмосфере A (замыкается в целом по планете Земля), зеленой фитомассе растительности G , корневой системе W , подстилке V и гумусе H . Стрелки представляют соответствующие потоки между запасами, а также обмен с другими экологическими системами и с экономической системой (восстановление S и использование F). Отдельно стоит отметить поток комплексного показателя загрязнения P , пагубно воздействующего на потоки углерода, что может приводить к деградации рассматриваемой экосистемы.

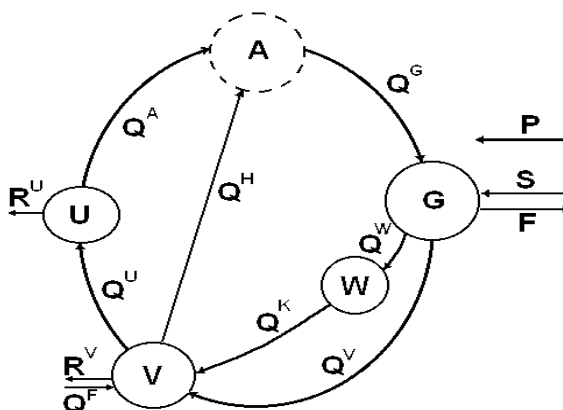


Рис.1. Круговорот углерода в степной экосистеме. *Источник:* [2].

Круговорот углерода в лесной экосистеме описан, например, в [1].

Что касается экономической системы, здесь замкнутого цикла пока нет. Все еще используется традиционная линейная схема: добыча природных ресурсов,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта № 14-11-00432).

производство, распределение, потребление, захоронение отходов. Статистика утверждает, что 80% товаров широкого потребления в течение полугода завершает свою жизнь в мусорных баках. Для российской экономики самой загрязняющей сферой является добыча природных ресурсов, а именно: добыча топливно-энергетических полезных ископаемых. На них приходится более половины всего мусора [3]. В настоящее время уровень переработки отходов в США составляет 35%, в ФРГ 50%, а в России лишь 5–7%. При этом более 90% мусора направляется на полигоны и несанкционированные свалки, поэтому количество накопленных отходов растет с каждым годом. Такое положение связано с высокой материалоемкостью и низкой ресурсоэффективностью большинства производств в основных отраслях российской экономики, а также сырьевая структура российской экономики.

Статья посвящена построению математической модели экономики замкнутого цикла для теоретического исследования эколого-экономического взаимодействия.

Список литературы

1. Оленев Н.Н., Петров А.А., Поспелов И.Г. Модель регулирования экологических последствий экономического роста // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 8. С. 17-32.
2. Demberel S., Olenev N.N., Pospelov I.G. (2004) An Interaction Model for Livestock Farming and Ecosystem // Mathematics and Computers in Simulation V.67, Issues 4-5, 335-342. Elsevier (North-Holland).
3. Министерство природных ресурсов и экологии РФ (2018). «За 10 лет почти на 50% вырос объем образования отходов»

The model of economy of a closed cycle

Kishmariya N.G.¹, Olenev N.N.^{1,2}

¹ The Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

² Dorodnicyn Computing Centre, RAS (CC RAS), Moscow, Russia

Сценарный подход к исследованию уязвимости сложных систем

Д.А. Кононов

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва
Россия,

E-mail: dmitrykon52@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены основные системные параметры сложных систем: стойкость, устойчивость функционирования и уязвимость. Предложена общая модель уязвимости сложных систем. Рассмотрены формальные модели и определения с точки зрения методологии сценарного исследования. Предложены подходы к оценке уязвимости компонент системы и характеристик «окон уязвимости». Предложена классификация типов уязвимости сложных систем.

Ключевые слова: сложная система, исследование уязвимости, сценарное исследование.

Введение. Разработка методов анализа, предсказания путей развития и эффективного управления сложными системами (СС) в условиях неопределенности являются прикладными целями исследования операций [1]. При усложнении условий функционирования и развития изучаемых объектов требуется создание технологий исследования и проектирования, позволяющих адекватно отображать последовательность их состояний [2]. Однако, сегодня наблюдается определенный кризис применения методов моделирования для исследования сложных систем [3].

Объектно-субъектный подход в сочетании с методологией структурного анализа является эффективным средством изучения динамики поведения сложных. Вместе с тем при моделировании ее поведения и развития следует провести математическую формализацию, при этом могут быть построены экспертные системы, позволяющие изучать различные аспекты развития ситуаций на основе автоматизированной генерации формализованных сценариев их поведения. Такой подход к изучению СС называют «сценарным анализом сложной системы». Построение желательного сценария (спектра сценариев) поведения и развития называют «сценарным синтезом функционирования и развития СС». В настоящей работе рассматривается методология выявления уязвимости СС на основе сценарного исследования ее поведения.

Сценарная методология как инструмент научного исследования и практического использования содержит основные компоненты: сценарная система, система сценарного анализа и система сценарного синтеза. Каждая из них задает формализованное представление необходимых элементов динамики поведения реального объекта, при этом используются средства формального конструирования сценария и операций над его элементами, которые развивают классические схемы исследования операций. Результатом применения инструментария является спектр сценариев функционирования и развития изучаемой сложной системы. Формализованное понятие сценария позволяет дать формальное описание ряда системных параметров сложных систем и на этом пути решать задач управления функционированием СС. Исходные понятия получили формализованные описания в рамках формальной теории систем [4, 5, 6]. Указанные средства разработаны в ИПУ РАН.

Системная модель уязвимости сложной системы. Разработку модели уязвимости проведем на исходном формализованном языке исследования сложной системы, предложенном в [8,10]. Основные его компоненты фиксируют следующую иерархию понятий.

В работе используем следующие термины.

Целевой режим функционирования – желательное состояние и/или направление функционирования и стратегического развития КПС.

Устойчивость функционирования – системный параметр, свойство системы осуществлять целевой режим функционирования (ЦРФ) при реализации внешнего воздействия на ее элементы.

Стойкость – системный параметр, свойство системы осуществлять целевой режим функционирования при реализации, как внешних воздействий, так и синергическому изменению режимов функционирования ее компонентов. Основная характеристика стойкости системы – время достижения предельного состояния функционирования в ЦРФ при реализации угроз.

Уязвимость – системный параметр, характеризующий возможность нанесения описываемой системе повреждений любой природы, нарушающих ЦРФ. Характерной особенностью уязвимости являются компоненты системы, которые могут быть подвергнуты атаке и реализованы угрозы («окна уязвимости») [8].

Компоненты сложной системы.

- 1) субстрат системы (набор элементов) X ;
- 2) структура системы (связи между элементами) $R^{(X)}$;
- 3) внутренний концепт системы (набор свойств и характеристик) $P^{(X)}$;
- 4) системный элемент (внутренний) $E^{(X)}(B, r, p)$, где $B \subseteq X$, $r \in R^{(X)}$, $p \in P^{(X)}$;
- 5) внутреннее состояние системы (набор системных элементов) \mathbf{v} ;
- 6) субстрат окружения: набор элементов Y ;
- 7) структура окружения (связи между элементами) $R^{(Y)}$;
- 8) набор свойств и характеристик окружения $P^{(Y)}$;
- 9) системный элемент внешней среды $E^{(Y)}(B, r, p)$, где $B \subseteq Y$, $r \in R^{(Y)}$, $p \in P^{(Y)}$;

- 10) состояние окружения системы (формируется по той же схеме) χ ;
- 11) расширенное состояние системы $\mathbf{z}=(\mathbf{v},\chi)$;
- 12) характеристики внешней среды системы $\zeta^{(Y)}$;
- 13) совместные характеристики системы и внешней среды $\zeta^{(X,Y)}$,
- 14) концепт системы (назначение + интересы + ...) П.

Тогда формальная система S – набор отношений между этими компонентами [5].

Временные связи между компонентами задает динамическая модель DS поведения системы S . Пусть задан временной отрезок $\Delta=[t_0, T]$.

Последовательность $\mathfrak{R}(\Delta)=\{\mathbf{z}(t), t \in \Delta\}$ экспертно-значимых состояний (событий) назовем пошаговым сценарием поведения системы S на горизонте сценария Δ .

Для формального определения уязвимости следует ввести понятие угрозы.

Угрозой $\gamma \in \Omega^{(tr)}$ назовем фактор (явление), реализация которого может привести к гипотетической возможности реализации нежелательных явлений (ситуаций). При описании сложной системы (СС) в виде формального системного объекта под угрозой будем понимать совокупность факторов системы и внешней среды, могущих привести с точки зрения исследователя или лица, принимающего решение (ЛПР), к существенному ухудшению состояния ее параметров, в том числе ЧС.

Пусть $\Omega^{(tri)}$ – область недопустимых состояний, т.е. условие $\mathbf{z} \in \Omega^{(tri)}$ определяет чрезвычайную ситуацию.

Рассмотрим два типа моделей угроз.

Угроза-возмущение.

В модели «Угроза-возмущение» зададим множество возможных угроз $\Omega^{(tr)}$, т.е. возможных несанкционированных изменений расширенного состояния \mathbf{z} системы S . В данном случае возникает вопрос об отклонении системы от ЦРФ, попадании в область $\Omega^{(tri)}$ при их реализации (прямая задача управления).

Угроза-ЧС.

В модели «Угроза-ЧС» угрозой назовем возможность наступления нежелательных событий, т.е. возможность появления пути состояний $W(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_N, N)$, при котором $\mathbf{z}_N \in \Omega^{(tri)}$ – области недопустимых событий. Таким образом, в модели «Угроза-ЧС» априори задано множество недопустимых событий $\Omega^{(tri)}$, и возникает вопрос о поиске нежелательных возмущений, которые их генерируют, т.е. угроз в смысле модели «Угроза-возмущение» (обратная задача управления).

Отметим, что при $t_0=T$ сценарий представляет собой текущее расширенное состояние системы. Экспертно-значимое событие (ЭС) определяет лицо, принимающее решение (ЛПР).

Качество функционирования СС, т.е. соответствие процесса функционирования ее назначению, а также безопасности, определим областью целевого назначения и безопасности (ОЦНБ) $Q(\mathbf{z}, t)$, зависящей от ее расширенного состояния.

Общее определение безопасности и качества функционирования, фиксирующее установки проектного режима, представляет собой условие

1. $\mathbf{z}(t) \in Q(\mathbf{z}, t)$ при $t \in \Delta$.

Условия 1 устанавливают в зависимости от предметной области, объекта исследования, характера и условий функционирования и т.п.

Сценарий $\mathfrak{R}(\Delta)$ назовем сценарием безопасности, если для всех $t \in \Delta$ выполнено 1.

На множестве $M\mathfrak{R}(\Delta, \sigma)$ сценариев

2. $M\mathfrak{R}(\Delta, \sigma) = \{\mathfrak{R}(\Delta, \sigma) \mid \sigma \in \Omega\}$

введем меру $\rho(\mathfrak{R}(\Delta, \sigma), Q)$ близости сценария $\mathfrak{R}(\Delta, \sigma)$ множеству Q , величину отклонения

3. $\eta_s(t) = \rho(\mathfrak{R}(\Delta, \sigma), Q, t)$

в момент времени t , а также условия допустимого отклонения в виде

4. $\rho(\mathfrak{R}(\Delta, \sigma), Q) \leq \varepsilon$,

где $\varepsilon \geq 0$ – допустимое отклонение от условия 3. Ряд таких характеристик указаны в [4].

Реализация угрозы $\gamma \in \Omega^{(tr)}$ по отношению к некоторой компоненте S_α априори приводит к нарушению ЦРФ и возмущенному сценарию $\mathfrak{R}(\Delta, \gamma)$ поведения (функционирования), отличному от $\mathfrak{R}(\Delta)$.

Скажем, что на горизонте Δ система S обладает свойством сценарной стойкости по отношению к угрозе $\gamma \in \Omega^{(tr)}$, если сценарий $\mathfrak{R}(\Delta, \gamma)$ является сценарием безопасности.

Скажем, что на горизонте Δ система S обладает свойством сценарной стойкости по отношению к системе угроз $\Omega^{(tr)}$, если для каждого $\gamma \in \Omega^{(tr)}$ сценарий $\mathfrak{R}(\Delta, \gamma)$ является сценарием безопасности.

Возможность реализации угрозы в определенной компоненте исследуемой системы, представляет собой ее место уязвимости.

Концептуальная модель уязвимости сложной системы.

Пусть заданы

- набор компонентов $S_\alpha \alpha \in \hat{A}$ сложной системы S в текущий момент времени t ;
- множество угроз $\Omega^{(tr)}$, которые могут быть реализованы по отношению к компоненте $S_\alpha \alpha \in \hat{A}$;
- меры удаленности $\rho_\alpha(\mathbf{z}(t), C_\alpha)$ компоненты S_α СС от целевого режима ее функционирования C_α ;
- допустимая граница удаленности ε_α компоненты S_α СС от C_α ;
- мера удаленности $\rho_s(Q, \rho_\alpha)$ от ОЦНБ;
- величина ущерба $W(\rho_s)$ при удаленности ρ_s от ОЦНБ.

Определение 1. Компоненту S_α сложной системы S назовем уязвимой, если найдется угроза $\gamma \in \Omega^{(tr)}$, реализация которой нарушает стойкость системы S .

Уязвимость компонентов СС можно сравнивать по коэффициенту ее уязвимости.

Определение 2. Коэффициентом уязвимости компоненты S_α СС при реализации угрозы $\gamma \in \Omega^{(tr)}$ назовем величину ущерба при выводе из ЦРФ элемента x_i .

Характеристикой уязвимости, например может являться коэффициент $C^{(u)}(\gamma, \Delta)$ уязвимости системного элемента S_α при реализации угрозы $\gamma \in \Omega^{(tr)}$ на горизонте управления Δ , который представляет собой величину ущерба $W^{(u)}(\gamma, \Delta)$.

Классификацию типов уязвимости СС проведем по следующим признакам:

- характер повреждений;
- степень повреждений;
- способы уязвимости (способы реализации угроз).

По характеру повреждений выделим:

- элемента системы;
- концепта системы, т.е. заданных (проектируемых) свойств, в том числе целевого процесса функционирования;
- системных элементов, в том числе подсистем рассматриваемой системы;
- внутреннего состояния системы, т.е. набора системных элементов и связей между ними;
- комплексные повреждения.

По степени повреждений выделим:

- сильные повреждения;
- средние повреждения;
- незначительные повреждения.

По способам уязвимости выделим:

- уязвимости при однократной точечной реализации угрозы;
- уязвимости при однократной групповой реализации угрозы;
- уязвимости при однократной комплексной реализации угроз;
- уязвимости при многократной точечной реализации угрозы;
- уязвимости при многократной групповой реализации угроз;
- уязвимости при многократной комплексной реализации угроз.

Определения указанных типов уязвимости могут быть достаточно просто формализованы на основе предложенной методологии уязвимости.

Предложенная методология уязвимости была использована для поиска мест уязвимости региональных систем, в том числе Ивановской, Ярославской Костромской областей Российской Федерации. Построенные формальные модели позволили выявить уязвимость и дать сравнительную характеристику этих регионов на основе сценарной характеристики «Матрица Т-шаговых угроз» [7–9].

Заключение

Предлагаемый подход представляется достаточно продуктивным для комплексного исследования сложных систем различного класса и назначения, в том числе определения их системных параметров с последующей реализации предложенной методологии в интеллектуальных системах поддержки принятия решений.

Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Введение в исследование операций. – М.: Наука. 1971.
2. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М.: Наука. 1997.
3. Поспелов И.Г. Модель современной экономики России: методы, технология, результаты.
4. Модели и методы анализа и синтеза сценариев развития социально-экономических систем. Кн.1, 2 /Под редакцией чл.-корр. РАН Шульца В.Л., д.т.н., проф. Кульбы В.В. – М.: Наука, 2012.
5. Kononov D. Scenario calculus as effective tool for scenario analysis //Тезисы докладов 3-й Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2001) (Москва, 4-6 апреля 2001). – М.: ВЦ РАН. 2001. С. 56-57.
6. Кононов Д.А., Пономарев Р.О. Методология сценарного исследования сложных систем как развитие классических схем исследования операций /Моделирование коэволюции природы и общества: проблемы и опыт. К 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Моисеева (МОИСЕЕВ-100). Москва, 7-10 ноября 2017. Труды Всероссийской научной конференции / Отв. редактор И.Г. Поспелов. М.: ФИЦ ИУ РАН, 2017. 438 с.
7. Кононов Д.А., Лепе Н.Л., Пономарев Р.О. Управление чрезвычайными ситуациями в региональных системах методами ситуационного анализа //Вестник РГГУ. Серия «Управление». 2016. № 4 (6). С. 58-70.
8. Пономарев Р.О., Кононов Д.А., Пономарев Н.О. Сценарное исследование сложных систем: уязвимость и чрезвычайные ситуации /Труды НИИСИ РАН. – М.: ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2016. Т. 6, № 2. С. 21-25.
9. Барбашев М.П., Пономарев Н.О., Пономарев Р.О., Хасанов И.М. Государственное управление и развитие регионов России /Сборник статей международной научной конференции «Актуальные проблемы государственного и муниципального управления. IV Сперанские чтения». – М.: РГГУ, 2017. С. 52-61.
10. Кононов Д.А., Пономарев Н.О., Пономарев Р.О., Барбашев М.П. Региональные системы: Моделирование кризисных явлений и уязвимость /Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2015): труды Восьмой междунар. конфер. – Т.2 – М.: ИПУ РАН, 2015 г. С. 13-24.

Scenarial approach to investigation of complex systems

Kononov D.A.

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia

E-mail: dmitrykon52@gmail.com

Карта науки и задачи анализа научных текстов

М.Г. Крейнес

ООО «БАЗИСНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ», Москва, Россия

Рассмотрены модели формирования и использования карты науки – жанров и пейзажа научной деятельности, на основании текстов, порождаемых в ходе этой деятельности.

Жанры характеризуют тематику научных исследований. Пейзаж определяется распределением по тематикам публикаций, докладов, патентов, отчетов, заявок на получение грантов и других текстов научного характера. Распределение текстов задает распределение по тематикам различных показателей качества текстов (в частности, для публикаций, библиометрических и наукометрических), распределение по тематикам авторов, исследовательских коллективов, организаций, научных журналов и изданий, научных мероприятий (семинаров и конференций), научных фондов и тому подобное – в широком смысле, акторов научной деятельности. Трактующая таким образом карта науки при условии достаточно детального выделения тематик позволяет решать многочисленные практические задачи ученым, руководителям, издателям, представителям бизнеса. От формирования общей и локальной объективной картины исследовательской активности и динамики ее изменений (например, во времени, по коллективам исследователей, по странам), до выявления акторов, сопоставимых или различающихся по тематике (что необходимо для объективного сравнения акторов по показателям качества, а также для оценивания соответствия реальной и декларируемой деятельности конкретного актора). Возможно использование карты науки для решения и объективизации решения рутинных задач рационального выбора издания, рубрики и рецензента для научной статьи, эксперта для анализа заявки на получение гранта или оппонента и совета по присуждению ученых степеней для диссертационной работы.

Традиционно, тематика научных текстов (основа карты науки) определяется экспертами по внешним заранее созданным другими (как правило) экспертами схемам (классификаторам, тезаурусам, онтологиям). Недостатками традиционного подхода являются невысокая выразительность классификационных схем, предполагающих малое число возможных классов, или низкая воспроизводимость и правильность результирующей классификации текстов, которые проявляются при применении разветвленных классификационных схем (см., например, [1]). Как следствие оказывается ошибочной и классификация акторов. Соответствующие ошибки лишают достоверности все последующие построения, в частности, делают практически бессодержательными попытки объективного сопоставления и ранжирования акторов научной деятельности, а также выявления новых направлений исследований.

В настоящей работе предложен иной подход к формированию карты науки: вычислительное формирование таксономии коллекций научных текстов и отнесение текстов к разделам таксономии. Описание актора возможно в форме таксономии коллекции связанных с ним текстов или относительно таксономии определенной представительной коллекции научных текстов. В последнем случае описание актора определяет выраженность заданных таксономией тематик в деятельности актора. На базе иерархии акторов (например, исследователь, научная организация, объединение научных организаций по ведомственному и/или территориальному принципу) получим соответствующие иерархию коллекций научных текстов и иерархию карт научной деятельности. Появляется возможность вычислительно, с учетом показателей качества научных текстов (не только наукометрических), идентифицировать возникновение и развитие новых научных направлений, находить и сопоставлять акторов, работающих в рамках тематически близких направлений и даже оценивать соответствие направлений национальной научной мысли мировым тенденциям.

Будем ассоциировать акторов научной деятельности с коллекциями текстов, которыми акторы представляют собственную деятельность (публично и/или не публично). В качестве исходных данных для последующих построений будем использовать множество акторов (которое определяет уровень результирующей карты науки, круг и характер решаемых с ее помощью задач), коллекции текстов, ассоциируемые с акторами, данные наукометрии и библиометрии, другие оценки качества для текстов и акторов. Непосредственное включение текстов в качестве основной компоненты в исходные данные существенно отличается от распространенных подходов, основанных на классификации текстов экспертами в соответствии с априорными схемами. А также от использованного компанией Прайс Вотерхауз подхода, когда в качестве свойственной для актора тематики выбирались предметные области научных журналов с высоким значением импакт-фактора, публикующих статьи, связанные с актором. В рамках последнего подхода в качестве областей деятельности ведущих математических и физических исследовательских институтов России в 2013 году были «обнаружены» медицина, гуманитарные науки и финансовый менеджмент – значения импакт-фактора для журналов в этих предметных областях много выше, чем в математике и физике.

Основой предлагаемой модели формирования карты науки является таксономия корпуса текстов. Для построения таксономии используем систему моделей текстов и текстовых коллекций, обзор которых представлен в [2]. Эти модели основаны на содержательных предположениях о носителях семантики неструктурированных текстов на естественных языках и носителях тематики текстовых коллекций.

Таксономия корпуса текстов представлена моделью, получившей название структурированной контекстной модели [3], объединяющей наиболее значимые для тематики корпуса слова в содержательно связанные группы. Формирование такой модели выполняется вычислительно, не требует априорных знаний о смысле, значении и сочетаемости слов и основано на предположении о возможности охарактеризовать тематику и содержание отдельного текста набором слов, отличающих его от представительной для языка совокупности текстов. Критерием отличия является совместная встречаемость слов в тексте, не соответствующая общей распространенности слов в языке, оцениваемая по величине комбинаторного индекса, определяемого частотными словарями текста и представительной для языка совокупности текстов. Максимальное из рассчитанных значений индекса для каждого слова определяет вес слова в модели. Свойством естественных языков является одновременное использование для представления семантики текста редких, «обычных» и частых слов. Чтобы все категории слов были сохранены в модели, в качестве исходных данных используем «мешки слов» для каждого текста, различающиеся минимальной частотой использования слов в языке. Для каждого «мешка слов» весом слова в модели текста является максимальное для слова значение комбинаторного индекса, нормированное на максимальное значение индекса в данном «мешке слов». В рамках каждого «мешка слов» упорядочим слова по невозрастанию веса и ограничим включение слов в модель минимальным пороговым значением веса и общим числом слов. В результате получим модель текста в виде матрицы, строки которой соответствуют различным «мешкам слов». Данная модель дает нетривиальные результаты для текстов объемом от примерно 1 килобайта до 300 килобайт, что соответствует объему научных текстов (для очень коротких текстов в модель могут попадать почти все слова текста, а для очень больших текстов в модель будут попадать наиболее часто встречающиеся в тексте термины). Выделим определенное число наиболее значимых для корпуса публикаций слов, входящих в модели текстов. Здесь критерием значимости является суммарный вес слова в моделях всех текстов корпуса. В рамках выделенного множества слов найдем для каждого из них контекст – слова, с которыми анализируемое слово устойчиво появляется в одних и тех же текстах [2, 3].

Выявление контекстов основано на использовании формально того же комбинаторного индекса, который применен при построении моделей текстов. Но теперь индекс определяется в зависимости от числа текстов, в которых слова встречаются одновременно, и от числа текстов, в которых встречается каждое из слов. На этом этапе выделенное множество слов разделяется на два подмножества: слова, позволяющие дифференцировать тематику текстов коллекции, и слова, характерные для коллекции в целом. Затем итеративно выполняется уточнение числа слов, используемых для построения модели коллекции, на основании выполнения требования к полноте описания коллекции – в заданной доле документов коллекции (например, в 99 % документов) должно содержаться хотя бы одно слово из первого подмножества. Окончательно, структурированная контекстная модель коллекции является результатом кластеризации контекстов слов с использованием метода кластеризации текстовых коллекций [4] и имеет форму набора множеств слов с весами [2, 3]. Здесь каждый набор слов определяет характерную тематическую группу в рамках корпуса текстов, а вес слова в группе – его значимость для группы. В [3] введена количественная характеристика «притяжения» текста к группе слов, позволяющая отнести текст к одной или нескольким из найденных тематических групп. При формировании структурированной контекстной модели возможно введение дополнительных требований к числу групп модели (модель должна содержать не менее определенного числа групп) и/или к характеристикам «притяжения» текстов корпуса к тематическим группам (например, к среднему по корпусу текстов «притяжению»). Выполнение данных требований проверяется и обеспечивается в ходе итерационного процесса. Конструкция, включающая в себя тематические группы слов, соотнесенные с тематическими группами тексты и количественная характеристика «притяжения» текста к группе, определяет таксономию корпуса текстов. Тематические группы слов легко поддаются содержательной интерпретации, а несколько первых слов каждой группы могут служить содержательными заголовками, с определенностью характеризующими тематику текстов, соотнесенных с соответствующей группой.

При переходе от таксономии корпуса текстов к карте науки возможны две различных ситуации. Корпус текстов может быть порожден актором, анализ деятельности которого представляет интерес, или может содержать тексты, порожденные разными актерами (как с включением текстов актора, так и без таких текстов). В первом случае таксономия непосредственно определяет портрет актора – тематику (жанры) его деятельности и распределение текстов по соответствующим тематикам. Во втором случае для достоверной и практически полезной характеристики актора (портрет актора) относительно таксономии корпуса текстов достаточно определить распределение текстов актора по элементам таксономии: число текстов, отнесенное к элементу таксономии, и среднее «притяжение» текстов к каждому элементу. Существенно, что для текста возможно тяготение к нескольким тематическим группам. Для обоих случаев в [3] предложены способы оценивания количественного показателя тематической близости коллекций, соответствующих актерам. Таким образом, сформированная таксономия текстовых коллекций позволяет найти тематически близких акторов вне зависимости от конкретного типа их деятельности. Представив актора различающимися по времени создания коллекциями текстов можно выявить динамику изменения тематики, появление нового в деятельности актора.

Пример таксономии вычислительно сформирован для масштабной коллекции текстов, включающей 922231 русскоязычных научных статей (общее число словоупотреблений – 1 852 000 865), опубликованных в период 2011 – 2015 г.г., полнотекстовые индексы которых представлены информационным ресурсом Электронная научная библиотека (elibrary.ru). Предварительная обработка текстов не производилась, не выполнялись токенизация и исправление опечаток, в том числе,

опечаток, возникших в результате распознавания текстов. Для всех статей построены матричные модели. По матричным моделям статей вычислительно сформирована таксономия коллекции и выполнена категоризация статей (их отнесение к элементам таксономии). Всего в структурированную контекстную модель корпуса текстов вошло 926 слов. Из них 709 слов позволяют дифференцировать тематику текстов коллекции и 137 слов характеризуют коллекцию в целом. На долю первых приходится 234 582 270 словоупотреблений, а на долю вторых – 246 702 289 словоупотреблений. В модели вычислительно выделено 78 тематических групп. В среднем, статья соотнесена с двумя группами.

В качестве примера приведены первые 5 наиболее «весомых» слов для элементов таксономии коллекции полнотекстовых статей. Тематические группы упорядочены по числу слов, отнесенных к группе. Группы, следующие за 20-й группой, главным образом конкретизируют тематику предыдущих групп. Поэтому для сокращения объема большая их часть не приведена. Данные представлены в следующем формате: № группы; число слов в группе; число документов, отнесенное к группе; наиболее «весомые» слова группы; (интерпретация группы). 1; 204; 261307; инвестиций, инвестиционных, сектора, финансирования, капитала; (экономика). 2; 153; 225082; вещи, реальности, философских, случайно, искусства; (гуманитарные науки). 3; 112; 199567; крови, препаратов, клинических, терапии, заболевания; (медицина). 4; 111; 166727; педагогов, учащихся, учителя, воспитания, заведений; (проблемы образования). 5; 75; 148635; излучения, алгоритм, переменных, уравнения, параметров; (точные науки). 6; 69; 97014; исполнения, обязанности, юридических, закона, актов; (юридические науки). 7; 43; 104944; излучения, нм, камеры, мкм, угол; (физика). 8; 39; 77678; Восточной, Северной, Востока, Южной, Северо; (регионоведение). 9; 31; 81143; камеры, нм, атомов, мкм, излучения; (техническая физика). 10; 26; 72111; моль, ионов, молекул, атомов, веществ (химия). 11; 17; 22515; Украины, Союза, Германии, Европы, европейских; (международные отношения). 12; 17; 28707; строительных, автомобилей, транспортных, транспорта, строительства; (строительство и транспорт). 13; 17; 29264; сорта, молочной, корма, кг, количество; (животноводство). 14; 13; 18340; заместитель, профессор, доктор, докладе, конференции; (научная жизнь). 15; 13; 17316; техники, машин, оборудования, технических, завод; (промышленное производство); 16; 11; 10552; гор, черной, белого, Красной, земли; (география). 17; 11; 12955; опасных, опасности, угрозы, последствий, конфликта; (проблемы безопасности). 18; 10; 15590; фронта, советской, войны, военной, партии; (история Отечественной войны). 19; 9; 22149; добычи, нефти, промышленности, промышленных, технологических; (добыча полезных ископаемых – горное дело). 20; 8; 22408; площади, га, природных, участков, почвы; (агрономия). 27; 6; 9695; компьютера, пользователя, цифровой, компьютерной, программного; (информатика). 30; 5; 9859; канала, сигнала, передачи, устройства, использования; (связь). 31; 5; 7180; энергии, тепловой, ядерных, энергетических, потока; (энергетика). 32; 6; 3656; конструкции, сопротивления, корпуса, материала, испытаний; (инженерное дело).

Для полутора тысяч журналов, представленных в рассматриваемой коллекции более чем 100 публикациями, были построены портреты относительно сформированной таксономии и найдены количественные характеристики тематического сходства. Опрос показал соответствие вычисленных на основании моделей оценок представлениям специалистов и членов ряда редакционных коллегий научных журналов.

Рассмотренный подход к формированию карты науки обладает рядом особенностей. Жанры выявляются вычислительно в соответствии с корпусом текстов, а не заданы априори. Пейзаж определяется распределением текстов по жанрам, а не приписыванием текста к определенной тематике. В результате 78 тематических групп оказывается достаточно для формирования реалистической карты современной российской науки по миллиону научных статей. Тексты, соответствующие любой

тематической группе и/или содержащие определенный набор терминов, можно рассматривать как самостоятельную коллекцию. Процесс построения таксономии для такой коллекции ничем не отличается от рассмотренного выше. Результатом является последовательность карт науки, различающихся «масштабом» – уровнем детализации определения тематических направлений научных исследований.

Сопоставление карт науки, соответствующих акторам (например, на национальном уровне), и динамики их изменения позволяет определить тенденции развития и различия (возможно, и направления отставания) в деятельности акторов (и даже стран). Выявление тематически сопоставимых акторов позволяет выполнить ранжирование акторов с учетом конкретного типа их деятельности по разнообразным показателям, в том числе по библиометрическим, наукометрическим, экономическим, по соответствию реальной и декларируемой тематики научной активности. Таксономии коллекций статей, процитированных в конкретной публикации, статей, цитирующих данную статью, и статей, содержательно близких с ней, позволяют на основании формальных признаков обнаружить содержательно необоснованное «дружественное» цитирование [5], радикально искажающее библиометрические и наукометрические показатели. Идентификация акторов, злоупотребляющих «дружественным» цитированием позволяет сформировать своеобразную «карту позора» – карту изданий, ученых, коллективов и организаций, порождающих не соответствующие реальной востребованности их статей значения наукометрических показателей.

Рассмотренный подход невозможен без авторитетных актуализируемых масштабных коллекций научных текстов, являющихся результатом совокупного труда ученых, редакционных коллегий научных изданий, издательств, организаторов научной деятельности, и требует использования специальных технологий анализа больших объемов неструктурированной текстовой информации.

Список литературы

1. Saracevic T. Effects of inconsistent relevance judgments on information retrieval test results: A historical perspective // *Library Trends*, Baltimore: Johns Hopkins University Press. 2008. V. 56. No. 4. P. 763--783.
2. Крейнес М.Г. Модели текстов и текстовых коллекций для поиска и анализа информации // *Труды МФТИ*. 2017. Т.9, № 3 (35). С. 132–142.
3. Крейнес Е.М., Крейнес М.Г. Модель управления выбором референтных коллекций для объективной оценки качества научно-технических публикаций по библиометрическим и наукометрическим показателям // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2016. № 5. С. 73-89.
4. Крейнес М.Г., Афонин А.А. Кластеризация текстовых коллекций: помощь при содержательном поиске и аналитический инструмент // *Интернет-порталы: содержание и технологии*. Выпуск 4. М.: Просвещение, 2007. С. 510-537.
5. Крейнес Е.М., Крейнес М.Г. Модель управления построением оценки качества научно-технических документов на основании анализа их содержательного контекста // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2016. № 6. С. 97-106.

Map of Science and Scientific Texts Analysis Problems

M.G. Kreines
Llc "BaseTech", Moscow, Russia

Производственная лакуна как инновационный фактор региона

Е.В.Куркин , Н.Б.Баева

ВГУ, Воронеж, Россия

Рассмотрение вопроса моделирования экономики региона [1] привело к необходимости выделения особого элемента – производственной лакуны в экономической системе региона, создающего неоднородности в общей структуре системы. Исследуем производственную лакуну как важную и своеобразную составную часть инноваций в регионе.

Понятие производственной лакуны региона.

Производственная лакуна – совокупность субъектов хозяйственной деятельности, которые участвуют в материальных, организационных и производственных отношениях с другими хозяйствующими субъектами региона, но организационно не подчиняются административному центру и не зарегистрированы как юридические лица на территории региона. Производственная лакуна делится на: внешнюю, которая зарегистрирована в других регионах, но ведет свою производительную деятельность в регионе и не платит в нем налоги (в частности налог на добавленную стоимость); внутреннюю – хозяйствующие субъекты своего региона, ведущие деятельность за пределами региона, но платящие налоги в регионе регистрации. Внутренняя лакуна одного региона является внешней для другого. Наличие таких субъектов приводит к искажениям статистической информации по валовому выпуску региона, о чем, в частности, упоминается в официальных статистических сборниках [2]. В работе [3] приведены подходы к описанию неоднородной системы, исследованию производственной лакуны и оценке её масштаба. Также были представлены математические методы оценки масштаба производственной лакуны на основе таблиц межотраслевого баланса, также была введена функция привлекательности региона.

Приведем основные балансовые соотношения для определения масштаба лакуны. Ниже приведена специальным образом составленная таблица межотраслевого баланса (МОБ), которая позволяет выявить неучтенные элементы – производственные лакуны.

| | 1 | 2 | ... | n | n+1 | 1 | ... | n | КП | П |
|----|---------------------|---------------------|-----|---------------------|----------------------------|-------------|-----|--------------|----------------------------|-----|
| | X_{11} | X_{12} | | X_{1n} | $X_{1,n+1}$ | y_{11} | | y_{1n} | $Y_1 = \sum y_{1k}$ | 1 |
| | X_{21} | X_{22} | | X_{2n} | $X_{2,n+1}$ | y_{21} | | y_{2n} | $Y_2 = \sum y_{2k}$ | 2 |
| | ... | ... | | ... | ... | .. | | .. | ... | .. |
| | X_{n1} | X_{n2} | | X_{nn} | $X_{n,n+1}$ | y_{n1} | | y_{ny} | $Y_n = \sum y_{nk}$ | n |
| +1 | $X_{n+1,1}$ | $X_{n+1,2}$ | | $X_{n+1,n}$ | $X_{n+1,n+1}$ | $y_{n+1,1}$ | | $y_{n+1,ny}$ | $Y_{n+1} = \sum y_{n+1,k}$ | n+1 |
| | Z_{11} | Z_{12} | | Z_{1n} | $Z_{1,n+1}$ | | | | | |
| | ... | ... | | ... | ... | | | | | |
| Z | $Z_{nz,1}$ | $Z_{nz,2}$ | | $Z_{nz,n}$ | $Z_{nz,n+1}$ | | | | | |
| П | $Z_1 = \sum Z_{i1}$ | $Z_2 = \sum Z_{i2}$ | | $Z_n = \sum Z_{in}$ | $Z_{n+1} = \sum Z_{i,n+1}$ | | | | | |
| П | X_1 | X_2 | | X_n | X_{n+1} | | | | | |

Таблица 1. МОБ с выделением лакуны.

В таблице 1 наряду с n видами экономической деятельности присутствует производственная лакуна, представленная как дополнительный $n+1$ элемент.

Аналогично базовому варианту МОБ $x_{ij}, i = \overline{1, n+1}, j = \overline{1, n+1}$ есть величина потока ресурсов в денежном выражении из i -го элемента (вида экономической деятельности, лакуны) в j -й, $Y_i, i = \overline{1, n+1}$ есть конечный продукт вида экономической деятельности или лакуны, $Z_j, j = \overline{1, n+1}$ - чистый продукт, а $X_i, i = \overline{1, n+1}$ - валовой выпуск. В таблице 1 мы не выделяем производственную лакуну для каждого вида экономической деятельности, но анализируя $n+1$ столбец таблицы можно определить структуру потребления (входящих ресурсов) производственной лакуны по видам экономической деятельности. Аналогично по $n+1$ строке можно понять структуру выпуска производственной лакуны.

Приведем формулы для нахождения структуры потребления и выпуска лакуны. Опираясь на основные балансовые соотношения, можем выписать выражение для определения распределения потребления лакуны

$$x_{i, n+1} = X_i - Y_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}, i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

и аналогично можно выписать формулу структуры выпуска лакуны

$$x_{n+1, j} = X_j - Z_j - \sum_{i=1}^n x_{ij}, j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Рассмотрим производственную лакуну с точки зрения инвестиций в регион.

Производственная лакуна как инвестиции в регион.

В классическом варианте инвестиции в экономику региона дают различного рода положительные результаты: налоги в регион, повышается валовой выпуск, растет занятость населения и т.п. Возникновение производственной лакуны в регионе, также можно считать инвестицией: сторонний для региона экономический субъект вкладывает средства в создание нового экономического элемента в регионе, это может быть новое предприятие, новый филиал некоторой организации в сфере услуг, новая торговая точка. Отдача от такой инвестиции несколько отличается от классического варианта. Рассмотрим соотношение [5]:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + C_i + G_i + I_i + E_i - M_i = X_i, i = \overline{1, n},$$

где $C_i, i = \overline{1, n}$ - потребление домашних хозяйств, $G_i, i = \overline{1, n}$ - государственное потребление, $I_i, i = \overline{1, n}$ - инвестиции, $E_i, i = \overline{1, n}$ - экспорт, $M_i, i = \overline{1, n}$ - импорт, а всё выражение $C_i + G_i + I_i + E_i - M_i, i = \overline{1, n}$ - является более подробной записью конечного продукта в межотраслевом балансе. В приведенном выражении нас будет интересовать инвестиционная составляющая I . Как правило, в межотраслевом балансе инвестиции выделяют, когда рассматривают динамический межотраслевой баланс, являющийся развитием статической межотраслевой модели. Производственные капиталовложения (инвестиции) выделяются из состава конечной продукции, исследуется их структура и влияние на рост объема производства. В случае инвестиций производственной лакуны влияние на рост объема производства может не прослеживаться, так как выпущенный продукт будет учитываться в другом регионе - регионе «прописки» головного предприятия, создавшего лакуну.

Действительно размещение лакуны может рассматриваться как инвестиции в экономику региона, причем как на восстановление изношенных фондов так и для создания новых. Регион, получивший инвестиции, как правило, ожидает дополнительной отдачи от полученных инвестиций в будущих периодах в виде дополнительных поступлений налогов и увеличения валового выпуска, но в случае производственной лакуны такая отдача носит ограниченный характер. Налоги поступают не полностью, часть из них уплачивается в стороннем регионе (прописки

головной организации), валовой выпуск и вовсе уходит из региона получившего инвестиции.

Функция привлекательности региона для инвестирования.

Далее рассмотрим вопрос расчета вероятности возникновения нового элемента производственной лакуны региона в зависимости от некоторых его численных характеристик.

Вероятность возникновения производственной лакуны в регионе зависит от многих факторов. От объективных: стоимость материальных и трудовых ресурсов, наличие и удовлетворенность спроса на определенные виды продукции. И от субъективных: личных предпочтений и волевых решений руководителя конкретного предприятия, расположения и транспортной доступности конкретного региона относительно предприятия желающего расширить территорию своего присутствия. Для оценки привлекательности региона с позиции объективных факторов возникновения производственной лакуны можно составить специальную функцию привлекательности региона. Теоретический аспект данного вопроса ранее рассматривался в работе [4]. Приведем здесь некоторые выкладки, касающиеся построения функции привлекательности региона, в частности укажем параметры, от которых может зависеть привлекательность региона. Чем большее значение дает функция привлекательности для региона, тем с большей вероятностью там может возникнуть производственная лакуна.

На основе формул выпуска внешней лакуны и анализа статистической информации можем предположить, что привлекательность региона зависит линейно (с некоторым коэффициентом) от величины валового выпуска $X(t)$. Предполагается, что аналогично зависит внешняя лакуна от численности населения региона $P(t)$. Из формулы (2) можем сделать вывод, что внешняя лакуна линейно зависит от уровня оплаты труда $l(t)$, но обратно пропорционально, то есть с некоторым отрицательным коэффициентом. Аналогичное утверждение можем сделать относительно зависимости привлекательности региона от стоимости основных ресурсов $R(t)$. Таким образом, можем выписать вид функции привлекательности региона

$$f_{ar}(X(t), P(t), l(t), R(t)) = k^X X(t) + f_{ar}^0 + k^P P(t) - k^l l(t) - k^R R(t).$$

При каждой переменной в функции привлекательности региона стоит коэффициент его влияния на общее значение функции.

Систематизируем в таблице влияние показателей системы на производственную лакуну.

| Параметр | валовой выпуск | численность населения | средняя з/п | стоимость ресурсов |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Приращение аргумента | $\Delta X(t) > 0$ | $\Delta P(t) > 0$ | $\Delta l(t) > 0$ | $\Delta R(t) > 0$ |
| Изменение внешней лакуны | $\bar{X}_{n+1}(t) \geq 0$ | $\bar{X}_{n+1}(t) \geq 0$ | $\bar{X}_{n+1}(t) \leq 0$ | $\bar{X}_{n+1}(t) \leq 0$ |
| Изменение внутренней лакуны | $\bar{X}_{n+1}(t) \leq 0$ | $\bar{X}_{n+1}(t) \leq 0$ | $\bar{X}_{n+1}(t) \geq 0$ | $\bar{X}_{n+1}(t) \geq 0$ |

Таблица 2. Влияние показателей на производственную лакуну.

В работе рассмотрен такой элемент экономики региона как производственная лакуна. Производственная лакуна несет в себе элементы инвестиционной составляющей, но с убывающей отдачей. Убывающая отдача является следствием свойства производственной лакуны: валовой выпуск лакуны не учитывается в системе

налогообложения региона. В статье приведен пример построения функции инвестиционной привлекательности региона.

Список литературы

1. Баева Н. Б., Куркин Е. В. Математические методы исследования свойств производственной лакуны // Экономика и математические методы, 2015, 51 (3), с. 87-93.
2. Воронежский статистический ежегодник. 2011: Стат. сб. / Воронежстат. - В 75 Воронеж, 2011. - 324 с.
3. Баева Н. Б., Куркин Е. В. Математические методы поддержки процесса перехода региональных экономических систем в режим устойчивого развития : монография. Воронежский государственный университет. - Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. - 180 с. ISBN 978-5-9273-2248-0
4. Баева Н.Б., Куркин Е.В., Бабкова В.А. Лакунарная экономика: понятие, оценка привлекательности, примеры // Вестник ВГУ, Серия: системный анализ и информационные технологии, 2016, № 2 - с. 31-37.
5. Общие понятия и схема межотраслевого баланса. Основное уравнение МОБ. <https://ekonomstat.ru/polnye-otvety-na-voprosy-k-ekzameni-statistika/129-obshhie-ponyatiya-i-sxema-mezhotraslevogo-balansa-osnovnoe.html>

Production lacuna as an innovative factor of the region

Kurkin E.V., Baeva N.B.
VSU, Voronezh, Russia

Моделирование и оптимизация процессного управления в условиях неопределенности

Мадера А.Г.
ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва, Россия

Процессный менеджмент в отличие от традиционного направлен на управление процессами, представляющими собой совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих видов деятельности, преследующих единую общую цель преобразования входных потоков материальных, информационных, финансовых ресурсов в выходные – конечный продукт, имеющий ценность для потребителя (ISO 9001:2000). Причем в процессное управление вовлекаются только те процессы и организации, которые включены в процессную систему и непосредственно участвуют в преобразованиях потоков на входе в продукты на выходе.

Проектирование процессных систем, процессов и, в частности, бизнес-процессов, невозможно без количественного математического моделирования и оптимизации. Между тем, в настоящее время, количественное моделирование заменяется, в основном, качественным дескриптивным описанием в виде вербального, текстового, табличного, графического представления (нотаций) потоков работ, ресурсов и информации. При этом в существующей литературе по процессам под моделированием понимается так называемая регламентация и документирование, а под оптимизацией – выполнение неких мероприятий по согласованию и частичному улучшению процессов [1, 2]. Очевидно, что указанные мероприятия количественным моделированием и оптимизацией на самом деле не являются.

Реальные процессы и процессные системы функционируют в условиях неопределенности будущих состояний экономики, финансов, конъюнктуры рынка, будущего спроса на новый продукт, будущих цен на ресурсы и энергоносители, финансового состояния организационных единиц, входящих в процесс, их финансовой устойчивости, и т.д. Поскольку менеджмент, принятие решений, оценивание и

прогнозирование процессных факторов, совершаются человеком, то адекватная математическая модель и оптимизация процессов и процессных систем должны проводиться в условиях неопределенности и максимально полно учитывать субъективные когнитивно-психологические стили оценивания и прогнозирования. В настоящей работе рассматривается математическая оптимизационная модель процесса в условиях неопределенности процессных факторов, окружающей среды и будущих состояний экономики, финансов и конъюнктуры рынка и соответствующих им процессных факторов.

В работе, на основании данных литературы и собственных исследований автора установлено, что математическая модель неопределенности количественного фактора ξ , адекватная психологии оценивания и прогнозирования субъекта, представляет собой интервально-стохастическую величину $\xi(\omega) \in [\underline{\xi}, \bar{\xi}]$, значения которой подчиняются равномерному распределению внутри интервала $[\underline{\xi}, \bar{\xi}]$, где $\underline{\xi}$ и $\bar{\xi}$ – нижняя и верхняя границы интервала, $\omega \in \Omega$ – элементарные события из пространства элементарных событий [3, 5].

Поскольку неопределенные факторы могут актуализироваться в будущем либо в виде благоприятных (*шансы*) или неблагоприятных (*риски*) для процесса и его результатов событий, то релевантным и валидным критерием оптимизации процессов, отражающим неопределенный характер будущего, *шансы* и *риски*, является максимизируемый интервально-стохастический комплексный критерий *Шансы–РискиCh&R* [5]:

$$\max_X \{Ch\&R\} = \max_X \left\{ \beta_{Ch} [Ch(X, \omega)] - \beta_R |[R(X, \omega)]| \right\}$$

где $[Ch(X, \omega)]$ и $[R(X, \omega)]$ – полные интервально-стохастические *шансы* и *риски*, релевантные рассматриваемому процессу; $\beta_{Ch}, \beta_R \in [0, 1]$ – коэффициенты относительной важности *шансов* и *рисков*, со значениями, устанавливаемыми субъектом принятия решения; $X = \{x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$, – объемы факторов производства (переменные модели).

Полные *шансы* Ch и *риски* R образуют полную группу событий и содержат все релевантные рассматриваемому процессу события, которые могут актуализироваться в будущей реальности, а именно: *шансы* – достижение желательного уровня прибыли, низкие цены на факторы производства и энергоносители, выгодный курс валюты, повышенный спрос на новый продукт, благоприятная конкурентная среда, достаточно высокий объем инвестиций, стабильное финансовое состояние организационных единиц, входящих в процесс; *риски* – нулевая, отрицательная (прямые убытки), недостаточная прибыль, не покрывающая затрат, высокие цены на факторы производства и энергоносители, ослабление валюты, низкий уровень или отсутствие спроса на новый продукт, выпуск конкурентами успешных аналогов, снижение уровня платежеспособного спроса потребителей, неблагоприятная конъюнктура рынка.

Разработанная в работе математическая оптимизационная модель процесса при интервально-стохастической неопределенности имеет вид:

$$P \left\{ \max_X \left(\beta_{Ch} [Ch(X, \omega)] - \beta_R |[R(X, \omega)]| \right) \right\} \geq p,$$

$$P\{[Ch(X, \omega)] \geq \alpha\} \geq q,$$

$$P\{[Ch(X, \omega)] \geq \alpha\} + P\{[R(X, \omega)] \leq \alpha\} = 1,$$

где $P\{\cdot\}$ – вероятность; p, q – заданные вероятности; α – минимально необходимая норма прибыли процесса.

Оптимальное решение данной математической модели $X = \{x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$, получается с помощью метода приведения к детерминированной эквивалентной

модели [3, 6, 7], которая относится к классу задач нелинейного программирования общего вида. Ее оптимальное решение вычисляется с применением одного из существующих пакетов компьютерных программ нелинейного программирования, например, NEOS, AMPL, MATLAB, MathOptimizer, GALAHAD, MSeXcel. По найденному оптимальному решению определяются оптимальные значения всех факторов процесса и процессной системы: объем и стоимость конечного продукта, объемы и стоимости промежуточных продуктов на выходах всех звеньев системы [3], доходы и прибыль при различных прогнозируемых условиях в будущем и т.д.

Полученная математическая модель может быть включена в системы автоматизированного проектирования и использована при проектировании процессных систем, процессов и бизнес-процессов в условиях неопределенности как в сфере производства, обеспечения и снабжения, так и сервиса, оказания услуг, логистики и управлении цепями поставок.

Список литературы

1. Робсон М., Уллах Ф. Реинжиниринг бизнес-процессов. Пер. с англ. М.: Изд-во Юнити, 2003.
2. Харрингтон Д., Эсселинг К.С., Нимвеген Х. ван. Оптимизация бизнес процессов. Документирование, анализ, Управление, оптимизация. С.-Пб.: Азбука, 2002
3. Madera A.G. Modeling and optimization of business processes and process systems under conditions of uncertainty // *Business-Informatics*. 2017. №4(42). P. 74–82.
4. Мадера А.Г. Интервально стохастическая неопределенность оценок в многокритериальных задачах принятия решений. Искусственный интеллект и принятие решений. 2014. № 3. С.105–115.
5. Мадера А.Г. Риски и шансы: неопределенность, прогнозирование и оценка. М.: Изд-во КРАСАНД, 2014.
6. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. Пер. с англ. М.: БИНОМ, 2014.
7. Вошинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. София: Техника, 1989.

Modeling and process management optimization under uncertainty

Madeira A.G.

Scientific Research Institute of System Analysis (SRISA/NIISI RAS), Moscow, Russia

Модель динамики объединения инновационных сетей с производством и экстерналиями знаний*

В.Д.Матвеевко, М.В.Гармаш, И.А.Гармашов, А.В.Королев

Национальный Исследовательский университет – Высшая Школа Экономики, Санкт-Петербург, Россия

Работа продолжает исследование игровой сетевой модели с производством и экстерналиями знаний [1, 2]. В непрерывном времени моделируется процесс объединения двух полных инновационных сетей при равновесных по Нэшу стратегиях, описанных в [1].

Пусть мы имеем два полных подграфа из n_1 и n_2 вершин, соответственно. В каждой из вершин находится агент. Рассматривается двухпериодная экономическая система. В

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17 – 06 – 00618).

первом периоде каждый из агентов наделен начальным количеством блага $e > 0$. Данный запас он может либо потребить в первом периоде, либо инвестировать его в знания в объеме k ($0 \leq k \leq e$) для производства блага во втором периоде. Производственная функция билинейная следующего вида: $F(k, K) = BkK$, где $B > 0$, k – объем собственных инвестиций, $K = k + \tilde{K}$ – среда агента, которая определяется как сумма его собственных инвестиций и экстерналии \tilde{K} , которая, в свою очередь, является суммой инвестиций всех соседних агентов сети. Каждый из агентов в момент решения считает среду экзогенно заданной. Предпочтения агента описываются следующей квадратичной функцией полезности: $U(c_1, c_2) = c_1(e - ac_1) + bc_2$, где c_1, c_2 – потребление на двух стадиях процесса, a – коэффициент насыщения, $0 < a < \frac{1}{2}$, b – параметр, характеризующий значимость потребления во втором периоде, $b > 0$. Для удобства вводится параметр $A = bB$, называемый продуктивностью агента, поскольку каждая из величин b, B стимулирует инвестиции агента в знания. Агент называется пассивным, если его инвестиции нулевые; гиперактивным, если инвестируется весь запас e ; активным, если инвестируется лишь часть запаса.

До объединения было два типа активных агентов (см. [1]): агенты первой сети с инвестициями $k_1^0 = \frac{e(1-2a)}{n_1A-2a} = k_3^0$ и агенты второй сети с инвестициями $k_2^0 = \frac{e(1-2a)}{n_2A-2a}$.

Предположим, что агент первой сети решил наладить обмен технологиями и знаниями со всеми агентами другого инновационного кластера. В итоге он превращается в агента нового, третьего, типа, у которого начальный объем инвестиций, естественно, тот же самый, что и у агентов первого типа. Получаем одну новую объединенную сеть уже с тремя типа агентов. Эта новая сеть в момент объединения не будет находиться в равновесии. Переходный процесс описывает следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = \frac{(n_1-1)A-2a}{2a}k_1 + \frac{A}{2a}k_3 + \frac{e(2a-1)}{2a}, \\ \dot{k}_2 = \frac{n_2A-2a}{2a}k_2 + \frac{A}{2a}k_3 + \frac{e(2a-1)}{2a}, \\ \dot{k}_3 = \frac{(n_1-1)A}{2a}k_1 + \frac{n_2A}{2a}k_2 + \frac{A-2a}{2a}k_3 + \frac{e(2a-1)}{2a}. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение данной системы выглядит следующим образом

$$\begin{vmatrix} \frac{(n_1-1)A}{2a} - (\lambda+1) & 0 & \frac{A}{2a} \\ 0 & \frac{n_2A}{2a} - (\lambda+1) & \frac{A}{2a} \\ \frac{(n_1-1)A}{2a} & \frac{n_2A}{2a} & \frac{A}{2a} - (\lambda+1) \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+1)^3 + (\lambda+1)^2 \frac{(n_1+n_2)A}{2a} - (\lambda+1) \frac{(n_1-1)n_2A^2}{4a^2} - \frac{(n_1-1)n_2A^3}{8a^3}.$$

При дополнительном условии $n_2 = n_1 - 1 = n$ можно найти в явном виде собственные значения. Тогда

$$\begin{vmatrix} \frac{nA}{2a} - (\lambda+1) & 0 & \frac{A}{2a} \\ 0 & \frac{nA}{2a} - (\lambda+1) & \frac{A}{2a} \\ \frac{nA}{2a} & \frac{nA}{2a} & \frac{A}{2a} - (\lambda+1) \end{vmatrix} = \left(\frac{nA}{2a} - \lambda - 1 \right) \left((\lambda+1)^2 - (\lambda+1) \left(\frac{(n+1)A}{2a} - \frac{nA^2}{4a^2} \right) \right),$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(n+1)A}{4a} - 1 \pm \sqrt{\frac{(n+1)^2 A^2}{16a^2} + \frac{nA^2}{4a^2}} = -1 + \frac{A}{4a} \left(n+1 \pm \sqrt{n^2 + 6n+1} \right),$$

$$\lambda_3 = \frac{nA}{2a} - 1.$$

Найдем постоянные k_1^*, k_2^*, k_3^* , которые совпадают с внутренним равновесием в объединенной сети. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} ((n_1 - 1)A - 2a)k_1 + Ak_3 = e(1 - 2a), \\ (n_2 A - 2a)k_2 + Ak_3 = e(1 - 2a), \\ (n_1 - 1)Ak_1 + n_2 Ak_2 + (A - 2a)k_3 = e(1 - 2a) \end{cases}$$

методом Крамера, находим

$$k_1^* = \frac{2ae(1-2a)(n_2 A - 2a)}{(n_1 - 1)n_2 A^3 + 2a(n_1 - 1)n_2 A^2 + 8a^3 - 4a^2(n_1 + n_2)A},$$

$$k_2^* = \frac{2ae(1-2a)[(n_1 - 1)A - 2a]}{(n_1 - 1)n_2 A^3 + 2a(n_1 - 1)n_2 A^2 + 8a^3 - 4a^2(n_1 + n_2)A},$$

$$k_3^* = \frac{e(1-2a)[(n_1 - 1)n_2 A^2 - 4a^2]}{(n_1 - 1)n_2 A^3 + 2a(n_1 - 1)n_2 A^2 + 8a^3 - 4a^2(n_1 + n_2)A}.$$

В рассматриваемом случае внутреннее равновесие в объединенной сети имеет вид:

$$k_1^* = k_2^* = \frac{2ae(1-2a)}{nA^2 + 2a(n+1)A - 4a^2},$$

$$k_3^* = \frac{e(1-2a)(nA + 2a)}{nA^2 + 2a(n+1)A - 4a^2}.$$

Найдем собственные векторы. Имеем

$$\begin{cases} \left(\frac{nA}{2a} - 1 - \lambda \right) x_1 + \frac{A}{2a} x_3 = 0, \\ \left(\frac{nA}{2a} - 1 - \lambda \right) x_2 + \frac{A}{2a} x_3 = 0, \\ \frac{nA}{2a} x_1 + \frac{nA}{2a} x_2 + \left(\frac{A}{2a} - 1 - \lambda \right) x_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $\lambda \neq \frac{nA}{2a} - 1$, то $x_1 = x_2 = x$, $x_3 = \frac{\left(1 + \lambda - \frac{nA}{2a}\right)x}{\frac{A}{2a}}$, а если $\lambda = \frac{nA}{2a} - 1$, то

$x_3 = 0$, $x_1 = -x_2$. Поэтому в качестве собственных векторов мы можем выбрать

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2}(1 - n - \sqrt{n^2 + 6n + 1}) \end{pmatrix}, \text{ отвечающий числу } \lambda_1 = -1 + \frac{A}{4a} \left(n+1 - \sqrt{n^2 + 6n + 1} \right)$$

$$\text{(положили } x = x_1 = x_2 = 1, \text{ тогда } x_3 = \frac{A}{4a} \left(n+1 - \sqrt{n^2 + 6n + 1} \right) - \frac{nA}{2a} = \frac{A}{2a}$$

$$= \frac{1}{2} \left(n+1 - \sqrt{n^2 + 6n + 1} \right) - n = \frac{1}{2} \left(1 - n - \sqrt{n^2 + 6n + 1} \right),$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2}(1-n+\sqrt{n^2+6n+1}) \end{pmatrix}, \text{ отвечающий числу } \lambda_2 = -1 + \frac{A}{4a}(n+1+\sqrt{n^2+6n+1}),$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ отвечающий числу } \lambda_3 = \frac{nA}{2a} - 1.$$

Таким образом, динамика в объединенной сети описывается уравнением

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = C_1 \exp(\lambda_1 t) e_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) e_2 + C_3 \exp(\lambda_3 t) e_3 + \begin{pmatrix} k_1^* \\ k_2^* \\ k_3^* \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Значения констант интегрирования C_1, C_2, C_3 можно найти из начальных условий, а именно, при $n=0$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{e(1-2a)}{(n+1)A-2a} = C_1 + C_2 - C_3 + \frac{2ae(1-2a)}{nA^2 + 2a(n+1) - 4a^2}, \\ \frac{e(1-2a)}{nA-2a} = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{2ae(1-2a)}{nA^2 + 2a(n+1) - 4a^2}, \\ \frac{e(1-2a)}{(n+1)A-2a} = \frac{1}{2}(1-n-\sqrt{n^2+6n+1})C_1 + \frac{1}{2}(1-n+\sqrt{n^2+6n+1})C_2 + \frac{e(1-2a)(nA+2a)}{nA^2 + 2a(n+1)A - 4a^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Сложим первые два уравнения системы (2). Тогда получим следующую систему двух уравнений для определения констант C_1 и C_2 .

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{e(1-2a)[(2n+1)A-4a]}{2[(n+1)A-2a](nA-2a)} - \frac{2ae(1-2a)}{nA^2 + 2a(n+1) - 4a^2} > 0, \\ \frac{1}{2}(1-n-\sqrt{n^2+6n+1})C_1 + \frac{1}{2}(1-n+\sqrt{n^2+6n+1})C_2 = \\ = \frac{e(1-2a)}{(n+1)A-2a} - \frac{e(1-2a)(nA+2a)}{nA^2 + 2a(n+1)A - 4a^2} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

(легко проверяется, что правая часть первого уравнения положительна, а второго отрицательна). Отсюда сразу очевидно (по формулам Крамера), что $C_1 > 0$. Однако нас, прежде всего, интересует знак константы C_2 , поскольку ясно, что $\lambda_2 > \lambda_3 > 0$, $\lambda_1 < 0$, λ_2 — наибольшее по модулю собственное число и все компоненты собственного вектора e_2 , соответствующего собственному числу λ_2 , положительны. Определитель системы (3) равен $\Delta = \sqrt{n^2+6n+1} > 0$, поэтому знак константы C_2 определяется знаком

$$\Delta_2 = \frac{e(1-2a)}{(n+1)A-2a} - \frac{e(1-2a)(nA+2a)}{nA^2 + 2a(n+1)A - 4a^2} - \\ - \frac{1}{2}(1-n-\sqrt{n^2+6n+1}) \left(\frac{e(1-2a)[(2n+1)A-4a]}{2[(n+1)A-2a](nA-2a)} - \frac{2ae(1-2a)}{nA^2 + 2a(n+1) - 4a^2} \right),$$

т.е. знаком величины

$$D = 2(k_3^0 - k_3^*) + (\sqrt{n^2+6n+1} + n - 1)(k_1^0 + k_2^0 - k_1^* - k_2^*).$$

Из сравнения первого уравнения в системе (2) и первого уравнения в системе (3) легко проверяется также, что $C_3 > 0$.

Ясно, что характер переходного процесса будет определяться знаком константы C_2 , т.е. знаком величины D . Если знак D положителен, то в результате переходного процесса сеть перейдет в состояние равновесия, при котором агенты всех трех типов

гиперактивны. Если же знак D отрицателен, то в результате переходного процесса сеть перейдет в состояние равновесия, при котором агенты всех трех типов пассивны.

Путем непосредственных вычислений проверяется, что в рассматриваемой ситуации, когда обе сети изначально находились во внутренних равновесиях, при любых допустимых значениях параметров a, A, e , если $n \geq 2$, то $D > 0$, таким образом, сеть переходит в угловое равновесие, в котором все агенты гиперактивны. Если же $n = 1$ (диада соединяется с одиночным агентом), то характер поведения сети в переходном процессе зависит от соотношения величин A и a . Именно, если $\frac{A}{a} < \sqrt{96 + 32\sqrt{2}} - 4 \approx 11,9$, то сеть перейдет в состояние равновесия, при котором все агенты пассивны.

Если $n \geq 2$ или $n = 1$ и $\frac{A}{a} \geq \sqrt{96 + 32\sqrt{2}} - 4$, то начав двигаться из начального состояния в соответствии с уравнением (1) сеть придет в угловое равновесие, в котором $k_1 = k_2 = k_3 = e$.

Можно проверить, что это состояние действительно является равновесным при разумных значениях параметров:

$$D_1 V_1(k_1, K_1) \Big|_{k_1=k_2=k_3=e} = -2ae + Ane - e(1-2a) = Ane - e \geq 0, \text{ если } A \geq \frac{1}{n},$$

$$D_1 V_2(k_2, K_2) \Big|_{k_1=k_2=k_3=e} = -2ae + Ane - e(1-2a) = Ane - e \geq 0, \text{ если } A \geq \frac{1}{n},$$

$$D_1 V_3(k_3, K_3) \Big|_{k_1=k_2=k_3=e} = -2ae + A2ne - e(1-2a) = 2Ane - e \geq 0, \text{ если } A \geq \frac{1}{2n}.$$

Таким образом, если $A \geq \frac{1}{n}$, то состояние $k_1 = k_2 = k_3 = e$ является равновесным, а при $A > \frac{1}{n}$ данное равновесие является устойчивым.

Список литературы

1. Матвеев В. Д., Королев А. В. Равновесия в сетевой игре с производством и с экстерналиями знаний // Математическая теория игр и её приложения. 2016. Т. 8. №. 1. С. 106-137.
2. Matveenko V., Korolev A., and Zhdanova M. Game equilibria and unification dynamics in networks with heterogeneous agents // International Journal of Engineering Business Management. 2017. № 9. С. 1-17.

The model of the dynamics of combining innovation networks with the production and extrinsic knowledge

Matveenko V.D., Garmash M.V., Garmashov I.A., Korolev A.V.

The National Research University Higher School of Economics, St. Petersburg, Russia

Исследование операций в управлении наукой: инструменты функционально-институционального анализа*

Р.М.Нижегородцев

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Управление сферой научных исследований, в частности, экономических исследований, является одним из трудно формализуемых объектов изучения, и,

* Исследование выполнено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Отделение гуманитарных и общественных наук), проект № 17-02-00586а.

несмотря на настойчивые попытки его формализации, необходимо понимать, что результаты, к которым приходит исследователь, в данном случае всецело определяются не логикой изучаемых им объективных каузальных связей, а логикой используемого им метода научной абстракции.

Формализация объектов такого рода является не просто упрощением реальности, отвлечением от ее несущественных сторон, а *искажением* этой реальности, приписыванием ей определенных характерных черт, которыми эта реальность сама по себе не обладает.

Например, столь распространенные в экономической науке предположения об отсутствии временных лагов между изменением объемов спроса и предложения какого-либо блага и колебаниями цен на это благо приводят к тому, что в качестве постулата принимается на веру факт абсолютной эластичности цен по объемам спроса и предложения, что, разумеется, весьма далеко от исследуемой экономистом действительности. В результате применения ряда подобных абстракций мы получаем экономическую систему, состоящую из совершенно конкурентных рынков, в которой не существует ни барьеров входа-выхода, ни ценовой дискриминации, а информация, которой обладают частные агенты, полна и симметрична.

Именно по этой причине как в учебниках, так и на страницах научных трактатов чаще всего встречаются равновесные макросистемы, в которых совокупный спрос и совокупное предложение совпадают по величине, объем инвестиций равен объему сбережений, а сумма как средних, так и предельных склонностей к потреблению и к сбережению составляет единицу. И даже если исследователи (например, в рамках изучения циклических колебаний) допускают факт возможности неравновесных состояний макросистем, они не устают подчеркивать, что в случае отклонения этих систем от состояния равновесия возникает стихийное стремление к равновесию, возвращающее макросистемы в исходное равновесное состояние.

Ничто из этого в реальной жизни не является правдой. Изучение реальных (а не обитающих на страницах учебников) макросистем приводит к противоположным выводам (подробнее см. [1]). В течение десятков, если не сотен лет, экономика США находится в состоянии рецессионного разрыва, а экономика Нигерии – в состоянии инфляционного разрыва, и ни к каким равновесным состояниям они стихийно не стремятся, их неравновесие является устойчивым. Поэтому неудивительно, что экономические исследования, основанные на господствующей парадигме равновесия, не в силах ни объяснить происхождение современных экономических кризисов, ни указать пути их преодоления [2].

Таким образом, в результате применения метода научной абстракции, свойственной экономической науке, мы не просто отдаляемся от реальной жизни, а получаем искаженную, вмененную реальность, которая затем и подлежит исследованию. В результате проведения такого исследования, разумеется, можно получить некие выводы, но они будут относиться не к реальным экономическим системам, а к этой альтернативной, сконструированной автором реальности. Таким образом, остается открытым, собственно, главный вопрос: какое отношение сделанные выводы имеют к реальной жизни? Какие из полученных авторами результатов можно использовать на практике, а какие непригодны к применению?

Методы, применяемые институциональной экономикой, существенно меньше искажают реальность, нежели методы неоклассического синтеза, столь широкое распространение которых вызывает обоснованную тревогу и сомнения в адекватности получаемых результатов. Современный неоклассический синтез в основном предлагает жить в прозрачном и линейном экономическом пространстве, где каждый агент видит бесконечно далеко и получает информационные сигналы бесконечно быстро. На самом же деле экономическое (так же, как и физическое) пространство искривлено, фрагментировано, очень неоднородно, и – самое главное – его внутреннее устройство

существенно *зависит от свойств агентов*, в этом пространстве пребывающих, от того, каким образом у каждого из этих агентов устроены процессы обмена информацией и энергией с внешней средой.

Современная экономическая наука нуждается в наличии методов, позволяющих отразить эти неоднородности, релятивизм экономической реальности.

Одним из методов, на мой взгляд, недооцененных, является функционально-институциональный анализ [3], эвристический потенциал которого для исследования сложных динамических систем различной природы остается крайне высоким.

Любая управляемая система имеет определенные системные атрибуты: она характеризуется некоторым количеством входов и выходов, а также некоторым набором инструментов, преобразующих входы в выходы. Эти входы и выходы могут быть измеримыми в количественном или качественном смысле, и в этом случае они могут быть описаны соответственно входными и выходными параметрами. Это функциональный срез развития управляемой системы (верхний этаж схемы на рис. 1).

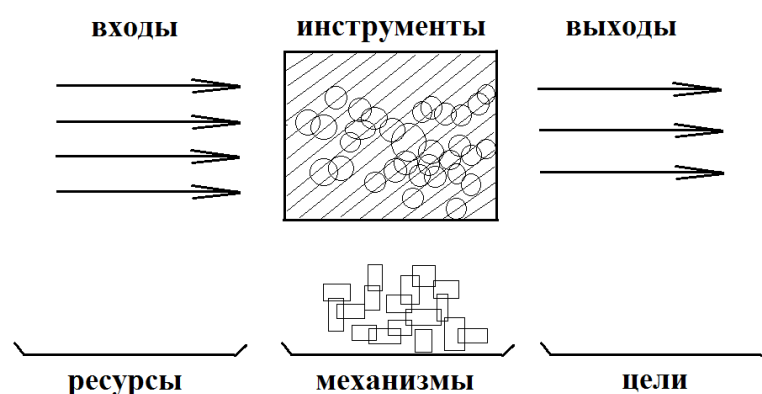


Рис. 1. Логика функционально-институционального анализа

Для того, чтобы выяснить, какие параметры управляемой системы следует считать выходными, нужно обратиться к целям, ради достижения которых эта система функционирует. Цели, как правило, имеют институциональное обеспечение и подкрепление. Например, если речь идет об управлении сферой образования или отдельными образовательными учреждениями, то перечень рассматриваемых целей содержится в Законе об образовании, если речь идет о системе научных исследований и ее составных частях, то цели проясняются Законом о науке и государственной научно-технической политике, и т.д.

Поэтому, решая управленческие задачи, нельзя забывать о том, что функциональный слой развития системы институционально обеспечен, и это обеспечение содержится на более глубинном уровне (нижний этаж схемы на рис. 1). Институционально (в некоторых случаях – законодательно) закреплён перечень целей управляемой системы, перечень ресурсов, которые она вправе использовать, а также перечень механизмов, применяемых при ее функционировании, хотя этот перечень механизмов чаще всего «разбросан», «рассыпан» между различными законодательными актами и подзаконными документами. В свою очередь, ее выходные параметры определяются целями функционирования системы, входные параметры подкрепляются располагаемыми ресурсами, а инструменты, которыми система оперирует, вытекают из имеющихся механизмов, применяемых при решении поставленных перед ней задач.

Применение функционально-институционального анализа к развитию отдельных отраслей и процессов порой оказывается плодотворным. Например, известно, что в развитии науки существует принцип неопределенности, аналогичный принципу Вернера Гейзенберга в физике: определенность затрат и результатов научных

исследований является комплементарной, чем более определен один из этих параметров, тем меньшей степени определенности можно ждать от другого [4]. Причем логика *измерения* затрат и результатов может быть различной (стоимостной или натуральной, в том числе временной), а логика их *соотношения* остается неизменной.

Схема рис. 1 позволяет навести относительный порядок в формулировке (а следовательно – и в применении) данного принципа. Исследования, в которых жестко зафиксированы входы, а инструменты и выходы являются неопределенными, называют **программными**. Научные исследования с фиксированными параметрами выхода (и, соответственно, с неопределенными входами и инструментами) называются **целевыми**. А исследования, для которых зафиксированы и строго определены только инструменты, а остальные элементы схемы варьируются, называют **поисковыми**.

Таблица 1

Классификация видов научных исследований

| | | Классификация по социальным функциям | | |
|---|--|--------------------------------------|----------------|-----|
| | | Фундаментальные НИР | Прикладные НИР | ОКР |
| Классификация по характеру неопределенности | Программные (фиксируются входные параметры) | | | |
| | Поисковые (фиксируются инструменты достижения целей) | | | |
| | Целевые (фиксируются выходные параметры) | | | |

Тем самым, разделение научных исследований в соответствии с логикой принципа неопределенности означает, что разные части сферы НИОКР должны управляться по-разному в зависимости от степени определенности тех или иных параметров, которыми характеризуются управляемые процессы.

В то же время, сфера создания научных знаний неоднородна в зависимости от того, какие социальные функции выполняют различные части этой сферы. Социальные функции научных знаний связаны с потребностью в создании новых знаний (эту функцию выполняют фундаментальные исследования), в принятии технологических и управленческих решений (прикладные исследования) и в усовершенствовании хозяйственных процессов в сфере материального и духовного производства (это сфера опытно-конструкторских работ).

При этом как фундаментальные, так и прикладные исследования, а также опытно-конструкторские работы могут быть и программными, и поисковыми, и целевыми. Совокупность различных возможностей описывается таблицей 1, в которой на пересечении строк и столбцов необходимо вписать требуемые инструменты управления, характерные для каждого сочетания видов научных исследований, классифицированных по характеру неопределенности и по социальным функциям.

Применение аппарата функционально-институционального анализа, учитывающего существенную неоднородность динамических (в том числе экономических) систем и их устойчиво неравновесный характер, позволит хотя бы частично исправить системные

искажения реальности, вносимые методом научной абстракции, применяемым современной экономической и управленческой наукой.

Список литературы

1. Нижегородцев Р.М. Парадигма устойчивого неравновесия и ключевые проблемы современной макроэкономики // Актуальные социально-экономические проблемы России: Материалы научной сессии Секции экономики Российской академии наук (22-23 сентября 2016 г.). М.: Изд-во Перо, 2016. — С. 90-95.

2. Нижегородцев Р.М. Неравновесная динамика макросистем и механизмы преодоления мирового кризиса. Новочеркасск: «НОК», 2011. — 100 с.

3. Нижегородцев Р.М. Угроза фрагментации научно-образовательного пространства Российской Федерации и проблема импорта «токсичных» институтов // Проблемы управления научными исследованиями и разработками – 2017: Труды Третьей научно-практической конференции /Под общ. ред. А.В. Дутова, Д.А. Новикова. М.: ИПУ РАН, НИЦ «Институт имени Н.Е. Жуковского», 2017. – С. 252-257.

4. Блюков Е.Н. Принцип неопределенности в экономике науки //Изв. АН СССР. Сер. экон. – 1972. – № 1.

Research operations in the management of science: tools of functional-institutional analysis

Nizhegorodtsev R.M.

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia

Приложения результатов теории накрывающих отображений к исследованию экономико-математических моделей*

Н.Г.Павлова, Н.Ю.Черникова

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Исследуется вопрос приложения теорем существования точек совпадения к получению достаточных условий существования вектора равновесных цен в моделях «спрос-предложение». В рассматриваемых моделях функция спроса получена как решение задачи максимизации функции полезности при бюджетных ограничениях, а функция предложения — как решение задачи максимизации прибыли с учетом транзакционных потерь на технологическом множестве.

Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, причем цена i -ого продукта равна $p_i > 0, i = \overline{1, n}$. Предположим также, что цены продажи $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$, по которым производитель реализует товары, меньше цен покупки $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, которые платит за них потребитель, причем $\tilde{p} = Ap$, где $A = \alpha E$, $\alpha \in (0; 1)$, E — единичная матрица размерности $n \times n$, т.е. $\tilde{p} = \alpha p$. Будем считать, что у производителя имеются различные технологии производства. Каждая технология описывается парой векторов $y_- = (y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-n})$, $y_+ = (y_{+1}, y_{+2}, \dots, y_{+n}) \in \mathbb{R}_+^n$, где y_- — затраты, а y_+ — выпуски товаров при использовании данной технологии. Обозначим через $T \subset \mathbb{R}_+^{2n}$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00677, №17-01-00849, № 18-01-00590).

технологическое множество: $T = \{y = (y_+; y_-) \mid \varphi(y_+; y_-) \leq 0, y_+, y_- \in \mathbb{R}_+^n\}$, где $\varphi: \mathbb{R}_+^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая и сильно выпуклая функция.

Выбор производителя описывается задачей отыскания условного экстремума функции прибыли:

$$\langle \alpha p, y_+ \rangle - \langle p, y_- \rangle \rightarrow \max, (y_+; y_-) \in T. \quad (1)$$

Пусть $y^* = (y_+^*, y_-^*)$ — решение задачи (1). Тогда предложение производителя i -го товара $S_i(p) = y_+^* - y_-^*$, $i = \overline{1, n}$.

Будем считать, что потребительские предпочтения потребителя, обладающего бюджетом $I(p)$, задаются функцией полезности $u: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, являющейся дважды непрерывно дифференцируемой, строго вогнутой и не имеющей максимумов. Функция $I: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ является дифференцируемой положительно однородной первой степени, и существует число $C > 0$, такое что $I(p) \geq C \|p\|$ для любых $p \in \mathbb{R}_+^n$.

Выбор потребителя описывается задачей отыскания условного экстремума функции полезности:

$$u(y) \rightarrow \max, \langle p, y \rangle \leq I(p), y > 0.$$

Спрос потребителя описывается отображением

$$D: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, D(p) = \text{Argmax} \{u(y) \mid y \in \mathbb{R}_+^n, \langle p, y \rangle \leq I(p)\}.$$

Пусть заданы векторы $c_1 = (c_{11}, \dots, c_{n1})$, $c_2 = (c_{12}, \dots, c_{n2}) \in \mathbb{R}_+^n$, причем $c_{i1} < c_{i2}$, $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим модель экономического равновесия, описываемую набором данных

$$\sigma = (\alpha, \varphi, u, I, c_1, c_2).$$

Набор (α, φ, u, I) однозначно определяет функции спроса $D: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, $D(\cdot) = (D_1(\cdot), \dots, D_n(\cdot))$ и предложения $S: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, $S(\cdot) = (S_1(\cdot), \dots, S_n(\cdot))$. Компоненты векторов c_1, c_2 определяют естественные ограничения на цены товаров, т.е. предполагается, что $c_{i1} \leq p_i \leq c_{i2}$, $i = \overline{1, n}$. Множество наборов $\sigma = (\alpha, \varphi, u, I, c_1, c_2)$, для которых выполнены неравенства $c_{i2} > c_{i1}$, $i = \overline{1, n}$, обозначим через Σ .

Определение ([1]). Вектор $p \in \mathbb{R}_+^n$ называется вектором равновесных цен в модели σ , если $S(p) = D(p)$.

В пространстве \mathbb{R}^n определим нормы по формулам

$$\|x\|_1 = 2 \max_{i=1, n} \frac{|x_i|}{c_{i2} - c_{i1}} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x\|_2 = \max_{i=1, n} |x_i| \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) , где $X = \mathbb{R}_+^n$, $Y = \mathbb{R}_+^n$, метрика ρ_X определяется нормой $\|\cdot\|_1$, а метрика ρ_Y — нормой $\|\cdot\|_2$.

Положим

$$\tilde{c} = \frac{c_1 + c_2}{2}, M = B_X(\tilde{c}, 1).$$

Введем обозначения

$$\tilde{\alpha}(\sigma) = 2 \left(\|\bar{\lambda}\|_C \max_{i=1, n} \frac{c_{i2}}{c_{i2} - c_{i1}} \right)^{-1} \max_{i=1, n} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}} \min_{p \in M} \sum_{i=1}^n |I'_{p_i}(p) - y_i(p)| u_2 -$$

$$-(n+1) \|u_1\|_C \|\bar{\lambda}\|_C \left(\max_{i=1, n} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}} \right)^{-1},$$

$$\tilde{\beta}(\sigma) = \frac{n+1}{2} \min_{i=1, n} \frac{c_{i2} - c_{i1}}{c_{i1}} \|\varphi_1\|_C \|\lambda\|_C,$$

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = \max_{i=1, n} |\bar{y}_i - \bar{y}_{+i} + \bar{y}_{-i}|,$$

где

$$\varphi_1(y_+; y_-) = \|\varphi'(y_+; y_-)\|,$$

$$u_1(y) = \|u'(y)\|, \quad u_2(y) = \|u''(y)\|,$$

$$\lambda(y_+; y_-) = \max_{i=1, 2n} (\lambda_i(y_+; y_-))^{-1},$$

$\lambda_i(y_+; y_-)$, $i = \overline{1, 2n}$, — собственные значения матрицы $\varphi''(y_+; y_-)$,

$$\bar{\lambda}(y) = \max_{i=1, n} |\bar{\lambda}_i(y)|^{-1},$$

$\bar{\lambda}_i(y)$, $i = \overline{1, n}$, — собственные значения матрицы $u''(y)$,

$\forall p \in M$ $y = y(p)$ — решение задачи

$$\begin{cases} u(y) \rightarrow \max, \\ \langle p, y \rangle \leq I(p), \\ y \geq 0, \end{cases}$$

\bar{y} — решение задачи

$$\begin{cases} u(y) \rightarrow \max, \\ \langle c_1 + c_2, y \rangle \leq I(c_1 + c_2), \\ y \geq 0, \end{cases}$$

(\bar{y}_+, \bar{y}_-) — решение задачи

$$\begin{cases} \langle (\alpha(c_1 + c_2); -c_1 - c_2), (y_+; y_-) \rangle \rightarrow \max, \\ \varphi(y_+; y_-) \leq 0, \\ (y_+; y_-) \geq 0. \end{cases}$$

Теорема. Пусть модель $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условиям:

$$1) \tilde{\alpha}(\sigma) > \tilde{\beta}(\sigma);$$

$$2) \tilde{\gamma}(\sigma) < \tilde{\alpha}(\sigma) - \tilde{\beta}(\sigma).$$

Тогда в исследуемой модели существует вектор равновесных цен $p = (p_1, \dots, p_n)$ такой, что $c_{i1} < p_i < c_{i2}$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство теоремы основано на результатах, полученных в работах [1]-[3].

Список литературы

1. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г. Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т.53, № 2. С. 55 – 67.
2. Арутюнов А.В. Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48, № 1. С. 89-93.

3. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5, № 1. P. 5-16.

Application of the theory of covering mappings to the study of economic mathematical models

Pavlova N.G., Chernikova N.Yu.
RUDN University, Moscow, Russia

Идентификация модели банковской системы России с помощью метода решения обратных задач*

А.Р.Сагирова, И.Г.Поспелов, А.А.Жукова
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Работа посвящена решению проблемы идентификации параметров модели банковского сектора Российской Федерации на имеющихся статистических данных и является дальнейшим развитием исследований, представленных в [2, 3], посвященных моделированию банковского сектора Российской Федерации. Для идентификации параметров применяется метод решения обратной задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений при известных начальных данных и дополнительной информации о значениях внешних переменных из [1]. Численное решение возникающих в работе систем дифференциальных уравнений производится методом Рунге-Кутты 4 порядка с учетом особенностей правых частей систем, явный вид которых определяется значениями статистических величин. Исследуются результаты применения метода решения обратной задачи на статистических данных в период с 2011 по 2017 гг: в докризисный период (2011-2014 гг.) и период кризиса 2014 года и после. Вычисления и реализация алгоритма производятся в системе компьютерной алгебры MaplesoftMaple. После идентификации представленная модель в период с 2011 по 2014 гг. успешно воспроизводит ключевые показатели деятельности банковской системы, такие как суммарные кредиты, депозиты.

1. Структура модели

В работе рассматривается модель банковского сектора в рамках модели межвременного равновесия экономики Российской Федерации [9]. Банк рассматривается как макроагент, модель поведения которого должна описывать результат совокупных действий большого количества относительно независимых лиц или организаций, исполняющих сходные роли в экономике.

Данная модель сводится к следующей системе соотношений (1) – (2) :

*Работа выполнена при финансовой поддержке научно-исследовательской работы «Моделирование социальных, экономических и экологических процессов», 0063-2016-0005 в ФИЦ ИУ РАН

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(t) &= (b_4 - a_4(r_l(t) - \rho(t)))(\beta_l(t)L(t) + r_l(t)L(t) + \frac{d}{dt}N_n(t)) - \beta_l(t)L(t) \\ \frac{d}{dt}vL(t) &= \left(b_3 - a_2 \left(r_{vl}(t) - \rho(t) + \frac{\frac{d}{dt}w_{vl}(t)}{w_{vl}(t)}} \right) \right) (\beta_{vl}(t)vL(t) + r_{vl}(t)vL(t)) - \beta_{vl}(t)vL(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S(t) &= (b_2 - a_3(-r_s(t) + \rho(t)))(\beta_s(t)S(t) + r_s(t)S(t) + OC_o(t) + Z(t)) - \beta_s(t)S(t) \\ \frac{d}{dt}vS(t) &= \left(b_1 - a_1 \left(-r_{vs}(t) + \rho(t) - \frac{\frac{d}{dt}w_{vs}(t)}{w_{vs}(t)}} \right) \right) (\beta_{vs}(t)vS(t) + r_{vs}(t)vS(t)) - \beta_{vs}(t)vS(t) \\ 0 &= -(b_4 - a_4(r_l(t) - \rho(t)))(\beta_l(t)L(t) + r_l(t)L(t) + \frac{d}{dt}N_n(t)) + \beta_l(t)L(t) + r_l(t)L(t) - \\ &- w_{vl}(t) \left(b_3 - a_2 \left(r_{vl}(t) - \rho(t) + \frac{\frac{d}{dt}w_{vl}(t)}{w_{vl}(t)}} \right) \right) (\beta_{vl}(t)vL(t) + r_{vl}(t)vL(t)) - w_{vl}(t)\beta_{vl}(t)vL(t) + \\ &+ w_{vl}(t)r_{vl}(t)vL(t) + (b_2 - a_3(-r_s(t) + \rho(t)))(\beta_s(t)S(t) + r_s(t)S(t) + OC_o(t) + Z(t)) - \\ &- \beta_s(t)S(t) - r_s(t)S(t) + w_{vs}(t) \left(b_1 - a_1 \left(-r_{vs}(t) + \rho(t) - \frac{\frac{d}{dt}w_{vs}(t)}{w_{vs}(t)}} \right) \right) (\beta_{vs}(t)vS(t) + \\ &+ r_{vs}(t)vS(t)) - w_{vs}(t)\beta_{vs}(t)vS(t) - w_{vs}(t)r_{vs}(t)vS(t) + \frac{d}{dt}N_n(t) - OC_o(t) - Z(t) \end{aligned} \quad (2)$$

После подстановки выражения (2) в систему модельных уравнений (1) получаем нелинейную систему дифференциальных уравнений, зависящую от параметров. Задача идентификации параметров модели рассматривается как обратная задача нахождения вектора параметров нелинейной системы дифференциальных уравнений по заданной правой части системы, начальным данным и дополнительной информации о значениях фазовых переменных.

2. Метод численного решения обратной задачи

Рассматривается задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = P(t, X(t), \Theta), t \in (0, T), T > 0, \\ X(0) = X^0, \end{cases} \quad (3)$$

где $X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))^T$ – вектор фазовых переменных модели размерности $N \in \mathbf{N}$, $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_N)^T \in P$ – вектор параметров модели размерности $M \in \mathbf{N}$, $P \in \mathbf{R}^M$ пространство рассматриваемых параметров, $P(t, X(t), \Theta) = (P_1(t, X(t), \Theta), \dots, P_N(t, X(t), \Theta))^T$ – вектор-функция, где $P_n(t, X(t), \Theta): C(0, T) \rightarrow C(0, T)$, $n = 1, \dots, N$, $X^0 = (X_1^0, \dots, X_N^0)^T$ – вектор начальных данных задачи.

Прямая задача состоит в определении вектора $X(t)$ из системы (3) по заданным параметрам Θ модели, функции P и начальным данным X^0 . Для удобства будем обозначать зависимость решения прямой задачи $X(t)$ от параметров Θ как $X(t) = X(t, \Theta)$.

Обратная задача заключается в определении вектора параметров Θ по заданной функции P и статистических данных вектора $X(t, \Theta)$:

$$X_n(t_k, \Theta) = \Phi_n(t_k), t_k \in (0, T), k = 1, \dots, K_n, n = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Обратную задачу (4) будем решать как оптимизационную, то есть с помощью минимизации целевого функционала ошибки $J(\Theta) = \sum_{k=0}^K |X(t_k, \Theta) - \Phi(t_k)|^2$.

Для решения задачи оптимизации применяется метод градиентного спуска с постоянным шагом

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n - \alpha J'(\Theta_n). \quad (5)$$

Градиент целевой функции вычисляется по формуле:

$$J'(\Theta) = -\int_0^T \Psi(t)^T P_\Theta(t, X(t), \Theta) dt, \quad (6)$$

где $\Psi(t)$ – решение сопряженной задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Psi(t) = P_X^T(t, X(t), \Theta) \Psi(t), t \in \cup_{k=0}^K (t_k, t_{k+1}), t_0 = 0, t_{K+1} = T, \\ \Psi(T) = 0, \\ \Psi(t_k + \varepsilon) - \Psi(t_k - \varepsilon) = 2(X(t_k, \Theta) - \Phi(t_k)), k = 1, \dots, K, \varepsilon \rightarrow 0 \end{cases}$$

Здесь $P_X(t, X(t), \Theta)$, $P_\Theta(t, X(t), \Theta)$ – матрицы Якоби производных по фазовым переменным и по параметрам соответственно. Третья строка системы определяет величину разрыва функции $\Psi(t)$ в точках $t_k, k = 1 \dots K$.

Для численного решения систем дифференциальных уравнений используем метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации.

Алгоритм решения:

1. Задаем начальное приближение вектора параметров Θ_0 . Решаем численно прямую задачу (3) и находим значения $X(t_k, \Theta_0), k = 1, \dots, K$. Далее шаги алгоритма расписаны для n -й итерации, $n \geq 0$.

2. Вычисляем значение $J(\Theta_n)$. Если оно меньше ε (точность вычисления), то решение найдено. Иначе переходим к следующему шагу.

3. Решаем численно сопряженную задачу, полагая $\Theta = \Theta_n$.

4. Определяем значение $J'(\Theta_n)$ по формуле (6).

5. Определяем Θ_{n+1} по формуле (5).

3. Результаты применения метода

В обозначениях модели имеем: $(X(t))^T = (L(t) \nu L(t) S(t) \nu S(t))^T$ – вектор планируемых переменных модели; $\Theta^T = (a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4)^T$ – вектор идентифицируемых параметров.

Вид правой части системы дифференциальных уравнений $P(t, X(t), \Theta)$ определяется фазовыми переменными, обозначающими количества выданных кредитов и депозитов в рублях и валюте $(L(t), \nu L(t), S(t), \nu S(t))$, идентифицируемыми параметрами модели $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ и информационными переменными: $r_l(t), r_{vl}(t), r_s(t), r_{vs}(t), \beta_l(t), \beta_{vl}(t), \beta_s(t), \beta_{vs}(t), w_{vl}(t), w_{vs}(t), N_n(t), OC_o(t), Z(t)$, значения которых в каждый момент времени подставляются в систему модельных уравнений из статистики.

В правой части основной системы, описывающей поведение модели, содержится элемент $\rho(t)$, имеющий вид дроби, числитель и знаменатель которой содержат одновременно и фазовые переменные системы, и параметры. Таким образом, $\rho(t)$ является нелинейной составляющей системы.

Как видно из рисунка 1, значение $\rho(t)$ претерпевает резкие скачки.

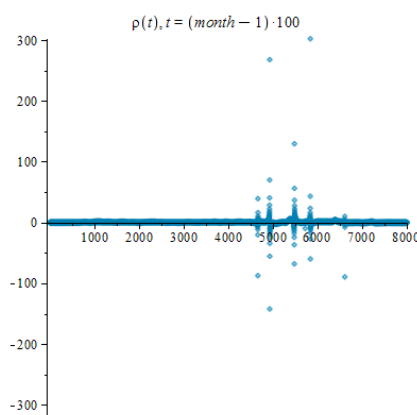


Рис. 1. Зависимость $\rho(t)$ от времени

При обращении к используемым статистическим данным (в работе рассматривается период январь 2011 года – сентябрь 2017 года) оказывается, что моменты скачков $\rho(t)$ приходятся на конец 2014 года, когда произошел валютный кризис в России. В период времени после 2014 года средние значения информационных переменных резко изменились по сравнению с докризисным периодом.

Вследствие этого было принято решение разделить статистические данные на два периода – до кризиса и после.

На докризисном периоде времени в процессе вычислений был найден набор параметров модели, на котором достигается минимум функционала ошибок: $\Theta^T = (0.0431, 0.0353, 0.0405, -0.1436, 1.0242, 0.9772, 0.9135, 0.9991)$.

Ниже на рис. 2 представлен результат работы алгоритма на данном наборе параметров.

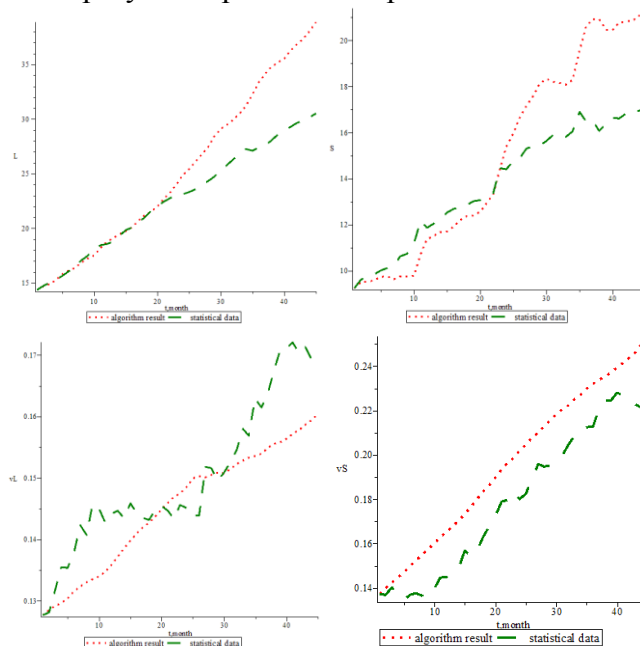


Рис. 2. Графики сравнения расчетных кривых и статистических данных для переменных L, vL, S, vS .

В результате расчетов на втором участке данных получено значение параметров $\Theta^T = (0.0408, 0.0329, 0.0399, -0.1462, 1.0235, 0.9761, 0.9126, 0.9984)$. Результат на рис. 3.

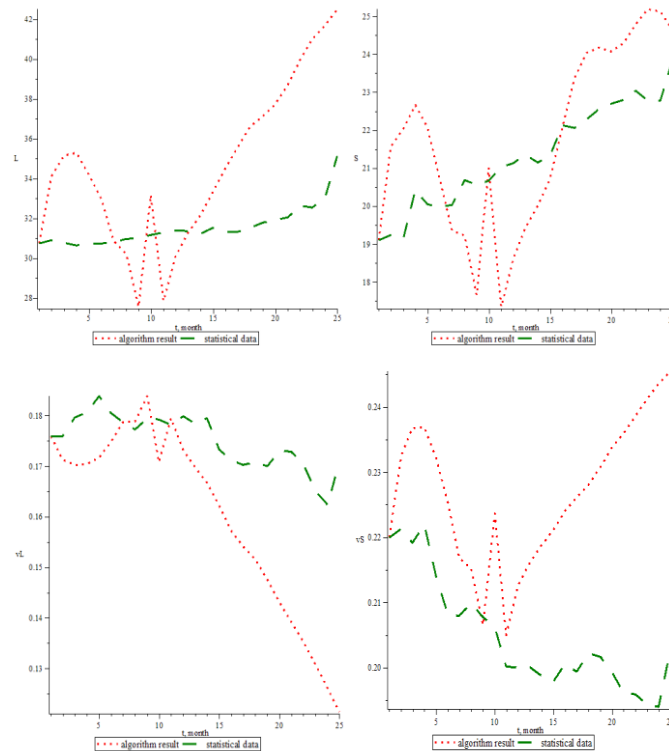


Рис. 3. Результат работы алгоритма на кризисном участке времени

Список литературы

1. Ильин А.И., Кабанихин С.И., Криворотько О.И. Об определении параметров моделей, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2014. Т. 11. С. 62–76.
2. Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г. Моделирование деятельности современной российской банковской системы // Экономический журнал ВШЭ. 2009. Т. 13, № 2. С. 143–171.
3. Малахов Д.И., Пильник Н.П., Радионов С.А. Стабильность распределения банков как аргумент в пользу концепции агрегированного агента // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2015. Т. 19, № 4. С. 395–422.
4. Кабанихин С.И., Криворотько О.И., Ермоленко Д.В., Воронов Д.А. Сравнение градиентного и симплекс методов численного решения обратной задачи для простейшей модели инфекционного заболевания // Математические заметки СВФУ апрель-июнь. 2015. Т. 22, № 2. С. 72–82.
5. Пильник Н.П., Радионов С.А. О новых подходах к идентификации блоков моделей общего равновесия. // ТРУДЫ МФТИ. 2017. Т. 9, № 3. С. 151–160.
6. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи // Сибирское научное издательство. 2009.
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000.
8. Хайрер С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи // Издательство "Мир". 1999.
9. Андреев М.Ю., Вржещ В.П., Пильник Н.П., Поспелов И.Г., Хохлов М.А., Жукова А.А., Радионов С.А. Модель межвременного равновесия экономики России, основанная на дезагрегировании макроэкономического баланса // Труды семинаров им. И.Г. Петровского. 2013. Выпуск 29. С. 43–145.
10. Maple User Manual. // Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 2014.

Identification of the model of the banking system of Russia using the method of solving inverse problems

Sagirova A.R., Pospelov I.G., Zhukov A.A.
CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Теоретико-игровой подход к определению параметров франчайзингового договора в сфере производства

А.Г.Соломаха, Г.М.Соломаха
ТвГУ, Тверь, Россия

Перспективным направлением развития бизнеса в настоящее время является франчайзинг [1]. Однако, широкое распространение он получил только в сфере торговли. Далее остановимся на франчайзинге в сфере производства. Сама система франчайзинговых отношений состоит из субъектов, которыми являются франчайзер и франчайзи, а также объектов, которыми являются франшизы. В свою очередь франчайзером является компания, желающая расширить границы и объёмы своего бизнеса посредством привлечения франчайзи.

Главным звеном, регулирующим отношения между субъектами франчайзинговой системы, является договор франшизы, в котором устанавливаются параметры и условия предоставления франшизы. Основными параметрами договора франшизы являются: величина вступительного взноса франчайзи F , срок действия договора L и коэффициент роялти r , определяющий долю дохода от осуществляемых франчайзинговой системой продаж, передаваемую по договору франшизы франчайзеру от франчайзи. При этом обоснованный выбор этих параметров в основном определяет эффективность функционирования франчайзинговой системы в целом.

Далее рассмотрим франчайзинговую систему, состоящую из пары: франчайзер – один франчайзи.

В интересах определения параметров договора франшизы будем рассматривать отношения франчайзера с франчайзи в виде иерархической игры, в которой франчайзер (игрок 1) является лидером, а франчайзи (игрок 2) – ведомым. В этой игре стратегии игрока 1 – это выбираемые им величина коэффициента роялти r и величина вступительного взноса франчайзи F . При этом, учитывая часто встречающуюся практику заключения краткосрочного договора франшизы с возможной дальнейшей пролонгацией, положим, что $L=1$ (однопериодный договор), и в силу этого будем пренебрегать дисконтированием денежных потоков. Стратегии игрока 2 – это выбранные им объёмы Q выпуска товаров (выполненных работ или оказанных услуг).

При условии, что каждый из игроков стремится максимизировать свою прибыль, математически критерии первого и второго игроков соответственно запишутся в виде

$$\pi_1(r, F, Q) = r \cdot X(Q) - K(Q) + F - S \rightarrow \max \quad (1)$$

и

$$\pi_2(r, F, Q) = (1-r) \cdot X(Q) - C(Q) - F - W \rightarrow \max, \quad (2)$$

где

S - начальные затраты франчайзера на создание системы,

W - начальные инвестиции франчайзи на осуществление деятельности по договору,

$C(Q)$ - переменные затраты франчайзи,

$K(Q)$ - переменные затраты франчайзи,

$X(Q)$ - доход франчайзи от продаж за период действия договора франшизы.

В соответствии с принципом Штакельберга решение рассматриваемой иерархической игры осуществляется следующим образом. Для каждой стратегии

игрока 1, т.е. набора (r, F) , ищется максимум целевой функции игрока 2 в (2) и множество

$$R(r, F) = \text{Arg max}_Q \pi_2(r, F, Q),$$

а затем оптимальная стратегия (оптимальные стратегии) игрока 1 (r_*, F_*) в соответствии с (1) выбирается из множества

$$\text{Arg max}_{(r, F)} \min_{Q \in R(r, F)} \pi_1(r, F, Q).$$

Конкретизируем процесс нахождения стратегии игрока 1 (r_*, F_*) и соответствующего ей объема выпуска Q_* , т.е. оптимальной стратегии игрока 2, из множества

$$\text{Arg max}_Q \pi_2(r_*, F_*, Q).$$

Пусть франчайзи осуществляет выпуск объемом Q товаров (работ, услуг) в соответствии со спросом $D(p)$, где p - цена производимых товаров (работ, услуг), то есть $Q = D(p)$, следовательно $p = p(Q)$. Тогда доход от продаж составит

$$X(Q) = Q \cdot p(Q).$$

Ясно, что предполагаемому франчайзи должно быть выгоднее работать в франчайзинговой системе, чем использовать какие-либо альтернативные направления, к примеру, разместить денежные средства в банке под процент B за временной период, равный сроку договора, т.е.

$$\pi_2(r, F, Q) \geq \frac{B}{100} \cdot (F + W) \cdot \lambda,$$

где λ - некоторый коэффициент, устанавливаемый франчайзи, причем $\lambda \geq 1$. Таким образом, учитывая (2), должно выполняться неравенство

$$(1 - r) \cdot X(Q) - C(Q) - F - W \geq \frac{B}{100} \cdot (F + W) \cdot \lambda,$$

или

$$(F + W) \left[1 + \frac{B}{100} \cdot \lambda \right] \leq (1 - r) \cdot X(Q) - C(Q).$$

Последнее неравенство преобразуется к виду

$$F \leq \frac{(1 - r) \cdot X(Q) - C(Q)}{\frac{B}{100} \cdot \lambda + 1} - W.$$

Поскольку величина вступительного взноса F устанавливается игроком 1, то при выбранном объеме выпуска Q значение F берется максимальным, т.е. в последнем неравенстве достигается равенство

$$F = \frac{(1 - r) \cdot X(Q) - C(Q)}{\frac{B}{100} \cdot \lambda + 1} - W, \quad (3)$$

далее для упрощения полагаем $\lambda = 1$.

При установленных игроком 1 значениях r и F объем выпуска Q выбирается игроком 2 из условия максимизации своей прибыли, т.е. с учетом (2) из решения задачи

$$(1-r) \cdot X(Q) - C(Q) \rightarrow \max_Q. \quad (4)$$

Пусть функция спроса имеет вид $D(p) = a - bp$; функция издержек франчайзи - $C(Q) = c \cdot Q$, функция издержек франчайзера - $K(Q) = k \cdot Q$, где коэффициенты линейных функций a, b, c, k - положительные числа.

При условии, что реализацией является потенциальный спрос на товары (работы, услуги), цена составит

$$p = \frac{a - Q}{b}.$$

Тогда доход от продаж определяется выражением

$$X = Q \cdot p = \frac{a \cdot Q - Q^2}{b},$$

а целевая функция в (4) вогнутая, поэтому оптимальный выпуск $Q^* = Q^*(r)$ в соответствии с принципом Ферма удовлетворяет уравнению

$$(1-r)X'(Q) = C'(Q). \quad (5)$$

Подставляя соответствующие функции в уравнение (5) и дифференцируя обе части полученного уравнения по Q , получим, что

$$\frac{(1-r)}{b}(a - 2Q) = c.$$

Из последнего выражения после элементарных преобразований находим оптимальный годовой выпуск

$$Q^* = \frac{a(1-r) - c \cdot b}{2(1-r)}.$$

Теперь найдём выражение для оптимальной цены:

$$p^* = \frac{a - Q^*}{b} = \frac{a(1-r) + c \cdot b}{2b(1-r)}.$$

Соответственно, доход от продаж составит:

$$X(Q^*(r)) = p^* \cdot Q^* = \frac{a^2}{4b} - \frac{c^2 b}{4(1-r)^2}. \quad (6)$$

Тогда выражение для издержек франчайзи примет следующий вид:

$$C(Q^*(r)) = c \cdot Q^* + d = \frac{ac}{2} - \frac{c^2 b}{2(1-r)}, \quad (7)$$

а издержки франчайзера равны:

$$K(Q^*(r)) = k \cdot Q^* + l = \frac{ak}{2} - \frac{ckb}{2(1-r)}. \quad (8)$$

Оптимальное значение коэффициента роялти r будем искать из условия максимизации критерия игрока 1, который с учетом (3) формально записывается в виде

$$(1 + B_1 r)X(Q^*(r)) - (1 + B_1)K(Q^*(r)) - C(Q^*(r)) \rightarrow \max_r, \quad (9)$$

где введено $B_1 = B/100$.

Необходимое условие экстремума состоит в равенстве нулю производной целевой функции в (9), т.е.

$$\{ (1 + B_1 r)X(Q^*(r)) - (1 + B_1)K(Q^*(r)) - C(Q^*(r)) \}' = 0. \quad (10)$$

Данное уравнение после подстановки найденных выражений для дохода от продаж (6), издержек франчайзи (7) и франчайзера (8) и дифференцирования выражения в левой части уравнения по r решается численным методом деления отрезка пополам.

При отсутствии у потенциального франчайзера альтернативных вариантов работ и вложений средств можно в последней формуле взять $B_1 = 0$, тогда из (10) после элементарных преобразований получаем выражение для нахождения оптимального значения коэффициента роялти:

$$r^* = \frac{k}{k + c}$$

В качестве примера, пусть $c = 4k$, то есть коэффициент роста издержек у франчайзи в четыре раза превышает коэффициент роста издержек франчайзера. Тогда

$$r^* = \frac{k}{k + 4k} = 0,2.$$

Таким образом, предложена экономико-математическая модель оптимизации параметров франчайзингового договора в сфере производства, основанная на рассмотрении отношений франчайзера с франчайзи в виде иерархической игры, в которой франчайзер является лидером. На основе использования принципа Штакельберга решения иерархической игры разработан подход к нахождению значений коэффициента роялти, величины вступительного взноса и объема производства товаров для франчайзинговой системы. Для случая линейных функций переменных затрат франчайзера и франчайзи получены аналитические выражения для расчёта параметров договора при линейной функции спроса на производимый товар.

Список литературы

1. Рудашевский В.Д., Фурщик М.А. Оптимальная стратегия развития франчайзинговой системы // Экономика и математические методы. 1998. Том.34, вып.2. С.89-104.

Game-theoretic approach to determining the parameters of the franchise agreement in the field of production

Solomakha A.G., Solomakha G.M.
TvSU, Tver, Russia

Оптимальное разнообразие в социально-экономической системе: формальные аспекты

Н.И.Суслов
ИЭОПП СО РАН, Новосибирск, Россия

Предметом представленной работы является анализ воздействия разнообразия экономических агентов (отдельных групп, выделяемых в экономической системе), на объемы издержек взаимодействия с одной стороны и выгод от разнообразия – с другой [1-5]. Мы рассматриваем экономическую систему как сообщество отдельных групп-производителей, обладающих, собственными ресурсами, которые могут быть инвестированы либо в производственную деятельность, дающую материальный продукт (доход), либо в перераспределительную деятельность, позволяющую присвоить часть созданного продукта в виде административной ренты (борьба за ренту). При этом ресурс, использованный на перераспределительную деятельность, может приносить дополнительный доход данной группе, но означает недопроизводство

в масштабах всей экономической системы. Таким образом, в масштабах экономической системы имеет место несовпадение экономических интересов. Более того, перераспределительная деятельность оказывает негативное воздействие на развитие системы, поскольку требует ресурсов. Рост числа групп приводит также и к увеличению масштабов деятельности, направленной на борьбу за ренты, а, следовательно, к уменьшению создаваемого продукта по причине отторжения ресурсов и з производственной сферы. С другой стороны социокультурное разнообразие способствует росту продуктивности системы, поскольку группы, взаимодействуя, обмениваются знаниями и навыками, что способствует как росту квалификации работников, так и прогрессу технологий производства.

В общем случае рассматриваемые агенты-группы могут различаться по своим размерам (числу входящих в них членов) и некоторым другим характеристикам, что вместе с их разнообразием составляет понятие гетерогенности (диверсифицированности) общества. Однако, в рамках данной работы, сфокусированной на анализе выгод от роста разнообразия при одновременном увеличении издержек взаимодействия, мы предполагаем, что все группы одинаковы по размеру и члены каждой из них объединены общим экономическим интересом – максимизацией дохода данной группы. Наше предположение, которое мы верифицируем формальными методами, состоит в том, что увеличение разнообразия в обществе имеет свой предел, после которого рост издержек начинает превышать увеличение выгод и, таким образом, существует социально-экономический оптимум разнообразия. Другими словами, между издержками и выгодами разнообразия имеется трейд-офф (компромиссное отношение), и социальный оптимум достигается в оптимальной точке этого трейд-оффа.

Пусть население рассматриваемой экономической системы составляет N членов, а число групп в ее составе – n , т.е. $N \geq n$. Численность i -ой группы обозначим N_i . Переходя к относительным показателям, зададим доли численности каждой группы как $s_i = \frac{N_i}{N}$,

очевидно, что $\sum_{i=1}^n s_i = 1$. Считаем, что все члены одной группы полностью однородны и их поведение идентично другим членам данной группы. В дальнейшем мы будем называть коэффициенты s_i и как доли групп в общей численности населения и как их размеры.

Каждый индивидум i , к какой бы группе он не принадлежал, обладает единицей своего ресурса, например труда i и расходует ее на производственную деятельность, затрачивая на нее долю y_i на перераспределительную (рент-ориентированную) деятельность в размере x_i . Таким образом, $x_i + y_i = 1$, а общий запас ресурса в группе i составляет $s_i = s_i \cdot 1$. Общий объем производственной деятельности в экономической системе в целом составляет $Y = \sum_{i=1}^n s_i \cdot y_i$, а общий объем деятельности, направленной на

борьбу за ренту $X = \sum_{i=1}^n s_i \cdot x_i$, и, очевидно, что $X + Y = 1$.

Доход от производственной деятельности описывается простейшей функцией: $q_i = a \cdot y_i$, где q_i – результат производственной деятельности агента i , а параметр a – производительность ресурса y_i .

Рент-ориентированная деятельность описывается следующим образом:

$$\frac{s_i \cdot x_i}{\sum_{j=1}^n s_j \cdot x_j} \cdot t \cdot w \cdot Y = \delta_i \cdot t \cdot Y, \text{ где } \delta_i = \frac{s_i \cdot x_i}{\sum_{j=1}^n s_j \cdot x_j} = \frac{s_i \cdot x_i}{X}.$$

Здесь $\delta_i \cdot t \cdot Y$ - доход группы i от рент-ориентированной деятельности, t - доля созданного продукта, которая присваивается группами за счет соответствующих усилий, или, другим словами «доля ренты», а величина $t \cdot Y$ - есть объем этого продукта, который мы будем называть также рентой. Величина δ_i - фактическая доля группы i в общем объеме ренты. Таким образом, принимается, что данный коэффициент равен доле усилий группы i на захват ренты в общем объеме таких усилий по экономике в целом.

Параметр t вовсе не равнозначен налоговой ставке, а, по-видимому, является институциональной переменной. Каждая группа i осознает свое единство и, затрачивая $s_i = s_i \cdot 1$ ресурса, максимизирует свой доход (примем пока, что $a=1$):

$$\max \{s_i \cdot y_i \cdot (1-t) + \delta_i \cdot t \cdot Y\} = \max \{s_i \cdot (1-x_i) \cdot (1-t) + \delta_i \cdot t \cdot (1-X)\} \quad (1)$$

при условии:

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (2)$$

Таким образом, переменными выбора являются величины x_i - объемы усилий групп на рент-ориентированную деятельность (они же - доли такой деятельности в общем объеме усилий группы).

Рассмотрим сначала внутреннее решение задачи (1-2) для группы i (т.е., когда условия (2) выполняются строго). Условиями первого порядка будут:

$$\text{ФОС: } -s_i \cdot (1-t) - s_i \cdot t \cdot \delta_i + \frac{Y}{X} \cdot t \cdot s_i \cdot (1-\delta_i) = 0 \quad (3)$$

Преобразуя (3), находим величину δ_i :

$$\delta_i = 1 - \frac{X}{t} \quad (4)$$

Суммируя равенства (4) по всем i , получаем:

$$n \cdot \frac{X}{t} = n - 1,$$

Откуда следует решение для общего объема рент-ориентированной деятельности и общего объема производственной деятельности:

$$X = \frac{n-1}{n} \cdot t, \quad Y = \frac{n-(n-1) \cdot t}{n} \quad (5)$$

Далее, при характеристике частного решения для групп будем считать, что все они одинаковы по размеру, и, таким образом, $s_i = \frac{1}{n}, \forall i$. Поскольку, как следует из (4), все

δ_i равны, то общий объем рент-ориентированной деятельности группы i составляет:

$$\frac{1}{n} \cdot x_i = \frac{n-1}{n^2} \cdot t \quad (6)$$

и объем рент-ориентированной деятельности одного члена группы i :

$$x_i = \frac{n-1}{n} \cdot t \quad (7)$$

Следовательно, объем производственной деятельности для одного члена группы:

$$y_i = 1 - \frac{n-1}{n} \cdot t = \frac{n-(n-1) \cdot t}{n} \quad (8)$$

и объем производственной деятельности группы i :

$$y_i = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2} \cdot t = \frac{n-(n-1) \cdot t}{n} \quad (9)$$

Наше следующее предположение состоит в том, что с ростом количества групп параметр эффективности (удельного дохода от производительной деятельности) может расти с ростом количества групп в системе. Механизм такого эффекта может основываться на увеличении комплементарности использования ресурсов и наличием позитивных экстерналий, связанных со взаимным обучением.

Таким образом, имеет место соотношение: $Q = \hat{a}(n) \cdot Y$, Q - есть обозначение для выпуска системы, параметр \hat{a} есть производительность фактора, рассматриваемый как функция от числа групп, а ρ - коэффициент пропорциональности. Зададим требование к функции $\hat{a}(n)$:

$$\hat{a}' > 0, \hat{a}'' < 0 \quad (10)$$

$$\hat{a}(\infty) = const \quad (11)$$

Условие (10) предполагает монотонное воздействие роста разнообразия на эффективность; при этом каждая дополнительная группа, выделяющаяся внутри системы, увеличивает эффективность, но в меньшей степени, чем предыдущая - как нам кажется, вполне естественное допущение. Условие (11) означает, что только за счет роста разнообразия нельзя повысить эффективность слишком сильно, и ее предельное значение задано используемой технологией.

Соответственно мы предполагаем следующую функцию производительности фактора:

$$\hat{a}(n) = \left(b + c \cdot \frac{n-1}{n} \right)^\gamma = \left(b + c - \frac{c}{n} \right)^\gamma, \quad (12)$$

с очевидностью обладающую свойствами (10)-(11), если $b, c, \gamma > 0$.

Здесь параметры b и c могут меняться совместно, отражая воздействие технологического прогресса, при этом коэффициент b отвечает в большей степени за общий уровень производительности фактора Y , а коэффициент c есть параметр эффективности воздействия разнообразия на общую производительность.

Теперь определим оптимальный уровень разнообразия при котором достигается максимальный доход от производительной деятельности $\hat{a} \cdot Y$ и продукт $Q = \rho \cdot \hat{a} \cdot Y$:

Для дальнейшего анализа введем новую переменную m , как $m = \frac{n-1}{n}$ и функции производительности фактора как $a(m) = (b + c \cdot m)^\gamma$ и общего дохода от производительной деятельности как $Y(m) = 1 - t \cdot m$.

$$\max Q = \max [a(m) \cdot Y(m)] = \max (b + c \cdot m)^\gamma \cdot (1 - t \cdot m) \quad (13)$$

Условие первого порядка запишется как:

$$\frac{dQ}{dm} = \gamma \cdot (b + c \cdot m)^{\gamma-1} \cdot (1 - t \cdot m) \cdot c - (b + c \cdot m)^\gamma \cdot t = 0 \quad (14)$$

Решив уравнение (14) относительно n , получим:

$$m^* = \frac{\gamma - t \cdot r}{(1 + \gamma) \cdot t} = \frac{1}{1 + \gamma} \cdot \left(\frac{\gamma}{t} - r \right), \quad (15)$$

где $r = \frac{b}{c}$ - параметр структуры технологии. Переходя к переменной числа групп, получаем:

$$n^* = \frac{(1 + \gamma) \cdot t}{(r + 1) \cdot t - \gamma \cdot (1 - t)}, \quad (16)$$

Переменная $m^* = \frac{n^* - 1}{n^*}$ изменяется в диапазоне $\frac{1}{2} \leq m^* \leq 1$. Исходя из этих неравенств, можно просто определить диапазон значений для r , допускающих существование осмысленных решений (15) и (16):

$$\frac{1 - \gamma \cdot (1 - t)}{\gamma \cdot t} \leq r \leq \frac{2 \cdot \gamma - t \cdot (1 + \gamma)}{2 \cdot t \cdot (1 + \gamma)}. \quad (17)$$

Анализ второй производной на знак свидетельствует, что решение (15) и (16) является максимумом, по крайней мере, при $\gamma < 1$. Как демонстрирует (15), рост нормы распределяемой ренты t ведет к уменьшению равновесного разнообразия: ответному увеличению склонности к рент-ориентированной деятельности каждой из групп противостоит уменьшение их числа. Параметры b и c в долгосрочной перспективе растут совместно, отражая воздействие технологического прогресса. Если, однако, коэффициент c увеличивается по сравнению с b (снижение параметра r), то в системе поддерживается большее разнообразие. Иными словами относительный рост эффективности воздействия разнообразия на экономические результаты связан с большей диверсификацией производства; если же относительно возрастает параметр b , то снижается равновесное число агентов в системе, что может означать увеличение ее специализации.

Список литературы

1. Вебер Ш., Давыдов Д. Экономика разнообразия: подходы, методы, результаты // Экономика и математические методы, 2015, Т. 51, № 4, с. 3-13
2. Lazear. E Globalization and the market for team-mates // Economic Journal, 1999, V. 109, pp. 15-40.
3. Lazear E. Culture and Language // Journal of Political Economy, Supplement, 95-125
4. Ottaviano G. and Peri G. The economic value of cultural diversity: evidence from US cities // Journal of Economic Geography, 2006, V. 6, pp. 9-44
5. Alesina A., La Ferrara E. Ethnic diversity and economic performance // Journal of Economic Literature, 2005, V. 43(3) pp. 762-800.

Optimal diversity in the socio-economic system: formal aspects

Suslov N.I.

Institute of Economics and Industrial Engineering, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, *Novosibirsk, Russia*

Интерпретация несовместного решения задачи оптимального планирования работы НПЗ

Ю.М.Цодиков

ИПУ РАН имени В.А. Трапезникова, Москва, Россия

При оптимальном планировании производства обычно выдвигаются требования получения определенного количества продуктов при ограниченных ресурсах, и это часто приводит к несовместной задаче. Трудности содержательной интерпретации несовместного решения являются одним из основных факторов, ограничивающих размерность модели оптимального планирования. Это вынуждает специалистов в сложных случаях необосновано упрощать модель. Модель оптимального планирования производства нефтеперерабатывающего завода (НПЗ) может быть несовместной в результате недостаточного количества ресурсов; ошибок при внесении изменений в

модель; а также совместного действия этих двух факторов. Модель планирования НПЗ является нелинейной и имеет большую размерность. Такие задачи решаются методом последовательного линейного программирования (ПЛП) [1-2]. При получении несовместного решения специалист должен: (1) анализируя результаты, найти ограничения, которые являются причиной несовместного решения, а затем (2) определить ресурсы, которые возможно дополнительно выделить в данных условиях работы завода. Это две сложные интеллектуальные задачи. Первая задача является интерпретацией несовместного решения. Как известно, при отсутствии допустимого решения симплекс метод дает список несовместных ограничений, который, как правило, не позволяет однозначно определить, что является причиной несовместности. Сложность этой задачи определяется сложностью модели, в которой различные показатели сырья, работы установок, количества и качества нефтепродуктов взаимосвязаны.

Модель оптимального планирования НПЗ на один период имеет следующий вид:

$$F = \sum_{j=1}^n C_j X_{jr} \quad F \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ijr} x_{jr} \geq b_i, \quad x_{jr} \geq 0 \quad (2)$$

$$a_{ijr} = f_{ij}(q_{ijr-1}), \quad (3)$$

$$q_{ijr-1} = \varphi_{ij}(x_{1r-1}, x_{2r-1}, \dots, x_{nr-1}) \quad (4)$$

Здесь F - прибыль, x_{jr} - переменные задачи, потоки продукта или энергоносителя;

r - шаг вычислительного процесса (рекурсии), состоящий в решении задачи (1-2),

a_{ijr} - коэффициенты матрицы $A^r \{a_{ijr}\}$; c_j - цены, b_i - коэффициенты ограничений.

Часть коэффициентов матрицы a_{ijr} являются постоянными величинами, а другие определены соотношениями (3, 4). Задача ЛП (1-2) решается при заданных начальных значениях величин q_{ij0} и коэффициентов матрицы. После решения задачи ЛП (1-2) те коэффициенты матрицы a_{ijr} , которые определены зависимостями (3-4), пересчитываются на каждом шаге r вычислительного процесса. При первом решении задачи (1-2) $r=1$ начальные значения показателей q_{ij0} заданы. Задача (1-4) по существу является нелинейной со значительным числом переменных, которые входят в нелинейные зависимости (3-4).

Форма записи задачи (1-4) предполагает решение методом последовательного моделирования и оптимизации, который рассматривается как вариант метода ПЛП. В результате моделирования (3-4) определяются параметры линеаризованной модели, а затем решается задача линейного программирования (1-2). Если нет допустимого решения задачи (1-2), то процесс завершается и затем нужно анализировать несовместное решение. Если есть допустимое решение, то после получения решения задачи ЛП проверяется точность моделирования путем сравнения значений параметров: q_{ijr-1} и q_{ijr} , а также коэффициентов матрицы a_{ijr} , которые пересчитываются. Этот процесс рекурсивно повторяется до получения заданной точности моделирования и линеаризации:

$$|q_{ijr} - q_{ijr-1}| \leq \varepsilon_k \quad (5)$$

Величины q_{ijr} имеют разную физическую природу и для каждого показателя качества k возможна разная точность определения ε_k .

Несовместное решение задачи ЛП (1-2) может быть получено при первом шаге решения $r=1$ или при следующих рекурсиях на шаге $r>1$. Для содержательной интерпретации несовместного решения в модель вводят штрафы за нарушение некоторых типов ограничений. После введения штрафных переменных система становится совместной. В полученном решении анализируются величины штрафных переменных. В системе моделирования НПЗ [2] можно ввести штрафы за нарушение следующих типов ограничений: показателей качества нефтепродуктов, производительности установок, условий материального баланса, запасов нефтепродуктов, энергозатрат и других. Аналогичное введение штрафных переменных было и в других системах оптимального планирования [4]. Сложность модели планирования видна по данным в следующей таблице, которые взяты из применяемой модели НПЗ.

| | |
|-----------------------------|-------|
| Переменных задачи ЛП | 2843 |
| Ограничений задачи ЛП | 4323 |
| Ненулевых элементов матрицы | 26273 |

Сложность модели характеризуется также нелинейными зависимостями (3-4), по которым пересчитывается около 10% ненулевых элементов матрицы. Для определения причин несовместности рассчитывается и анализируется несколько вариантов с различными штрафами. На выбор этих вариантов и их анализ затрачивается много времени специалистов НПЗ. В результате часто невозможно получить результат в нужное время.

Рекомендуется следующий метод выбора вариантов с штрафами для анализа несовместных задач, который позволяет сократить перебор вариантов. Метод выбора основан на предположении, что полученное решение с штрафами будет проще содержательно интерпретировать при меньшем количестве несовместных ограничений. Из нескольких решений с разными штрафами (обычно 2-3) выбираем один вариант с минимальным количеством ограничений, которые нарушаются на величину штрафной переменной. В выбранном варианте, прежде всего, анализируем те ограничения с штрафами, которые повторяются и в других вариантах. В процессе анализа выбранного варианта решаются задачи с изменением некоторых ограничений, и специалист определяет, какие ресурсы можно изменить для оптимального плана. Такой метод выбора оказался наиболее успешным в процессе обучения специалистов НПЗ анализу несовместных задач, так как позволял быстрее найти ограничения, являющиеся причиной несовместного решения. При разработке моделей НПЗ такая методика также применялась, так как некоторые ошибки модели выявляются только при недостаточных ресурсах.

Можно дать обоснование такого подхода к интерпретации несовместного решения на основе геометрии пространства несовместных ограничений. Для этого на основе примеров рассмотрим разные типы несовместных ограничений задачи ЛП. Выпишем задачу ЛП в удобном для дальнейшего виде:

$$F = \sum_{j=1}^n C_j x_j \quad F \rightarrow \max \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad x_j \geq 0 \quad (7)$$

Для задачи (6-7) обозначим допустимое множество задачи M и допустимое множество двойственной задачи M^* . Будем рассматривать несовместные задачи 1-го рода, когда нет допустимого решения прямой задачи (M пусто) и есть решение двойственной задачи на множестве M^* [3]. Такие задачи 1-го рода имеют экономический смысл. Для несовместных задач 1-го рода рассмотрим примеры 4-х типов ограничений неравенств разной структуры:

1. Система несовместных ограничений такая, что при исключении любого одного неравенства система имеет допустимое решение.

2. Система несовместных ограничений такая, что при исключении из группы несовместных неравенств каких-то нескольких (не любых) или 1 одного неравенства система имеет допустимое решение.

3. Система несовместных ограничений такая, что при исключении определенного одного неравенства или нескольких система имеет допустимое решение.

4. В системе несовместных ограничений присутствуют несколько типов ограничений, перечисленных выше.

Симплекс метод на этапе поиска допустимого решения определяет дополнительные переменные $u_i \geq 0$ из условия $\varphi = \min \sum_{i=1}^m u_i$ при: $x_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_i \geq b_i$.

В первом примере симплекс метод может дать список несовместных ограничений, включающий все ограничения. Хотя для получения допустимого решения достаточно исключить только одно ограничение. Если для этого примера получать решение с одним несовместным ограничением, то тогда просто определить причину нарушения ограничений. Аналогичные свойства ограничений у 2-го примера. В третьем примере симплекс метод может дать список несовместных ограничений, который будет наиболее простым для содержательной интерпретации.

Из этих примеров структуры несовместных задач видно, что полученное решение будет проще для содержательной интерпретации при меньшем числе несовместных ограничений. Приняв эту гипотезу о сложности интерпретации, сформулируем задачу поиска допустимого решения системы ограничений (7) по критерию минимума числа несовместных ограничений. Такая задача имеет вид:

$$Z = \min \sum_{i=1}^m \text{Sign}(u_i) \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_i \geq b_i, \quad x_j \geq 0, \quad u_i \geq 0, \quad (9)$$

где $\text{Sign}(u_i) = 1$ при $u_i > 0$ и $\text{Sign}(u_i) = 0$ при $u_i = 0$.

Задача (8-9) является более сложной, чем поиск допустимого решения (6-7). В качестве приближенного решения задачи (8-9) рассматриваем решение, которое получено описанным выше методом выбора вариантов для анализа несовместных задач. Это позволяет сократить перебор вариантов для определения причин, по которым система ограничений (7) не имеет допустимого решения.

Список литературы

1. Цодиков Ю.М., Хохлов А.С. Нелинейные модели оптимального планирования работы нефтеперерабатывающего завода // Тр. VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013) Т.2 / М: ВЦ РАН, 2013. С. 54-56.
2. Refinery and Petrochemical Modeling System (RPMS). WWW.honeywell.com.
3. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988.
4. Дудников Е.Е., Цодиков Ю.М. Типовые задачи оперативного управления непрерывным производством. М.: Энергия, 1979.

Interpretation of infeasible solution refinery planning problem

Tsodikov Y.M.

ICS RAS named after V. A. Trapeznikov, Moscow, Russia

О жёстком экономическом равновесии

В.Л.Чечулин

ПГНИУ, Пермь, Россия

Работа расширяет результаты указанные в [1] и основывается на представлениях об экономическом равновесии, описанных в [2, 3]. Для обеспечения равновесия оборота общественно необходимого времени необходима определённая доля расходов госбюджета от ВВП и определённая (нормируемая) доля валовой прибыли экономических субъектов [3, с. 41–40] (сверхприбыли производят инфляцию). При этом эта оптимальная доля валовой прибыли может устанавливаться в двух вариантах: а) "жёстко", для всех экономических субъектов едиными правилами, единым алгоритмом (сверхприбыли при этом обращаемы в капиталовложения, инвестиции), или б) "мягко" для совокупности экономических субъектов в среднем.

Посредством моделей экономического равновесия и производства инфляции установлено, что близость к экономическому равновесию (минимум производства инфляции) достигается в случае единого "жёсткого" способа нормирования прибыли (а не при оптимальности в среднем).

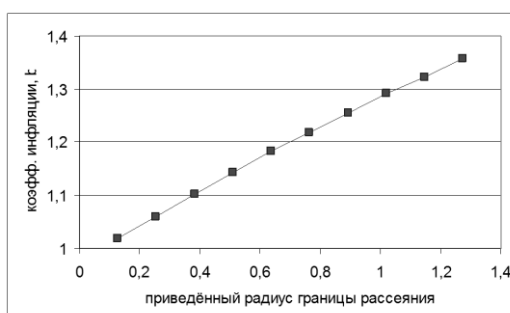


Рис. Зависимость коэффициента инфляции от приведённого радиуса границы рассеяния параметров (валовой прибыли)

На рисунке указано (для случая б), что отклонение параметров экономических субъектов от оптимальных, но такое, что в среднем валовая прибыль соответствует равновесному оптимуму прибыли, влечёт неравновесность экономики (производство инфляции). В случае а) имеется равновесность экономики и производства инфляции сверхприбылями экономических субъектов не наблюдается.

Пример наблюдаемой траектории экономического состояния конкретного экономического субъекта, с указанием отклонений от оптимального состояния приведён в [4], см. также траектории экономического состояния для стран в [2].

Список литературы

1. Чечулин В. Л. О жёстком оптимуме безинфляционного состояния экономики // Проблемы оптимизации и экономические приложения: матер. VI междунар. конф. Омск: Омский гос. ун-т, 2015. С. 163.
2. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Ахмаров В. Р. Модели безинфляционности экономики: произведённая инфляция и вывоз капитала: монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013.— 162 с.
3. Чечулин В. Л., Модели безинфляционного состояния экономики и их приложения: монография. Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011.— 112 с.

4. Чечулин В. Л., Ташкинов Д. А. К минимизации производства инфляции едиными правилами нормирования прибыли // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2016. Вып. 3. С. 48–55.

Strong Economic Equilibrium

Chechulin V.L.

Perm State University (PSU), Perm, Russia

О математико-демографических подходах к устранению искажений показателей смертности и продолжительности жизни престарелого населения*

Д.М.Эдиев

*Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия,
Черкесск, Россия*

Несмотря на прогресс в налаживании демографической статистики, современных регистров населения, систем учета данных о смертности, положение с качеством данных в старших возрастах остается неадекватным потребностям современного общества в части реакции на старение населения, разработки медицинских технологий и политики, ориентированных на престарелое население. Так, даже в ведущей международной базе данных по смертности Human Mortality Database (HMD, www.mortality.org) включающей только данные высокого качества, в том числе и по России, применяются косвенные методы и методы сглаживания данных в возрасте старше 80 лет [1]. При разработке модельных таблиц дожития, описывающих процессы смертности, отдел ООН по народонаселению также использует косвенные методы экстраполяции в возрастах старше 79 лет [2]. Ввиду ненадлежащего качества исходных данных, многие страны публикуют официальные таблицы дожития, демографическую статистику и результаты прогнозов огрубляя результаты за счет объединения данных в старших возрастах в единый «открытый возрастной интервал». В частности, Росстат публикует результаты демографического прогноза для интервала возраста 85 лет и старше [3].

Ведущей причиной низкого качества данных о смертности в старших возрастах является неточный учет возраста респондентов в переписях, обследованиях и регистрах [4]–[7], в частности – завышение возраста престарелыми людьми [8]–[12]. Эта проблема типична не только для стран с не налаженной системой подтверждения даты рождения, но и для развитых стран (отчасти – за счет мигрантов с неопределенной датой рождения, но даже и в коренном населении), где возраст респондента фиксируется по его личному заявлению и не подтверждается документально. Демографическим индикатором низкого качества данных о возрасте людей является т.н. возрастная аккумуляция сопровождающая завышение возраста – статистически значимое превышение числа людей с возрастом, оканчивающимся на цифру 0 или цифру 5 (т.е. скачкообразный «рост» численности людей возраста 50, 55, 60, 65, 70, 75 и т.д. лет). К сожалению, возрастная аккумуляция наблюдается даже в данных Всероссийской Переписи Населения 2010 года по ряду регионов, в т.ч. по г. Москве [13]. Завышение возраста престарелого населения приводит к заметным искажениям статистики смертности в сторону занижения показателей смертности в старших

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 18-01-00289).

возрастах, что является серьезным препятствием при разработке мер политики, а также в моделировании и прогнозировании демографических и медико-демографических процессов.

С целью решения проблемы учета смертности в старших возрастах в условиях искажения данных о возрасте, Хориучи и Коул [14], [15] в своей пионерской работе предложили математическую модель последствий завышения возраста для оценок продолжительности жизни в престарелом возрасте и метод корректировки соответствующих искажений. В методе Хориучи-Коула, опирающемся на модель стабильного населения [6], [16], [17], ожидаемая продолжительность жизни после достижения возраста a лет оценивается по формуле:

$$e_a = M_{a+}^{-1} e^{-\beta_a r M_{a+}^{-\alpha_a}} \quad (1)$$

где M_{a+} - коэффициент смертности в открытом возрастном интервале a лет и старше, r - темп изменения численности населения, α_a и β_a - параметры модели. Экспоненциальный множитель в (1) является поправочным множителем к оценке по традиционной модели ожидаемой продолжительности жизни в открытом возрастном интервале [16]–[21]:

$$e_a = M_{a+}^{-1}, \quad (2)$$

опирающейся на предположение о стационарности населения (постоянство возрастной структуры и нулевой темп изменения численности населения).

Подход Хориучи-Коула стал предметом научной дискуссии с Митрой [15], [22], [23], предложившим свою модель и метод корректировки традиционной оценки продолжительности жизни в открытом возрастном интервале:

$$e_a = M_{a+}^{-1} e^{-r[M_{a+}^{-1} - (1+rM_{a+}^{-1})(\bar{x}-a)]}, \quad (3)$$

где \bar{x} - дополнительный параметр модели, равный среднему возрасту населения (как и в модели Хориучи-Коула предполагаемого стабильным) в открытом возрастном интервале. Несмотря на противоречащие друг другу результаты, полученные в работах Хориучи-Коула и Митры, более внимательный анализ на основе современных, более полных и сопоставимых данных [24], [25] показал, что оба подхода хорошо согласуются друг с другом и дают значительное улучшение точности оценок продолжительности жизни по сравнению с традиционной моделью таблицы дожития с открытым возрастным интервалом (2) и широко используемым методом экстраполяции коэффициентов смертности [6] в старших возрастах. Улучшение оценок продолжительности жизни, в свою очередь, позволяет значительно (в разы) уменьшить ошибки экстраполяционных моделей возрастных коэффициентов смертности [26]–[29] за счет условной параметризации моделей с добавлением ограничения на значение ожидаемой продолжительности жизни в старшем возрасте [30].

Хотя модели Хориучи-Коула и Митры и их сопряжение с параметрическими моделями смертности привели к прорыву в методологии улучшения качества данных о смертности в старших возрастах, остается актуальной проблема разработки моделей и методов для случаев, когда указанные модели или неприменимы или недостаточно эффективны, в частности для нестабильного населения. В настоящей работе предлагаются три новых модели, а также новый комбинированный метод устранения искажений показателей смертности престарелого населения, применимые, в т.ч., в условиях, когда известные методы неэффективны.

Модель 1. Регрессионная модель зависимости между уровнем смертности в заданном возрасте и показателем ожидаемой продолжительности предстоящей жизни в том же возрасте. Анализ данных международной БД по Смертности показывает, что имеется тесная статистическая зависимость между значениями ожидаемой продолжительности предстоящей жизни (e_a) и коэффициентом смертности (M_a) в заданном возрасте a (вообще говоря, нетривиальный результат, поскольку продолжительность жизни зависит от смертности как в возрасте a , так и во всех

возрастах старше a). Предварительный анализ показывает перспективность регрессионной модели следующего вида:

$$\ln(e_a) = k_0 + k_1 \ln(M_a) + k_2 M_a + k_3 M_a^2 + k_4 a + k_5 a^2 + k_6 \text{Sex} + k_7 \text{Period} + \varepsilon, \quad (4)$$

где a – возраст, e_a – ожидаемая продолжительность жизни в возрасте a лет, M_a – возрастной коэффициент смертности, ‘Sex’ и ‘Period’ – качественные индикаторные переменные пола и календарного периода, $k_0, k_1, k_2, \dots, k_7$ – параметры модели, ε – статистическая ошибка. Модель (4) в сочетании с методом условной экстраполяции [30] можно использовать для улучшения оценок ожидаемой продолжительности жизни при рождении и коэффициентов смертности в старших возрастах.

Модель 2. Итерационный метод уточнения оценки ожидаемой продолжительности жизни для населения произвольной (нестабильной) возрастной структуры в старших возрастах. В моделях Хориучи-Коула и Митры, с помощью разных аналитических приемов, использовалось предположение о стабильности возрастной структуры населения для того, чтобы скорректировать традиционную классическую оценку (2) на отклонение возрастной структуры населения в открытом возрастном интервале от возрастной структуры стационарного населения. Идея итерационного метода заключается в том, чтобы оценивать и уточнять поправочный коэффициент в (8) в итерационной процедуре, где оценка продолжительности жизни на очередном этапе используется для оценивания, на следующем этапе, структуры коэффициентов смертности и дожития с помощью метода условной экстраполяции [30], что, в свою очередь, позволяет оценить структуру населения с помощью метода передвижки [16], [17], [21], [31] в предположении отсутствия миграции в престарелом возрасте. Итерационный метод представляется перспективным для населений с ненадежной демографической статистикой в старших возрастах в свете высокой точности метода условной экстраполяции и незначительного вклада миграции в старших возрастных группах.

Модель 3. Моделирование статистического механизма искажения информации о возрасте (бихевиоральная модель). В третьей модели предлагается разработать бихевиоральную математическую модель, описывающую механизм искажения информации о возрасте. Опираясь на опыт моделирования возрастной аккумуляции [32], предлагается исследование моделей, в которой предполагается, что доля α респондентов старше некоторого минимального значения возраста x_0 , случайно выбранная, завышает свой возраст на δ лет. Будем называть такую модель (x_0, α, δ) -моделью. Хотя предположения (x_0, α, δ) -модели значительно упрощают процессы искажения возраста в реальном населении, модель отражает существенные черты процесса искажения возраста и имеет хороший потенциал практических приложений. Более сложные механизмы искажения возраста могут рассматриваться как комбинации множества элементарных искажений, описываемых (x_0, α, δ) -моделью. Аналитические выкладки в рамках модели и вычислительные эксперименты показывают, что модель имеет много общего, в плане генерируемых возрастных профилей смертности, с моделью населения гетерогенного по показателям здоровья [33]. Это поднимает вопрос о возможности идентификации, какая из двух моделей может отвечать за наблюдаемые нерегулярности возрастной структуры смертности.

Помимо упомянутых моделей, предлагается комбинированный подход, в котором результаты нескольких методов используются совместно с целью минимизации ошибки оценивания показателей смертности и продолжительности жизни. Метод показал свою эффективность на примере комбинирования оценок по моделям Митры и классической таблицы дожития [25].

Список литературы

1. J. R. Wilmoth, K. Andreev, D. Jdanov, and D. A. Glej, “Methods Protocol for the

Human Mortality Database.” pp. 1–80, 2007.

2. UN DESA/Population Division, “World Population Prospects: Model Life Tables,” 2017. [Online]. Available: <https://esa.un.org/unpd/wpp/Download/Other/MLT/>. [Accessed: 20-Aug-2017].

3. Росстат, “Демография::Федеральная служба государственной статистики,” 2017. [Online]. Available: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/population/demography/#. [Accessed: 08-Feb-2017].

4. Департамент по экономическим и социальным вопросам, *Руководство по сбору данных о рождаемости и смертности*. Нью-Йорк: ООН, 2005.

5. N. G. Bennett and S. Horiuchi, “Mortality Estimation from Registered Deaths in Less Developed Countries,” *Demography*, vol. 21, no. 2, p. 217, May 1984.

6. H. S. Shryock and J. S. Siegel, *The Methods and Materials of Demography*. Washington D.C.: United States Bureau of the Census, 1973.

7. А. Ю. Мягков, “Возраст как переменная в социологическом исследовании (методологические и методические проблемы измерения),” *Вестник Тамбовского университета. Серия: Гуманитарные науки*, no. 2, pp. 31–38, 1996.

8. G. Duthé, I. Badurashvili, K. Kuyumjyan, F. Meslé, and J. Vallin, “Mortality in the Caucasus: An attempt to re-estimate recent mortality trends in Armenia and Georgia,” *Demogr. Res.*, vol. 22, no. 23, pp. 691–732, 2010.

9. M. Khlat and Y. Courbage, “Mortality and causes of death of Moroccans in France, 1979-91,” *Popul.*, vol. 8, pp. 59–94, 1996.

10. E. Kibele, R. Scholz, and V. M. Shkolnikov, “Low migrant mortality in Germany for men aged 65 and older: Fact or artifact?,” *Eur. J. Epidemiol.*, vol. 23, no. 6, pp. 389–393, 2008.

11. S. H. Preston, I. T. Elo, I. Rosenwaike, and M. Hill, “African-American mortality at older ages: results of a matching study,” *Demography*, vol. 33, no. 2, pp. 193–209, 1996.

12. A. Coale and E. Kisker, “Defects in data on old-age mortality in the United States: new procedures for calculating mortality schedules and life tables at the highest ages,” *Asian Pacific Popul. Forum*, vol. 4, pp. 1–31, 1990.

13. Российская Академия Народного Хозяйства и Государственной Службы (РАНХиГС), Федеральная служба государственной статистики (Росстат), and Международный Институт Прикладного Системного Анализа (IIASA), *Российский демографический лист 2016*. Москва, Россия и Лаксенбург, Австрия, 2016.

14. S. Horiuchi and A. J. Coale, “A Simple Equation for Estimating the Expectation of Life at Old Ages,” *Popul. Stud. (NY)*, vol. 36, no. 2, pp. 317–326, Jul. 1982.

15. A. J. Coale, “Estimating the Expectation of Life at Old Ages: Comments on the Article by Mitra,” *Popul. Stud. (NY)*, vol. 39, no. 3, pp. 507–509, Nov. 1985.

16. J. Veron, S. H. Preston, P. Heuveline, and M. Guillot, “Demography, Measuring and Modeling Population Processes,” *Popul. (French Ed.)*, vol. 57, no. 3, p. 591, May 2002.

17. А. Я. Боярский, Д. И. Валентей, and А. Я. Кваша, *Основы демографии*. М.: Статистика, 1980.

18. K. Namboodiri, C. M. Suchindran, and H. H. Winsborough, *Life Table Techniques and Their Applications*. Elsevier Science, 2013.

19. C. L. Chiang, *Life table and mortality analysis*. World Health Organization, Geneva, Switzerland, 1978.

20. К. Вандескрик, *Демографический анализ*. М.: Академический проект; Гаудеамус, 2005.

21. Н. Б. Баркалов, *Моделирование демографического перехода*. М.: Издательство Московского Университета, 1984.

22. S. Mitra, “On Estimating the Expectation of Life at Old Ages: Reply to Professor Coale,” *Popul. Stud. (NY)*, vol. 39, no. 3, pp. 511–512, Nov. 1985.

23. S. Mitra, “Estimating the Expectation of Life at Older Ages,” *Popul. Stud. (NY)*, vol. 38, no. 2, pp. 313–319, Jul. 1984.
24. D. M. Ediev, “Expectation of Life at Old Age: Revisiting Horiuchi-Coale and Reconciling with Mitra,” Laxenburg, WP-16-010, Aug. 2016.
25. D. M. Ediev, “Expectation of life at old age: revisiting Horiuchi-Coale and reconciling with Mitra,” *Genus*, vol. 74, no. 1, 2018.
26. B. Gompertz, “On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies,” *Philos. Trans. R. Soc. London*, vol. 115, pp. 513–583, 1825.
27. A. R. Thatcher, V. Kannisto, and J. W. Vaupel, *The Force of Mortality at Ages 80-120. Monographs on Population Aging*. Odense, Denmark: Odense University Press, 1998.
28. T. I. Missov and A. Lenart, “Gompertz–Makeham life expectancies: Expressions and applications,” *Theor. Popul. Biol.*, vol. 90, pp. 29–35, Dec. 2013.
29. V. Kannisto, “Development of the oldest-old mortality, 1950-1990: evidence from 28 developed countries. Monographs on population ageing,” *Odense Univ. Press*, 1994.
30. D. M. Ediev, “Constrained Mortality Extrapolation to Old Age: An Empirical Assessment,” *Eur. J. Popul.*, 2017.
31. В. М. Медков, *Демография: Учебник.*, 2nd ed. Москва: ИНФРА-М, 2011.
32. Д. М. Эдиев, *Демографические потери депортированных народов СССР*. Ставрополь: AGRUS, 2003.
33. J. W. Vaupel and A. I. Yashin, “Heterogeneity’s ruses: some surprising effects of selection on population dynamics.,” *Am. Stat.*, vol. 39, no. 3, pp. 176–85, Aug. 1985.

On mathematical-demographic approaches to reducing the estimation errors of mortality and longevity of elderly

Ediev D.M.

North-Caucasian State Humanitarian-Technological Academy, Cherkessk, Russia

СЕКЦИЯ № 7

РЫНКИ И АУКЦИОНЫ: АНАЛИЗ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Бобрик Г.И., Бобрик П.П. Чувствительность сетевого ценообразования | 243 |
| Васин А.А., Григорьева О.М., Лесик И.А. Задача оптимального развития транспортной системы энергетического рынка | 247 |
| Колданов П.А. Применение сетевых структур для анализа фондовых рынков | 252 |
| Куковеров М.В. Об альтернативе маржинального ценообразования на рынке электроэнергии | 253 |
| Сандомирская М.С., Тисс Ж.-Ф., Ущев Ф.А. Построение пространственной модели, объединяющей эффекты локальной и глобальной конкуренции | 256 |
| Podkovalnikov S.V., Semenov K.S., Khamisov O.V., Minarchenko I.M. Mechanisms for generating capacity expansion and power market structures: Russian case study | 259 |
| Filatov A.Yu., Novikova A.S., Ukhalova T.S. Gravity model of the interregional trade in Russia | 259 |
| Filatov A.Yu., Sokolovsky Yu.M. Monopolistic competition with heterogeneous labor: model analysing productivity increase at effective firms | 261 |
| Filatov A.Yu., Karp D.B., Makolskaya Ya.S. Excessive entry in oligopoly: case of heterogeneous firms | 263 |

Чувствительность сетевого ценообразования

Г.И. Бобрик

РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия

П.П. Бобрик

ФГБУН Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН, Москва, Россия.

Введение. Статья продолжает исследования в области биржевого ценообразования [4, 7, 8, 9] и является дальнейшим развитием математических построений в [5].

Пусть некоторый финансовый инструмент независимо торгуется в некотором числе мест (рынков) $\{x_i\}$ общим количеством $n + 1$. В результате торгов в каждом пункте x_i образуется своя цена p_i . Если торги происходят с использованием биржевых механизмов, то возникает классическая задача сетевого биржевого ценообразования. Хотя в реальности ценовая динамика намного более сложная [1], но в первом приближении будем предполагать, что цена изменяется в сторону дисбаланса спроса/предложения.

Поскольку каждый рынок торгуется независимо, то набор цен $\{p_i\}$ может быть различен даже в стационарном состоянии. Такая ситуация может быть обусловлена различными причинами [10]. В случае товарных рынков это могут быть транспортные издержки. Для финансовых инструментов важны различия между нормами

регулирования и налогообложения в разных странах [11]. Необходимость размещения капитала для гарантийных обеспечений по всем биржам приводит к требованиям на размер капитала. Транзакционные расходы препятствуют сделкам между участниками с одного рынка, но с разными торговыми стратегиями [2, 4].

В случае сильного расхождения цен возникают предпосылки для проведения прибыльных арбитражных операций. Именно наличие арбитража превращает набор отдельных рынков в сеть, что приводит к ряду качественно новых свойств биржевого ценообразования. В частности, в результате арбитражных операций каждая цена стремится не отклоняться от средних значений по ансамблю. С этой точки зрения можно провести аналогию между динамикой всего множества цен $\{p_i\}$ с задачами движения роя. [3,5, 6]

Широко распространено ошибочное мнение, что если пороговые значения для включения арбитража невелики, то и общий разброс цен по сети также ограничен. Однако, в случае роста числа узлов подобное утверждение становится ложным. В статье показано, что отклонения цен могут расти до бесконечности по мере роста размеров сети даже при ограниченном изменении соотношения спроса-предложения.

Постановка задачи. Чтобы доказать приведенные выше утверждения, достаточно построить соответствующий пример. Пусть имеется n покупателей финансового инструмента и $n + 1$ рынков, где этот инструмент предлагается. Рассмотрим сначала стационарную задачу и положим объемы покупок и продаж в единицу времени постоянными и равными единице на каждом рынке, кроме последнего.

В случае товарных рынков удобно представлять предложение отдельными предприятиями с фиксированными объемами выпуска. Для изменения объема производства выпуска необходима его переналадка, что требует волевого решения и времени. Т.е. как минимум присутствует запаздывание изменения предложения. Поэтому на небольших промежутках времени объем предложения вполне может являться постоянной величиной.

Последний рынок x_{n+1} будет представлять в данном примере резервные мощности по предложению (на последнем рынке положим нулевые обороты). Будем полагать, что он обладает самой высокой скоростью реакции на изменение конъюнктуры и первым среди всех узлов сети начинает увеличивать объем предложения.

Хотя каждый покупатель может выйти на любой рынок, в силу различных транзакционных издержек, инкорпорированности в те или торговые сообщества и личных предпочтений, которые в конечном итоге также имеют свое денежное выражение, для каждого покупателя существуют свои предпочтения, где совершать сделки. Будем их оценивать в виде некоторых дополнительных стоимостей (издержек) $C_{i,j}$ к ценам, которые подходят по сделкам биржи. Чтобы однозначно определить систему, зададим матрицу стоимостей $C_{i,j}$ в соответствии с формулой расстояния

$$C_{i,j} = |i - j|,$$

где i номер покупателя, а j - номер рынка, где он торгуется[6]. Для первого покупателя покупки имеют нулевую дополнительную стоимость на первом рынке, единицу на втором рынке и т.д. Дополнительная стоимость растет линейным образом тем больше, чем на более «дальний» рынок приходится выходить с заявками.

Каждый покупатель стремится выбрать такие рынки, чтобы общая стоимость его закупок были бы минимальной. Тем самым возникает игровая задача. Также можно провести аналогию с классической задачей о назначениях.

Нетрудно заметить, что в стационарном случае имеется тривиальное решение. Первый покупатель будет приобретать весь объем предложения на первом рынке, второй на втором и т.д. Последний $n + 1$ рынок при этом остается невостребованным. Тем самым спрос полностью совпадает с предложением. Поэтому цены будут

стабильны при любом их текущем распределении $\{p_{0,i}\}$. А сумма дополнительных стоимостей равна нулю, что по смыслу задачи означает создание наиболее эффективного с точки зрения транзакций рынка.

Отметим, что в данном примере для каждого покупателя присутствует возможность выйти на чужой рынок с единичной дополнительной стоимостью, т.е. минимальные трансграничные расходы для каждого участника в этом примере ограничены по всей сети и не превышают единицы.

Возмущенный случай. Повысим интенсивность покупок первого инвестора до $1 + \varepsilon$, где ε сколь угодно малая величина. В этом случае он не может удовлетворить весь свой спрос полностью на первом рынке. Ему нужно приобрести эту малую добавку на других рынках. Ставится задача определить возникающие при этом малом возмущении цены.

Хотя малая вариация начальных условий не меняет линейного характера задачи, и она по-прежнему относительно легко решается методами линейного программирования, но в данном случае можно найти более простое решение.

Поскольку на первом рынке возникло превышение спроса над предложением, то на нем в соответствии с биржевым законом начнется рост цены. Он будет продолжаться до тех пор, пока первому инвестору не станет интересно совершать сделки на втором рынке. Для этого изменение биржевой цены должно превысить дополнительные издержки выхода первого участника на второй рынок

$$p_1 = p_{0,1} + C_{12} = p_{0,1} + 1.$$

После выхода первого инвестора на второй рынок, суммарное предложение по первым двум рынкам составляет 2 единицы, а спрос $2 + \varepsilon$. Поэтому цены p_1 и p_2 также начнут расти до тех пор, пока они не достигнут величин

$$p_1 = p_{0,1} + C_{13} = p_{0,1} + 2,$$

$$p_2 = p_{0,2} + C_{23} = p_{0,2} + 1.$$

Это приведет к тому, что первые два инвестора начнут выходить на третий рынок тоже. Отметим, что в рамках данной модели ничего не предполагается о том, как распределятся между инвесторами объемы, перешедшие на третий рынок. Известен только их общий бесконечно малый объем ε .

Повторяя эти рассуждения по индукции, получаем бегущую волну роста цен, которая постепенно покрывает всю сеть и формирует локальные тренды на каждом из рынков [5]. Когда волна достигнет последний $n + 1$ рынок, то избыточный спрос перельется на него. В соответствии с предположениями модели, через некоторое время там появится соответствующее предложение, которое уравновесит спрос и тем самым прекратит растущий тренд.

В рамках данной модели ничего не говорится про то, когда дополнительный объем появится во времени. Как и про то, какие переходные процессы (коррекции, волны и т.д.) будут при этом протекать. Поэтому, вообще говоря, нельзя даже утверждать, что система обязательно достигнет равновесия. Более того, наблюдения из практики показывают, что вполне возможен случай хаотических колебаний вокруг некоторой полосы цен.

Отметим, что в текущей постановке данный пример является разновидностью классической задачи о назначениях, которая может быть решена различными способами с привлечением методов линейного программирования. Проблема в том, что, хотя объемы покупок и продажи в нашем примере известны, на реальных биржевых торгах такой информации нет. Поэтому будущая ценовая динамика неизвестна. Это не позволяет использовать различные математические оптимизационные методы при решении практических задач.

Одним из предназначений биржи является как раз сбор первичных заявок и тем самым определение текущей конъюнктуры. Т.е. на бирже эта проблема решается с

помощью информационных, а не математических подходов. В том числе и при решении столь важной для практики задачи нахождения оптимальной цены при текущих профилях спроса и предложения.

Чувствительность цен. Хотя вопросы сходимости цен к некоторому предельному состоянию при возмущении спроса остаются дискуссионными, но, тем не менее, имеется равновесное решение в ценах, выражаемое формулами

$$p_i = p_{0,i} + C_{i,n+1} = p_{0,i} + n - i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Откуда легко следует следующая

Теорема. При сколь угодно малом ε возмущении соотношения спроса / предложения цена может изменяться неограниченно сильно при росте числа узлов сети $n + 1$.

Данный пример позволяет также сформулировать более сильное утверждение об асимптотике роста цены.

Лемма. Рост цены может протекать по линейному закону от числа узлов сети.

Для построенного данного примера важно предположение о фиксированном предложении и об отсутствии значительных резервов мощностей предложения, что позволяет волне возмущений бежать по сети и образовывать на отдельных рынках ценовые тренды.

Возникает вопрос, насколько данный модельный пример может быть применим к реальным торгам? Можно отметить два момента.

На практике условие фиксированного предложения выполняется далеко не всегда. Хотя некоторое время за счет эффекта запаздывания это будет выполняться, но при достаточно больших временах наверняка найдутся способы увеличить предложение и тем самым компенсировать нехватку спроса локально, не запрашивая всю сеть. Но даже в этом случае будут возникать длительные периоды трендов с сильными изменениями цены[9].

Более важным ограничением является условие отсутствия резервных мощностей предложения. По крайней мере на товарных рынках такая ситуация редка. Но даже в этом случае с качественной точки зрения многие выводы статьи остаются верными, если заменить бесконечно малое возмущение спроса на ограниченное, но конечное. Если этот дисбаланс спроса будет превышать локальные резервы предложения, то можно получить аналогичным образом длительные периоды роста цены в одном направлении за счет сетевого характера распространения цены. При этом изменение цены будет значительно превышать величину дисбаланса спроса.

Выводы. Построен пример математической модели сетевого ценообразования, в котором сколь угодно малое возмущение соотношения спроса / предложения приводит к фиксированному увеличению цен. Рост цены может иметь линейную асимптотику от числа локальных рынков сети. Показан волнообразный характер распространения возмущения дисбаланса спроса-предложения по сети, что определяет ценовые тренды в каждой точке сети[5, 9].

Список литературы

1. Бобрик П.П. «Практические аспекты использования фигур наивания.» // Рынок ценных бумаг. 2004. №10. С. 46-49.
2. Бобрик П.П., Шайхулов А.Г., Торговля по алгоритму. // CBondsReview. 2011. №4. С. 42-49.
3. Бобрик П.П., Понедельченко Е.В, Шайхулов А.Г. И еще раз о кривой волатильности. // Фьючерсы и опционы. 2012. №4. С.70-75. №5. С. 62-67.
4. Бобрик Г.И, Бобрик П.П. Агентная модель биржевого ценообразования товарных рынков. // Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции «Математические методы и модели в исследовании государственных и корпоративных финансов и финансовых рынков». Уфа. 2015. С. 111-115.

5. Бобрик П.П. Волновые свойства алгоритмов поиска транспортного равновесия Вардроп с локальным информированием. // Труды ORM2016, Москва, 17-22 октября 2016. М.: Изд. ФИЦ ИУ РАН. 2016. С. 231-232.

6. Ksenia Bobrik, Nina Popova. Analysis of Processes Communication Structure for Better Mapping of Parallel Applications. // RuSCDays 2016: Supercomputing. Part of Communications in Computer and Information Science book series (CCIS). V.687. P. 264-278.

7. Бобрик Г. И., Бобрик П. П. Влияние маркетмейкеров на толстые хвосты распределений приращений цены // Сборник материалов Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Математические методы и модели в исследовании актуальных проблем экономики России». Уфа, 2016. С. 277–281.

8. Бобрик Г. И., Бобрик П. П. Возможности использования биржевых операций типа качелей на товарных рынках // Сборник научных трудов по итогам Международной научно-практической конференции «Экономика, финансы и менеджмент: тенденции и перспективы развития». Волгоград : ИЦРОН, 2016. С. 93–97.

9. Бобрик Г.И., Бобрик П.П. Определение биржевых трендов с помощью угловых операций». // Вестник РЭУ им У.В. Плеханова. 2017. №4(94).С. 67-73.

10. Булгаков А.Л. BigData в финансах. // Электронный журнал Корпоративные финансы. Т. 11. № 1, С. 3-11.

11. Sukhorukova I.V., Chistyakova N.A. Optimization of the Formation of the Capital Structure of the Insurance Company, Taking into Account the National Specifics of Insurance. // Journal of Reviews on Global Economics. V. 7. 2018. P. 146-151

Sensitivity of Grid Pricing

G.I. Bobrik

Plekhanov Russian university of Economics, Moscow, Russia, bobrikgi@mail.ru

P.P. Bobrik

Institute of problems of transport of the Russian Academy of Sciences of N. S. Solomenko, bobrikpp@mail.ru

Задача оптимального развития транспортной системы энергетического рынка

А.А. Васин, О.М. Григорьева,

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

И.А. Лесик

ТвГУ, Тверь, Россия

Рассматривается задача планирования инвестиций в транспортную сеть на T лет вперед от текущего года. Оптимизируется транспортная структура оптового рынка, которая в каждый период (год) t задается пропускными способностями магистральных линий, связывающих узлы (производящие и потребляющие регионы). Цель работы – определить оптимальный план развития транспортной системы с точки зрения максимизации благосостояния за весь период планирования. Предлагаются следующие две модели.

Модель 1. Развивая постановку, предложенную в [1,2], построим модель многоузлового рынка с экзогенно заданными функциями спроса и затрат, зависящими от времени. Рассматривается рынок однородного энергоресурса, состоящий из несколько локальных рынков и сетевой системы передачи. Пусть N - множество узлов, соответствующих локальным рынкам, и $L \subseteq N \times N$ - множество пар узлов, которые можно связать линиями (считается, что оптимальный маршрут для связи известен).

Каждый узел $i \in N$ соответствует местному совершенно конкурентному рынку, цена p_i на котором определяется из условия баланса спроса, предложения, притока и оттока товара по системе передачи. Функция спроса $D_i(p_i, t)$ и функция $c_i(v, t)$ себестоимости производства объема v в узле i в период t характеризуют соответственно потребителей и производителей на рынке i . Функция спроса монотонно убывает по цене и связана с функцией полезности потребления в период t : $U_i(q, t) = \int_0^q D_i^{-1}(v, t) dv$, где q - количество потребленного товара. Функция $c_i(v, t)$ монотонно возрастает и выпукла. Каждая линия передачи $(i, j) \in L$ характеризуется начальной пропускной способностью $Q_{ij}^0 \geq 0$, затратами e_{ij}^{tr} на передачу единицы товара из i в j , функцией затрат на увеличение пропускной способности в период t , включающей постоянные затраты e_{ij}^f и переменные затраты $e_{ij}^v(\Delta Q_{ij}(t))$, а также дополнительные фиксированные затраты на первоначальное строительство линии E_{ij}^{f0} , если $Q_{ij}^0 = Q_{ij}^{t-1} = 0$. Функция $e_{ij}^v(\Delta Q_{ij}(t))$ выпукла. Обозначим $q_{ij}(t)$ поток от рынка i к рынку j , $q_{ij}(t) = -q_{ji}(t)$, $N(i)$ - множество узлов, связанных с узлом i (т.е., $(i, j) \in L$). При заданных потоках $\vec{q} = (q_{ij}(t), (i, j) \in L, t = 1, \dots, T)$ и объемах производства $\vec{v} = (v_i(t), (i, j) \in L, t = 1, \dots, T)$ суммарное общественное благосостояние за плановый промежуток определяется суммарной приведенной полезностью потребления по всем узлам за вычетом затрат на производство, расширение линий связи и транспортировку товара:

$$W(\vec{Q}, \vec{q}, \vec{v}) = \sum_{i \in N} \sum_{t=0}^T d^t [U_i(t, v_i(t) + \sum_{l \in N(i)} q_{li}(t)) - c_i(v_i(t), t)] - \sum_{(i,j) \in L, i < j} E_{ij}(\vec{Q}_{ij}, \vec{q}_{ij}), \quad (1)$$

где d - коэффициент дисконтирования; $\vec{Q}_{ij} = (Q_{ij}(0), Q_{ij}(1), \dots, Q_{ij}(T))$ - планируемое последовательное расширение линии $(i, j) \in L$, $Q_{ij}(0) \leq Q_{ij}(1) \leq \dots \leq Q_{ij}(T)$; $\vec{q}_{ij} = (q_{ij}(t), t = 1, \dots, T)$ - поток товара между узлами $(i, j) \in L$; функция $E_{ij}(\vec{Q}_{ij}, q_{ij}(t), t = 0, \dots, T)$ суммарных затрат на передачу товара по линии (i, j) определяется из решения следующей вспомогательной задачи:

$$E_{ij}(\vec{Q}_{ij}, \vec{q}_{ij}) = \sum_t |q_{ij}(t)| e_{ij}^{tr} d^t + \bar{E}_{ij}(\vec{Q}_{ij}),$$

где $|q_{ij}(t)| \leq Q_{ij}(t-1)$, $(i, j) \in L, t = 0, \dots, T-1$, затраты на последовательное расширение линии (i, j) имеют вид:

$$\bar{E}_{ij}(\vec{Q}_{ij}) = \sum_{t=0}^{T-1} [ind_{ij}(t) (e_{ij}^f + e_{ij}^v(Q_{ij}(t) - Q_{ij}(t-1))) + ind_{ij}^0(t) E_{ij}^{f0}] d^t.$$

Учитывается, что для обеспечения потока $q_{ij}(t)$ пропускная способность в предыдущий период должна достичь этого значения. Здесь индикатор расширения линии в период t

$$ind_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q_{ij}(t) > Q_{ij}(t-1), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Индикатор строительства линии в период t

$$ind_{ij}^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q_{ij}(t-1) = 0 < Q_{ij}(t), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, определяется вектор индикаторов $\vec{J}(\vec{Q})$ расширения линий для данного вектора \vec{Q} . Наша цель - разработать метод решения вспомогательной задачи

оптимизации благосостояния при фиксированном $\vec{J} = \{ind_{ij}(t), (i, j) \in L, t = 0, \dots, T - 1\}$:

$$\bar{W}(\vec{J}) = \max_{\vec{Q}: \vec{J}(\vec{Q}) = \vec{J}} W(\vec{Q}), \quad (2)$$

где

$$W(\vec{Q}) = \max_{(\vec{q}, \vec{v}): |q_{ij}(t)| \leq Q_{ij}(t-1), (i, j) \in L, t=0, \dots, T-1} W(\vec{q}, \vec{v}), \quad (3)$$

Основная задача сводится к нахождению

$$\vec{J}^* \in \text{Argmax}_{\vec{J}} \bar{W}(\vec{J}). \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть заданы моменты, когда проводятся реконструкции линий (значения индикаторов определены). Тогда (2) – задача выпуклого программирования.

Доказательство. Задача дискретного оптимального управления (ОПУ), частным случаем которой является задача оптимизации общественного благосостояния, записывается в виде [3]:

$$\begin{aligned} I(u) &= \sum_{t=0}^{T-1} F_t^0(x_t, u_t) + \Phi(x_T) \rightarrow \max; \\ x_{t+1} &= F_t(x_t, u_t), t = 0, 1, \dots, T-1, x_0 = a; \\ x_t &\in E^N, u = (u_0, u_1, \dots, u_{T-1}), u_t \in V_t \subset E^r, \\ t &= 0, 1, \dots, T-1, F_t = (F_t^1, \dots, F_t^m); \end{aligned} \quad (5)$$

где I – интегрально-терминальный критерий, Φ – его терминальная часть, F – функция, задающая динамику системы, $x_t = (x_t^{ij}, (i, j) \in L)$ – фазовый вектор, u – управление, $u_t = (u_t^{ij}, (i, j) \in L)$ – управляющее воздействие, V_t – множество допустимых управляющих воздействий. Функции $\Phi, F_t, F_t^0, t = 0, 1, \dots, T-1$, в общем случае предполагаются непрерывными вместе со своими производными по x, u , множества допустимых управляющих воздействий V_t – выпуклы, замкнуты и ограничены. Кроме того, функции F_t удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных в области определения с единой константой $L > 0$.

Согласно [3] функция Гамильтона:

$$H_t(x_t, \psi_t, u_t) = \langle \psi_t, F_t(x_t, u_t) \rangle + F_t^0(x_t, u_t),$$

где $\psi_t \in E^n$ – сопряженные переменные, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ --- скалярное произведение векторов в E^n .

Введем сопряженную систему согласно [3]:

$$\psi_{t-1} = \frac{\partial H_t(x_t, \psi_t, u_t)}{\partial x}, t = T-1, \dots, 1, \psi_{T-1} = \frac{\partial \Phi(x_T)}{\partial x}, \quad (6)$$

где $\frac{\partial H_t(x_t, \psi_t, u_t)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(x_T)}{\partial x}$ – градиенты.

Согласно [3] обозначим $L_2^T[0, T]$ гильбертово пространство вектор-функций $u = (u_0, u_1, \dots, u_{T-1})$ дискретной переменной t со скалярным произведением и нормой, заданными формулами:

$$\langle u, v \rangle_{L_2} = \sum_{t=0}^{T-1} \langle u_t, v_t \rangle_{E^r}; \quad \|u\| = \left(\sum_{t=0}^{T-1} |u_t|_{E^r}^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда при сделанных предположениях целевая функция (5) непрерывна и дифференцируема в норме $L_2^T[0, T]$, причем ее градиент $I'(u)$ представляется в виде [3, т.1, стр.108]:

$$I'(u) = \{H_{tu}(x_t, \psi_t, u_t), t = 0, 1, \dots, T-1\} \in L_2^T[0, T], \quad (7)$$

где $H_{tu} = (H_{u_t^{ij}}, (i, j) \in L)$.

В частности, для задачи (2) имеем:

$$F_t^0 = d^t[W(\vec{Q}(t)) - \sum_{i,j \in L: i < j} \bar{\varepsilon}_{ij}(\Delta \vec{Q}_{ij}(t))];$$

$$F_t = Q_{ij}(t) + u_t^{ij};$$

$$\Phi = d^T W(\vec{Q}(T));$$

$$x_t = \vec{Q}(t); u_t = \Delta Q_t; V^t = \otimes_{i,j \in L} [0, \infty);$$

$$t = 0, 1, \dots, T-1;$$

где $\bar{\varepsilon}_{ij}(\Delta \vec{Q}_{ij}(t)) = [ind_{ij}(t) (e_{ij}^f + e_{ij}^v(\Delta Q_{ij}(t)))] + ind_{ij}^0(t) E_{ij}^{f0} d^t$.

Заметим, что F_t линейна, а функция F_t^0 вогнута по совокупности переменных в силу результатов[2], значения индикаторов являются константами в силу того, что зафиксирован вектор \vec{j} . Отсюда в силу [3, т.2, стр.111] следует, что функционал $I([\Delta \vec{Q}_t])$ вогнут по $\Delta \vec{Q}_t$. Поскольку $\Delta \vec{Q}_t = \vec{Q}_t - \vec{Q}_{t-1}$ – линейный оператор, то функция $W(\vec{Q}) = I([\Delta \vec{Q}_t])$ вогнута как суперпозиция линейной и вогнутой функции, что доказывает утверждение теоремы.

Функция Гамильтона для задачи (2):

$$H_t(\vec{Q}(t), \psi_t, u_t) = \sum_{(i,j) \in L} \psi_t^{ij} (Q_{ij}(t) + u_t^{ij}) d^t [\bar{W}(\vec{Q}(t)) - \bar{\varepsilon}_{ij}(\Delta \vec{Q}_{ij}(t))],$$

Сопряженная система (6) в нашем случае:

$$\begin{cases} \psi_{t-1}^{ij} = \psi_t^{ij} + d^t W_{Q_{ij}}(\vec{Q}(t)), \\ \psi_{T-1}^{ij} = d^t W_{Q_{ij}}(\vec{Q}(T)). \end{cases} \quad (8)$$

Компоненты градиента (7) имеют вид:

$$\bar{W}_{\Delta Q_{ij}(t)}(\vec{Q}(t)) = \psi_t^{ij} - d_t ind_{ij}(t) e_{ij}^v, t = 0, \dots, T-1.$$

Найдем необходимые и достаточные условия оптимальности:

$$\begin{cases} W_{\Delta Q_{ij}(t)}(\vec{Q}(t)) = 0, \Delta Q_{-ij} > 0, \\ W_{\Delta Q_{ij}(t)}(\vec{Q}(t)) \leq 0, \Delta Q_{-ij} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Кроме того, по смыслу должны выполняться условия:

$$\begin{cases} \Delta Q_{ij}(t) > 0, ind_{-ij}(t) = 1, \\ \Delta Q_{ij}(t) = 0, ind_{-ij}(t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

В данном случае система (8) допускает решение в явном виде:

$$\psi_t^{ij} = \sum_{\tau=t}^{T-1} d^t W_{Q_{ij}}(Q(\tau)) \quad (11)$$

Объединяя (9),(10) с учетом (11) получаем следующие необходимые и достаточные условия оптимальности:

$$\begin{cases} \sum_{\tau=t}^{T-1} d^{\tau} W_{Q_{ij}}(Q(\tau)) - d^t \text{ind}_{ij}(t) e_{ij}^v = 0, \text{ind}_{ij}(t) = 1 \\ \begin{cases} \Delta Q_{ij}(t) = 0, \text{ind}_{ij}(t) = 0 \\ \Delta Q_{ij}(t) > 0, \text{ind}_{ij}(t) = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Замечание 1. Для учета вклада созданной транспортной системы в будущее благосостояние (в периоды после T) можно рассмотреть стационарный план производства и потребления, начиная с T , и учесть соответствующее ему приведенное значение будущего благосостояния. При этом коэффициент при последнем слагаемом в выражении (1) будет $d^T / (1 - d)$ (вместо d^T).

Замечание 2. Для нахождения (3) можно использовать метод проекции градиента, аналогично [2].

Замечание 3. Для решения задачи (2) можно использовать метод стохастического градиента, аналогично [2].

Модель 2. В предыдущей постановке функции спроса предполагались экзогенно заданными. Однако, в реальности развитие экономики в каждом узле и соответствующая динамика спроса могут существенно зависеть от поставок энергоресурса и прочих вложений в данный узел. Рассмотрим модель, в которой линейная функция спроса в каждый период зависит от вложений в предыдущие периоды следующим образом:

$$D_j(p, t) = \max(0, \lambda_{j(t)}(p_{Mj}(t) - p)), t = 0, \dots, T,$$

то есть p_{Mj} – цена, до которой спрос положителен,

$$\lambda_j(t + 1) = \lambda_j(t)(1 - K_j^{\lambda}(p_{Mj}(t) - p_j(t))^2),$$

$$p_{Mj}(t + 1) = p_{Mj}(t) \left[1 + K_j^M \left(E_j(t) + \lambda_j(t) (p_{Mj}(t) - p_j(t))^2 \right) - m_j \right].$$

Здесь K_j^{λ} отражает влияние прибыли (или сюрплуса) потребителей ресурса на улучшение технологической структуры потребляющей отрасли, $E_j(t)$ – часть прибыли производителей энергоресурса, идущая на развитие региона j , коэффициент K_j^M отражает влияние прибыли, поступающей в регион, j на рост максимальной цены $p_{Mj}(t)$, то есть на максимальную эффективность использования ресурсов в потребляющей отрасли; m_j характеризует амортизацию основных фондов потребляющей отрасли в регионе j .

Тогда $D_i(p, t + 1) =$

$$\lambda_j(t) \left(1 - K_j^{\lambda} (\Delta p_j(t))^2 \right) \left(p_{Mj}(t) \left[1 + K_j^M \left(E_j(t) + \lambda_j(t) (\Delta p_j(t))^2 \right) - m_j \right] - p \right).$$

Список литературы

1. А.А. Vasin, О.М. Grigoryeva, N.I. Tsyganov, Optimization of an Energy Market Transportation System // Doklady Akademii Nauk, 2017, Vol. 475, No. 4, pp. 377–381.
2. А. Васин, И. Лесик, О. Григорьева, Синтез транспортной системы многоузлового рынка с переменным спросом // Труды Прикладная математика и информатика, раздел Информатика, выпуск №55, стр. 74-90, 2017.
3. Васильев Ф.П., Методы решения экстремальных задач, М:Наука, 1981.

The problem of optimal development of the energy market of the transport system

Vasin A.A., Grigorieva O.M.,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Lesik I.A.
Tver State University, Tver, Russia

Применение сетевых структур для анализа фондовых рынков

П.А.Колданов
Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики, Нижний Новгород,
e-mail: pkoldanov@hse.ru

Постановка проблемы: под сетевой моделью сложной системы понимается полный взвешенный граф, вершины которого соответствуют элементам системы, а веса ребер задаются мерой взаимодействия между элементами. В настоящее время сетевые модели активно применяются в изучении фондовых рынков [1],[2],[3]. При этом изучаются сетевые структуры – подграфы, содержащие ключевую информацию о рассматриваемых сетевых моделях. При анализе фондовых рынков наиболее популярными сетевыми структурами являются максимальное остовное дерево [1] (МСТ), планарный максимально отфильтрованный граф (ПМФГ) и граф рынка [2],[3] (МГ). Ключевой при этом является задача идентификации сетевых структур по наблюдениям над элементами сложной системы. Традиционный подход к её решению основан на вычислении корреляции Пирсона для каждой пары элементов и применении соответствующих алгоритмов идентификации сетевых структур.

В докладе вводится понятие сети случайных величин, которая определяется парой (X, γ) , где вектор $X = (X_1, \dots, X_p)$ имеет многомерное распределение, а $\gamma = (\gamma_{ij} = \gamma(X_i, X_j)), i, j = 1, \dots, p$ - выбранная мера близости между X_i, X_j . Таким образом, традиционный подход основан на применении соответствующих алгоритмов идентификации сетевых структур к сети корреляции Пирсона.

Определено понятие статистической неопределенности процедур идентификации сетевых структур и методом статистического моделирования показано, что неопределенность МСТ значительно выше неопределенности МГ.

Обсуждается вопрос использования сетевых структур при анализе фондового рынка. Предложена четырехступенчатая процедура построения оптимального портфеля инвестиций, использующая информацию о графе соответствующего рынка. На основе анализа реальных данных показано, что эффективный фронт портфелей, построенных по акциям всего рынка, близок к эффективному фронту портфелей, построенных предложенной процедурой.

Список литературы

1. Mantegna, R.N. Hierarchical structure in financial markets //The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. 1999. Vol.11, issue 1. Pp. 193-197.
2. Boginski V., Butenko S., Pardalos P.M. Statistical analysis of financial networks, Computational Statistics and Data Analysis. 48 (2), 431--443 (2005).
3. Boginski V., Butenko S., Pardalos P.M. Mining market data: a network approach J. Computers and Operations Research. 33 (11) 3171--3184 (2006).

4. Kalyagin V.A., Koldanov A.P., Koldanov P.A., Pardalos P.M., Zamaraev V.A. Measures of uncertainty in market network analysis, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 413, No. 1, pp. 59-70 (2014).

5. Koldanov, P. M. Pardalos, V. A. Zamaraev Statistical uncertainty of market network structures // *DATA ANALYTICS 2014, The Third International Conference on Data Analytics*. -2014, pp. 91-94.

6. Колданов П. А. Функция риска статистических процедур идентификации сетевых структур // *Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика*. 2017. № 3. С. 45-59.

The use of network structures for the analysis of stock markets

Koldanov P.A.

The National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

e-mail: pkoldanov@hse.ru

Об альтернативе маржинального ценообразования на рынке электроэнергии

М.В.Куковеров

РАНХиГС при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия

Цена на рынке электроэнергии для прочих потребителей (для тех, кто не относится к категории населения) сегодня формируется по принципу залпового закрытого аукциона с маргинальным ценообразованием. Производители подают на аукцион свои ценовые заявки. После установленного времени окончания приема заявок на предстоящие сутки оператор аукциона (Коммерческий оператор) в отношении каждого часа предстоящих суток отбирает необходимое количество производителей с наименьшими ценовыми заявками, с учетом потерь и ограничений на перетоки. Цена для потребителей в отношении каждого часа предстоящих суток устанавливается на уровне максимальной из цен в отобранных для данного часа заявках поставщиков, с учетом потерь и ограничений на перетоки. Эту цену получают все отобранные производители, независимо от цены в своей заявке.

Маргинальное ценообразование на рынке электроэнергии имеет как положительные, так и отрицательные стороны.

Прежде всего можно отметить то, что такое ценообразование отвечает интересам производителей, а не потребителей. Действительно, при определении цены по маргинальному принципу потребители платят по цене самого дорогого востребованного генератора.

К плюсам узлового маргинального ценообразования можно отнести то, что высокие узловые цены в определенном узле (группе узлов) могут служить географическими сигналами для инвесторов для строительства генерации.

К минусам можно отнести то, что при таком ценообразовании строительство сетевой инфраструктуры может в определенных случаях приводить к росту для потребителей цены на электроэнергию.

В [1] показано, что при определенных предположениях, в модели сетевого рынка с двумя узлами (зонами) при появлении возможности перемещения товара между узлами цена в узле-доноре может вырасти.

При этом, может возникнуть ситуация, когда, несмотря на направление перетока (из узла-донора в узел-реципиент), цена в узле-доноре будет сформирована поставщиком из узла-реципиента. Такая ситуация (см. Рисунок 3) оказывается возможной, например, в случае неэластичного спроса, и ограниченного предложения в узле-доноре.

Практика показывает следующее. В 2014 г. была введена в эксплуатацию ЛЭП ВЛ 500 Курган-Ишим-Восход, соединившая напрямую европейскую (1-я ценовая зона) и сибирскую (2-я ценовая зона) части ЕЭС. До этого переток осуществлялся через территорию Казахстана. Дополнительно к этому были приняты изменения правил [5] и регламентов оптового рынка [6], предусматривающие объединение конкурентного отбора рынка на сутки вперед (РСВ) в ценовых зонах. В результате, данное расширение сетевых связей, в совокупности с принятыми изменениями правил и регламентов рынка, привели к скачкообразному увеличению цены на электроэнергию на рынке на сутки вперед во 2-й ценовой зоне (см. Рисунок 2). Соответствующий отрицательный экономический эффект для потребителей 2-й ценовой зоны можно оценить величиной порядка 16.7 млрд руб. в год (в ценах 2014 г.).

Согласно [4], общим принципом организации экономических отношений в сфере электроэнергетики, в числе прочего, является использование рыночных отношений и конкуренции в качестве одного из основных инструментов формирования устойчивой системы удовлетворения спроса на электрическую энергию при условии обеспечения надлежащего качества и минимизации стоимости электрической энергии.

Учитывая вышесказанное, целесообразность использования аукциона с маргинальным ценообразованием на рынке электроэнергии вызывает вопросы.

Альтернативой может быть аукцион с оплатой всем отобранным производителям объемов поставки электроэнергии по цене, указанной в их заявках, с необходимостью публичного раскрытия поданных на аукцион заявок поставщиков с конкретизацией соответствующих поставщиков.

Парадокс Лернера. Как показано в [2], для отклонения равновесной цены олигополии по Курно p^* от равновесной цены Вальраса p (случай совершенной конкуренции, когда цена соответствует предельным издержкам замыкающего поставщика) действует ограничение в зависимости от максимальной доли рынка одного производителя $S^a(p^*)$ и модуля эластичности спроса $e(p^*)$:

$$\frac{p^* - p}{p^*} \leq \max_a \frac{S^a(p^*)}{e(p^*)} \quad (1)$$

В [3] в контексте данных по рынкам электроэнергии европейских стран приводится описание парадокса Лернера (Lerner mark-up problem), который заключается в следующем. Максимальная доля рынка одного производителя, как правило, превышает 0.25, а эластичность спроса меньше 0.25. Эмпирические данные фактических цен оказываются ниже верхней цены модели Курно, в чем и заключается парадокс.

В отношении России можно отметить следующие особенности. Покупателями на оптовом рынке электроэнергии являются гарантирующие поставщики, прочие энергосбытовые компании и промышленные потребители. Гарантирующие поставщики могут подавать только ценопринимающие заявки. Для промышленных потребителей в 2016 г. появилась стимулирующая (через снижение стоимости мощности) опция «ценозависимого» снижения потребления. Но по опубликованным данным Системного оператора [9], на 2018 г. эта опция востребована только во 2-й ценовой зоне в объеме порядка 60 МВт.

Предварительная эконометрическая оценка ценовой эластичности спроса на электроэнергию со стороны прочих потребителей, проведенная на панельных годовых данных Росстата (среднесрочная эластичность), по модулю составляет 0.05. Можно считать, что ценовая эластичность спроса на оптовом рынке (краткосрочная эластичность) по модулю находится также в пределах 0.05.

Итак, парадокс Лернера становится тем нагляднее, чем меньшим по модулю значением эластичности характеризуется спрос.

Объяснение этого парадокса в отношении России могло бы быть следующим. Во-первых, Коммерческий оператор публикует в открытом доступе персональные

почасовые торговые графики режимных генерирующих единиц, а также цены в узлах расчетной модели. В этой связи, информация о случаях ценозамыкания на рынке на сутки вперед, по сути, является публичной. Во-вторых, со стороны производителей может иметь место нежелание сталкиваться с необходимостью обосновывать антимонопольному органу причины высоких ценовых заявок. И наконец, существует естественный ограничитель для цены оптового рынка в виде цены розничной (собственной) генерации.

Статистические факты. Данные об увеличении цены рынка на сутки вперед (РСВ) во 2-й ценовой зоне в августе 2014 г. На рисунках представлены суточные индексы РСВ и объемы полного планового потребления до и после вступления в силу изменений правил и регламентов в части объединения конкурентного отбора в ценовых зонах.

Рис. 1. Первая ценовая зона

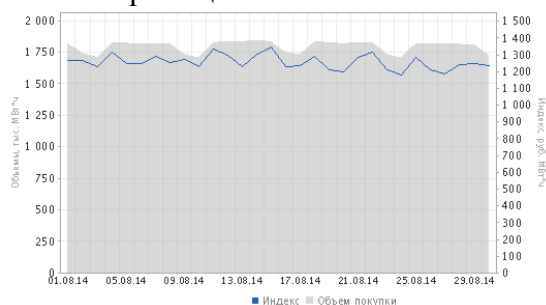
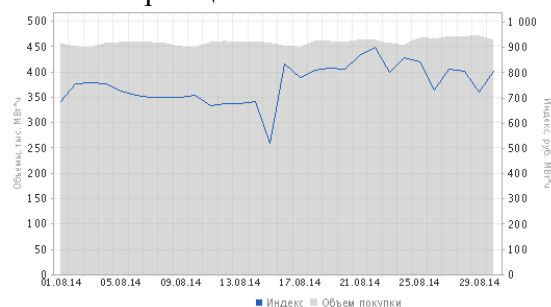


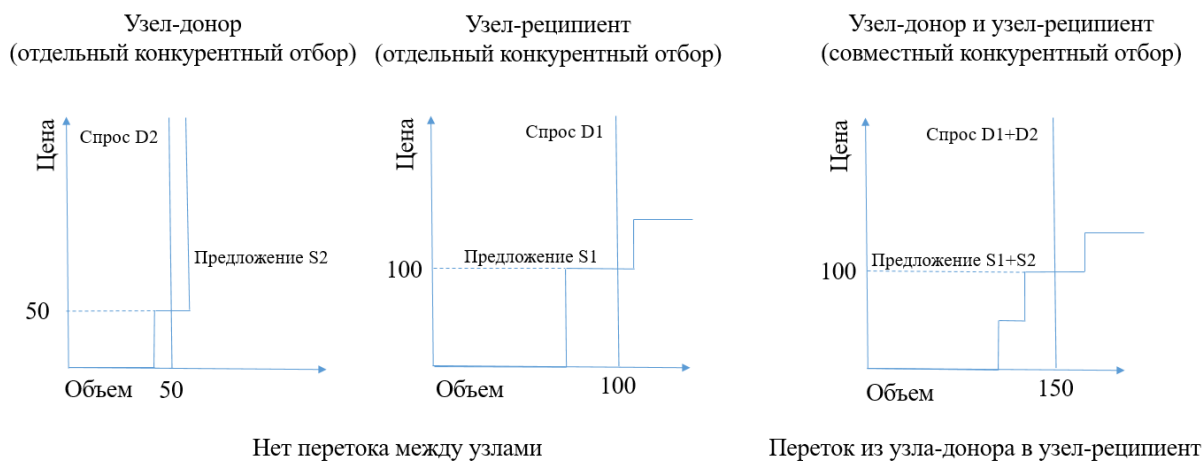
Рис. 2. Вторая ценовая зона



Источник: Коммерческий оператор [8]

Модельный пример. Модельный пример возможного влияния маржинального ценообразования на рост цены в узле-доноре при расширении сетевой инфраструктуры. В представленном примере цену в узле-доноре формирует (замыкает) поставщик из узла-реципиента, в случае совместного конкурентного отбора.

Рис. 3.



Список литературы и источников

1. Vasin A. A., Daylova E. A. Optimum Throughput of a System of Product Logistics between Two Markets. // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2014. Vol. 38, № 3. pp. 136–141.
2. Vasin A. A., Kartunova P. A. Auctions of Homogeneous Goods: Game-Theoretic Analysis. // Contributions to Game Theory and Management. 2015. Vol. 8. pp 315- 336.
3. Newbery D. Predicting market power in wholesale electricity markets. EUI Working Papers RSCAS. 2009.
4. Федеральный закон от 26.03.2003 N 35-ФЗ "Об электроэнергетике".
5. Постановление Правительства РФ от 16.08.2014 N 820.

6. Совет рынка, годовой отчет за 2014 г. URL : <https://www.np-sr.ru>
7. Росстат. URL : <http://www.gks.ru>
8. Коммерческий оператор оптового рынка. URL : <http://www.atsenergo.ru>
9. Системный оператор. URL : <http://so-ups.ru>

On the Alternative of Marginal Pricing in the Electricity Market

Kukoverov M.V.

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration under the President of the Russian Federation, Moscow, Russia

Построение пространственной модели, объединяющей эффекты локальной и глобальной конкуренции*

М.С. Сандомирская¹, Ж.-Ф. Тисс^{1,2}, Ф.А. Ущев¹

¹*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия*

²*CORE, UCL, Левен, Бельгия*

Существуют два базовых подхода при моделировании продуктовой дифференциации, связанные с тем, какие конкурентные отношения учитываются фирмами при принятии стратегических решений. Согласно подходу локальной конкуренции, восходящему к работам [5] и [6], фирмы конкурируют только со своими непосредственными соседями. При монополистической конкуренции [3] продуктивное разнообразие определяется не пространственными соображениями, а «любовью к разнообразию» у покупателей, и все фирмы на рынке конкурируют со всеми другими в равной степени. При этом неисследованными остаются всевозможные промежуточные варианты, которые учитывают более интенсивную конкурентную ситуацию с соседними фирмами, сохраняя влияние глобальной ситуации на рынке. Нами предложен обобщенный подход, позволяющий преодолеть указанную дихотомию, и разработана пространственная модель продуктовой дифференциации, обосновывающая гетерогенность интенсивности конкуренции на микроуровне.

Мы рассматриваем линейную функцию спроса вида:

$$q_i = a - bp_i + c \sum_{\text{neighbors}} p_j + d \sum_{\text{foreign}} p_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $b > c \geq d \geq 0$ таким образом, что фирма конкурирует симметрично как со своими прямыми конкурентами, так и с непрямими конкурентами, но с меньшей жесткостью конкуренции, поскольку они продают более слабые товары-заменители. Случай $d=0$ соответствует модели Kaldor, а при $c=d$ реализуется подход Chamberlin. На базе пространственной модели города с двумя районами и гетерогенными потребителями мы разработали микрооснования для всего множества промежуточных ситуаций $c > d > 0$, а также исследовали, как рыночный спрос и равновесные цены зависят от общего количества фирм на рынке и их распределения.

Пространственная структура рынка. Мы рассматриваем модель города, состоящего из двух районов S и L , которые пространственно разделены, но связаны транспортной магистралью. Каждый район имеет также собственную инфраструктуру типа «звезда» [4]: в районе N дорог (спиц), идущих от центра района на периферию,

* Исследование финансировалось в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

каждая длины $\frac{1}{2}$, а на концах некоторых из этих спиц расположены фирмы. Пусть в районе S расположены n_S фирм, а в районе L n_L фирм, причем $0 < n_S < n_L < N$.

В каждом из районов вдоль спиц равномерно распределены покупатели единичной массы с плотностью $2/N$. Покупатели бывают двух типов: мобильные и немобильные. Доля немобильных составляет $1-\alpha$, и для них затраты по перемещению в соседний район настолько высоки, что они выбирают и покупают товар исключительно в домашнем районе. Мобильные покупатели несут транспортные издержки $t \geq 0$, чтобы доехать из центра своего района в центр соседнего, тем не менее, они потенциально включены в глобальный рынок, хотя товары из соседнего региона и являются для них худшими заменителями из-за более высоких транспортных затрат.

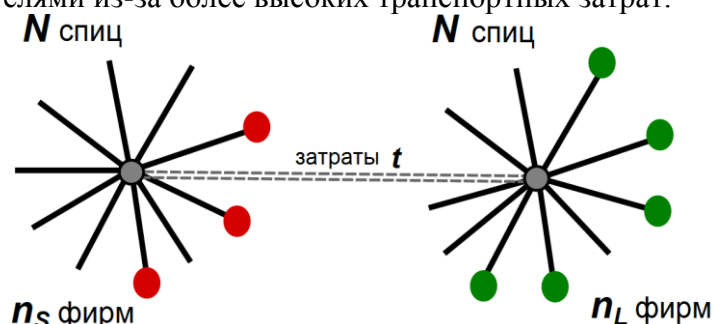


Рис. 1. Город с двумя асимметричными районами S (слева) и L (справа).

Каждая фирма конкурирует локально с фирмами в своем районе за немобильных покупателей и глобально с фирмами во всем городе за мобильных покупателей. Следовательно, спрос фирмы определяется не только общим числом на рынке, но и распределением этих фирм по районам города.

Поведение потребителей. У каждого потребителя есть наиболее предпочтительный товар и второй по предпочтительности товар. При принятии решения о покупке потребитель сравнивает именно эти два наименования и не рассматривает другие. Наиболее предпочтительный товар — это ближайший к потребителю, т. е. продаваемый фирмой на конце той же спицы (или не продаваемый никем, если фирмы там нет). Второй по предпочтительности товар выбирается равновероятно из всех более отдаленных наименований (некоторые из них доступны в продаже, а некоторые нет) в зависимости от типа мобильности потребителя: это могут быть товары в своем районе или товары на всём рынке города. При этом потребитель несет также транспортные расходы, которые линейны и нормированы к 1 вдоль спиц внутри каждого района и дополнительно составляют t при поездке в другой район (в случае мобильных потребителей). Потребитель выбирает товар из двух наиболее предпочтительных и при этом имеющих в продаже с наименьшей полной ценой.

Структура спроса фирмы. Фирма i в районе $h=L, S$ может привлечь покупателей нескольких типов. Мы выделили и описали 8 категорий потенциальных покупателей, которые образуют в совокупности рыночный спрос фирмы i . Категории определяются тем, доступны ли и где расположены первый и второй по предпочтительности товар, а также типом мобильности покупателя.

При агрегировании итоговой функции спроса для фирмы i нами показано, что, хотя спрос и имеет всегда вид (1), его коэффициенты напрямую зависят от соотношения равновесных цен и транспортных издержек t . Тем не менее, для любого t нами доказана следующее утверждение.

Утверждение 1. Для любых значений параметров существует ценовое равновесие в чистых стратегиях, при этом все фирмы в маленьком районе S назначают одинаковую цену p_S^* , в большом районе L цену p_L^* , причем

$$p_S^* > p_L^* .$$

Конкретный вид функции спроса и соответствующих равновесных цен определяется для каждого из трех возможных случаев.

Случай 1. Высокие транспортные расходы t относительно разницы равновесных цен в двух районах: $0 < p_k - p_i < t$, для всех $i \in L, k \in S$.

В этом случае те мобильные потребители, которые имеют возможность выбора между районами, предпочитают приобретать товар в своем районе, поскольку выгода в цене не компенсирует транспортных затрат. Реальная конкуренция наблюдается только для фирм внутри каждого района, т. е. $d=0$.

Случай 2. Транспортные расходы t , сравнимые с разницей равновесных цен: $t < p_k - p_i < t+1$, для всех $i \in L, k \in S$.

В этом случае спрос представляет собой функцию вида (1) с ненулевыми и различными коэффициентами c и d :

$$c \equiv \frac{1-\alpha}{N} \frac{1}{N-1} + \frac{\alpha}{N} \frac{1}{2N-1}, \quad d \equiv \frac{\alpha}{N} \frac{1}{2N-1}.$$

Исследовано влияние инфраструктурных улучшений на равновесные цены и доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. Снижение транспортных затрат t для мобильных потребителей приводит к снижению равновесных цен в маленьком районе и увеличению в большом районе.

При снижении транспортных расходов наблюдаются два разнонаправленных эффекта на рынке. Поскольку больше мобильных потребителей посещают теперь большой район, то в нем доминирует эффект расширения рынка. В то же время, в обоих районах действует эффект ужесточения конкуренции, причем в маленьком районе он преобладает.

Случай 3. Низкие транспортные расходы t в сравнении с разницей цен: $p_k - p_i > t+1$, для всех $i \in L, k \in S$.

В этом случае, как и в случае 1, фирмы конкурируют только с фирмами из своего района, однако спрос перераспределяется: все мобильные покупатели из маленького района едут в большой район, если там расположен их второй по предпочтительности товар. Это дополнительно усиливает ценовое неравенство в равновесии между районами.

Список литературы

1. Anderson S. P., De Palma A. From local to global competition // *European Economic Review*. 1998. Vol. 44(2000), P. 423-448.
2. Anderson S. P., De Palma A., Thisse J. F. *Discrete choice theory of product differentiation*. MIT press, 1992.
3. Chamberlin E. *The economics of monopolistic competition*. Mass.: Harvard, 1933.
4. Chen Y., Riordan M. H. Price and variety in the spokes model // *The Economic Journal*. 2007. Vol. 117(522). P. 897-921.
5. Hotelling H. Stability in competition // *Economic Journal*. 1990. Vol. 39. P. 41-57.
6. Kaldor N. Market imperfection and excess capacity // *Economica*. 1935. Vol. 2(5). P. 33-50.
7. Neary J. P. Globalization and market structure // *Journal of the European Economic Association*. 2003. Vol. 1(2-3). P. 245-271.

On spatial model unifying local and global competition

M. Sandomirskaja, J.-F. Thisse, P. Ushchev

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

CORE, UCL, Leuven, Belgium

Mechanisms for generating capacity expansion and power market structures: Russian case study

Podkovalnikov S.V., Semenov K.S., Khamisov O.V., Minarchenko I.M.
Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia

The problem of generating capacity expansion under Russian liberalized electricity market is considered in the paper. The experience of different countries, including Russia, that have implemented mechanisms for stimulating the investment in generating capacities expansion is presented. Consideration is given to the available mathematical models of generating capacity expansion under conditions of various electricity market structures. Presented are the methodology and the system of mathematical models of generating capacity expansion that have been developed by the authors for the oligopolistic electricity and capacity markets considering electric power system peculiarities and constraints. The results of the research of the generating capacity expansion mechanisms under different power market structures in Russia are discussed.

References

1. O. V. Khamisov, S.V. Podkovalnikov, “Modeling and Study of Russian Oligopolistic Electricity Market” // Proceedings of 2011 IEEE Trondheim PowerTech (June 19-23, 2011, Trondheim, Norway). – pp. 506-512.

Gravity model of the interregional trade in Russia*

Filatov A.Yu., Novikova A.S., Ukhalova T.S.
FEFU, Vladovostok, Russia; ISU, Irkutsk, Russia

The paper analyses interregional trade in Russia using gravity models. According to [1], the gravity equation is one of the greater success stories in empirical economics and one of the most interesting interdisciplinary analogies. Economists thought for a long time how to model trade between two countries or regions. The new era in the international trade theory started in 1962 when Jan Tinbergen proposed [2] the economic analogue of Newton’s Law of universal gravitation states that any two bodies in the Universe attract each other with a force F_{ij} that is directly proportional to the product of their masses M_i and M_j and inversely proportional to the square of the distance D_{ij} between them:

Due to the gravity model export of each country should correlate positively with its own GDP because supply is defined by production, GDP of the importing country though it determines the market capacity and demand for imported goods, and correlate negatively with transportation costs connected with a distance between the countries. If actual amount of export is more than the obtained by this model, then there is most likely the export subsidizing, if actual export is less than the estimated one – there could be high tariffs, or discrimination restrictions of any kind.

The idea of Jan Tinbergen didn’t have any microeconomic substantiation (the first explaining microeconomic model was proposed 17 years later by James Anderson [3], but gave excellent results. Particularly, it became possible to construct precise forecasts, to estimate distance elasticity of export for different groups of countries and goods. The gravity model is started to be used for migration estimation (with population of both countries as the masses) and also for capital flows (with money supply as the masses).

*The research is supported by the RFBR grant №16-06-00071

By the present moment the gravity models of international trade became mainstream, there are hundreds theoretical and empirical papers on this topic. They are based on the modern approaches to spatial economics include firms' heterogeneity [4]. They explain zero trade flow between several countries (the fixed costs of the entrance on the foreign market are greater than the possible trade profits) and asymmetry of trade flows. They also take into account the other factors such as common language, common border, and membership in the common trade and military blocks [5].

At the same time there are no many intra-country empirical investigations of the interregional trade, in spite of the fact that it could be very interesting due to the absence of tariffs, language problems, problems with legal system, etc.

The basic gravity model in log-linear form looks as follows:

$$\ln F_{ij} = \ln G + \alpha \ln M_i + \beta \ln M_j - \theta \ln D_{ij}.$$

Here F_{ij} – export from the i -region to the j -region, M_i and M_j – gross regional products determining the economic masses of regions, D_{ij} – distance between regions, α , β , θ – estimating elasticities of demand on the corresponding variables. We will carry out the empiric analysis of the interregional trade in Russia on the base of Rosstat data. Let's identify the regression equation using OLS:

$$\ln F_{ij} = -6,69 + 1,14 \ln M_i + 0,90 \ln M_j - 1,48 \ln D_{ij}.$$

(0,18) (0,02) (0,02) (0,03)

The obtained model shows high significance of all three factors. The determination coefficient (equal to 58%) is also quite high for a three-factor model. At the same time there are some regions which actual export is greater or less than the fitted one. Moreover, these deviations are systematic and significant. It's possible to explain them taking into account the absence of the railroad connection (dummy r_{ij}), joint border (b_{ij}), border with foreign country (s_{ij}). There are also special features of Moscow as an exporter ($m1_{ij}$) and importer ($m2_{ij}$), Moscow region as an importer ($m3_{ij}$), oil- and gas-producing regions: Khanty-Mansi (h_{ij}), Yamalo-Nenets (y_{ij}), and Tumen (t_{ij}). The modified model looks as follows:

$$\begin{aligned} \ln F_{ij} = & -7,01 + 1,31 \ln M_i + 0,84 \ln M_j - 1,33 \ln D_{ij} - \\ & -0,68 r_{ij} + 0,46 b_{ij} - 0,42 s_{ij} - 2,05 m1_{ij} + 0,58 m2_{ij} \\ & -0,44 m3_{ij} - 3,37 h_{ij} - 1,97 y_{ij} - 3,26 t_{ij}. \end{aligned}$$

(0,21) (0,03) (0,02) (0,03) (0,07) (0,11) (0,05) (0,22) (0,21) (0,21) (0,21) (0,22) (0,20)

The obtained equation showed that

1. The size of region is significantly impact trade. The export and import elasticities with respect to region size are correspondingly close to 1,3, and 0,85.
2. The trade flow elasticity with respect to distance is negative due to transportation costs, and approximately equal to -1,3.
3. The absence of railroad significantly negatively (about 2 times) impacts the trade flows.
4. Neighbor regions trade flows are significantly (about 1,5 times) greater. If region borders the foreign country its domestic trade decreases in about 1,5 times.
5. Moscow export is significantly smaller, and import is significantly bigger. Oil and gas-producing regions export less to the other Russian regions, but export more to the foreign countries.

It's also proposed a special model for Irkutsk region [6] and Primorsky region. They take into account the regional specifics.

Список литературы

1. Feenstra, R., Markusen J., Rose A. Using the gravity equation to differentiate among alternative theories of trade. // Canadian Journal of Economics. – 2001. – V.34. - №2. – P.430–447.
2. Tinbergen J. Shaping the world economy: suggestions for an international economic policy. – 1962. – New York: Twentieth Century Fund.

3. Anderson J. A theoretical foundation for the gravity equation // *American Economic Review*. – 1979. – V.69. - №1. – P.106–116.
4. Melitz M. The impact of trade on intra-industry reallocations and aggregate industry productivity // *Econometrica*. – 2003. – V.71. – P.1695–1725.
5. Helpman E., Melitz M., Rubinstein Y. Estimating trade flows: trading partners and trading volumes // *The Quarterly Journal of Economics*. – 2008. – V.123. – №2. – P.441-487.
6. Filatov A., Novikova A. The gravity model of interregional trade: case of Eastern Siberia // *Czech Journal of Social Sciences, Business, and Economics*. – 2015. – V.4. – №3. – P.39–45.

Monopolistic competition with heterogeneous labor: model analysing productivity increase at effective firms*

Filatov A. Yu., Sokolovsky Yu. M.

FEFU, Vladovostok, Russia; ISU, Irkutsk, Russia

The classical Dixit-Stiglitz monopolistic competition model [1] and its application to the international trade made by Krugman [2, 3] could explain some effects arisen during last decades in the world economy. These effects, including bilateral flows of very close substitution goods, remained inexplicable within theories based on comparative advantages in labor [4] and in production factors endowments [5]. Nevertheless, the theory based on the assumptions of homogeneous labor productivity and homogeneous firms couldn't reveal some observed in reality stylized facts. The next generation of models had arisen from the paper of Melitz [6] who assumed different productivity of different firms.

Our approach also uses this assumption. We don't pay attention on matching mechanisms, but provide exogenous firm heterogeneity. In general, we propose tool for analyzing monopolistic competition markets with heterogeneous labor. The worked out models describe the economical agents' behavior and help estimate consequences of different mechanisms of labor market regulation, possible effects of industrialization and de-industrialization, migration between regions and sectors of economy, the impact of education, taking into account the economic and spatial heterogeneity.

Let's consider the economy consists of traditional sector A (usually called «agriculture» in spite of the fact that a wide set of services also have the same structure), and modern sector M (traditionally called «manufacture»). Agriculture sector produces homogeneous good with constant returns to scale, and manufacture sector – continuum n of horizontally differentiated varieties indexed by $i \in [0; n]$, with increasing returns to scale. L consumers have identical Cobb-Douglas high level utility functions

$$u = M^\mu A^{1-\mu} \rightarrow \max .$$

It means, that they spend shares $\mu \in (0; 1)$ and $(1-\mu)$ of income for manufacture and agriculture good respectively: The low level utility function is CES with elasticity of substitution equal to $\sigma \in (1; +\infty)$:

$$M = \left(\int_0^n (q(i))^{(\sigma-1)/\sigma} di \right)^{\sigma/(\sigma-1)} .$$

The proposed tool helps us to analyse monopolistic competition markets under some additional assumptions. In the basic model let population L consist of skilled manufacture workers (with share α_1 , and productivity $c_1=c$), unskilled manufacture workers (with share α_2 , and productivity $c_1=\gamma c$) and farmers (with share $1 - \alpha_1 - \alpha_2$). Let also agriculture sector be numerator with productivity, wage, and price equal to one, and fixed costs equal to zero: $f_A=$

*The research is supported by the RFBR grant №16-06-00071

0, $c_A = 1$, $p_A = 1$, $w_A = 1$ Then we can obtain how the model parameters f , c , L , γ , σ , α_1 , α_2 , μ impact equilibrium prices, quantities, revenues, costs, wages, number and size of firms in effective and ineffective sector. Let's denote dependences in the form of primal and inverse proportionality with pluses and minuses, increased and decreased dependences of general form with up and down arrows, independent pairs with points (see table 1).

Table 1. The impact of model parameters on the equilibrium.

| | p_1 | p_2 | q_1 | q_2 | TR_1 | TR_2 | w_1 | w_2 | n_1 | n_2 | l |
|------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-----|
| f | • | • | + | + | + | + | • | • | - | - | + |
| c | + | + | - | - | • | • | • | • | • | • | • |
| L | • | • | • | • | • | • | • | • | + | + | • |
| γ | ↑ | ↑ | • | - | ↑ | ↓ | ↑ | ↓ | • | • | • |
| σ | ↓ | ↓ | ↑ | ↑ | ↑ | ↓↑ | ↑ | ↓ | - | - | + |
| α_1 | ↓ | ↓ | • | • | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | + | • | • |
| α_2 | ↓ | ↓ | • | • | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | • | + | • |
| μ | ↑ | ↑ | • | • | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | • | • | • |

At the same time in former researches we didn't investigate the important case of innovations at effective firms which decrease their marginal costs and increase industry heterogeneity. We can see in the table 2 (first row) the most important results of the model

Table 2. Comparative statics in the model of effective firms' innovation.

| | p | p | q | q | TR | TR | w | w | n | n |
|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| Basic | ↑ | ↑ | - | • | ↓ | ↑ | ↓ | ↑ | • | • |
| Institutional restriction | ↑ | ↑ | ↓ | • | ↓ | ↑ | ↓ | ↑ | ↑ | • |
| Education | ↑ | • | - | • | ↓ | • | ↓ | • | ↓ | ↑ |
| Generalized | ↑ | ↑ | ↓ | ↓ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ |

The leaders' efficiency increase leads to price decrease in effective and also (due to competition) ineffective sector. The output of effective companies increases proportionally to their productivity. The output of other companies remains the same. Wages are redistributed in favor of effective sector. At the same time the number of firms and employment don't change.

The similar investigations were carried out within models with institutional restriction on wages, with education and labor mobility, and generalized model with continuous distribution of labor productivity. Basic modifications of these 3 models without effective sector innovations case were proposed in [7]. The new results are presented in the rows 2-4 of table 2.

We can mention that though comparative statics depends on assumptions of models, there is the general result: market efficiency and social welfare increase in all modifications due to primal effect of cost decrease, and (which is sometimes more important) stronger competition, lower prices, higher outputs, and also increasing returns to scale.

References

1. Dixit A., Stiglitz J. Monopolistic competition and optimum product diversity // American Economic Review. – 1977. – V.67. – P.297–308.
2. Krugman P. Increasing returns, monopolistic competition, and international trade // Journal of International Economics. – 1979. – V.9. – P.469–479.
3. Krugman P. Scale economies, product differentiation, and the pattern of trade // American Economic Review. – 1980. – V.70. – P.950–959.
4. Melitz M. The Impact of Trade on Intra-Industry Reallocations and Aggregate Industry Productivity // Econometrica. – 2003. – V.71. – C.1695–1725.

5. Ricardo D. On the principles of political economy and taxation. – London: John Murray. – 1817.
6. Ohlin B. Interregional and international trade. – Cambridge: Harvard University Press. – 1968.
7. Filatov A., Sokolovsky Yu. Model of monopolistic competition with heterogeneous labor // SHS Web of Conferences. – 2017. – T.35. – №01071. – C.1–7.

Excessive entry in oligopoly: case of heterogeneous firms*

Filatov A.Yu., Karp D.B., Makolskaya Ya.S.
FEFU, Vladovostok, Russia; ISU, Irkutsk, Russia

Equilibrium states in economy are often socially ineffective. We can refer to different examples of the prisoner's dilemma, the tragedy of commons, insufficient financing of public good, negative selection, moral hazard, and other problems of the contract theory. In all of them we need a special market design and regulation that helps to decrease inefficiency.

In the paper we will concentrate on the problems of market power and number of firms. There is a common opinion that entry barriers are always bad for society, because they decrease the number of firms, weaken competition, raise prices and decrease quantities. However, we should understand that a lot of firms also mean duplicated fixed costs. Thus, free entry can lead to both situations: excessive and insufficient number of firms in equilibrium. The correct conclusion depends on the market structure, demand and cost functions, and features of strategic interaction between companies at a market.

Von Weizacker [1], and Perry [2] proposed reasons for the desired limitation of excessive competition in oligopoly. Mankiw and Whinston [3] formulated some conditions (usually, though not always [4] satisfied) under which this reduction would lead to the social welfare maximization. Many empirical results obtained by Berry and Waldfogel for radio broadcasting [5], Hsei and Morretti, for real-estate [6], Hortacsu and Syverson for investment foundations [7], Davis for cinema industry [8], etc. show the same. There are also papers that investigate some by-effects: externalities and coo-petition [9], possible changes of firms' behavior include collusion [10], etc.

But all these models deal with homogeneous firms. In reality producers are very different even within one country. Moreover, contrary to a popular opinion that in each country some industries live well and obtain high profits, and the other ones are on the edge of survival, inter-industry distinctions in the firms' productivity are less essential, than distinctions within industry. Particularly it was shown [11] that the gap in productivity between the best 20% and the worst 20% of Russian enterprises within one industry is equal to 9–24 times. So we should take it into account.

Suppose we have a single product market with inverse demand function given by

$$p(Q) = a - bQ, \quad Q = \sum q_k$$

with $a, b > 0$. Let p be the product price, and Q – the total supply comprised of supplies of individual firms q_k . Assume that the cost function of k -firm is linear:

$$TC_k(q) = c_k q + f,$$

and each firm maximizes its profit under assumptions of the Cournot model. The equilibrium number of firms n_1 can be obtained from the zero profit condition (ZPC)

$$\pi_n(q_n) = p(Q)q_n - TC_n(q_n) = 0.$$

Let's suppose without loss of generality that $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Then the ZPC reduces to

*The research is supported by the RFBR grant №16-06-00071

$$\frac{a+C(n)}{b(n+1)}\left(\frac{a+C(n)}{n+1}-2c_n\right)+\frac{c_n^2}{b}-f_n=0, \quad C(n)=\sum_{k=1}^n c_k. \quad (1)$$

Assume that explicit dependence $c_k = c(k)$ is linear (having real data we can just fit linear model to it): $c(k) = c + dk$. In this case equilibrium number of firms obtained from (1) is equal to

$$n_1 = \frac{1}{d} \sqrt{2d(a-c) + bf - d\sqrt{bf} + \frac{d^2}{4}} - \frac{\sqrt{bf}}{d} - \frac{1}{2}.$$

Social planner should maximize social welfare function equal to customer surplus and total profit changing the number of firms:

$$SW = \frac{1}{2}(a - p^*(n))Q^*(n) + \sum_{k=1}^n \pi_k(q_k^*(n)) \rightarrow \max_n. \quad (2)$$

Theorem. Assume that $d/2 \leq \sqrt{bf} \leq a - c$. Then the socially effective number of firms obtained from (2) is smaller than the equilibrium number n_1 for all a, b, c, d, f .

The second assumption of the theorem is equal to the positive equilibrium number of firms so it's always satisfied. The first assumption means limited heterogeneity, but the possible level is very high, so we can say that in real situation of heterogeneous firms at a free-entry oligopoly market there's almost always excessive number of firms. Thus the entry barriers, constructed by incumbent companies, do not always decrease social welfare. In some cases, it's even better for regulator not to stimulate excessive competition but on the contrary to restrict the entry of new companies to the market.

References

1. Von Weizsacker C. Welfare analysis of barriers to entry // *Bell Journal of Economics*. – 1980. – V.11. – P.399–420.
2. Perry K. Scale economies, imperfect competition and public policy // *The Journal of Industrial Economics*. – 1984. – V.32. – P.313–330.
3. Mankiw G., Whinston M. Free entry and social efficiency // *The RAND Journal of Economics*. – 1986. – V.17. – P.48–58.
4. Filatov A., MakolskayaYa. The equilibrium and socially effective number of firms at oligopoly markets: theory and empirics // *Czech Journal of Social Sciences, Business, and Economics*. – 2015. – V.4. – №4. – P.17–30.
5. Berry S., Waldfogel J. Free entry and social inefficiency in radio broadcasting // *RAND Journal of Economics*. – 1999. – V.30. – P.397–420.
6. Hsieh C., Moretti E. Can free entry be inefficient? Fixed commissions and social waste in the real estate industry // *Journal of Political Economy*. – 2003. – V.111. – P.1076–1121.
7. Hortacsu A., Syverson C. Product differentiation, search costs, and competition in the mutual fund industry: a case study of S&P 500 mutual funds // *Quarterly Journal of Economics*. – 2004. – V.119. – P.403–456.
8. Davis P. Measuring the business stealing, cannibalization and market expansion effects of entry in the US motion picture exhibition market // *Journal of Industrial Economics*. – 2006. – V.54. – P.293–321.
9. Hattori K., Yoshikawa T. Free entry and social inefficiency under coepetition // *Journal of Economics*. – 2016. – V.118. – №2. – P.97–119.
10. Filatov A., MakolskayaYa. The increasing concentration at industrial markets: the social welfare maximization and possible risks // *SHS Web of Conferences*. – 2017. – V.35, №01073. – P.1–6.
11. Yakovlev A., Golikova V., Gonchar K., Kuznetsov B. Russian industry at the crossroads: what prevents our firms to become competitive. – Moscow: HSE. – 2008 (in Russian).

СЕКЦИЯ № 8

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Prangishvili A.I., Shonia O.B., Kartvelishvili I.SH., Shonia L.O. Development of Software of Testing system generation of Examination | 265 |
| Божко А.Н. Минимизация числа геометрических проверок при сборке сложных технических систем | 268 |
| Вышинский Л.Л. Весовая модель летательного аппарата с переменной массой | 270 |
| Ерешко Ф.И., Кульба В.В., Меденников В.И. Проектирование оптимальных информационных систем в АПК | 275 |
| Лебедев В.Н., Шевченко Д.П. Вычислительные вопросы составления транспортного расписания | 280 |

Development of Software of Testing system generation of Examination

Prangishvili A.I., Shonia O.B., Kartvelishvili I.SH., Shonia L.O.
Georgian Technical University, Tbilisi, Georgia

There is presented, in this work, the development of software testing system generating of Examination, which gives you the ability to automatically create different versions of tests with equal complexity. Each person will be tested with different options. Results are presented in Excel format. There is described basis and created classes, constructors, procedures and functions. Software codes are developed for algorithms of all methods, which are presented in a schematic form and each match is described according to its functional purpose.

Among the many different ways to test and evaluate knowledge, it is one of the most common and most popular testing. The test can be defined as the level of knowledge and quality evaluation of persons, consisting of statistically equivalent questions and preliminarily defined analysis and analysis of results. The objective assessment of knowledge is very important. To this end, the test questions must be correctly drawn to evaluate the knowledge perfectly. Computer testing is also very popular due to the fact that the knowledge is evaluated quickly, and the tests are trimmed to the program and the tested person finds the result obtained at the end of the test. In addition, it is vital for the persons that they are equally in testing, while generating different tests of the test system by generating a similar jerk tests.

The work describes the processing of software for generating the testing system. The foundation of the system is dedicated, for the persons, the number of which is very high, to evaluate their rate, the transference of the results, organization of test questions base. The area of use of the system is broad. It can be used in any organization, where it is necessary to evaluate the level of knowledge of a large number of tested contingents; it is also possible to implement the system in educational institutions.

The test generating software complex comprises those program modules which are the algorithms for solving the problem and are recorded through the object-oriented programming language.

Basic and work classes are used when processing system software complexes. These classes are designed by constructors, procedures and functions. Each of them is described according to its functional purpose.

An automated system of testing is designed in Delphi environment. The system has the ability to manage database as a personal computer, as well as distributed local and global networks.

The following basic classes are used in the automated system: TBTTestObjects - Exam tests class, where properties of objects are described; TBxlsObjects - provides connections between data and determines Excel cells features.

The classes formed from the basic classes are: TNTTestCategory - are determined the test categories, accordingly they are sorted; TNExcelReport - the output form properties are determined; TNDataSources - provides sources of data on the output form;

The structure of the test tests generating software complex is shown on Picture 1.

For each of the base and work classes, used constructors, procedures, functions are presented bellow according their function.

The constructors used in the program:

CreateDataSources () - The sources of data are generated through it;

CreateCollection () - The connections between the data, the features of the cells and form maintenance;

CreateComponent () - Is created special components, where all existing features of the object is accumulated;

Procedures used in classes:

ObjectsParams () – Determination of parameters of the object;

DoForEachCategory () – Determination of test categories;

DoAllCategories () – Description of all categories;

QuestionsCheck () - Random of sequence of questions;

AnswersCheck () - Random of sequence of answers;

TestCheck - Check the level of test and its unique and adjust it in case of need;

SaveTestToBase ()- Forming tests and transferring into data;

PrintTest () - Forming tests and transferring into Excel;

SetParams () – Determination of parameters for each form;

Used functions in program complex.

GetTestCat () – Determines the category of the tests and their meaning;

GetTestDone () - Determines the level of the test and turns the true or false meaning;

GetTestUnique () - Determines the unique meaning of the test and turns the true or false meaning;

GetCellItem () - Determines the features of the cells in the Excel and turns their meaning;

GetDataSources () - Determines the receiving of the data source in the Excel and turns their meaning;

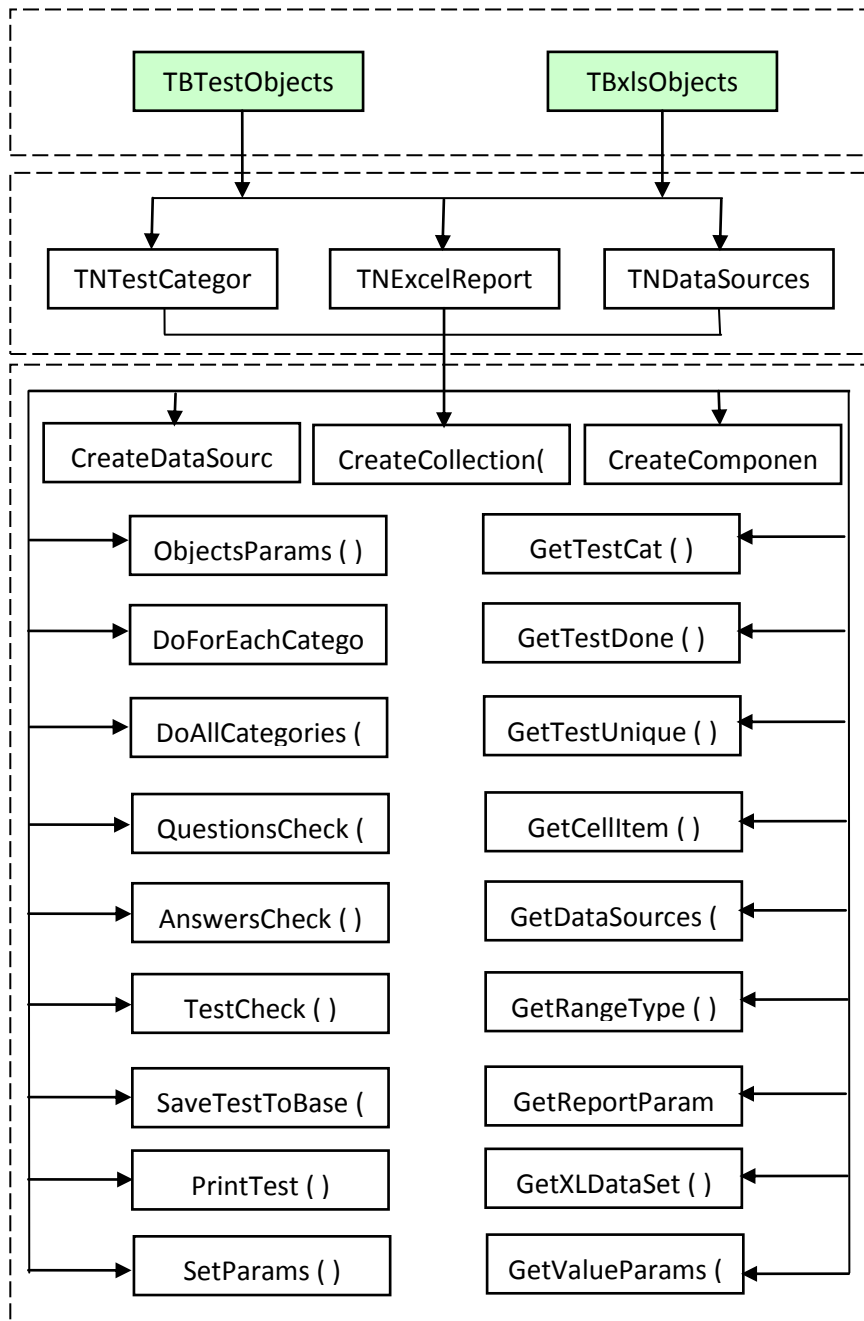
GetRangeType () - Determines the types of the records and their number and turns their meaning;

GetReportParam () - Determines the output form parameters and returns their meaning;

GetXLDataSet () - Determines the connections between the system of testing in Excel;

GetValueParams () – Is calculated according the whole meaning on the output form;

The software complex for testing has been developed, which gives the opportunity of creating of various options of the tests of equal difficulty, randomly. The existence of the tests of equal difficulty provides the objectivity of the testing process.



Picture 1. The structure of the testing system generating software complex

References

1. Shonia O.B, Kartvelishvili I.SH., Shonia L.O. Journal article. Recognition of symbols using the method of gravity center. Nova science publishers, Computer Tecnology and Applications, 2017-3rd Quarter, ISBN:978-1-53612-094-3. https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=62205.
2. Kartvelishvili I.SH., Kumelashvili N.B. Journal article. Information generated in XLS format program complex. Works. “Automatic Systems of Management”, Georgian Technical University, Tbilisi 2008, N1(4), P. 30–35.
3. Chogovadze G. G., Prangishvili A.I., Surguladze G.G. Book Hybrid Technologies and Data Management for Management Information Systems Programming. Georgian Technical University, Tbilisi, 2017.

Минимизация числа геометрических проверок при сборке сложных технических систем

А.Н. Божко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В процессе сборки сложных изделий установленные элементы конструкции и технологической системы могут создавать геометрические препятствия, которые запрещают движение детали в служебное положение. Проблема моделирования геометрических препятствий (Geometric obstacles) активно обсуждается в публикациях по Computer aided assembly planning (автоматизированное проектирование сборочных процессов) и Motion planning (планирование перемещений). В работах на русском языке эта проблема чаще называется геометрической разрешимостью или доступом.

Предложены различные необходимые условия геометрической разрешимости, например *db*-графы, *ndb*-графы, MCAS (Minimal constraint assembly state) и др. [1,2]. Точные достаточные условия дает только прямое моделирование, когда модель детали, которая движется по заданной траектории, проверяется на непересечение со стационарными элементами системы. Это направление активно развивается в разделе информатики, который называется Collision detection (анализ столкновений) [3]. Методы анализа столкновений имеют множество практических применений, например игры, симуляторы, программирование промышленных роботов, планирование операций и др.

Сложная техническая система часто состоит из десятков тысяч деталей и комплектующих. Она может быть выполнена по плотной компоновке и заключена в корпус. В отличие от компьютерных игр, анализ столкновений при сборке должен быть выполнен с высокой точностью. Поэтому, прямое моделирование геометрической разрешимости при сборке методами анализа столкновений является очень сложной и ресурсоемкой задачей.

В актуальных работах по СААР недостаточное внимание уделяется задаче минимизации числа проверок на геометрическую разрешимость. В работах автора эта задача поставлена как неантагонистическая игра с природой по окраске упорядоченного множества в два цвета [4].

Приведем основные определения. Пусть $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ – множество деталей изделия.

Определение 1. Пару (A, x) , $A \subset X; x \in X$ назовем ситуацией, если A и $A \cup \{x\}$ являются геометрически определенными совокупностями деталей.

Определение 2. Ситуацию (A, x) назовем разрешенной, если существует движение, которое переводит деталь x в служебное положение в изделии X , В противном случае ситуация называется запрещенной.

Пусть X – некоторое изделие, x – деталь, а A и B две ситуации, связанные с установкой данной детали.

Утверждение 1. Если ситуация (A, x) является разрешенной, то любая ситуация (B, x) такая, что $B \subseteq A$, также является разрешенной.

Действительно, если A не содержит геометрических препятствий для установки детали x , то их не может быть в меньшем по составу собираемом множестве B .

Утверждение 2. Если ситуация (A, x) является запрещенной, то любая ситуация (B, x) такая, что $B \supseteq A$, является запрещенной.

В самом деле, если A включает в себя геометрические препятствия, запрещающие установку x в служебное положение, то добавление новых деталей способно только усложнить конфигурацию B и не может устранить наличные запреты

Обозначим $GS(x)$ – множество всех ситуаций в изделии X , связанных с установкой детали x .

Определение 3. Введем на $GS(x)$ нестрогий порядок следующим соотношением $\forall g_1 = (A, x)$ и $g_2 = (B, x) \in GS(x)$ $g_1 = (A, x) \leq g_2 = (B, x) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Будем использовать метафору цвета и изображать запрещенные ситуации черным цветом, а разрешенные – белым. Сказанное позволяет сформулировать задачу анализа геометрической разрешимости как неантагонистическую игру двух лиц: ЛПР и природы. Дано неокрашенное упорядоченное множество. Ход ЛПР заключается в выборе неокрашенной вершины g , ответ природы состоит в выборе цвета для этой вершины. Если цвет белый, то все вершины порядкового идеала $I(g)$ вершины g получают белый цвет (утверждение 2). Если природа «выбрала» черный цвет, то все вершины порядкового фильтра $F(g)$ окрашиваются черным цветом (утверждение 1). Требуется окрасить все вершины упорядоченного множества за минимальное число ходов.

Обозначим эту игру $\Gamma(R)$, где R – произвольное упорядоченное множество. Выбор цвета вершины означает проверку на геометрическую разрешимость. Рациональная стратегия окрашивания позволит минимизировать числа таких проверок.

В силу большого комбинаторного разнообразия упорядоченных множеств получить рациональную чистую стратегию разыгрывания игры $\Gamma(R)$ в общем виде, по всей видимости, невозможно. В работе предлагается рассматривать эту игру как задачу принятия решений в условиях неопределенности.

Полагаем, что ЛПР игрок не имеет никакой априорной информации о возможных окрасках упорядоченного множества R , то есть ответы природы будем считать равновероятными. На каждом шаге игры, ситуацию принятия решения можно представить в виде так называемой платежной матрицы (матрицы решений, матрицы выигрышей и др.), общий вид которой представлен на рис. 1.

| | | | | | |
|-----|-------|----------|----------|-----|----------|
| x | | x^1 | x^2 | ... | x^n |
| y | Y_1 | x_{11} | x_{12} | ... | x_{1n} |
| | Y_2 | x_{21} | x_{22} | ... | x_{2n} |

Рис. 1. Платежная матрица для игры $\Gamma(R)$

Здесь X – лицо принимающее решение; Y – природа; $X^i, i = \overline{1, n}$ – ходы ЛПР; Y_1, Y_2 – ответы природы (цвет вершин); $x_{ij}, i = \overline{2}; j = \overline{1, n}$ – выигрыш первого игрока при собственном ходе X_i и ответе природы Y_j . Возможные ходы ЛПР представляют собой выбор неокрашенной вершины упорядоченного множества, ответы природы – цвет вершины, выбранной для проверки первым игроком. Выигрыш первого игрока – мощность порядкового фильтра или порядкового идеала, в зависимости от цвета вершины.

Для выбора рациональной стратегии последовательной окраски упорядоченных множеств общего вида R разработана программа и проведен вычислительный эксперимент. Класс связанных упорядоченных множеств разделен на 13 подклассов, различающихся по структурным характеристикам (рис. 2).

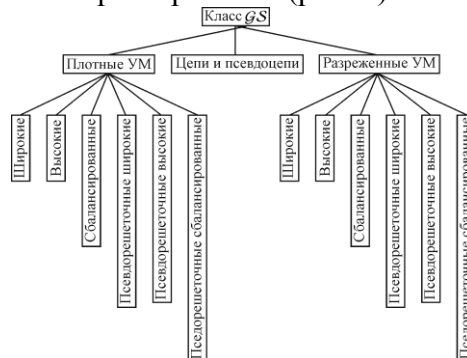


Рис. 2. Классификация упорядоченных множеств

В каждом из подклассов проверялись основные критерии принятия решений в условиях неопределенности. Запишем вид, который эти критерии принимают для игры

$\Gamma(R)$. Критерий Вальда (WLD) – $\max_j \min(x_{1j}, x_{2j})$. Критерий Байеса-Лапласа (BL) – $\max_j z_j, z_j = \frac{x_{1j} + x_{2j}}{2}$. Критерий Севиджа (SVG) – $\min_j \max(r_{1j}, r_{2j})$, где r_{ij} – элемент матрицы потерь, который равен разности между максимальным элементом в i -ой строке и элементом x_{ij} . Критерий произведений (MPL) – $\max_j (x_{1j} \times x_{2j})$. Критерий Ходжа-Лемана (HL) – это синтетический критерий, который строится на основе критериев WLD и BL. Для $\Gamma(R)$ он принимает вид $\max_j \left(\beta \times \frac{x_{1j} + x_{2j}}{2} + (1 - \beta) \times \min(x_{1j}, x_{2j}) \right)$, где β – априорный коэффициент достоверности, $0 \leq \beta \leq 1$. Критерий Гурвица (HW) – также синтетический критерий, выражающий компромисс между точками зрения крайнего оптимизма и пессимизма. Для игры $\Gamma(R)$ он принимает вид $\max_j \left(\alpha \times \max(x_{1j}, x_{2j}) + (1 - \alpha) \times \min(x_{1j}, x_{2j}) \right)$, где α – коэффициент доверия или оптимизма, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Вычислительный эксперимент показал, что во всех подклассах упорядоченных множеств, кроме псевдоцепей, лучшие результаты показали критерии Гурвица с коэффициентом доверия $\alpha = 2/3$ и Байеса-Лапласа. Наибольшее число проверок потребовали критерии Вальда и Севиджа. Разница между лучшим и худшим результатами растет как полином невысокой степени в зависимости от высоты упорядоченного множества. Для псевдоцепей результаты всех критериев оказались примерно равны.

Список литературы

1. Божко А.Н., Родионов С.В. Методы искусственного интеллекта в автоматизированном проектировании процессов сборки // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. №8. DOI:10.7463/0816.0844719.
2. Ghandi S., Masehian El. Review and taxonomies of assembly and disassembly path planning problems and approaches // Computer-Aided Design. 2015. Vol. 67 – 68. Pp. 58 – 86. DOI:10.1016/j.cad.2015.05.001.
3. Ericson Christer. Real-Time Collision Detection. Elsevier, 2005. 593 p.
4. Божко А.Н. Игровое моделирование геометрического доступа // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2009. №12. Режим доступа: <http://technomag.neicon.ru/doc/134322.html> (дата обращения 21.01.2016).

Minimizing the number of geometric tests when assembling complex technical systems

A.N. Bozhko
BMSTU, Moscow, Russia

Весовая модель летательного аппарата с переменной массой

Л.Л. Вышинский
ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Разработка весовой модели летательных аппаратов (ЛА) является одной из основных задач проектирования в авиастроении. В [1] описаны основные подходы к построению таких моделей. Базовой структурой весовой модели сложных технических объектов является дерево конструкции изделия. Формирование структуры дерева конструкции ЛА, ее поддержание, модификация, анализ и использование в расчетах представляет собой сложную инженерную и организационно-техническую проблему

из-за большого количества компонент конструкции, которое исчисляется десятками, а то сотнями тысяч. Однако не только размерность определяет сложность задачи вычисления массово-инерционных характеристик (МИХ). ЛА в процессе эксплуатации представляет собой объект с переменной массой. Это связано с изменяемой конфигурацией, с переменным снаряжением и загрузкой ЛА, с расходом топлива, с запланированным или вынужденным сбросом в полете значительной части нагрузки (например, в процессе тушения лесных пожаров, в процессе сельскохозяйственных работ, при выполнении боевых задач самолетами ВКС и тому подобное). Изменение массы ЛА влияет на все эксплуатационные характеристики изделия и, в первую очередь, на дальность полета, на скоростные и маневренные характеристики, на взлетно-посадочные и другие эксплуатационные качества. При расходе топлива и сбросах части полезной нагрузки меняется не только масса изделия, но и положение его центра тяжести, что сказывается на устойчивости и управляемости ЛА, т.е. на безопасности полета. В связи с этим важнейшей функцией весовой модели ЛА является обеспечение всестороннего анализа МИХ ЛА с переменной массой.

В настоящей работе представлены вычислительные модели, используемые в задачах весового проектирования ЛА, при расчете МИХ для различных вариантов загрузки и при различных программах выработки топлива. На основе этих моделей был разработан и внедрен в разработку современных самолетов ряд программ весового проектирования.

Основным соотношением, связывающим МИХ основных компонент весовой модели ЛА с переменной массой, является т.н. уравнение весового баланса:

$$M_o(t) = M_{\text{пуст}} + M_{\text{снар}}(t) + M_{\text{нагр}}(t) + M_{\text{топл}}(t), \text{ где}$$

3) $M_o(t)$ – текущая полная масса ЛА.

4) $M_{\text{пуст}}$ – масса пустого (планер, двигателя, комплекс бортового оборудования),

5) $M_{\text{снар}}(t)$ – масса снаряжения (служебная нагрузка, расходные материалы,...)

6) $M_{\text{нагр}}(t)$ – масса целевой нагрузки (пассажиры, грузы, подвески,...),

7) $M_{\text{топл}}(t)$ – масса текущего запаса топлива в топливных баках ЛА.

Положение центра тяжести ЛА определяется из уравнений баланса статических моментов:

$$M_o(t) \cdot X_o(t) = M_{\text{пуст}} \cdot X_{\text{п}} + M_{\text{снар}}(t) \cdot X_{\text{с}}(t) + M_{\text{топл}}(t) \cdot X_{\text{т}}(t) + M_{\text{нагр}}(t) \cdot X_{\text{н}}(t),$$

$$M_o(t) \cdot Y_o(t) = M_{\text{пуст}} \cdot Y_{\text{п}} + M_{\text{снар}}(t) \cdot Y_{\text{с}}(t) + M_{\text{топл}}(t) \cdot Y_{\text{т}}(t) + M_{\text{нагр}}(t) \cdot Y_{\text{н}}(t),$$

$$M_o(t) \cdot Z_o(t) = M_{\text{пуст}} \cdot Z_{\text{п}} + M_{\text{снар}}(t) \cdot Z_{\text{с}}(t) + M_{\text{топл}}(t) \cdot Z_{\text{т}}(t) + M_{\text{нагр}}(t) \cdot Z_{\text{н}}(t),$$

где $X_{..}$, $Y_{..}$, $Z_{..}$ – текущие значения координат центров тяжести соответствующих компонент весовой модели ЛА.

Расчет массы, центра тяжести и моментов инерции пустого ЛА является одной из главных задач весового проектирования. Весовая модель пустого ЛА является основным средством весового анализа, механизмом весового контроля и инструментом постоянно действующей в процессе проектирования программы минимизации веса ЛА. Расчет МИХ пустого ЛА ведется снизу вверх по дереву конструкции. Для терминальных узлов МИХ вычисляются на основании геометрических моделей соответствующих деталей конструкции, которые создаются в процессе проектирования ЛА. Данные по терминальным конструкциям могут загружаться извне или вычисляться по формулам для простых конструкций. Масса пустого ЛА считается неизменяемой в процессе эксплуатации. Однако, в случае планового или внепланового ремонта, в случае замены двигателей при выработке ресурса, при замене устаревшего бортового оборудования масса пустого изделия меняется. Эти обстоятельства должны учитываться при разработке весовой модели ЛА.

Все остальные компоненты по своей сути являются изменяемыми в процессе эксплуатации. Это изменения происходят при подготовке очередного полетного задания и в процессе его выполнения, т.е. в полете. Снаряжение ЛА, которое

размещается на борту, разделяется на стандартное снаряжение и целевое снаряжение, связанное с выполнением полетного задания. В состав стандартного снаряжения входит экипаж со средствами жизнеобеспечения, средства спасения, средства жизнеобеспечения пассажиров, а также технические расходные материалы и жидкости – масло гидросистемы и системы смазки двигателей, антифриз системы антиобледенения, другие технические жидкости, несливаемый остаток топлива и возможно другие компоненты служебной нагрузки, необходимой в полете. Целевое снаряжение состоит из средств установки и крепления нагрузки, специальных грузовых контейнеров, держателей для внешних подвесок. В состав целевого снаряжения могут также входить временно устанавливаемые на борту измерительные приборы и другое специальное оборудование. Снаряжение в весовой модели представляется в виде специального классификатора и каталога готовых изделий, предназначенных для размещения на борту. Каждый элемент снаряжения характеризуется своими массово-инерционными характеристиками, которые вычисляются или задаются при включении элемента в каталог.

Аналогично снаряжению в весовой модели ЛА ведется каталогизация целевой нагрузки. Не вся перевозимая ЛА нагрузка может быть поэлементно каталогизирована, но включение типовых характерных элементов нагрузки в каталог и задание их характеристик существенно облегчает проведение необходимых расчетов. Поскольку целевая нагрузка может быть весьма разнообразной и зависит от типа и назначения ЛА, то создание и ведение соответствующих каталогов является самостоятельной задачей. Целевая нагрузка ЛА может размещаться во внутренних объемах изделия (в пассажирских салонах, в багажных и грузовых отсеках, в специальных контейнерах), а также на подвесках под фюзеляжем или под крылом. Одной из задач компоновки ЛА является определение мест размещения целевой нагрузки, узлов крепления и точек подвески под фюзеляжем и крылом. На этапе проектирования весовая модель должна обеспечивать проведение расчетов при самых различных вариантах снаряжения и загрузки ЛА. Количество вариантов такого размещения может быть очень большим. Поэтому при разработке весовой модели ЛА должны быть созданы механизмы формирования различных комбинаций загрузки. Одним из таких инструментов являются включение в структуру каталога специальных отношений и связей, отражающих компоновку, установку и крепление элементов нагрузки и снаряжения на борту. Для контроля над размещением нагрузки на борту, для визуализации конфигурации снаряженного и загруженного ЛА каталог должен кроме массово-инерционных характеристик включать геометрические параметры элементов нагрузки – объемы, габариты, параметры формы. Эта информация, кроме задач визуализации загрузки, может служить для расчета МИХ по стандартным формулам.

В конкретных полетных заданиях может быть предусмотрено выполнение сброса некоторых элементов целевой нагрузки. Сбрасываемые элементы должны быть специальным образом отмечены в каталоге весовой модели и при выполнении расчетов для этих элементов необходимо указывать моменты сброса.

Главной компонентой переменной массы ЛА является топливо, вырабатываемое в процессе полета. Масса топлива составляет существенную долю в общей массе заправленного ЛА и изменение этой массы в течение полета значительно изменяет не только вес, но и центровку ЛА, а также другие МИХ. Топливо заливается во внутренние стационарные баки, а при необходимости, в подвесные, съемные баки. Общий располагаемый объем топливных баков является одним из основных контролируемых параметров ЛА. В весовой модели ЛА текущая конфигурация топливной системы изделия задается списком стационарных и установленных подвесных баков изделия.

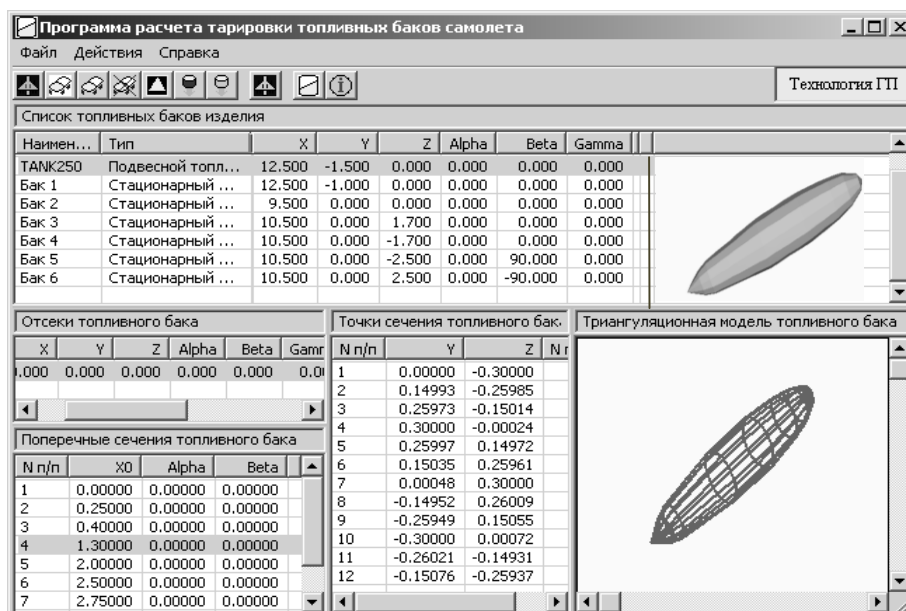


Рис.1 Размещение системы топливных баков и задание их геометрии

Каждый отдельный бак в весовой модели ЛА задается своей геометрической моделью и положением в самолетной системе координат. Вообще говоря, геометрические модели топливных отсеков ЛА разрабатывается в процессе создания полной геометрической модели изделия. Однако геометрия баков необходима для расчетов массово-инерционных характеристик текущего остатка топлива при различных эволюциях ЛА и поэтому целесообразно иметь исчерпывающую геометрическую информацию о баках именно в весовой модели.

Основной геометрической моделью топливных баков является триангуляционная модель многогранников аппроксимирующих форму бака. Такая модель может быть загружена из внешних источников, в которых формируется их геометрия. Существует несколько общедоступных форматов представления триангуляционных моделей. В представленной работе используется стандартный формат ASCII STL. Однако в процессе проектирования может потребоваться каркасное задание объемов топливных баков. На рис.1 показан один из механизмов задания каркасных моделей баков. В рамках такой модели геометрия бака задается как набор отсеков. Каждый отсек определяется множеством непересекающихся плоских сечений. Каркас, задающий поверхность бака, используется для построения триангуляционной модели, которая затем используется в расчетах. На рисунке приведена визуализация и каркасной и триангуляционной модели, в данном случае, подвесного бака. Для каждого заданного бака рассчитываются его тарировочные характеристики, т.е. функциональные зависимости массы, центра тяжести и моментов инерции топлива в баке в зависимости от уровня его выработки. При этом тарировочные характеристики каждого бака могут быть рассчитаны в процессе произвольных допустимых эволюций траектории полета изделия, т.е для любых углов тангажа и крена.

Если массово-инерционные характеристики топлива в баке по мере его выработки определяется тарировочной характеристикой, то зависимость МИХ всего текущего остатка топлива определяется последовательностью, в которой осуществляется выработка из разных баков. Топливная система ЛА представляет собой сложную систему, в которой баки соединены между собой трубопроводами, по которым с помощью насосов или самотеком, под управлением автоматики и бортовых программ, топливо перекачивается и подается в двигатели. Порядок перекачки топлива, переключение насосов, открытие и закрытие клапанов на трубопроводах осуществляется по специальной программе выработки топлива. Формирование такой программы является одной из задач весового проектирования, поскольку от этой программы зависит характер изменения МИХ текущего остатка топлива изделия. На

рис. 2 приведена иллюстрация задания программы переключения выработки топлива из нескольких баков

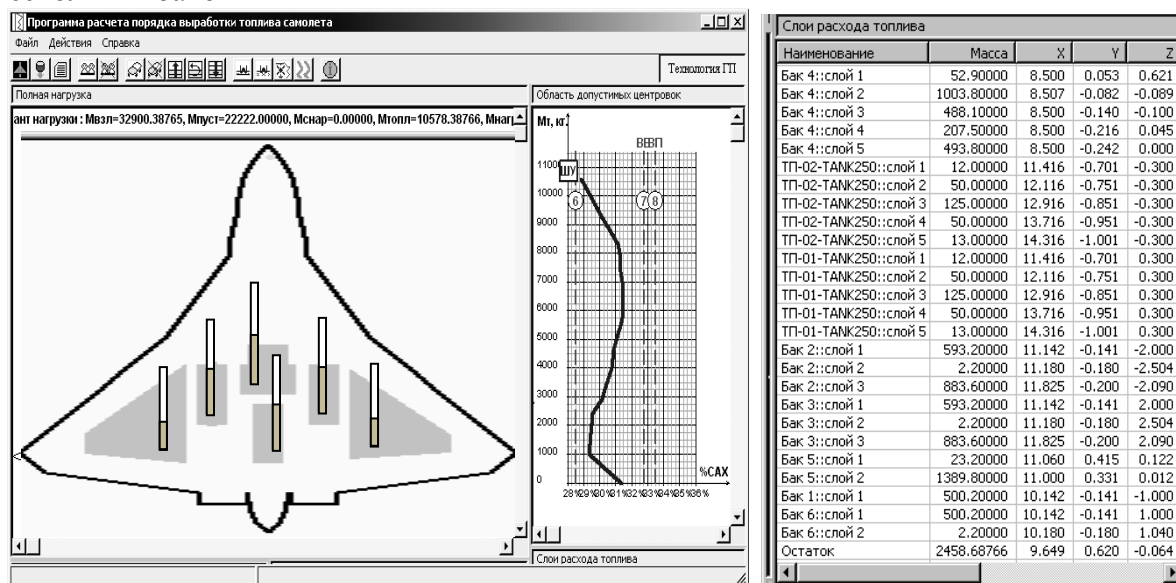


Рис.2. Программа выработки топлива

Слева, на силуэте ЛА приведены контуры топливных баков изделия и условные обозначения топливомеров, показывающих уровень выработки топлива в каждом из баков. График посередине рисунка показывает значение X-координаты центра тяжести всего изделия в процессе выработки топлива. А справа приведена распечатка самой программы выработки топлива. Здесь показана последовательность расходования топлива из разных баков. Эта последовательность формируется на основании тарировки баков изделия. Выработка осуществляется небольшими порциями (слоями) топлива. Эта программа отражает моменты включения или отключения отдельных насосов, открытие и закрытие конкретных клапанов трубопроводов. На основании такой программы строятся автоматические устройства управления или программы управления топливной системой для бортовых компьютеров.

Главной задачей расчета ЛА с переменной массой является расчет центровки в полете, а также контроль за взлетными и посадочными условиями, где масса играет центральную роль, влияет на длину разбега, а также на величину динамических нагрузок на шасси. Одним из механизмов такого контроля является построение в рамках весовой модели ЛА области допустимых изменений массы и положения центра тяжести в координатах (M_0 , X_0). Эта область задается конструктивными, прочностными, аэродинамическими и эксплуатационными ограничениями, накладываемыми на летательный аппарат конкретного назначения. На рис.3 показан пример такой области в координатах (M_0 , X_0). Множество ограничений здесь включает предельно-допустимые взлетную (1) и посадочную массы (6), предельную переднюю (4) и предельную заднюю центровки (5), линии, связанные с прочностными требованиями для передней стойки шасси при взлете (2) и посадке (7), и такие же ограничения для главных стойки (3,8). Кроме приведенных ограничений при анализе области допустимых изменений МИХ, обычно включают другие условия, нарушение которых допускаются, но они должны контролироваться в связи с возможными негативными отдаленными последствиями, например понижением ресурса ЛА.

На приведенном рисунке внутри области допустимых изменений массы и центровки ЛА показано несколько ломаных кривых, которые отражают поведение МИХ в процессе полета. Различные графики рисунка отражают возможные варианты снаряжения, полезной нагрузки и заправки топливом. Поведение отдельных кривых показывает эволюцию массы и центровки на различных этапах движения ЛА, начиная от рулежки по аэродрому, разгона, взлета, при выполнении рабочего полета вплоть до

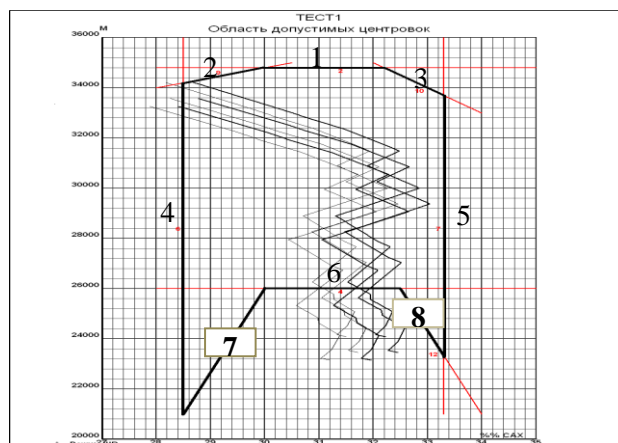


Рис. 3. Допустимая область изменения МИХ
ЛА

его завершения и посадки. На состояние МИХ влияет текущая конфигурация ЛА, режим взлета или посадки, уборка и выпуск шасси, изменение стреловидности крыльев с изменяемой геометрией, возможный сброс нагрузки, дозаправка в воздухе и тому подобное. Все эти режимы эксплуатации обычно просчитываются и на этапе проектирования ЛА и в процессе эксплуатации готовых изделий.

Список литературы

1. Л. Л. Вышинский, Ю. А. Флеров, Н. И. Широков. Автоматизированная система весового проектирования самолетов. // Информатика и ее применение, 2018. Т. 12. Выпуск 1. С. 18-30.

The weight model of an aircraft with a variable mass

Vyshinskiy L.L.

FRC IC RAS, Moscow, Russia

Проектирование оптимальных информационных систем в АПК

Ф.И.Ерешко

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление»
РАН, Москва, Россия*

В.В.Кульба

Институт проблем управления РАН, Москва, Россия

В.И.Меденников

*Всероссийский институт аграрных проблем и информатики имени А.А. Никонова
филиал ФГБНУ ФНЦ ВНИИЭСХ, Москва, Россия*

Под структурой информационно-управляющих систем (ИУС) АПК будем понимать организационную совокупность ее взаимосвязанных элементов, определяющих их место как в чисто физическом, так и технологическом смысле (уровень и конкретное место размещения элемента в пространстве и технологической схеме принятия решений и обработки информации).

Под проектированием структуры ИУС АПК понимается процесс построения взаимосвязей элементов структуры ИУС АПК и самих элементов в соответствии с заданными критериями эффективности ИУС АПК в целом.

Описание структуры системы управления

Рассматривается система, состоящая из множества узлов управления j (например, животноводческих ферм, растениеводческих отделений, механических мастерских и т.д.), множества задач K , кластеров данных L , типов связи R .

Считаем, что информация делится на 2 типа: первичную, то есть возникающую в узлах управления, иначе в пунктах возникновения информации; вторичную, возникающую после решения некоторой задачи.

Процесс управления предполагается периодически с периодом T , и все операции расчетов, передачи данных и т.д. усреднены по времени.

Будем считать, что любая задача может решаться в любом узле, в том числе разбиваться по этим узлам. Для решения задач используются технические средства нескольких типов.

Математическая модель

Введем обозначения:

k - номер задачи (запрос на информацию, на корректировку БД);

l - номер группового информационного элемента;

$l \in L^1$ - первичная информация;

$l \in L^2$ - вторичная;

K^1 - множество задач, использующих лишь первичную информацию;

K^2 - множество задач, использующих хотя бы один вторичный групповой информационный элемент;

j - номер узла управления, $j \in J$;

i - номер технического средства, $i \in I$;

$$\varphi_{pk} = \begin{cases} 1, & \text{если } p\text{-ый пользователь использует } k\text{-ю задачу;} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\omega_{pj} = \begin{cases} 1, & \text{если } p\text{-ый пользователь прикреплен к } j\text{-му узлу;} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\beta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } l\text{-ая группа используется в } k\text{-ой задаче;} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

g_l - вектор длины групп;

f_l - вектор количества экземпляров в группах;

$T = \|\tau_{pl}\|$, где τ_{pl} - предельное время получения информации l -й группы по запросу p -го пользователя;

f_{klj}^e - средние характеристики (объем информации, временные, пропускные способности и т.д.) на информацию l -ой группы, необходимый для задачи k , возникающий в узле j , $e \in E$;

p_{kln}^e - средние характеристики (объем информации, временные, пропускные способности и т.д.) на информацию l -й группы, необходимой для задачи k , после решения задачи n ;

$w_{i_1 j_1 i_2 j_2 r}$ - временные характеристики при передаче информации из (i_1, j_1) в (i_2, j_2) r -м средством связи;

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-я задача решается в} \\ & \text{узле } j\text{-м на } i\text{-м типе оборудования} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$x_{lij} = \begin{cases} 1, & \text{если } l\text{-я информационная группа входит в } t\text{-й} \\ & \text{тип записи в } j\text{-м узле на } i\text{-м оборудовании} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } t\text{-й тип записи размещается на } i\text{-м} \\ & \text{типе оборудования } j\text{-го узла;} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$a_{klj} = \begin{cases} 1, & \text{если } l\text{-я группа возникает в узле } j \\ & \text{для } k\text{-й задачи;} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$y_{l_1 j_1 i_2 j_2 r} = \begin{cases} 1, & \text{если информация из } l\text{-й группы не} \\ & \text{передается из } i_1\text{-го типа оборудования} \\ & j_1\text{-го узла в } i_2\text{-й тип оборудования} \\ & j_2\text{-й узел посредством связи } r; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$b_{kln} = \begin{cases} 1, & \text{если } l\text{-я группа используется в } k\text{-й} \\ & \text{задаче после решения задачи } n; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

z_{ij} - количество оборудования i -го типа в j -м узле;

d_{mijk} - необходимые ресурсы m -го типа для решения k -й задачи на i -м типе оборудования в j -м узле;

M_{mi} - m -е ресурсы i -го типа оборудования;

$$s_{i_1 j_1 i_2 j_2 r} = \begin{cases} 1, & \text{если } r\text{-й тип связи используется для} \\ & \text{передачи информации из } i_1\text{-го типа} \\ & \text{оборудования } j_1\text{-го узла в } i_2\text{-й тип} \\ & \text{оборудования } j_2\text{-го узла;} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

G_r^e - характеристики средств связи;

c_{ij}^1 - стоимость i -го оборудования в j -м узле;

$c_{i_1 j_1 i_2 j_2 r}^2$ - стоимость r -го средства связи при передаче информации из (i_1, j_1) в (i_2, j_2));

$c_{i_1 j_1 i_2 j_2 r}^3$ - затраты на передачу единицы информации из (i_1, j_1) в (i_2, j_2));

c_{mijk}^4 - стоимость m -го ресурса для решения k -й задачи на i -м типе оборудования в j -м узле;

c_k^5 - обобщенная стоимость k -й задачи;

c^0 - средства, выделенные на внедрение ИУС;

$$v_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i,j} x_{ijk} \geq 1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}, \quad u_{kn} = \max_{l \in L_k} b_{kln},$$

Ограничения на размещение задач по узлам и техническим средствам:

$$\sum_{i,j} x_{ijk} \geq 1, \quad k \in K^3 \in K, \quad \text{либо} \quad (1)$$

$$\sum_{i,j,p} x_{ijk} \varphi_{pk} \omega_{pj} \geq 1, \quad \text{то есть } k\text{-я задача должна быть решена хотя бы в одном узле;}$$

$$\sum_i x_{ijk} \geq 1, \quad j \in J_1, \quad k \in K^4 \in K, \quad \text{либо} \quad (2)$$

$\sum_{i,p} x_{ijk} \varphi_{pk} \omega_{pj} \geq 1$, т.е. некоторые задачи из множества K должны быть обязательно решены в некоторых узлах $j \in J_1$, например, в центральной бухгалтерии предприятия, в том числе вторичные задачи;

$$\sum_i x_{ijn} \geq u_{kn} v_k, \quad k, n \in K, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad (3)$$

то есть должны быть решены все задачи n , информация которых используется для решения задачи k .

Условия передачи информации из узла j_1 в узел j_2 :

$$\sum_r y_{li_1j_1i_2j_2r} = \sum_n \sum_k b_{kln} x_{i_1j_1n} x_{i_2j_2k}, \quad l \in L^2 \quad (4)$$

$$\sum_r y_{li_1j_1i_2j_2r} = \sum_k a_{klj_1} x_{i_2j_2k} \quad l \in L^1$$

Информация передается из узла j_1 в узел j_2 , когда она либо возникает в узле j_1 и используется в узле j_2 для задачи k , либо, когда вторичная информация заданной задачи n , решаемой в узле j_1 , необходима для задачи k , решаемой в узле j_2 ;

$$\sum_r y_{li_1j_1i_2j_2r} \leq 1, \quad (5)$$

информация передается одним средством связи;

$$\sum_{i_2j_2,r} y_{li_1j_1i_2j_2r} = \sum_{t,k} \beta_{kl} x_{it} y_{i_1j_1}, \quad (6)$$

условие, что все группы в узле j_1 на i_1 -м типе оборудования формируются в записи t .

Ограничение на число групп в составе логической записи

$$\sum_l x_{lt} \leq N_t, \quad t \in [1, t_0] \quad (7)$$

Ограничения на длину формируемой логической записи

$$\sum_l x_{lt} y_{ij} g_l \leq \eta_{ij}, \quad (8)$$

Ограничение на однократность включения групп в логические записи:

$$\sum_t x_{tij} = 1, \quad \forall l \in L. \quad (9)$$

Ограничение на число типов записей, размещаемых в БД j -го узла на i -м типе оборудования

$$\sum_t y_{ij} \leq h_{ij}, \quad (10)$$

Ограничение на загрузку оборудования:

$$\sum_{jk} d_{mijk} x_{ijk} \leq M_{mi}, \quad (11)$$

Ограничения на канал связи:

$$\sum_{l,k} y_{li_1j_1i_2j_2r} f_{klj_2}^e + \sum_{l,k,n} p_{kln}^e y_{li_1j_1i_2j_2r} \leq G_r^e s_{i_1j_1i_2j_2r} \quad (12)$$

Финансовые ограничения:

$$\sum_{i,j,k} c_{ij}^1 x_{ijk} + \sum_{i_1j_1i_2j_2r} c_{i_1j_1i_2j_2r}^2 s_{i_1j_1i_2j_2r} + \sum_k c_k^5 x_{ijk} \leq c^0 \quad (13)$$

Критерий эффективности:

$$\begin{aligned} & \sum c_{ij}^1 x_{ijk} + \sum c_{i_1 j_1 i_2 j_2 r}^2 s_{i_1 j_1 i_2 j_2 r} + \sum c_{i_1 j_1 i_2 j_2 r}^3 f_{klj_2}^e y_{li_1 j_1 i_2 j_2 r} + \\ & \sum c_{i_1 j_1 i_2 j_2 r}^3 p_{k \ln}^e y_{li_1 j_1 i_2 j_2 r} + \sum c_{mijk}^4 d_{mijk} x_{ijk} + \sum c_k^5 x_{ijk} \rightarrow \min \end{aligned} \quad (14)$$

Очевидно, что решить данную задачу в общем виде - сложная проблема. Для ее решения существует несколько подходов. Первый - воспользоваться алгоритмами, предложенными в [1] с небольшими модификациями, связанными с появлением блока синтеза структур. Второй - исходя из конкретики каждого хозяйства, на основе требований и пожеланий руководства, финансовых возможностей, сложившихся структур управления, ее консерватизма, попытаться свести задачу к многоэтапной итеративной процедуре, аналогично изложенной в [2].

Для этого введем предположение, что информация для задач из множества K^2 всегда имеется, например, задачи из множества K^1 решаются либо вручную, либо на ЭВМ, и информация эта возникает в месте ее решения. Тогда система уравнений примет следующий вид:

Уравнения (1), (2) остаются без изменений, в уравнении (3) нет необходимости.

Уравнение (4) принимает вид:

$$\sum_r y_{li_1 j_1 i_2 j_2 r} = \sum_k a_{klj_1} x_{i_2 j_2 k} \quad (15)$$

Уравнения (5)-(11) остаются без изменений. Уравнение (12) принимает вид:

$$\sum_{l,k} y_{li_1 j_1 i_2 j_2 r} f_{klj_2}^e \leq G_r^e s_{i_1 j_1 i_2 j_2 r} \quad (16)$$

Уравнение (13) остается без изменений. Критерий эффективности приобретает вид:

$$\begin{aligned} & \sum c_{ij}^1 x_{ijk} + \sum c_{i_1 j_1 i_2 j_2 r}^2 s_{i_1 j_1 i_2 j_2 r} + \sum c_{i_1 j_1 i_2 j_2 r}^3 f_{klj_2}^e y_{li_1 j_1 i_2 j_2 r} + \\ & + \sum c_{mijk}^4 d_{mijk} x_{ijk} + \sum c_k^5 x_{ijk} \rightarrow \min \end{aligned} \quad (17)$$

Данная система уравнений все еще имеет нелинейный вид. Для приведения ее к линейному виду произведем замену переменных:

$$z_{lij} = x_{lij} y_{ij} \quad (18)$$

с исключением из системы уравнения (10).

После решения данной системы уравнений получим, в частности, конкретные значения x_{lij}^0, y_{ij}^0 . Если при этом выполняется условие (10), то есть

$$\sum_t y_{ij}^0 \leq h_{ij}, \quad (19)$$

то на этом процедура расчета по модели завершается. Если же условие (10) не выполняется при некоторых $(i, j) \in (I^0, J^0)$, тогда для данных $(i, j) \in (I^0, J^0)$, либо подбирается такая СУБД, которая удовлетворяет условию (19), либо, если такую замену совершить невозможно, вместо выражения (10) в систему включается следующее:

$$\sum_t z_{lij} \leq h_{ij}, \quad \forall l \in L, \quad (20)$$

Очевидно, что при $x_{lij} = 1$, выражение (20) совпадает с (10), при $x_{lij} = 0$ условие (10) выполняется автоматически.

Труднее обстоит дело в том случае, когда приобретаемое программное обеспечение жестко завязано по логической структуре собственной БД. В этом случае придется написать интерфейс по доступу к этим БД из других задач и при расчете по

рассматриваемой в работе модели соответствующие переменные заменить константами, определяющими заданные логические структуры БД.

Модель также упрощается, когда, например, руководство предприятия жестко требует создания локальной сети на основе уже имеющейся вычислительной техники, расставленной по рабочим местам. В такой ситуации модель распадается на ряд блоков, решаемых последовательно.

Представленная в работе модель позволяет в пределах выделенных финансовых ресурсов определить наиболее рациональную структуру ИУС, распределяет информационные средства, и решаемые задачи по узлам управления, определяет при необходимости инвестиции в телекоммуникационные средства с оптимизацией информационных потоков и логических структур распределенных баз данных. Благодаря применению технологии проектирования оптимальных информационных систем для сельскохозяйственных предприятий повышалось качество и надежность ИС, а также снижена стоимость их внедрения. Модель заработает в полном объеме в том случае, когда руководство решится на комплексную компьютеризацию предприятия с возможным реинжинирингом как системы управления, так и самого предприятия [3]. Реальные расчеты показали, что экономия средств на информатизацию среднего по размерам хозяйства составляла около 40%.

Список литературы

1. Кульба В.В., Ковалевский С.С., Косяченко С.А., Сиротюк В.О.. Теоретические основы проектирования оптимальных структур распределенных баз данных. М.: Синтег, 1999.
2. Меденников В.И. Теоретические аспекты синтеза структур компьютерного управления агропромышленным производством. // Аграрная наука. 1993. N 2. С. 25-29.
3. Ерешко Ф.И., Меденников В.И., Сальников С.Г. Интернет-технологии в экономике знаний // Материалы Девятой международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем". М: Доклады ИПУ РАН. 2016 г. т.1. С.178-182.

Designing of optimal information systems in the agroindustrial complex

Ereshko F.I.

Dorodnicyn Computing Centre RAS

FRC "Informatics and Management" RAS, Moscow, Russia

Kulba V.V.

Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia

Medennikov V.I.

All-Russian Institute of Agrarian Problems and Informatics named after A.A. Nikonov branch of FGBNU FNC VNIIESHK, Moscow, Russia

Вычислительные вопросы составления транспортного расписания

В.Н. Лебедев, Д.П. Шевченко

Волгоградский Государственный Университет, Волгоград, Россия

В работе проведен практический и теоретический анализ составления транспортного расписания. В данный момент в управлении железнодорожного транспорта применяется программа АРМ [1] (автоматизированное место графиста).

Составление транспортного расписания проходит последовательной вставкой новой нити в текущее расписание, поэтому процедура вставки существенна в общей программе АРМ. В программе АРМ дан в основном ручной ввод новой нити,

посредством графической корректировки. Существенным ограничением ручной вставки является условие согласования ТР участка дороги на стыковых станциях.

Отмечая сложность практической задачи, в работе реализован некоторый метод автоматизации функции вставки оптимальной нити. Упрощенно задача представлена следующим образом. На входе алгоритма есть линейный участок железной дороги в одном направлении, состоящий из станций и прогонов между ними. На каждой станции есть наборы входных допустимых интервалов. Входной интервал указывает на возможность принять состав в заданный интервал времени. Входные интервалы определяются пропускными возможностями станций и временами стоянок составов ТР. На каждой станции есть наборы выходных допустимых интервалов. Это указатели о времени, когда смежный прогон свободен от составов.

На выходе нужно ответить на следующий вопрос. Можно ли вставить новую нить в ТР, то есть найдутся или нет времени прохождения станций, которые удовлетворяют некоторому допустимому входному и выходному интервалу на каждой станции? Если ответ положительный, то нужно найти допустимый график нити с минимальным временем движения из начальной станции в конечную и вставить найденную оптимальную нить в исходное ТР.

Разработана программа в среде Borland C++ 5.02.

На памяти 200 kbt программа решает поставленную задачу для участка 8 станций, 40 входных и 40 выходных временных окон на каждой станции. Это соответствует ТР порядка 40 составов. Разрешенная максимальная неопределенность времени остановок и прохождения перегонов в пределах 6 минут. Время работы программы на представленных данных порядка нескольких секунд. Временные ограничения связаны с большой размерностью задачи в силу малого масштаба шкалы времени.

Основным средством построения программы является композиция поиска кратчайшего пути на пространственно - временных графах. В рамках разработанной программы решаются и некоторые более общие задачи временных ограничений ТР.

Например, оптимизация обратных транспортировок пустопорожних вагонов.

Далее мы проводим теоретический анализ временной сложности задачи вставки нити. Основным результатом является:

Утверждение

Алгоритм динамического программирования прохода по линейному графу решает задачу вставки новой нити и имеет степенную временную оценку сложности.

Обоснование утверждения получено обобщением задачи с фиксированными временами проезда перегонов

Работа является откликом на вопросы управления логистики железнодорожного транспорта.

Список литературы

1. А.А.Ерофеев, Е.А.Ерофеева Система автоматизированного проектирования графика движения поездов Гомель: БелГУТ, 2012. .

Computational issues of transport schedule compilation

Lebedev V.N., Shevchenko D.P.

Volgograd State University, Volgograd, Russia

СЕКЦИЯ № 9

ИО В БАНКОВСКОМ ДЕЛЕ И НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Roy Cerqueti Reliability systems and financial applications | 282 |
| Агасандян Г.А. Необходимое и достаточное условие в анализе корректности семейств функций рискованных предпочтений для CC-VaR | 284 |
| Агасандян Г.А. Оптимальный портфель инвестора на комбинации рынков в задачах с CC-VaR | 289 |
| Ахуньянова С.А., П.М. Симонов P -адическая аппроксимация динамики индекса РТС | 294 |
| Байрамов О.Б., Охрименко В.В. Итеративные методы в финансовых процессах | 298 |
| Гасанов И.И., Ерешко Ф.И. Модель форка в системе Биткоин | 301 |
| Ерешко Ант.Ф. Опыт организации алготрейдинга на финансовых рынках. Ч. 1 Постановки. Ч.2 Реализация | 305 |
| Ерешко Арт.Ф., Вахранев А.В. Балансовые модели технологии распределенных реестров. Части 1,2 | 311 |
| Карминский А.М, Дьячкова Н.Ф., Гришунин С.В. Паттерны кредитных рейтингов промышленных компаний стран БРИКС | 317 |
| Karminsky A.M., Khromova E.P. Increase of Banks' Credit Risks Forecasting Power by the Usage of the Set of Alternative Models | 321 |
| Петров Л.Ф., Архипов В.А. Сравнительный анализ алгоритмов машинного обучения для задач кредитного скоринга | 326 |
| Саркисов В.Г. Реализация преимущества при различных подходах к оптимизации портфеля коалиции | 330 |
| Сытов А.Н. Вычислительные эксперименты с моделью добычи цифровых валют | 332 |
| Яминов Р.И. Анализ некоторых аспектов использования криптовалют как средства платежа | 336 |

Reliability systems and financial applications

Roy Cerqueti

University of Macerata, Italy

This paper deals with the development of a derivative model in the language of reliability theory. Specifically, a complex financial product is presented as a coherent system with components given by some assets composing the underline. The state of the assets at the expiration date determine whenever the option has positive return or not. The reliability function of the option gives insights on its risk profile, and is evaluated by the computation of the signature of the system. An intuitive connection with the theory of complex networks is also offered.

Reliability theory is basically grounded on the fundamental task of optimizing the lifetime of a system, and this brings challenging themes also in mathematical statistics and operations research. Some noticeable contributions in this direction are the monograph of Spizzichino

(2001), where a detailed toolkit on stochastic dependence and ageing along with some notions on survival probabilities is provided.

The reliability analysis of h-out-of-n systems is a classical theme, and a number of variants have been proposed to let the original h-out-of-n system be more tailored on specific reliability issues. The scientific ground of the most part of such variants lies in the need -- for practical applications -- of assigning different relevance to the components of the systems when computing their reliability.

In this context, a relevant role is played by the so-called weighted h-out-of-n systems, introduced in Wu and Chen (1994). In such models, all the elements of the system are endowed with normalized weights which capture the entity of the contribution of each specific component in assessing the reliability. A further noticeable extension of the original setting is obtained by assuming that the system works when the elements of some special sets of connected components work (see e.g. Yamamoto et al., 2008).

An equivalent definition of the h-out-of-n systems can be given by replacing "working" with "failed". Indeed, a h-out-of-n system is nothing but a system which fails when at least $h+1$ of its components fail. Sometimes, the original h-out-of-n systems are denoted as h-out-of-n:G systems, while the equivalent ones with failures as n-h+1-out-of-n:F systems. The letters G and F stand for "Good" and "Failed", respectively.

In this paper we are interested in the events of failure. Thus, to avoid a cumbersome notation, we set $k=n-h+1$ and denote the n-h+1-out-of-n:F systems simply as k-out-of-n systems.

As preannounced above, we propose an extension of the concept of k-out-of-n system which includes, in particular, the frameworks discussed in the papers mentioned above.

Specifically, we assume that the system fails when, jointly, we have that (i) k components fail, and (ii) "some" of the failed components belong to a predefined special set with cardinality r in $\{0, 1, \dots, n\}$. In our setting, the number of the components of the special set needed for having the failure of the system depends on k, and will be identified through a function f .

Importantly, we employ our reliability arguments to construct a financial model for option theory based on the proposed extension of the k-out-of-n systems. In so doing, we derive some intuitive financial results in a very natural way.

In particular, among all the existing typologies of derivatives, we will concentrate attention on the basket options. The latter are experiencing an increasing popularity among the retail investors in view of their constitutive features. Indeed, basket options are written on a set (basket) of assets which can be properly selected by the investors on the basis of their risk-profiles and returns. The payoff of a basket option -- and, consequently, the price of it -- is then strongly dependent on the composition of the basket (see e.g. Zhang, 1997; Brigo et al., 2004; Sesana et al., 2014).

Barrier basket options represent a subclass of the general basket options. In this case, the payoff of the option is linked to the crossing of prefixed thresholds by the returns of the assets in the basket (see e.g. Kim et al., 2015). Once the basket is fixed, the selection of the thresholds leads to the identification of the risk profile and of the expected return of the corresponding option. Thus, the mechanism of thresholds-selection contributes to control the riskiness of the option.

In this paper, we adopt the extension of k-out-of-n systems mentioned above for defining a special subfamily of barrier basket options, where the basket is formed by uncorrelated assets (see e.g. Alexander and Venkatramanan, 2012; Chen et al., 2015). The components of each option-system are given by the assets forming the basket. Furthermore, options are viewed here as coherent systems (see e.g. Barlow and Proschan, 1981). As we will see, this assumption fits the financial evidence.

The reliability function of the system will be defined on the basis of the probability that the payoff of the option is positive at a given date (not necessarily the expiration one but,

obviously, not after it). The computation of the reliability function is implemented by employing the notion of signature of the system, which has been introduced by Samaniego (1985) and extensively studied in the context of coherent systems by e.g. Kochar et al. (1999), and Marichal et al. (2015) and references therein.

To the best of our knowledge, the concept of signature has been used so far only in the frame of reliability theory. However, such a notion may be efficiently employed also in the analysis of systems in other fields. In particular, signature can play a useful role in option theory (see Cerqueti and Spizzichino, 2014 for a preliminary analysis).

References

1. Alexander, C., Venkatramanan, A., Analytic approximations for multi-asset option pricing. *Mathematical Finance* 22(4), 667-689, 2012.
2. Barlow, R.E., Proschan, F., Importance of system components and fault tree events. *Stochastic Processes and their Applications* 3, 153-173, 1975.
3. Brigo, D., Mercurio, F., Rapisarda, F., Scotti, R., Approximated Moment Matching Dynamics for Basket-Options Pricing. *Quantitative Finance* 4(1), 1-16, 2004.
4. Cerqueti, R., Spizzichino, F., Signatures of systems with non-exchangeable lifetimes: some implications in the analysis of financial risk. In: C. Kitsos, T.A. Oliveira, A. Rigas, S. Gulati (Eds.) *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 136, Springer-Verlag, 2015, 361-376.
5. Chen, W., Kritzman, M., Turkington, D., Alternative currency hedging strategies with known covariances. *Journal of Investment Management* 13(2), 6-24, 2015.
6. Kochar, S., Mukerjee, H., Samaniego, F.J., The "signature" of a coherent system and its application to comparisons among systems, *Naval Research Logistics*, 46(5), 507-523, 1999.
7. Marichal, J.-L.; Mathonet, P.; Spizzichino, F., On modular decompositions of system signatures. *Journal of Multivariate Analysis* 134, 19-32, 2015.
8. Samaniego, F.J., On closure of the IFR class under formation of coherent systems, *IEEE Transactions on Reliability*, R34, 60-72, 1985.
9. Sesana, D., Marazzina, D., Fusai, G., Pricing exotic derivatives exploiting structure. *European Journal of Operational Research* 236(1), 369-381, 2014.
10. Spizzichino, F. *Subjective probability models for lifetimes*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC. ISBN: 1-58488-060-0, 2001.
11. Wu, J.S., Chen, R.J., An algorithm for computing the reliability of weighted k-out-of-n system. *IEEE Transactions on Reliability* 43, 327-328, 1994.
12. Yamamoto, H., Akiba, T., Nagatsuka, H., Moriyama, Y., Recursive algorithm for the reliability of a connected-(1, 2)-or-(2, 1)-out-of-(m, n):F lattice system. *European Journal of Operational Research* 188(3), 854-864, 2008.
13. Zhang, P.G., *Exotic Options*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1997.

Необходимое и достаточное условие в анализе корректности семейств функций рискованных предпочтений для CC-VaR*

Г.А. Агасандян

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
Москва, Россия*

В работе исследуются однопараметрические семейства функций рискованных предпочтений инвестора, придерживающегося континуального критерия VaR (CC-VaR)

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00816).

[1-4]. При постановке задач оптимизации важная роль отводится параметрическим семействам функций рискованных предпочтений (ф.р.п.) инвестора. *Корректными* считаются семейства, для которых доходность инвестиции является *монотонной* функцией параметра. Приводится *необходимое и достаточное* условие корректности семейства и анализируются конкретные семейства с его использованием. Примеры подтверждают гипотезу качественного характера, что более «доходные» функции рискованных предпочтений инвестора порождают более низкие доходы в окрестности нуля аргумента и более высокие – в окрестности единицы.

Заданы $p(x)$ и $c(x)$ – соответственно прогнозная (на конец периода) и стоимостная (на начало периода) плотности цены базового актива, $X (\subset \mathfrak{R})$ – произвольный интервал на вещественной прямой. Здесь, как часто делалось и ранее, решается для простоты *задача СВ* [2], базовая для решения прочих родственных задач, в которой инвестиционная сумма $S (> 0)$ не задается, но ищется портфель, доставляющий $\min S$ при выполнении требований *СС-VaR*. Этот критерий состоит в выполнении неравенств $P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1-\varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$, где q – доход, $\phi(\varepsilon)$ – *функция рискованных предпочтений* инвестора (P – вероятностная мера). Решение подобных задач основывается на переупорядочении по величине функции относительных доходов $\rho(x) = p(x)/c(x)$, $x \in X$, посредством процедуры Неймана-Пирсона из математической статистики [5].

Рассматриваются семейства ф. р. п. $\phi(\varepsilon; \lambda)$ по параметру $\lambda \in \Lambda \subset \mathfrak{R}$, который отражает степень толерантности инвестора к риску (и не является параметром масштабирования). Например, можно принять за правило считать, что с ростом этого параметра степень расположенности к риску инвестора возрастает, и именно такими семействами рекомендовать инвестору руководствоваться. На функции семейства обычно налагаются ограничения, связанные с возможностью их интегрирования и дифференцирования по параметру λ . Функции из семейств подчиняются ограничению $\phi(0; \lambda) \equiv 0$ и нормируются условием $\phi(1; \lambda) \equiv 1$. Они целиком располагаются в квадрате $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Некоторые особенности функций (бесконечность производных по ε) разрешаются для $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$, где производные по ε могут быть неограниченными, а также при стремлении λ к (условному) нулю.

Некоторые примеры корректных и некорректных семейств рассматриваются в [2]. Уже по этим примерам создается впечатление, что повышенный риск, на который готов идти инвестор, в большей мере обусловлен поведением выбираемой им ф. р. п. в окрестностях $\varepsilon = 0$ и, соответственно, $\varepsilon = 1$. Именно при таком поведении инвестора модно добиваться большего среднего дохода.

Для более обоснованного подтверждения этой гипотезы подходящими представляются примеры с ф. р. п., симметричными относительно биссектрисы угла квадрата Q пар значений (ε, ϕ) с координатами $(1, 0)$. Примеры такого типа с семействами линейных функций с одним изломом и дугами обобщенных окружностей рассматриваются далее.

Средний доход $R(\lambda)$, сумма инвестиции $A(\lambda)$ и средний *относительный* доход определяются формулами [2, 3] ($\lambda > 0$)

$$R(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\varepsilon, \quad A(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\gamma(\varepsilon), \quad r(\lambda) = R(\lambda)/A(\lambda).$$

где $\gamma(\varepsilon)$ – диссонанта, $\phi(\varepsilon; \lambda)$ – ф.р.п. Для целей анализа рассматриваются также и разности

$$\Delta \phi_n(\varepsilon; \lambda_1, \lambda_2) = \phi_n(\varepsilon; \lambda_2) - \phi_n(\varepsilon; \lambda_1), \quad \int_0^1 \Delta \phi_n(\varepsilon; \lambda_1, \lambda_2) d\varepsilon = 0. \quad (1)$$

Корректным называется семейство ф.р.п., для которого при *любой допустимой* функции $g(\varepsilon)$ оптимальный относительный доход $r(\lambda)$ является монотонной функцией λ . Остальные семейства – *некорректные*. Для некорректного семейства *существуют* пара $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_1 < \lambda_2$, и такая *допустимая* функция $g(\varepsilon)$, что $r(\lambda_1) > r(\lambda_2)$.

Обозначим через k количество интервалов постоянства знака, образованных на интервале $(0,1)$ точками $\varepsilon_i(\lambda_1, \lambda_2) \in (0,1)$ (или $\varepsilon_i(\lambda) \in (0,1)$), $i = 1..k-1$, – нулями функции

$\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda_1, \lambda_2)$ (или $\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)/\partial\lambda$), но лишь такими, в которых происходит изменение знака функции. Введем еще для удобства $\varepsilon_0(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ ($\varepsilon_0(\lambda) = 0$) и $\varepsilon_k(\lambda_1, \lambda_2) = 1$ ($\varepsilon_k(\lambda) = 1$), но только на величину $\varepsilon_k(\lambda_1, \lambda_2)$ требование быть нулем функции не распространяется.

Для последующего анализа вводится понятие α -набора $\{\alpha_i, i = 1..k\}$ – знакопеременного набора чисел, для которого

$$\alpha_i \neq 0, i = 1..k, \sum_{i=1..k} \alpha_i = 0.$$

Набор чисел $\{\pi_i, i = 1..k\}$ называем *допустимым* при $\pi_1 > 0$ и $0 \leq \pi_i \leq \pi_{i-1}, i = 2..k$. Если $\sum_{i=1..k} \pi_i \alpha_i \leq 0$ для любого допустимого набора, то α -набор называем *корректным*. Может быть доказана

Теорема 1. Для корректности α -набора $\{\alpha_i, i = 1..k\}$ *необходимо и достаточно*, чтобы число k было четным и выполнялась совокупность неравенств

$$\alpha_1 < 0 \text{ и } \sum_{i=1..m} \alpha_i \leq 0 \text{ для всех четных } m \leq k-2$$

(при $k = 2$ требуется выполнение лишь первого неравенства).

Из этой теоремы вытекают

Следствие 1:

(i) условие $\alpha_1 < 0$ *необходимо* для корректности α -набора; в случае $k = 2$ оно также *и достаточно*;

(ii) при $k = 3$ любой α -набор *некорректен*;

(iii) при $k = 4$ α -набор *корректен* тогда и только тогда, когда $\alpha_1 < 0 < \alpha_2 \leq -\alpha_1$; из этих неравенств непосредственно вытекает, что также $\alpha_3 < 0, \alpha_4 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 0$.

Обозначаем теперь через k количество интервалов постоянства знака, на которые разбивается интервал $(0, 1)$ точками $\varepsilon_i(\lambda', \lambda'') \in (0, 1)$ (или $\varepsilon_i(\lambda) \in (0, 1)$), $i = 1..k-1$, являющимися ровно теми нулями функции $\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'')$ (или $\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)/\partial\lambda$), в которых знак функции меняется. Полагаем еще для удобства $\varepsilon_0(\lambda', \lambda'') = 0$ ($\varepsilon_0(\lambda) = 0$) и $\varepsilon_k(\lambda', \lambda'') = 1$ ($\varepsilon_k(\lambda) = 1$), но только на величину $\varepsilon_k(\lambda', \lambda'')$ требование быть нулем функции не распространяется.

Исходной задаче сопоставляем α -набор, вводимый для всех $i = 1..k$ соотношениями

$$\alpha_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda_1, \lambda_2) d\varepsilon \quad (\alpha_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \frac{\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)}{\partial\lambda} d\varepsilon), \quad \sum_{i=1..k} \alpha_i = 0.$$

Параметры $\alpha_i, i = 1..k$, образуют знакопеременную последовательность. Имеет место

Теорема 2. Для корректности семейства *необходимо и достаточно*, чтобы для α -набора $\{\alpha_i, i = 1..k\}$, определяемого по *любой* паре $\{\lambda_1, \lambda_2\}, \lambda_1 < \lambda_2$, формулой (1) (или по λ – производной по λ), число k было четным и выполнялась совокупность неравенств

$$\alpha_1 < 0 \text{ и } \sum_{i=1..m} \alpha_i \leq 0 \text{ для всех четных } m \leq k-2$$

(при $k = 2$ требуется выполнение лишь первого неравенства).

Из этой теоремы вытекают простые

Следствия 2: если производная по ε от $\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda_1, \lambda_2)$ (или от $\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)/\partial\lambda$)

(i) при $\varepsilon = 0$ положительна хотя бы для одной пары $\{\lambda_1, \lambda_2\}, \lambda_1 < \lambda_2$, (для одного значения λ), то семейство *некорректно*;

(ii) при $\varepsilon = 0$ для любой пары $\{\lambda_1, \lambda_2\}, \lambda_1 < \lambda_2$, (для всех $\lambda \geq 0$) отрицательна, то при $k = 2$ семейство *корректно*;

(iii) при $\varepsilon = 1$ положительна хотя бы для одной пары $\{\lambda_1, \lambda_2\}, \lambda_1 < \lambda_2$, (одного значения $\lambda \geq 0$), то семейство *некорректно*; (iv) при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$ одного знака, то семейство *некорректно*. \square

Рассматривается двухпараметрическое надсемейство *кусочно-линейных* функций от $\varepsilon \in [0, 1]$ с одним изломом вида

$$\phi(\varepsilon; \zeta, v) = \left\{ v\varepsilon/\theta, \varepsilon \leq \theta; v + (1-v)\frac{\varepsilon-\theta}{1-\theta}, \varepsilon > \theta \right\}, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \theta = 1 + v - 2\zeta$ – абсцисса точки излома функций, v – ее ордината. Отмечаем, что при $\zeta = 0.5$ имеет место $\phi(\varepsilon; \zeta, v) \equiv \varepsilon$ (вне зависимости от v). Семейства этих функций представлены на рис. 1 слева

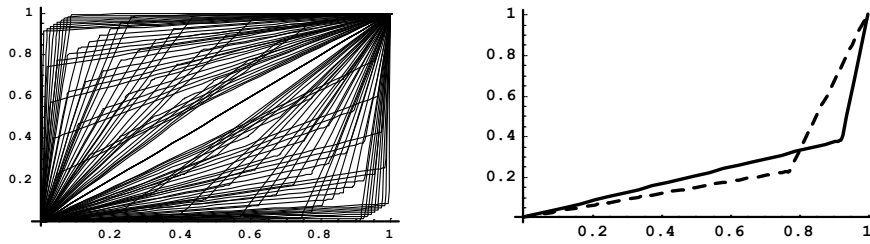


Рис. 1. Графики функций надсемейства $\phi(\varepsilon; \zeta, v)$ и пары функций семейства $\phi(\varepsilon; \zeta, v)$ при $\zeta < 0.5$

Естественным образом возникают два случая: $\zeta < 0.5$ и $\zeta > 0.5$. Вследствие того, что надсемейство располагается целиком в пределах квадрата Q , появляются очевидные ограничения на v : в первом случае должно быть $0 < v < 2\zeta$, во втором – $2\zeta - 1 < v < 1$.

Как показывает несложный анализ, геометрическим местом точек излома функций надсемейства при фиксированном значении параметра ζ является отрезок прямой в пределах квадрата Q , проходящей при $0 < \zeta < 1/2$ через точку $1 - 2\zeta$ на оси абсцисс под углом $\pi/4$ к ней, при $1/2 < \zeta < 1$ – через точку $2\zeta - 1$ на оси ординат под тем же углом; его назовем ζ -отрезком. Формально ζ -отрезок можно представить в виде уравнения прямой $v = \varepsilon - (1 - 2\zeta)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, при этом в первом случае $0 < v < 2\zeta$, во втором – $2\zeta - 1 < v < 1$.

Для среднего дохода инвестиции простое интегрирование дает $R(\zeta, v) = \zeta$ для всех $\zeta \in (0, 1)$, что означает независимость оптимального дохода от v при фиксированном значении ζ . И это должно облегчить интерпретацию результатов. При этом

$$\Delta\phi_n(\varepsilon; \zeta; v_1, v_2) = (\phi(\varepsilon; \zeta; v_2) - \phi(\varepsilon; \zeta; v_1)) / \zeta, \quad v_2 > v_1.$$

Нам достаточно определить, при каком условии наклон линейного участка в точке $\varepsilon = 0$ отрицателен, а при каком – положителен. Поскольку разность $\Delta\phi_n(\varepsilon; \zeta; v_1, v_2)$ состоит из трех линейных участков, равна нулю на концах отрезка $[0, 1]$ и нулю равен интеграл от нее, то нуль функции может быть образован средним участком и он единствен. В терминологии и обозначениях [3], где доказываются необходимые и достаточные условия корректности семейств функций, для нашего семейства $k = 2$. Можно проверить еще, что разность, отрицательная при $\zeta < 1/2$ в окрестности $\varepsilon = 0$, в окрестности $\varepsilon = 1$ принимает положительные значения, и наоборот – при $\zeta > 1/2$.

Из определения (2) находим, что искомый наклон равен $v_2 / (1 + v_2 - 2\zeta) - v_1 / (1 + v_1 - 2\zeta)$. После упрощений получаем, что знак наклона совпадает со знаком выражения $v_1(1 - 2\zeta) - v_2(1 - 2\zeta)$. Легко видеть, что этот результат сводится к правилу: при $v_2 > v_1$ наклон в точке $\varepsilon = 0$ положителен при $\zeta < 1/2$ и отрицателен при $\zeta > 1/2$; наклон обращается в нуль при $\zeta = 1/2$. Важно подчеркнуть, что этот наклон не зависит от выбора из множества всех допустимых функций, на которых должна проверяться корректность.

При фиксации ζ оказывается, что при $\zeta < 1/2$ с ростом v стоимость оптимального портфеля растет, при $\zeta > 1/2$ – снижается, при $\zeta = 1/2$ – растет. Поэтому с доходностью картина обратная: при $\zeta < 1/2$ с ростом v доходность оптимального портфеля снижается, при $\zeta > 1/2$ – растет.

Пишем $v_2 \geq v_1$ и говорим (весьма условно), что v_2 доходнее v_1 , если при любой допустимой функции $g(\varepsilon)$ для стоимости A выполняется неравенство $A(v_2) < A(v_1)$.

Отношение \geq (или \leq) может быть установлено не для любой пары ф. р. п., – при некоторых допустимых функциях разность сумм инвестиции будет положительной, при других – отрицательной. Если для какой-либо пары такое отношение установить невозможно, это свидетельствует лишь о том, что любое семейство, содержащее оба элемента этой пары, будет (в нашей терминологии) некорректным.

Напротив, если, например, отношение \geq установлено для всех упорядоченных по величине параметра семейства пар ф. р. п., то оно корректно. Корректным будет также

семейство, если для всех его пар установлено противоположное отношение \leq , только для него увеличение параметра семейства будет сопровождаться снижением доходности. В таком случае с целью унификации обозначений имеет смысл порядок функций семейства поменять на обратный.

Аналогичные результаты получаются и для надсемейства, образованного дугами обобщенных окружностей

$$\phi(\varepsilon; \mu, \nu) = 1 - (1 - \varepsilon^\mu)^{1/\nu}, \quad \mu, \nu > 0. \quad (3)$$

Кривые данного надсемейства изображены на рис. 2 слева. При $\varepsilon = 1$ и $\nu > 1$ они ведут себя более круто по сравнению, например, с ломаными семейства (2). Их производные по ε при $\varepsilon = 1$ и $\nu > 1$ бесконечны, что позволяет использовать их весьма расположенными к риску инвесторами. (При $\nu < 1$ эти производные равны нулю, а при $\varepsilon = 0$ они определяются аналогичным образом значениями параметра μ .)

Средний доход получается непосредственным интегрированием функций надсемейства и может быть представлен в виде симметричной функции относительно параметров $\mu, \nu > 0$ (ее значения приписываем вспомогательному параметру ζ)

$$(\zeta =) R(\mu, \nu) = 1 - \Gamma(1 + 1/\mu) \Gamma(1 + 1/\nu) / \Gamma(1 + 1/\mu + 1/\nu).$$

В данном случае проведение полного аналитического исследования затруднено, но о схожести поведения надсемейств (2) и (3) можно судить по результатам многочисленных расчетов. Наметим лишь схему проведения экспериментов.

Строятся сетки числовых значений для ζ в количестве $I = 11$, для μ и ν в количестве $J = 9$ каждый. Средними служат индексы $i_m = (I+1)/2, j_m = (J+1)/2$. Формируется вектор s , как совокупность значений ζ , в виде $\{s_i = (i-1/2)/I, i = 1..I\}$. Вводится и вектор $v = \{v_i, i = 1..I\}$, где v_i определяется как корень уравнения $R(v, v) = s_i, i = 1..I$.

Для каждого выбранного значения $v_i, i = 1..I$, определяются J значений параметра μ :

$$\mu_{i,j} = 1 + (j-1)(v_i-1)/J, \quad j \leq j_m;$$

при этом величина $\nu = v_{i,j}$ должна стать корнем уравнения (чтобы $R(\mu_{i,j}, v_{i,j}) = s_i, i = 1..I$)

$$\Gamma(1 + 1/\mu_{i,j}) \Gamma(1 + 1/\nu) / \Gamma(1 + 1/\mu_{i,j} + 1/\nu) = 1 - s_i.$$

Для каждой пары значений параметра μ (или ν) при фиксированном значении параметра ζ из выбранных сеток проводится вычислительный эксперимент и устанавливается возможность приписывания паре отношения \geq (или \leq).

На рис. 2 справа изображены две кривые $\Delta\phi_n(\varepsilon) = (\phi_n(\varepsilon; \mu_{i,j+1}, \nu_{i,j+1}) - \phi_n(\varepsilon; \mu_{i,j}, \nu_{i,j}))/\zeta$, образованные из функций (3) с индексами $j = 5, i = 3$ (штриховая линия), $i = I - i = 8$ (сплошная линия). Характер этих кривых типичен для каждой из зон $i < i_m$ и $i > i_m$, но одновременно и демонстрирует суть их различий.

Для более полного охвата возможных вариантов рынков решаются две взаимообратные задачи. В первой задаче $p(x)$ и $c(x)$ – плотности бета-распределения, притом плотность $p(x)$ – с параметрами $\alpha_1 = 2.8, \alpha_2 = 2.9$, плотность $c(x)$ – с параметрами $\beta_1 = 3.2, \beta_2 = 3.1$. Такой набор параметров отвечает покупке на рынке волатильности в сочетании с игрой на повышение. Во второй задаче плотности меняются ролями: плотность $p(x)$ определяется параметрами $\alpha_1 = 3.2, \alpha_2 = 3.1$, а плотность $c(x)$ – параметрами $\beta_1 = 2.8, \beta_2 = 2.9$. Этот набор параметров отвечает уже продаже волатильности с игрой на понижение.

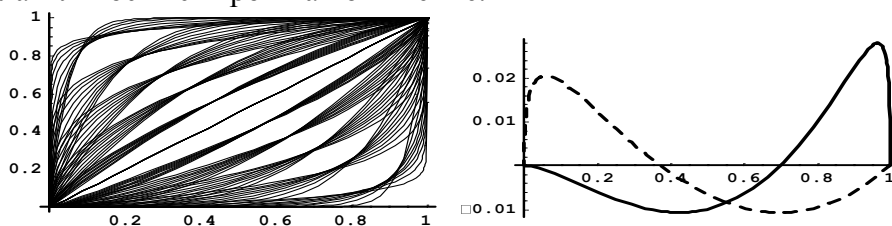


Рис. 2. Графики функций надсемейств $\phi(\varepsilon; \mu, \nu)$ (слева) и $\Delta\phi_n(\varepsilon)$ (справа)

В результате решения задач оптимизации по CC-VaR для всей построенной сетки значений параметров μ и ν можно сказать, что общие свойства решений аналогичны решениям подобных задач для предыдущего надсемейства и не зависит от типа задач. Имеем в обоих случаях:

(а) для всех $j = 1..J$ выполняется свойство $y_{i+1,j} < y_{i,j}$, $i = 1..I-1$,

(б) для всех $i < i_m$ – свойство $y_{i,j+1} < y_{i,j}$, $j = 1..J-1$,

(с) для всех $i > i_m$ – свойство $y_{i,j+1} > y_{i,j}$, $j = 1..J-1$.

Также имеем соответственно (а) $\chi_{i+1,j} \leq \chi_{i,j}$, (б) $\chi_{i,j+1} \geq \chi_{i,j}$, (с) $\chi_{i,j+1} \leq \chi_{i,j}$, где χ – средний относительный доход (или средняя доходность).

Список литературы

1. Agasandian G.A. Optimal Behavior of an Investor in Option Market / International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). – P. 1859-1864.

2. Агасандян Г.А. Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. – М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.

3. Агасандян Г.А. Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов. М.: ВЦ РАН, 2015. 297 с.

4. Агасандян Г.А. О признаках корректности семейств функций рискованных предпочтений в CC-VaR / Материалы X международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем" (MLSD'2017). (Москва, 2 октября – 4 октября, 2017). М.: ИПУ РАН, 2018. С. 184-187.

5. Крамер Г. Математические методы статистики / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.

Necessary and sufficient condition in analysis of correctness of risk-preferences functions families for CC-VaR

G.A. Agasandyan

Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Оптимальный портфель инвестора на комбинации рынков в задачах с CC-VaR*

Г.А.Агасандян

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
Москва, Россия*

Континуальный критерий VaR (CC-VaR) требует построения из имеющихся на рынке инструментов такого портфеля, чтобы порождаемый им доход q удовлетворял неравенствам $P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1-\varepsilon$ для всех $\varepsilon \in [0,1]$ ($P\{S\}$ – вероятность множества (события) S в соответствии с прогнозом инвестора) [1-3]. Монотонно возрастающая и непрерывная функция $\phi(\varepsilon)$ определяет рискованные предпочтения инвестора. Алгоритм оптимизации портфеля основан на анализе функции относительных доходов с использованием процедуры Неймана-Пирсона из математической статистики [4]. Базис для портфеля инвестора образуют индикаторы сценарного рынка.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00816).

Инвестор является участником сразу трех частично увязанных между собой рынков разных размерностей. Один из них является (для простоты) двумерным рынком, а два других – одномерными. При этом базовые активы одномерных рынков образуют пару базовых активов двумерного. Такая схема именуется нами *комбинированным* (2, 1)-мерным рынком. Она естественным образом расширяется до совокупности рынков больших размерностей.

В общем случае решение ищется в форме совмещения трех портфелей на совокупности трех рынков. Оно основывается на анализе поточечных, или по сценариям в дискретных схемах, расхождений в относительных доходах на рынках, обусловленных расхождениями в ценах на разных рынках. Из дискретных схем рассматриваются наиболее простые сценарные рынки и портфели.

Для простоты изложения рассматривается *комбинированный* (2,1)-мерный рынок, состоящий из одного двумерного рынка и одного одномерного, при этом базовый актив одномерного рынка служит одним из базовых активов двумерного. А решение ищется в виде комбинации, вообще говоря, двух портфелей – одного двумерного и одного одномерных.

При рассмотрении теоретических двумерного и одномерного рынков используются обозначения X и Y для множеств значений базовых активов X и Y , при этом стоимостная и прогнозная плотности обозначаются для двумерного рынка соответственно $c(x, y)$ и $p(x, y)$, для одномерного – $c_X(x)$ и $p_X(x)$.

Для (первого) одномерного рынка задаются одномерные стоимостная $c_X(x)$ и прогнозная $p_X(x)$ плотности, $x \in X$, порождающие меры $P_X\{\cdot\}$ и $C_X\{\cdot\}$ соответственно. Первая сформирована рынком на начало периода, а вторая дает прогноз инвестора на его конец. Важный для оптимизации относительный доход $\rho_X(x) = p_X(x)/c_X(x)$.

Платежная функция (функция доходов) произвольного инструмента G_X одномерного рынка с базовым активом X обозначается $\pi(x; G_X)$, его рыночная стоимость – $|G_X|$, а средний доход – $\|G_X\|$.

Базисными на рынке являются инструменты $D_X(s)$, $s \in X$, с δ -функцией в качестве платежной: $\pi(x; D_X(s)) \equiv \delta(x; s)$.

Для *двумерного* рынка задаются двумерные стоимостная $c(x, y)$ и прогнозная $p(x, y)$ плотности, $x \in X$, $y \in Y$, порождающие меры $P\{\cdot\}$ и $C\{\cdot\}$ соответственно, при этом $\rho(x, y) = p(x, y)/c(x, y)$.

Платежная функция произвольного инструмента G *двумерного* рынка с базовыми активами X и Y обозначается $\pi(x, y; G)$. Базисными на двумерном рынке являются инструменты $D(s, t)$, $s \in X$, $t \in Y$, с $\pi(x, y; D(s, t)) \equiv \delta(x, y; s, t)$.

Имеют место соотношения

$$\int_{X \times Y} c(x, y) dx dy = 1/r, \quad \int_X c_X(x) dx = 1/\chi_X, \quad (1)$$

$$c_1(x) = \int_Y c(x, y) dy, \quad c_2(y) = \int_X c(x, y) dx. \quad (2)$$

Плотность $c(x, y)$ является атрибутом лишь собственно двумерного рынка. Как обычно можно принять, что $r = 1$. Одномерная плотность $c_X(x)$ не обязана совпадать с маргинальной для двумерного рынка плотностью $c_1(x)$, т.е. $c_X(x) \neq c_1(x)$, но при этом $p_X(x) \equiv p_1(x)$. Из них определяются функции относительных доходов $\rho(x, y)$, $\rho_1(x)$, $\rho_X(x)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Плотность $c(x, y)$ является стоимостью двумерного инструмента $D(x, y)$ на двумерном рынке, $c_1(x)$ – двумерного инструмента $D_1(x)U_2$ на том же рынке, а плотность $c_X(x)$ – стоимостью одномерного инструмента $D_X(x)$ на одномерном рынке.

Вообще говоря, можно рассматривать тройственный рынок, если подключить еще второй одномерный рынок. Тогда самый общий случай сводится к отсутствию ограничений на ценообразование. Такой вариант (G) фактически предполагает, что арбитраж по рынкам затруднен. Но для упрощения мы рассматриваем вариант A, на котором арбитраж легко реализуем, что приводит к согласованию ставок на рынках.

Тогда, принимая $\chi_X > 1$, получаем, что второй рынок нам вообще не потребуется и, более того, $c_X(x) \equiv \chi^{-1}c_1(x)$, $x \in X$.

Напомним еще, что CC-VaR требует, чтобы порождаемый портфелем инвестора доход q удовлетворял неравенствам

$$P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon \text{ для всех } \varepsilon \in [0, 1].$$

В качестве иллюстрации рассматривается пример, в котором

$$c(x, y) = 27/160 - (x+1/2)^2/40 - (y-1/2)^2/40 - (z-1/2)^2/40,$$

$$p(x, y) = 7/40 - x^2/20 - y^2/20 - z^2/20.$$

Интегрирование дает

$$c_1(x) = (16 - 3x - 3x^2)/30, \quad c_X(x) = \chi^{-1}c_1(x).$$

Графики доходов оптимальных по CC-VaR портфелей на исходных одномерном и двумерном ранках при дискретизации 13×12 представлены на рис. 1.

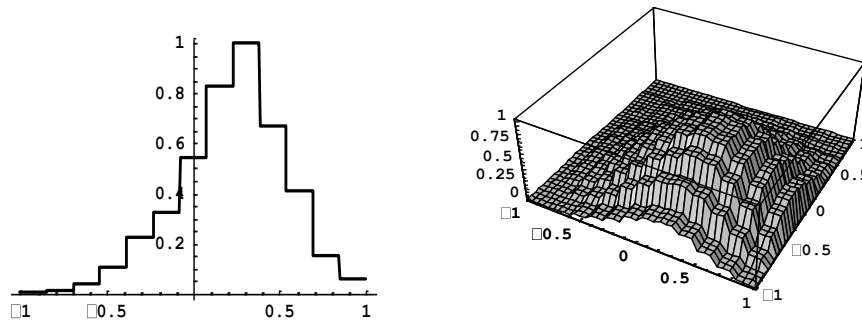


Рис. 1. Доходы исходных оптимальных портфелей

Предлагается следующее правило взаимозамещения рынков и построения оптимального комбинированного портфеля. За основу берется оптимальный портфель исходного двумерного рынка, и производится поточечная замена всех тех и только тех компонент портфеля соответствующими компонентами того исходного одномерного рынка (с сопоставимыми по вероятностям весами), для которого относительный доход выше.

Формально, вводится система $\{M_s, s \in X\}$ подмножеств Y , и правило переключений записывается в виде (для $s \in X, t \in Y$)

$$t \in M_s (\subset Y) \Leftrightarrow \{\rho_X(s) > \rho(s, t)\}, \quad \rho_X(x) = \chi \rho_1(x).$$

Рассмотрим индикатор двумерного рынка как объединение базисных инструментов $D(s, t)$ по $t \in M_s$

$$M(s) \equiv D_1(s) \times H_2\{M_s\} = \int_{M_s} D(s, t) dt, \quad s \in X, \quad (3)$$

с ценой и вероятностью (средним доходом) соответственно

$$|M(s)| = \int_{M_s} c(s, t) dt, \quad \|M(s)\| = \int_{M_s} p(s, t) dt. \quad (4)$$

Его двумерная платежная функция представляется в виде произведения $\delta(x-s)$, $x \in X$, на характеристическую функцию множества M_s по $y \in Y$. Она сингулярна по x и конечна по y .

Замещать предстоит каждый инструмент $D_1(s)$, $s \in X$, в инструменте двумерного рынка инструментом одномерного рынка $D_{X,s}$. Рыночная реализация такого ограниченного замещения осуществляется *рандомизацией* посредством *биномиальной случайной величины* \mathcal{G}_s с вероятностью успеха (замещения) θ_s , равной *условной прогнозной* вероятности множества M_s цен второго базового актива при цене s первого (и потому не превосходящей единицы). Именно

$$D_X^{cmb}(s) = \mathcal{G}_s D_X(s) U_2, \quad s \in X, \quad (5)$$

$$\theta_s = P\{M_s | s\} = \int_{M_s} p(s, y) dy / p_1(s).$$

Подобный выбор параметров θ_s обусловлен требованием уравнивать вероятности, связанные с инструментами $\mathcal{G}_s \mathbf{D}_{X;s}$ (5) (порождаемые ими средними доходами), с соответствующими вероятностями, связанными с инструментами $\mathbf{M}(s)$.

Действительно, цена каждого такого инструмента, сформированная на первом одномерном рынке и связанная с ним вероятность соответственно равны ($s \in X$)

$$|\mathbf{D}_X^{cmb}(s)| = \theta_s c_X(s), \quad \|\mathbf{D}_X^{cmb}(s)\| = \int_{M_s} p(s, y) dy = \theta_s p_1(s).$$

В результате получаем инструменты (5), для которых параметры \mathcal{G}_s играют роль начальных весов, встроенных в новые базисные инструменты *комбинированного* рынка. Эти инструменты представляют в оптимальном *комбинированном* портфеле первый одномерный рынок и непосредственно вовлекаются в алгоритм оптимизации по CC-VaR.

Остальными базисными инструментами остаются инструменты $\mathbf{D}(s, t)$, исходного двумерного рынка с ценами $c(s, t)$, и вероятностями (средними доходами) $p(s, t)$, $s \in X$, $t \in Y$. На них для каждого $s \in X$ приходится дополнительная к определяемой (4) вероятность, и они будут представлять в оптимальном комбинированном портфеле исходный двумерный рынок.

Для этого базиса формируется единая функция *относительных доходов* и к ней применяется общий теоретический основанный на процедуре Неймана-Пирсона [4] алгоритм оптимизации. В результате его работы с новой функцией относительных доходов производится новое назначение вероятностей, и строится новая весовая функция базисных инструментов. И оптимальный *комбинированный* портфель приобретает вид

$$\mathbf{G}^{cmb} = \int_X g_X^{cmb}(s) \mathbf{D}_X^{cmb}(s) ds + \int_X \left(\int_{M_s} g^{cmb}(s, t) \mathbf{D}(s, t) dt \right) ds \quad (6)$$

Величина \mathcal{G}_s является случайной биномиальной с параметром θ_s , совпадающим с ее средним значением. И потому представление (6) дает случайный портфель. Его реализациями служат два портфеля, получаемые заменой \mathcal{G}_s нулем и единицей. Они чередуются по правилу построения последовательности взаимонезависимых случайных величин с биномиальным распределением.

Формально, заменяя рандомизированный инструмент в первом интеграле инструментом

$$\mathbf{M}_X(s) \equiv \mathbf{D}_X(s) \times \mathbf{H}_2\{M_s\}, \quad (7)$$

который без привлечения виртуализации [3] нереализуем, мы получаем упрощенную конструкцию двумерного портфеля с идентичными весами, называемую нами *идеалистичной* версией комбинированного портфеля, которая удобна для графической иллюстрации,

$$\mathbf{G}^{idl} = \int_X g_X^{cmb}(s) \mathbf{M}_X(s) ds + \int_X \left(\int_{M_s} g^{cmb}(s, t) \mathbf{D}(s, t) dt \right) ds. \quad (8)$$

Инструмент $\mathbf{M}_X(s)$, определяемый (7), совпадает с $\mathbf{M}(s)$ для каждого значения $s \in X$ по платежной функции и прогнозной вероятности множества M_s , но с ценами, сочетающимися цены обоих исходных рынков. При всей условности представления комбинированного портфеля в форме (8) его можно использовать для графической иллюстрации платежной функции в виде единой двумерной функции.

В терминах дискретного рынка полученные формулы переписываются в новых и очевидных обозначениях

$$\mathbf{M}_i = \sum_{j \in M_i} \mathbf{D}_{ij}, \quad |\mathbf{M}_i| = \sum_{j \in M_i} c_{ij}, \quad \|\mathbf{M}_i\| = \sum_{j \in M_i} p_{ij},$$

$$\theta_i = \mathbf{P}\{M_i | i\} = \sum_{j \in M_i} p_{ij} / p_{1;i}, \quad \mathbf{D}_{X;i}^{cmb} = \mathcal{G}_i \mathbf{D}_{X;i} \times \mathbf{U}_2,$$

$$|\mathbf{D}_{X;i}^{cmb}| = \theta_i c_{X;i}, \quad \|\mathbf{D}_{X;i}^{cmb}\| = \theta_i p_{1;i}, \quad i \in I;$$

$$\mathbf{M}_i^{cmb} \equiv \mathbf{D}_{X;i}^{cmb} = \mathcal{G}_i \mathbf{D}_{X;i} \times \mathbf{U}_2;$$

$$\mathbf{G}^{cmb} = \sum_{i \in I} g_{X;i}^{cmb} \mathcal{G}_i \mathbf{D}_{X;i} + \sum_{i \in I, j \in M_i} g_{ij}^{cmb} \mathbf{D}_{ij};$$

$$G^{idl} = \sum_{i \in I} g_{X,i}^{cmb} M_{X,i} + \sum_{i \in I, j \in M_i} g_{ij}^{cmb} D_{ij}, \quad M_{X,i} \equiv D_{X,i} \times H_{2;M_i}.$$

На рис. 2 приводятся графики доходов одномерной (слева) и двумерной (справа) частей комбинированного портфеля G^{cmb} .

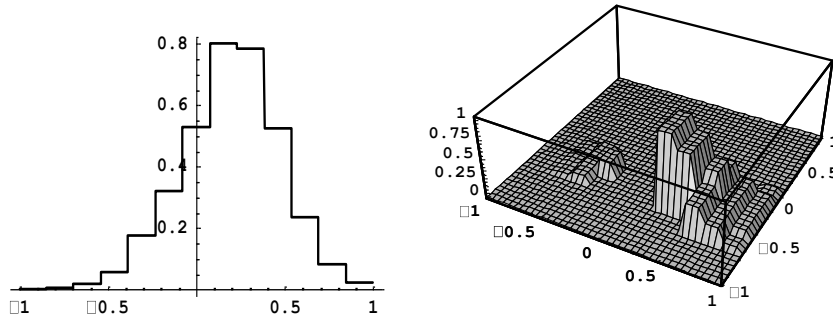


Рис. 2. Доходы составных частей портфеля G^{cmb}

В качестве средства проверки наряду с комбинированным портфелем можно построить и его нереализуемый аналог, названный нами суррогатным, для которого в качестве базисных используются исключительно инструменты исходного двумерного рынка, но с использованием и цен одномерного:

$$G^{sg} = \sum_{i \in I, j \in J} g_{ij}^{sg} D_{ij}^{sg}.$$

На сценарном рынке числовые показатели для комбинированного и суррогатного портфелей будут различаться, хотя и незначительно, как и графики их платежных функций. Тем не менее относительно простой *суррогатный* портфель может использоваться как дополнительное средство проверки всех расчетов.

Может быть полезной и матрица замещений

$$A = \|a_{ij}\|, \quad a_{ij} = \{0, \chi p_{1;i}/c_{1;i} > p_{ij}/c_{ij}; 1, \text{ иначе}\}, \quad j \in J, i \in I.$$

Эта матрица фактически перефразирует условие замещения: имеет место $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow j \in M_i (\subset J)$, $i \in I$; остальные ее элементы – нулевые.

Алгоритм оптимизации порождает векторы весов оптимальных портфелей и по ним записи результатов. Имеем для двумерного портфеля

$$L_2 = \langle A = 0.275544, R = 0.337105, y = 0.223415 \rangle.$$

Аналогично для портфеля одномерного рынка при $\chi = 1$

$$\rho_X = \{0.6042, 0.7501, 0.8696, 0.9668, 1.0441, 1.1033, 1.145, 1.1692, 1.1745, 1.1584, 1.1164, 1.0407, 0.9179\}.$$

$$L_X = \langle A = 0.332935, R = 0.377218, y = 0.133008 \rangle.$$

При этом для $\chi^{-1} = 0.87$

$$L_\chi = \langle A = 0.289654, R = 0.377218, y = 0.302308 \rangle.$$

Для построения комбинированного портфеля отправляемся от векторов ρ и ρ_X и применяем правило замещения при $\chi^{-1} = 0.87$.

На рис. 3 приводятся графики доходов оптимальных комбинированного (слева) и суррогатного (справа) портфелей (комбинированный портфель дается в идеалистичной версии (8) с применением (7)).

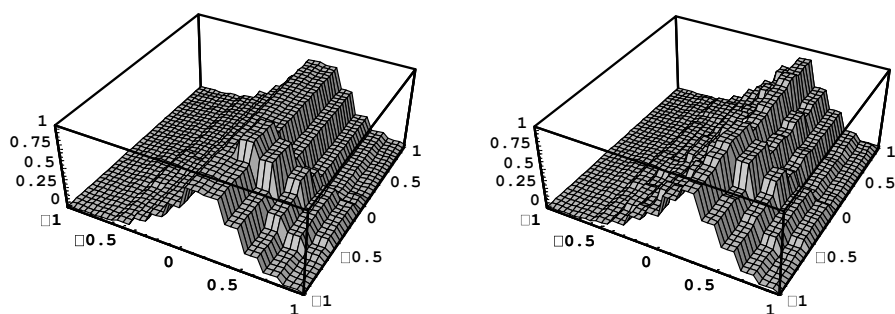


Рис. 3. Доходы комбинированного (идеалистичного) и суррогатного портфелей

Вычислительные эксперименты подтверждают, что при всех $\chi > 1$ доходность комбинированного портфеля практически совпадает с суррогатной и превышает доходность одномерного портфеля. С ростом χ они сближаются, т.е. одномерная компонента комбинированного портфеля все более превалирует.

Список литературы

1. Agasandian G.A. Optimal Behavior of an Investor in Option Market / International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). Pp. 1859-1864.
2. Агасандян Г.А. Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. – М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
3. Агасандян Г.А. Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов. М.: ВЦ РАН, 2015. 297 с.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Наука, 1975. 750 с.

Optimal portfolio of an investor in combination of markets in the problems with CC-VaR

G.A. Agasandyan

Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Russia

P*-адическая аппроксимация динамики индекса РТС

С.А. Ахуньянова, П.М. Симонов

ПГНИУ, Пермь, Россия

Аннотация. В качестве математического метода, на основе которого можно проводить исследования колебаний цен финансовых инструментов, предлагается *p*-адическая кусочно-линейная аппроксимация. Изучаются основы *p*-адической математики: дается определение *p*-адического числа, его формальное представление через связь с действительным числом, перечисляются арифметические операции, которые производятся на *p*-адических числах. Изучаются особенности *p*-адического моделирования экономических процессов: определяется оптимальное количество исходных (моделируемых) точек. Для этого строится несколько *p*-адических моделей динамики индекса РТС. Среди полученных моделей наименьшей погрешностью, скорректированной на величину входящих в модель точек, обладает *p*-адическая кусочно-линейная аппроксимация, найденная для 54-х точек. Исследуется возможность *p*-адического предсказания значений индекса РТС.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, № 18-01-00332 А.

Таким образом, данная статья нацелена на изучение такого экономического процесса, как ценовые колебания финансовых инструментов, с помощью математического аппарата – p -адического анализа.

В настоящее время эконометрика является наиболее быстро развивающейся и потому востребованной областью экономической науки. С помощью эконометрики ведутся исследования динамики цен на финансовых рынках. И это по преимуществу инструментарий экономистов. Если говорить об обратном изучении – об изучении колебаний цен с позиций математики – то следует рассматривать p -адический анализ.

В 1897 г. К. Гензелем были введены p -адические числа для решения диофантовых (полиномиальных) уравнений. В течение почти 100 лет после открытия p -адических чисел они рассматривались лишь как объекты чистой математики: p -адические числа нашли свое применение в различных математических областях таких, как алгебраическая геометрия, теория представлений и теория чисел [1]. Далее с 1980-х гг. p -адические числа стали использоваться в физике (например, p -адические модели квантовой механики и теории струн, описывающие изменение геометрии пространства на планковских масштабах), биологии (например, описание моделей мышления на основе p -адического анализа). См., напр., в [2].

С 2000-х гг. p -адические числа предложено применять в экономике, для описания колебаний цен, наблюдаемых на финансовых рынках. Во-первых, на основе анализа типов отображений (функций) между различными полями p -адических чисел определены области эконометрики, для которых возможно применение аппарата p -адической математики [3]. Во-вторых, разработаны p -адические модели ценовых колебаний [4]. В-третьих, ведутся работы по определению типов p -адических прогнозных сценариев [5], по сравнению p -адических и эконометрических моделей и прогнозов [6].

Краткий обзор основ p -адической математики

Существующие методы классической математики описывают метрические характеристики различных эконометрических переменных, используя только «обычную» евклидову метрику, которая, конечно, в настоящей пространственно-временной среде вполне обоснована, однако имеет определенные ограничения. Одно из важных ограничений заключается в том, что евклидова метрика не способна описать свойства сложных систем, пространство переменных которых имеет иерархическую структуру, в то время, как ультраметрические пространства являются естественной моделью для систем с иерархией: шары дробятся на подшары иерархическим образом, и расстояние от точки вне шара до точки внутри шара определяется только шаром (т.е. иерархически зависит от шаров) [7].

Важнейшим примером ультраметрического пространства является поле p -адических чисел [7]. P -адическая метрика считается естественным методом описания свойств этих систем. Если говорить о преимуществах p -адической метрики, то оно также состоит в результатах всех измерений: они являются рациональными числами и принадлежат как множеству действительных чисел, так и множеству p -адических чисел [3].

Далее приведем определение, структурные (форма записи) и алгебраические (арифметические операции) свойства p -адических чисел.

Определение [8]. P -адическим числом p называется такое простое число ($p \in \mathbb{N}$), которое удовлетворяет тождеству:

$$x \equiv 0 \pmod{p^\gamma}, \quad (1)$$

где: $x \in \mathbb{Z}$ – произвольное ненулевое целое число, $\gamma \in \mathbb{N}$ – наибольшее целое неотрицательное число. Тождество (1) означает, что p^γ делит $x - 0$.

Утверждение [9]. Пусть $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ – некоторое простое число. Тогда любое вещественное (действительное) число может быть записано в виде ряда:

$$x = p^\gamma (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots) = p^\gamma \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i, \quad (2)$$

где: $\gamma, a_i \in \mathbb{Z}$ – целые, $0 \leq a_i \leq p - 1$. Если $a_0 \neq 0$, то представление (2) однозначно.

На p -адических числах можно ввести арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Операции производятся аналогично операциям со степенными рядами. Поле \mathbb{Q}_p является коммутативно-ассоциативной группой по сложению, $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ является коммутативно-ассоциативной группой по умножению [10].

В заключение хотелось бы отметить следующее. Существует связь между полями действительных и p -адических чисел: действительные числа можно представить посредством функции, независимая переменная которой имеет p -адическое значение. При этом сама функция может либо принимать, либо не принимать p -адическое значение [3]. Далее предпринята попытка на основе свойств p -адических чисел и изложенного предположения смоделировать процесс динамики индекса РТС.

Постановка и результаты решения задачи исследования

Цель исследования в работе – изучение особенностей математического метода p -адического моделирования. В этой связи возникает вопрос о том, какой горизонт моделирования является оптимальным для построения наиболее удачной p -адической кусочно-линейной аппроксимации, т.е. аппроксимации, имеющей наименьшую из найденных в рамках эксперимента величину погрешности. Для ответа на поставленный вопрос отобраны данные индекса РТС в почасовой динамике [11]. На основе отобранных данных получены данные по доходностям индекса РТС, согласно формуле (3) [12].

$$r = \ln[y(t)] - \ln[y(t - \Delta t)], \quad (3)$$

где: r – величина доходности; $y(t)$ – величина цены закрытия в текущий момент времени, т.е. в момент времени t ; $y(t - \Delta t)$ – величина цены закрытия в предыдущий момент времени, т.е. в момент времени $t - \Delta t$, где Δt – интервал времени, за которое происходит изменение величины цены закрытия. В рамках настоящей работы $\Delta t = 1$ час, причем в 1 дне = 9 часов.

В рамках проводимого эксперимента приняты следующие предпосылки.

1. Количество входящих в модель точек выбрано на основе последовательности Фибоначчи. Данная предпосылка исходит из того, что финансовые временные ряды (а именно, величина доходности) являются масштабно-инвариантными [12], т.е. обладают свойством сохранять свой вид при изменении всех расстояний и промежутков времени в одинаковое число раз. Причем подразумевается лишь изменение единиц измерения, само пространство-время остаётся неизменным. Другими словами, финансовые ряды представляют собой фракталы, а они могут быть получены на основе чисел Фибоначчи.

2. Для всех моделей (они являются моделями паттерна «Флэт», что переводится с англ. «Flat» как «плоский», «ровный») значение p -адического числа равно двум.

3. Для всего периода моделирования нивелирована разница между Δt , определяющим время внутри одного дня, и Δt , определяющим время между двумя днями.

Таким образом, решая задачу p -адического моделирования по методике, представленной в [6], с учетом формулы (3) и вышеизложенных предпосылок построены пять p -адических кусочно-линейных аппроксимации, полученные на основе 9, 36, 54, 90, 144 моделируемых точек. Данное количество точек полностью или приблизительно соответствует последовательности Фибоначчи. Сравнение моделей произведено на основе оценки погрешности модели в целом (4) и оценки погрешности, приходящейся на одну исходную (моделируемую, аппроксимирующую) точку (5).

$$\varepsilon = \sum_{t=1}^T |y - \hat{y}_{s,j}|, \quad (4)$$

$$\varepsilon' = \frac{\sum_{t=1}^T |y - \hat{y}_{s,j}|}{T}, \quad (5)$$

где: y – исходные данные; $\hat{y}_{s,j}$ – данные, полученные на основе модели; $t = \overline{1, T}$ – количество исходных (моделируемых) точек.

Результаты эксперимента удобно представить в виде таблицы (см. табл.).

Табл. Сравнительная таблица оценок погрешности p -адических моделей

| Модель на основе количества точек | ε (общая оценка погрешности) | ε' (часть погрешности, приходящаяся на одну исходную точку) |
|-----------------------------------|--|---|
| $T = 9$ | 0,0000098273 | 0,00000109192 |
| $T = 36$ | 0,035218664 | 0,000978296 |
| $T = 54$ | 0,006457614 | 0,000119585 |
| $T = 90$ | 0,092503129 | 0,001027813 |
| $T = 144$ | 0,216548362 | 0,001503808 |

На основании таблицы можно сделать вывод о том, что оптимальное количество исходных точек для p -адического моделирования флуктуационных процессов, представленных в виде почасовых данных доходности, равно 9-ти. Несмотря на это, полученные на основе данной модели прогнозы (даже на одну точку вперед) плохо адаптированы к реальным данным: прогнозные значения показывают противоположное действительному движение доходности индекса РТС. Если рассмотреть модель, составленную на основе 54-х точек, то прогнозные значения, получаемые на ее основе, дают хорошее приближение к реальным данным (см. рис.) для будущих 10-ти значений (11-ая точка определяет противоположное реальному движение). Для построенной p -адической модели лучшее приближение дает сценарий продолжающегося развития, что подтверждает вывод, сделанный в работе [5].

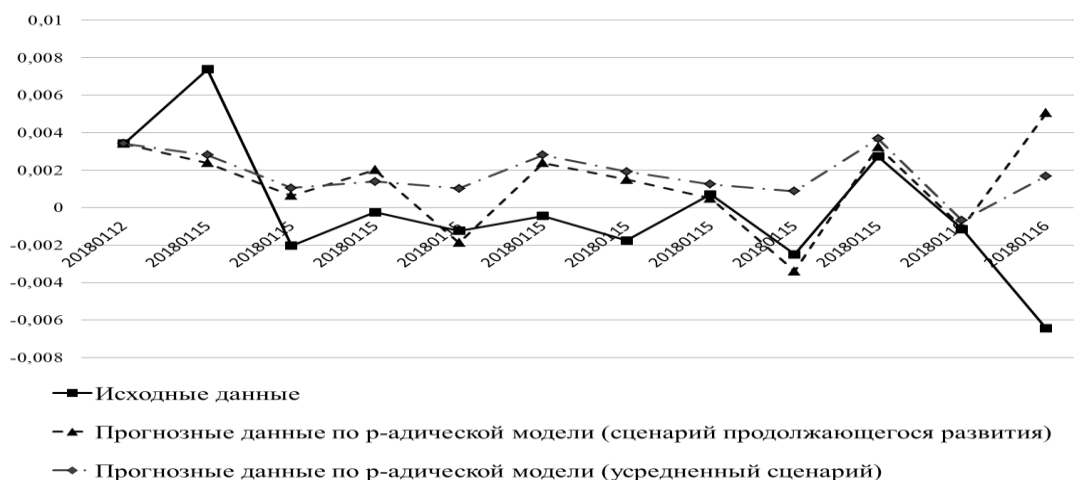


Рис. График реальных данных (динамики доходности индекса РТС) на прогнозный период и графики прогнозов двух типов на основе p -адической модели, построенной по 54-м точкам

Таким образом, неотъемлемой частью современных исследований становится их междисциплинарность. Данная тенденция говорит, о возможности обнаружения новых проблем, образующихся на стыках наук, а также о возможности решения старых задач одной науки с помощью методов другой науки. В этом плане интересным представляются исследования экономических процессов и явлений с помощью инструментария математики.

Список литературы

1. Альбеверио С.А., Тироцци Б., Хренников А.Ю., Шмедт С. *P*-адические динамические системы // Теоретическая и математическая физика. 1998. Том 114, номер 3. С. 349–365.
2. Khrennikov A. Non-archimedean analysis: quantum paradoxes, dynamical systems and biological models. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 371 p.
3. Dragovic B., Joksimovic D. On possible uses of *p*-adic analysis in econometrics. *Megatrend Review*. 2007. V. 4, № 2. P. 5–16.
4. Жарков В.М. Адельная теория фондового рынка // Вестник Пермского университета. Сер. «Информационные системы и технологии». 2003. Выпуск 6. С. 75–81.
5. Симонов П.М., Филимонова С.А. *P*-адическое моделирование динамики индекса РТС в зависимости от таймфреймов // Вестник ПГУ. Сер. «Экономика». 2016. № 4 (31). С. 74–85. doi: 10.17072/1994-9960-2016-4-74-85.
6. Ахуньянова С.А., Симонов П.М. Моделирование и прогнозирование на финансовых рынках с помощью эконометрики и эконофизики [Электронный ресурс]: монография / С.А. Ахуньянова, П.М. Симонов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Электрон. дан. Пермь, 2017. 5 Мб. Режим доступа: URL: <https://elis.psu.ru/node/>. Загл. с титул. экрана (дата обращения 10.02.2017).
7. Волович И.В., С. В. Козырев С.В. *P*-адическая математическая физика: основные конструкции, применения к сложным и наноскопическим системам // Математическая физика и её приложения. Вводные курсы. Выпуск 1, 2009, С. 1–30.
8. Коблиц Н. *P*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции. Пер с англ. В.В. Шокурова / Под ред. и с предисловием Ю.И. Манина. М.: Мир, 1981. 192 с.
9. Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленев Е.И. *P*-адический анализ и математическая физика. М.: Физмалит, 1994. 352 с.
10. Sorenson J. Exploring *p*-adic numbers and Dirichlet characters. Rochester: University of Rochester, Professor John Harper, MTH 391W, Spring 2009. 17 p.
11. Инвестиционная компания «Финам» [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: <http://www.finam.ru/>, свободный (дата обращения 10.02.2017).
12. Дубовиков М.М. Эконофизика. Обзор основных направлений // Журнал Новой экономической ассоциации. Первый Всероссийский конгресс по эконофизике «Эконофизика, финансовые рынки, экономический рост» 3-4 июня 2009 г., Москва. 2009. С. 260–265. (материалы доклада взяты с URL: <http://www.myshared.ru/slide/748767/>) (дата обращения 10.02.2017).

***P*-adic approximation of dynamics of the RTS index**

S.A. Akhunyanova, P.M. Simonov
PSNRU, Perm, Russia

Итеративные методы в финансовых процессах

О.Б. Байрамов, В.В. Охрименко
ВЦ РАН им. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
МФТИ (Гос университет)

Финансовые процессы по сути своей динамичны. Поэтому к анализу различных постановок вполне естественно привлечение итеративные описаний, которые проистекают как из формальных подходов (поиск экстремумов или седловых точек итеративными методами), так и по существу аналогий и техник физического мира. Работа основана на результатах из [1] и является дальнейшим развитием построений в [2, 3].

Динамическое описание. Следуя установкам [1] динамику инвестиционного процесса $\{x = x(t)\}$, как физического, естественно описать некой системой дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, известных оперирующей стороне или неизвестных. Точнее, это будут интегро-дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами, которые в частных классах уравнений вырождаются в дифференциальные уравнения, в разностные уравнения или в собственно интегральные уравнения. Предположим также, что качество текущих инвестиций оценивается набором показателей $(y_1, \dots, y_m) = y = y(t)$. В таком кинетическом представлении можно описывать различные задачи управления, диверсификации, объединения и трансформации организационных систем.

Исходя из кинетических описаний в каждой точке $(x(t), y(t))$, эти динамические уравнения порождают отношение предпочтения $(x, y) \Rightarrow (x + dx, y + dy)$

Говорят, что отношение предпочтения интегрируемо, если уравнения динамики допускают интеграл движения вида $S(x, y) = const$. Для простоты изложения рассмотрим скалярный случай, когда функция S является скалярной, а набор показателей качества потребления состоит из одной компоненты, т.е. $m = 1$. Если в окрестности текущей точки $(x(t), y(t))$ функция $S(x, y)$ удовлетворяет теореме о неявной функции, то переменную y можно в явном виде выразить как функцию от x и определить её как функцию полезности: $y = f(x); dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$. Понятие функции полезности инвестора активно используется в экономических исследованиях.

Пусть отрезок кривой инвестиций начинается в точке $(a_1, \dots, a_n) = a$ и кончается в точке $(b_1, \dots, b_n) = b$. При движении по отрезку приращение показателя качества можно было бы, при наличии функции полезности, ожидать равным $y(t_b) - y(t_a) = f(b) - f(a)$. Вольтерра указал, что в общем случае равенство не имеет места, а приращение выразится как функционал, определённый на конкретных кривых, стягивающих точки a и b . Отношение предпочтения тогда окажется неинтегрируемым. Кроме того, следует помнить, что в динамике состояние процесса может определяться предысторией инвестиций, в частности, интегралом $z_n(t) = \int_0^t x_n(\tau) d\tau$.

Теперь обратимся к рассмотрению многоцелевой задачи оптимизации. $f_1(x) \rightarrow \max, f_2(x) \rightarrow \max, \dots; x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq R^n; n < \infty$. В общепринятых подходах теории многоцелевой максимизации рассматриваются различные точки оптимума $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X$, такие, что все лица, принимающие решения (ЛПР), избирают эту точку в процессе анализа исходной задачи, руководствуясь одним из многих «принципов оптимальности». Частным примером точек оптимума служит равновесие по Нэшу. Рассмотрим расширенную постановку задачи, при которой аргументы функций представляют собой в свою очередь функции времени — $x = x(t); -\infty < a_0 \leq t \leq b_0 < +\infty$.

Пусть решением нашей задачи многоцелевой максимизации занимается коллектив ЛПР, которые совместно или сепаратно осуществляют поиск, утверждение и реализацию решений, т.е. занимаются построением кривых контролируемых переменных

$$\{x_1 = x_1(t)\}, \{x_2 = x_2(t)\}, \dots, \{x_n = x_n(t)\}.$$

Естественно предположить, что данный процесс построения контролируемых переменных относится к физическим процессам, и повторить всё, что было сказано выше о моделировании процесса. Отметим, помимо траекторий, сходящихся к точкам

оптимума («узлы» или «фокусы»), уравнения динамики рассматриваемой системы способны порождать интегральные траектории иных топологических классов. Причём средние значения целевых функций $f_1(x(t)), \dots, f_n(x(t))$ на таких траекториях могут оказаться больше значений функций в точках оптимума, т.е.

$$\langle f_1(x(t)) \rangle > f_1(\xi), \langle f_2(x(t)) \rangle > f_2(\xi), \dots, \langle f_n(x(t)) \rangle > f_n(\xi).$$

Соответствующие математические примеры приводятся в [3]. Назовём динамическим компромиссом задачи многоцелевой максимизации любой аттрактор системы динамических уравнений, которая описывает процесс построения кривых контролируемых переменных в данной задаче, - за исключением точек покоя. Устойчивую точку покоя естественно называть статическим компромиссом. Примерами динамических компромиссов могут служить предельные циклы, предельные торы, «странные аттракторы», в окрестности коих система ведёт себя псевдослучайным образом

ПРИМЕР. Два ЛПР на плоскости с целевыми функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно.

Пусть первый партнёр пытается нащупать лучшие значения своей функции $f_1(x)$ путём изменения значений своей контролируемой переменной $x_1(t)$ при помощи итеративного метода первого порядка, имеющего непрерывный аналог $\dot{x}_1(t) = \phi_1(x, f_1(x), f_2(x)) = S_1(x)$

Пусть второй партнёр пытается нащупать лучшие значения своей функции $f_2(x)$ путём изменения значений своей контролируемой переменной $x_2(t)$ при помощи итеративного метода первого порядка, имеющего непрерывный аналог

$$\dot{x}_2(t) = \phi_2(x, f_1(x), f_2(x)) = S_2(x)$$

Если функции $S_1(x)$ и $S_2(x)$ являются аналитическими функциями своих переменных, то, как показали А. Пуанкаре и И. Бендиксон, автономная система

дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = S_1(x) \\ \dot{x}_2 = S_2(x) \end{cases}$$

может иметь только два типа аттракторов:

- 1) Устойчивую точку покоя (статический компромисс)
- 2) Устойчивый предельный цикл или полицикл (динамический компромисс)

Причём, согласно теореме Пуанкаре-Бендиксона, каждый предельный цикл системы обязательно должен окружать собой одну или несколько точек покоя. В отличие от конструкций традиционной теории многоцелевой максимизации, динамические компромиссы весьма часто встречаются в практических задачах.

Наши динамические уравнения порождают отношения предпочтения. Скажем, в ПРИМЕРЕ имеются индивидуальные отношения предпочтения $(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 + dx_1, x_2)$; $(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1, x_2 + dx_2)$ и групповое отношение предпочтения $(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$.

Индивидуальные отношения предпочтения будут заведомо интегрированы, а групповое нет.

Последнее означает, что отсутствует универсальный показатель оптимальности вида $\phi = \phi(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, по которому определяется точка оптимума.

Итеративные методы решения задач исследования операций. Важным частным случаем общей записи являются оптимизационные задачи для линейных моделей производственных процессов, формулируемые в следующем виде: $(c, x) \rightarrow \max$

$$Ax \leq b, x \in E_n^+.$$

Для функции Лагранжа $L(x, \lambda) = (c, x) + (\lambda, b - Ax)$

при заданном значении x вычислим оптимальный отклик для множителя Лагранжа

$$\lambda^{opt}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } b - Ax \geq 0 \\ \eta, & \text{если } b - Ax < 0 \end{cases}$$

При заданном значении λ оптимальный отклик для уровня интенсивности x

$$x^{opt}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } c - \lambda A \leq 0 \\ \xi, & \text{если } c - \lambda A > 0 \end{cases}$$

Итеративный алгоритм поиска решений основывается на необходимых условиях оптимальности седловых точек Лагранжа и имеет вид:

$$x_{t+1} = x_t + \alpha_t (x_t^{opt}(\lambda_t) - x_t)$$

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + \beta_t (\lambda_t^{opt}(x_t) - \lambda_t)$$

Выбор управляющих параметров – членов последовательности $\{\alpha_t, \beta_t\}$, обеспечивающих сходимость данных процессов к седловым точкам функций Лагранжа, относится к разряду стратегических решений оперирующей стороны

Список литературы

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.186с.
2. Байрамов О.Б., Охрименко В.В.. Динамические компромиссы в задаче многоцелевой максимизации функций. Труды ORM 2016.
3. Охрименко В.В. Простая модель экономической динамики со спекуляциями. Препринт. М.: ВЦ РАН, 2002.32с

Iterative methods in financial processesitle of your thesis

O.B.Bayramov, V.V. Okhrimenko
Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Russia
MIPT, Moscow, Russia

Модель форка в системе Биткоин

И.И. Гасанов, Ф.И. Ерешко
ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН

Проект блокчейна Биткоин был задуман как система для ведения распределённого реестра транзакций. [1, 2]. Структурные особенности блокчейна обеспечивают высокую надёжность реестра при небольших затратах на его поддержание. Надёжность, в частности, обеспечивается т.н. консенсусом, общим согласием участников-майнеров с текущей версией реестра. Реестр транзакций строится как цепочка блоков (блокчейн), каждый из которых содержит некоторое множество исполненных в системе транзакций. Становление блокчейна, т.е. наращивание цепочки блоков данных, происходит в системе не централизованно, а благодаря параллельным и независимым усилиям участников, майнеров. Консенсус состоит в том, что все майнеры соглашаются с достоверностью текущей версии блокчейна, общей для них. Это, в свою очередь, обеспечивается механизмом, при котором каждый из майнеров проверяет корректность очередного вновь созданного блока и добавляет его в свою копию цепочки. Так как распространением информации о транзакциях и созданием блоков занимаются одновременно во множестве узлов системы, время от времени у майнера возникает выбор между двумя или больше версиями блокчейна. В этом случае он обязан поддержать ту, что содержит больше блоков (или имеет большую сложность). Тем не менее, иногда в системе возникают ситуации, когда часть майнеров

начинает развивать одну версию блокчейна, а остальные майнеры – другую. Дело в том, что очередные корректные (но не одинаковые) блоки могут быть созданы и начать распространяться по сети практически одновременно в разных точках системы. Майнеры будут включать в свой вариант блокчейна тот блок, который придёт к ним первым – и это будут разные блоки. Такое ветвление цепочки получило наименование форка.

Модель создаётся для исследования этого нежелательного явления, условий его возникновения и преодоления. Предполагается создание специального программного комплекса, который, собственно, и явится реализацией модели. Моделирование и исследование других аспектов весьма сложной системы Биткоина, таких, как схемы шифрования, хэширование данных, их защита, устойчивость к преднамеренному и непреднамеренному искажению и т.п. – дело будущего. Так как в модели изучаются только форки, остальные стороны функционирования Биткоина представлены в несколько упрощённом виде так, чтобы это их представление не мешало сосредоточиться на рассматриваемой проблеме.

Нижеследующее описание сделано в субъектной форме, в которой элементы, составляющие модель, выполняют отдельную самостоятельную работу. Предполагается, что в программном комплексе последовательно обрабатываются временные шаги модели и на каждом шаге модифицируется состояние каждого из её элементов – узлов сети.

Строится модель с дискретным временем. Шаги (такты) модели будем обозначать через t .

Рассматривается множество объектов, которые мы будем называть узлами Сети. Реальная сеть Биткоин составлена из узлов разной функциональности. Большую её часть составляют "лёгкие" узлы-кошельки, которые предназначены исключительно для обслуживания нужд их владельцев [2]. В данной модели они как отдельные узлы не рассматриваются. Их роль в модели заключается лишь в генерировании новых контрактов, которыми они и будут представлены. Кроме того, будем полагать, что все моделируемые узлы совмещают в себе майнинговые (создание и проверка новых блоков) и коммуникационные свойства

Число узлов сети на шаге t обозначим N_t . На каждом шаге модели могут создаваться новые узлы. Количество таких новых узлов есть некоторая случайная величина α^+ . С заданной вероятностью любой из существующих на шаге t узлов может на этом шаге прекратить существование. То есть число исчезающих узлов – это тоже случайная величина, но уже зависящая от мощности сети. Таким образом, число участников на шаге t – это переменная, случайная величина:

$$N_t = N_{t-1} + \alpha^+ - \alpha^- (N_{t-1}).$$

Предполагается, что новый узел сразу начинает функционировать, работая с текущим состоянием блокчейна. Так как в случае форка разные узлы могут поддерживать различные версии блокчейна, условимся, что новый узел принимает версию блокчейна того узла-корреспондента, который имеет наименьший номер. На практике уже существующие узлы могут временно отключаться и включаться вновь. В данной модели учёт этой возможности не принципиален.

Каждому узлу n приписывается некоторая условная величина P_n , характеризующая мощность майнингового оборудования [2]. Эта величина в модели выбирается вероятностным образом в момент возникновения узла. Полагаем, что она не меняется в продолжении всей жизни узла

Узлы сети связаны друг с другом двунаправленными дугами. Дуги моделируют каналы связи, по которым передаётся информация. Будем считать, что на каждом шаге t у узла должно быть не менее, чем s^{\min} каналов связи. Каналы выбираются случайным образом при создании узла и сохраняются. На шаге t у узла n может оказаться

меньшее число дуг, чем s^{\min} . Это может произойти из-за прекращения работы узла-корреспондента. Тогда для узла n случайным образом выбирается новый корреспондент. Новая дуга начинает функционировать с лагом времени t^s .

Участнику (узлу) n в момент времени t известен текущий вариант (возможно, один из) цепочки блоков. Каждый блок в модели характеризуется его номером и уникальным идентификатором (именем). Он содержит пронумерованные имена предыдущих блоков и множество имён, включённых в него транзакций. Предполагается, что каждую транзакцию отличает уникальный код (имя)

Каждый участник поддерживает пул, неучтённых (ещё не включённых в блокчейн, неподтверждённых) транзакций. Этот пул составлен из транзакций, полученных участником по сети от момента t' последнего включения участником блока в свою версию блокчейна, до текущего момента t , а также из транзакций, содержащихся в пуле к моменту t' и не попавших в последний блок.

На шаге t происходят следующие события. С заданной вероятностью $\mu(k)$ узел n принимает к обработке k вновь созданных транзакций. Это транзакции, созданные либо самим участником n , либо не представленными в модели, анонимными, держателями кошельков, которые, как подразумевается, напрямую коммутированы с узлом n . Узел включает эти транзакции в свой пул неподтверждённых транзакций. Их же он передаёт по каналам связи коммутированным с ним узлам.

Кроме того, узел принимает от своих корреспондентов передаваемые по сети транзакции, которые поступили ранее на другие узлы. Время передачи пакета транзакций от узла к узлу будем считать постоянным и обозначим τ . Участник проверяет, не содержатся ли эти транзакции в его пуле неподтверждённых транзакций. Те, которые там ещё не содержатся, он добавляет в пул, а также пересылает своим корреспондентам, если только они от них же и не получены.

Участник n на шаге t может получить от узлов-корреспондентов новый, очередной блок, созданный на одном из узлов сети. Получив новый блок, участник проверяет его номер. Если он меньше или равен номеру m , последнему в текущей цепочке участника n , то такой блок отвергается. Если этот номер равен $m+1$ или больше и не поступал на узел ранее на шагах $\leq t$ (на шаге t один и тот же блок может прийти несколько раз от разных корреспондентов), то блок пересылается по сети корреспондентам участника n . Данные нового блока распространяются по сети также со скоростью τ , т.е. узлы-корреспонденты получают этот блок на шаге $t+\tau$.

Если номер полученного блока равен $m+1$, и блок ссылается на блок m в цепи участника n как на предыдущий, то участник добавляет этот блок к своей версии цепочки. На практике участник должен проверить корректность полученного блока. Однако, т.к. проблемы защиты системы в данной модели не рассматриваются, то полагаем, что любой присланный блок корректен.

Если номер полученного блока $m' > m+1$, то участник n делает (обратный) запрос к узлу, приславшему данный блок. Это запрос с требованием выслать цепочку блоков с номерами $m+1 \leq m'' < m'$. Он будет получен адресатом на шаге $t+\tau$. На шаге $t+2\cdot\tau$ участник n получит ответ и добавит новые блоки к своей версии цепочки.

Если номер полученного блока равен $m+1$, но указанное в нём имя предыдущего блока отличается от имени блока m в цепи узла n , то участник n сравнивает имена блоков в своей цепочке с их именами в полученном блоке и находит номер \tilde{m} , первый, где есть расхождение. Затем он на том же шаге t делает (обратный) запрос к узлу, приславшему данный блок, с тем чтобы тот переслал ему все другие блоки, начиная с номера \tilde{m} . Некоторое время у участника n уйдёт на этот обмен данными и проверку присланной цепочки. Оценим это время как $t+2\cdot\tau$. После этого узел n производит замену блоков своей цепочки с соответствующими номерами на полученные блоки и переходит к использованию нового экземпляра блокчейна.

На практике, в случае попытки фальсификации цепочки номер пришедшего блока может быть меньше ожидаемого. Однако такая ситуация в модели не рассматривается. Но он также может быть меньшим просто из-за более долгого пути по сети, чем путь некоторого другого блока. Два блока с номером m могут быть созданы на двух узлах почти одновременно. Один из них придёт к участнику n раньше и будет добавлен в его версию блокчейна. Получив более "близкий" блок, участник n перейдёт к ожиданию блока с номером $m+1$, но вновь получит блок с номером m , который отвергнет.

Ситуация, когда пришедший на узел n блок имеет номер, больший, чем ожидаемый $m+1$, возможна при появлении новых узлов. Вновь созданный узел n' может начать функционировать, загрузив цепь до блока с номером $m+1$. При этом на данный узел может быстро прийти информация о блоке $m+2$, которую он сразу передаст своим корреспондентам. Но пути, по которым к этим корреспондентам движется информация о блоке $m+1$ могут оказаться длиннее, чем путь от узла n' , по которому прошла информация о блоке $m+2$. Впрочем, вся эта ситуация представляется весьма маловероятной.

Те случаи, которые в модели приводят к обратному запросу – это и есть ситуации форка, когда по системе распространяется несколько формально корректных версий цепочки блоков.

После добавления в блокчейн нового блока (или блоков, пришедших в ответ на обратный запрос), узел n сравнивает состав (набор транзакций) нового блока и своего пула неподтверждённых транзакций, оставляя в последнем лишь те, что по-прежнему не включены в блокчейн. После этого участник немедленно, т.е. на том же шаге t , приступает к майнингу нового блока, включая в него все оставшиеся в пуле неучтённые транзакции. На практике объём блока ограничен. Поэтому в новый блок включаются, вообще говоря, не все транзакции из пула, а согласно приоритетам. В рамках модели делаем допущение, о неограниченности размера блоков.

С некоторой вероятностью участник n на шаге t создаёт собственный новый блок. (На практике это означает, что ему удаётся решить задачу по "доказательству работы". Сам этот процесс остаётся за рамками данной модели.) В этом случае участник распространяет этот блок по сети точно так же, как это описано выше для случая, когда корректный блок приходит со стороны. Вероятность создания участником n нового блока на текущем шаге t в рамках модели определяем формулой

$$\Omega_t^n = \frac{1}{T} \cdot \frac{P_n}{\sum_{k=1}^{N_t} P_k}.$$

Здесь T – параметр, посредством которого задаётся (выраженное в шагах модели) среднее время, которое должно уходить у сообщества майнеров на создание нового блока.

Список литературы

1. Satoshi Nakamoto (2009). Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System, satochin@gmx.com, www.bitcoin.org
2. Antonopoulos Andreas M. (2014). Mastering Bitcoin. UNLOCKING DIGITAL CRYPTOCURRENCIES, O'Reilly Media, Inc., – 272 p.

Fork model in the Bitcoin system

I.I. Gasanov, F.I. Ereshko
Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Опыт организации алготрейдинга на финансовых рынках. Ч. 1 Постановки.

Ант.Ф. Ерешко

ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Последнее время ознаменовалось новым подъёмом интереса к информационным технологиям. Становится ясно, что основой принятия решений в экономике станут вычислительные платформы, отражающие отдельные функциональные отрасли. На биржах этот тренд был отмечен уже давно, поскольку для деятельности на бирже поставлялось самое передовое компьютерное оборудование, как собственно для биржи, так и для участников торгов.. Темп усиливался, интервалы времени поступления информации на серверы инвесторов постоянно уменьшались, объёмы информации превратились не просто в big data, а в сверх большие массивы информации.

Эти изменения режимов доставки информации приводят естественно к изменению процедур принятия решений.

Можно теперь говорить о большом разнообразии частот принятия решений, не только о кратко и долгосрочных инвестициях. И в частности, при высокочастотном поступлении информации необходима другая высокочастотная организация процедур принятия решений , поскольку человек не может физически принимать решения в таком темпе.

Естественно возникла двухэтапность, стратегические конструкции выбираются заранее, конкретное оперативное управление следует режиму поставки информации, в интервалы перерыва работы биржи производятся корректировки стратегических установок. Можно предположить, что далее будет развиваться многоэтапность процедур, что естественно приведёт к многоуровневым системам математической поддержки принятия решений.

Здесь описывается опыт разработки вычислительного комплекса для принятия высокочастотных финансовых решений. Автоматизированная торговля на финансовых рынках (или электронная алгоритмическая торговля, алготрейдинг, торговля с чёрным ящиком, робототорговля) использует электронные возможности для генерирования заявок на биржу на основе формальных алгоритмов, включая параметры: времена выставления заявок, цены, количество и объём, без непосредственного участия инвестора. Инвестор разрабатывает стратегию на основе формальной записи алгоритма и осуществляет выбор параметров, которые уточняет на виртуальных торгах.

Алгоритмический трейдинг уверенно обосновался на всех мировых биржах и, как подтверждает статистика, используется для большинства торгуемых инструментов, подавляющее большинство сделок на фондовых биржах осуществляется автоматическими системами в режиме высокочастотной торговли. Высокая эффективность алгоритмического трейдинга привлекает внимание профессиональных трейдеров, и они предпринимают значительные усилия для достижения ещё большей эффективности. В то же время регуляторы выражают беспокойство по поводу стремительного разрастания алготрейдинга, поскольку в ходе этих операций уменьшается возможности регулирующих функций. Алгоритмическая и высокочастотная торговля стали предметом многочисленных разбирательств инициированных американскими регуляторами SEC (U.S. Securities and Exchange Commission) и CFTC (Commodity Futures Trading Commission), в связи с обвинением в их причастности к событиям 2010 г., когда ведущие фондовые индексы США испытали крупнейшее за всю свою историю внутридневное падение.

Системы автоматической торговли активно используются в решении проблем хеджирования, маркет-мэйкинга, арбитража, управления клиентскими позициями.

Значительное внимание на биржевых площадках уделяется спекулятивной составляющей при использовании автоматических систем для торговли на РТС

ФОРТС. В работе рассматриваются, и в отдельных случаях приводится решение типичных проблем, с которыми сталкиваются разработчики моделей и программ, таких как: подключение к торгам, актуальность биржевой информации, способы тестирования и нахождения оптимальных настроек.

Постановка задачи управления и модель среды.

Развиваемый в данной работе подход базируется на основных понятиях исследования операций и теории принятия решений. Следуя методологии исследования операций, в деятельности на финансовых рынках также выделяется оперирующая сторона (инвестор), исследователь финансовой операции, разрабатывающий стратегию поведения в интересах инвестора. Рациональное поведение инвестора предполагает для исследования финансовой операции необходимость определения набора переменных для описания объекта управления, и математической формулировки модели управляемого объекта. Таковым в задаче торговле на финансовом рынке служит динамика котировок и объёмов выставляемых заявок участников рынка. Для инвестора, как выделенного игрока, остальной рынок представляется неконтролируемой средой, относительно которой он располагает ограниченной информацией.

Представляется вполне разумной модель среды, принимаемой как мультиагентной среды, в которой присутствует и шумовые трейдеры и выделенное количество влиятельных игроков.

Системный взгляд на проблему организации алгоритмического трейдинга в интересах инвестора включает в себя выбор технического обеспечения, выбор брокера, выбор источников получения информации, разработку стратегии, организацию всего процесса, который имеет динамический процесс с ограничением или оптимизацией средств. Для всех этапов необходимо своё модельное описание, информация и методы принятия решений.

Принципиально задача выработки стратегии управления представляет собой процесс принятия решений при неопределённости неконтролируемых факторов, и если она рассматривается как стохастическая, то представляется многомерным (многофакторным) процессом, и для определения структуры которого, и тем более, для верификации параметров которого, недостаточно данных.

Опишем стандартный, классический подход.

Введём вектора V_t^- и V_t^+ , определяющие структуру портфеля инвестиций в момент t , это структуры до и после реформирования портфеля, соответственно.

Вектора V_t , в силу определения, принадлежат симплексу ψ , заданному соотношениями:

$$\sum_{i=0}^N V_{t,i}^- = 1, V_{t,i}^- \geq 0 \text{ и } \sum_{i=0}^N V_{t,i}^+ = 1, V_{t,i}^+ \geq 0.$$

Целью управления будет максимизация за период $[1, T]$ дохода от вложенного в финансовые инструменты в первый момент управления капитала или, что то же самое, максимизация трансформации капитала $G_{1,T}$. Изменение цен на облигации от сессии к сессии можно описывать в виде марковского процесса с дискретным временем и глубиной p , т.е. вектор цен в день t - это случайный вектор c_t с распределением:

$$F(c_t) = F_t(c_t | C_{t-1}, C_{t-2}, \dots, C_{t-p}), \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Управления в момент t можно искать в виде функций от "истории":

$$u_t = u_t(c_t, c_{t-1}, \dots, c_{t-p+1}; V_t^-, V_{t-1}^-, V_{t-1}^+, \dots, V_2^-, V_2^+, V_1^+), \quad t = 1, 2, \dots, T-1.$$

Набор таких функций $\{u_t(\cdot)\}_{t=1}^T$ назовем стратегией управления, а множество подобных стратегий обозначим Γ . Любая стратегия $U \in \Gamma$ и матрица $A_1 = (c_t)_{t=-p+2}^1$ полностью определяют вероятностное распределение на траекториях

$(V_1^+, c_2, V_2^-, V_2^+, c_3, V_3^-, V_3^+, \dots, c_{T-1}, V_{T-1}^-, V_{T-1}^+, c_T)$,

которое индуцирует распределение трансформации $G_{1,T}$, как случайной величины.

Ставится задача максимизировать математическое ожидание трансформации $G_{1,T}$ в классе стратегий $\Gamma : M(G_{1,T}) \rightarrow \max$.

На основании представительного объёма данных о торгах и, быть может, с привлечением каких-то "физических" резонансов создаётся и верифицируется адекватная вероятностная модель изменения цены инструмента. Эта модель используется для прогноза будущей цены с каким-то заданным временным горизонтом. По результатам такого прогноза принимаются решения о покупке и продаже контрактов. В рамках выбранного направления эту вероятностную модель символично можно записать в виде $F_t(t + \tau | \Pi_{t-T}^t)$. Здесь F – прогнозная функция распределения цены инструмента в момент $t + \tau$, сформированная по массиву данных Π_{t-T}^t . Под ценами понимаются лучшие предложения по покупке и продаже или середина спреда. Π_{t-T}^t – полный набор данных о состоянии массивов данных в промежутке времени $[t - T; t]$.

Однако разработка вероятностной модели $F_t(t + \tau | \Pi_{t-T}^t)$ представляет собой весьма нетривиальную проблему. Динамика цен, как будущих, так и прошлых, зависит от множества факторов, значительную часть которых трудно формализовать. Это количество участников торгов, объёмы средств, которые они вкладывают в операции. Но это и общая политическая обстановка в мире и стране, экономическая ситуация, войны, теракты, эпидемии, заключения договоров, создание альянсов, открытие новых месторождений и методов добычи ископаемых, технические изобретения и т.д. В историческом аспекте многие из них носят разовый характер.

Динамика цен до момента t – это один и далеко не основной фактор, который влияет на цены после этого момента. Есть участники, которые вполне успешно используют указанную выше неформализованную информацию. Методы, которыми они пользуются, нельзя назвать формальными, хотя они и разумны, и содержательны. Данное направление относится к области фундаментального анализа.

Список литературы

1. Шваб К. Четвертая промышленная революция/ Пер. с англ. – М.: «Эксмо», 2016 – с.138..
2. Algorithmic and High-frequency trading: an overview Marco Avellaneda New York University & Finance Concepts LLC
<https://www.math.nyu.edu/faculty/avellane/QuantCongressUSA2011AlgoTradingLAST.pdf>

The Experience of an AlgoTrading in the financial markets. Part 1.

Ant.F. Ereshko

Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Опыт организации алготрейдинга на финансовых рынках. Ч. 2 Реализация.

Ант.Ф. Ерешко

ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

В продолжение части 1, отметим, что алгоритмизация приёмов, используемых в фундаментальном анализе, потребовала бы перевода описания событий с естественного языка на формальный, т.е. компьютерный алгоритм должен был бы включать в себя мощный блок искусственного интеллекта. Ограничиваясь использованием численных

данных Π'_{t-T} , мы, тем самым, получаем возможность сосредоточиться на поиске формальных решений.

Разрабатываемый в нашем проекте подход можно отнести к направлению, называемому техническим анализом.

Мы можем наблюдать изменение цен при каких-то значениях числовых характеристиках массива Π'_{t-T} и попытаться построить прогноз цен при данных значениях, но вскоре внешняя конъюнктура изменится, и прогноз при тех же характеристиках на новой статистике будет совсем не похожим на предыдущий. Динамика цен слишком изменчива. Если сопоставлять ей вероятностный процесс, то это будет очень **нерегулярный процесс**. Настолько нерегулярный, что выделить в нём промежутки стабильности и верифицировать для них параметры случайного процесса было бы крайне сложно. Нет уверенности, что в этих условиях рассуждать в категориях случайного процесса вообще корректно.

В то же время практика показывает, что процесс ценообразования на бирже имеет очевидную вероятностную составляющую. Так, хорошо известно, что если объёмы заявок в массиве предложений на продажу растут, а в массиве на покупку падают, то можно ожидать движения цен в направлении второго массива. Подобные вероятностные свойства биржевой динамики можно эффективно использовать. Обработывая обширный массив данных Π'_{t-T} , оказывается возможным построить функции, иными словами, создать агрегаты данных, которые с достаточной уверенностью указывают на ближайший тренд рыночных цен.

Решение состоит в том, чтобы, не теряя основную цель – разработку доходного алгоритма, сузить задачу. Слов нет, хороший прогноз направления и длины тренда был бы очень полезен. Но, коль скоро это труднодостижимо, можно ограничиться поиском таких признаков в динамике массивов, которые служили бы сигналами для формирования заявок, и при которых проведение торговых операций становилось бы статистически выгодным. При этом вопрос о том, насколько именно выгодна операция при том или ином значении числового признака можно не ставить. Это, с точки зрения целесообразности операции, и неважно.

С точки зрения формального описания, сделано следующее. Для поиска эффективных стратегий торговли была разработана весьма подробная модель торгов.

В модели на данных реальной торговли имитируется действия робота, использующего тестируемую стратегию управления, и рассчитывается виртуальный (модельный) доход от его операций. Стратегия управления – это оператор S , который в каждой очередной строке t данных массива Π'_{t-T} и текущей позиции P_t (набора контрактов, генерированной стратегией) сопоставляет торговую заявку.

Заявка формируется при появлении сигнала. Сигналом для заявки служит переход стратегической функцией $\Phi(\Pi'_{t-T}; \bar{G})$ (индикатором) через пороговое значение b . Функция Φ , помимо структуры, характеризуется набором настраиваемых параметров \bar{G} . Кроме параметров \bar{G} , стратегия включает в себя ещё набор параметров, среди которых барьер b и максимальная допустимый набор контрактов Π . Величины Π и P_t участвуют в расчёте объёма формируемой заявки.

Исследуемая стратегия посредством модельных расчётов ставит в соответствие данным торговых сессий (или временным промежуткам внутри сессий) расчётные значения доходов. Эти значения можно рассматривать как случайные величины, порождаемые сложным многофакторным процессом. Индуцированный случайный процесс из значений доходов, разумеется, далёк от стационарного, но в нём проявляются устойчивые свойства, которые пригодны для дальнейшего изучения. В динамике этих свойств обнаруживается некоторая инерция, которую, можно использовать на практике. Имеется в виду, прежде всего, то, что стратегии, показавшие

себя успешными в рамках модели на некотором массиве последовательных логов, оказываются доходными в течение какого-то времени за сессиями настройки и на реальных торгах.

Модель была реализована в виде программного имитационного комплекса. Комплекс обрабатывает торговые данные из набора данных, который можно именовать полигоном.

В подобных случаях часто используется способ поиска решения, который принято называть оптимизацией на хронологических (исторических) рядах наблюдений.

Описание программно-аппаратных комплексов для алготрейдинга. Алгоритмические подходы в задачах управления портфелем ценных бумаг или задачах поддержания ликвидности в электронных системах биржевых торгов, занимают одно из основных направлений автоматизации деятельности инвестиционных подразделений. Современная практика применения автоматических систем принятия решения является неотъемлемой частью любого современного участника биржевых аукционов, позволяющая не только контролировать риски активных портфелей, но и извлекать моментную прибыль на основе прогнозирования тенденций в оценке стоимости торгуемых продуктов, а также краткосрочного неправильного ценообразования торгуемых инструментов. Вычислительную систему можно рассматривать, как замкнутую экосистему, взаимоотношения внутри которой строго регламентируются наборами решаемых задач. Модули экосистемы зависят друг от друга, в рамках предоставляемой и используемой информации.

В первом приближении, аппаратно- программный комплекс алгоритмической торговли можно разбить на несколько составляющих модулей. Торговый, Аналитический, Инфраструктурный и Статистический.

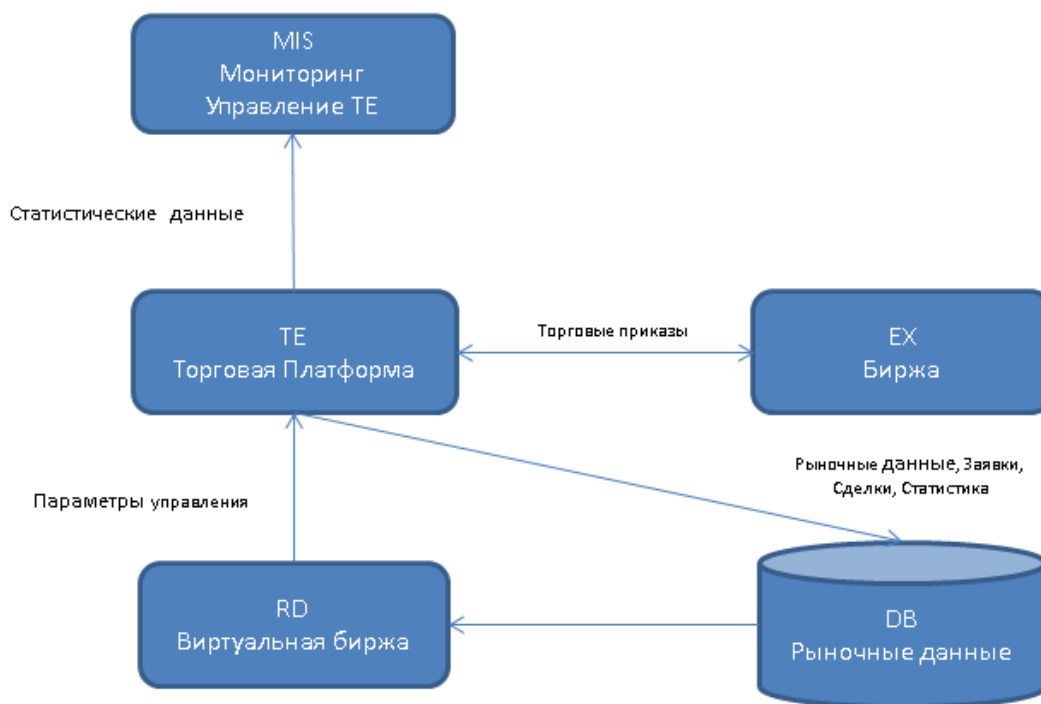
Торговый модуль TE - это программная фронт-система, обеспечивающая получение рыночных данных, их обработку, нормализацию, расчет вспомогательных величин на основе предопределенных параметров, генерацию сигналов и реализацию сигналов в виде биржевых приказов, реализуемых по средством протокола биржевой площадки.

Аналитический модуль RD – это программная бэк-энд система, использующая рыночные данные для виртуализации биржевых торгов. Виртуальная торговля состоит из имитаций торговой активности для поиска рациональнооптимального решения математической модели с использованием критериев: максимальная прибыль, дисперсия доходов, количество заявок, транзакций, устойчивость к шоковым ситуациям на рынке.

Инфраструктурный модуль DB – это набор аппаратных решений, задачами которых являются поддержание работоспособности торгового, аналитического и статистического модулей. Одними из важных критериев для построения инфраструктуры комплекса алгоритмической торговли является быстродействие и отказоустойчивость.

Статистический модуль MIS – это набор программных средств, отвечающих за контроль, учет, агрегацию состояний и мониторинг торгового модуля.

Структурно блоки и модель взаимоотношений можно представить следующей схемой.



Заключение

Современные информационные банковские и финансовые системы, обеспечивающие деятельность участников рынка, должны не только надежно обслуживать огромное количество транзакций, хранить и передавать по сетям большие объемы данных, но и обеспечивать банкам и финансовым организациям преимущества, достигаемые в конкурентной борьбе за счет использования самых последних инновационных технологий в различных областях: разработка программного обеспечения, вычислительные средства, системы хранения данных, средства защиты информации, телекоммуникации, искусственный интеллект и многие другие инновационные технологии. В развитие и поддержку IT-инфраструктуры финансовые организации вкладывают значительные средства.

Проблема построения программно-аппаратных систем эффективно решающих задачи финансовой индустрии продолжает быть актуальной, и постоянно видоизменяется с появлением новых возможностей информационно-коммуникационных технологий.

Автор выражает **Благодарность** за руководство, помощь и постоянную поддержку **Гасанову И.И.**

Список литературы

1. Ерешко Ант. Ф. Опыт организации алготрейдинга на финансовых рынках. Ч.1. Постановки. Настоящий сборник. 2018.

The Experience of an AlgoTrading in the financial markets . Part 2

Ant.F. Ereshko

Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Балансовые модели технологии распределенных реестров. Часть 1

Арт.Ф. Ерешко

ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

А.В. Вахранев

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Исходным положением при использовании технологии распределённых реестров является наличие группы активных участников, которые ставят перед собой цель организацию эффективной совместной деятельности. При этом должна реализоваться идея децентрализации управления. Создание такой Коалиции будем называть далее проектом, так что задачей изложения является проектирование деятельности децентрализованной коалиции в динамике. В рамках проекта поставим задачу моделирования процесса функционирования Коалиции и её модификаций. В другой терминологии мы рассматриваем моделирование блокчейна, понимая, что блокчейн – это одноранговая сеть, предназначенная для заключения договоров между участниками. Специфика договоров зависит от конкретного содержания взаимодействия участников. Перевод криптовалюты между участниками коалиции тоже интерпретируется как реализация договора на передачу собственности.

Мы полагаем, что некоторые свойства таких организаций можно исследовать, имитируя работу блокчейна коалиции на компьютерной реализации модели. Кроме того, модели доставляют удобную форму для обсуждения дальнейших модификаций организационной структуры.

КОАЛИЦИЯ. Первичным элементом конструкции Проекта является первоначальное сообщество участников, которых можно называть Ядром Проекта. В последующем функционирования Проекта сообщество может пополняться новыми членами, и некоторые члены могут покинуть сообщество. Ядро выработало Правила игры Коалиции, как в фигуральном выражении словосочетания «Правила игры», так и в прямом математическом понимании как математическую модель кооперативных действий сообщества. Будем называть Коалицией сообщество участников, действующих по принятым сообществом правилам, которые опишем в терминах теории игр и исследования операций. Участники, как игроки, имеют собственные интересы, и соответственно формально выраженные цели, которые зависят от собственных действий – управлений, от действий других участников, от общих действий, согласно правилам, от неопределённых факторов внешней среды. Если сообщество игроков намерено применить к своей конструкции общие теоретические схемы, то основными понятиями, отражающими общие устремления Ядра Проекта к достижению общей выгоды, являются понятия Парето –оптимальности и равновесия по Нэшу. Естественным принципом рациональности действий игроков является принцип наибольшего гарантированного результата.

Консенсус теоретически здесь достигается путём выбора такого правила распределения общих возможностей, который удовлетворяет всех участников.

При практической реализации Проекта участники Коалиции, придерживаясь теоретической схемы, вырабатывают некоторый протокол назначения конкретных значений дележа общих ресурсов и при алгоритмическом, независимом выборе этих значений каждый участник решает далее автономную задачу максимизации своего критерия. Таким образом в Проекте реализована идея децентрализации. Здесь рассматривается такая Коалиция из игроков сообщества, в котором общим сервисом выступает вычислительная платформа и обслуживание ведётся алгоритмически.

Правила игры, которые выработали участники – Ядро предопределяют автономные поведения игроков, но при этом совокупность независимых действий ведут всю Коалицию к общей цели: максимизации общей Коалиционной выгоды.

Суть вычислительной Платформы, составляющей блокчейн Коалиции, состоит в алгоритмическом выполнении формальных правил – алгоритмов, при этом обеспечивается децентрализация действий участников сети, которые ведут в соответствии с Координирующим алгоритмом к достижению централизованно выработанной цели, заданной Ядром

Ключевое свойство структуры – она функционирует автоматически. В том смысле, что её эволюция обеспечивается автономными действиями участников. Эти действия производятся участниками добровольно по определённым правилам Коалиции. Участник, вступая в Коалицию, добровольно принимает на себя обязанности проведения автономных действий. Участники Коалиции *доверяют* Ядру в рациональности избранных Правил игры.

Общее заключение: Стратегические цели Коалиции обеспечиваются независимыми тактическими действиями участников.

РЕЕСТРЫ. Сеть функционирует децентрализованно, в частности, это означает, что договоры между участниками заключаются автономно без посредников. Все договоры записаны в едином реестре, который имеет множество копий, ведётся и поддерживается участниками. Реестр публичный в том смысле, что любой участник имеет к нему доступ. Однако, непосредственное содержание договоров может быть закрыто шифром от всех участников кроме контрагентов собственно договора.

Множественность копий реестра – один из факторов, обеспечивающих защиту структуры.

Сведения о заключённых договорах (транзакциях) распространяются по сети по типу цепной реакции.

МОДЕЛЬ. За основу принята модель с компьютерной реализацией, имитирующая работу системы в целом. В ней предполагается переменное число участников, как обычных пользователей, так и майнеров. Их количества, мощности оборудования меняются по некоторому стохастическому закону от шага к шагу – модель с дискретным временем. Так же случайным образом определяются контрагенты по операциям и объёмам операций, время на создание нового блока посредством решения конкурентной задачи и майнеры-победители. На модели предполагается возможным проигрывание сценариев атак на систему, а также так называемых форков (неединственность уже коалиционных решений), и других коллизий, если они существуют.

УЧАСТНИКИ. Участники сети используют для транзакций компьютерные приложения, которые обеспечивают возможность использования участником виртуального цифровых кошельков, с которого он осуществляет транзакции, т.е. расход и приход криптовалюты. На практике участник может иметь произвольное количество кошельков. Кошелёк имеет набор атрибутов.

ТРАНЗАКЦИИ. Транзакции представляют из себя поток информации и характеризуется началом и концом (входом-выходом) и содержанием: (*Денежная транзакция, Транзакция активов. Публикация транзакций.*) Транзакции включаются в состав блоков. Задача по добавлению транзакций в блок ложится на майнеров.

ДУГИ (КАНАЛЫ) СВЯЗИ. Узлы сети связаны друг с другом двунаправленными дугами. Дуги моделируют каналы связи, по которым передаётся информация.

ИНФОРМИРОВАННОСТЬ. Информация в договорах шифруется посредством современных криптографических методов, хешируется. Блокчейн имеет блочную структуру, блоки нужны для фиксирования общего согласия относительно новых порций информации. Здесь согласие, консенсус достигается за счёт работы в конкурентной среде над новым блоком множеством старателей-майнеров.

Принимается условие, что участнику (узел) к моменту t известна, сформированная к этому моменту цепочка блоков.

БЛОКИ. Каждый блок характеризуется его номером и уникальным идентификатором (именем). Он содержит пронумерованные имена предыдущих блоков и множество включённых в него транзакций.

РАБОТА МАЙНЕРОВ. Работа майнеров направлена на поддержание работы системы, которая заключается в формировании новых блоков. В системе циркулируют транзакции участников. После валидации и добавления в блокчейн нового блока (или блоков, пришедших в ответ на обратный запрос), узел (участник) немедленно, т.е. на том же шаге t , приступает к майнингу нового блока, включая в него все оставшиеся в пуле неучтённые транзакции.

ДИНАМИКА КАПИТАЛА в кошельке в коинах

– баланс кошелька участника i в момент времени t , – приход коинов участнику i за счёт работы (решения конкурентной задачи и успеха i -го участника), – индикатор, того что блок созданный участником i добавлен в блокчейн, – комиссия в коинах, которую получает участник i за добавление транзакции, – перевод средств в коинах от участника j участнику i .

КОНКУРЕНТНАЯ СРЕДА. В системе предусмотрено, что между участниками существует конкуренция за добавление следующего блока. Участник, который добавляет следующий блок в модели принимается некоторый случайный механизм выбора лидера.

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ФАКТОРЫ. К ним относятся атаки других участников Коалиции и внешних сторон путём намеренного искажения информации для сбоя системы, волатильность коина в ценах фиатных денег и т.д..

УПРАВЛЕНИЕ УЧАСТНИКА. Каждый участник может с вероятностью принять решение об отключении от сети (он будет не доступен для других участников сети); участник может с некоторой вероятностью принять решение об изменении своей мощности. Кроме того участники сети могут заключать сделки о переводе средств или продаже цифровых активов. Говоря о продаже цифрового актива, имеется в виду передача права собственности: запись в реестре свидетельствует о смене собственника и, как полагается, достаточна для распоряжения и предъявления права.

АВТОНОМНАЯ ЗАДАЧА УЧАСТНИКА. Функция цели участника есть математическое ожидание по всем неопределённым параметрам выигрыша за заданный участником горизонт планирования, задача участника – максимизация функции цели.

ПРОЦЕДУРА МОНТЕ – КАРЛО. Процедура Монте-Карло позволяет в режиме имитации реальных действий на реализованной платформе провести необходимое количество вычислительных экспериментов, анализ результатов которых позволяет выявить и оценить качественные эффекты. Для этих целей формируются сценарии реализации неопределённых факторов, и проводится пошаговый расчёт переменных модели.

Список литературы

1. Antonopoulos Andreas M. (2014). Mastering Bitcoin. UNLOCKING DIGITAL CRYPTOCURRENCIES, O'Reilly Media, Inc., – 272 p.
2. Ерешко Ф.И. Размышления о технологии блокчейн. <http://digital-economy.ru/stati/razmyshleniya-na-temu-tekhnologiya-blokchejn>

The balance model of the blockchain technology, part 2

Art.F. Ereshko
Computer Centre RAS FRC CSC RAS
A.V. Vakhranov
Lomonosov MSU, Moscow, Russia

Балансовые модели технологии распределенных реестров. Часть 2.

Арт.Ф. Ерешко

ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

А.В. Вахранев

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе [1] приведено описание Проекта использования технологии распределённых реестров (блокчейн). Здесь в продолжение приводится описание некоторых разделов Проекта в формульном виде и в кодах. Анализ объекта проводится на основе теории игр и исследования операций.

КОАЛИЦИЯ. Пользуясь терминологией указанных теорий, опишем игроков в данном Проекте, как активных индивидуумов, поведение которых определяется стремлением к наибольшему значению функций выигрыша $f_i(x_i, u_i)$, $i=1,2,\dots,N$, путём выбора управлений x_i на заданных множествах $x_i \in X_i$, $x = (x_1, \dots, x_N)$, где переменные $u = (u_1, \dots, u_N)$ являются параметрами, неконтролируемыми игроками, $u \in U$ и множество U не представимо в виде произведения $U_1 \times \dots \times U_N$. Как правило, в реальности роль параметров $u = (u_1, \dots, u_N)$ играют наличные общие ресурсы и сервисы ((например, цифровая платформа), которые жизненно необходимы каждому члену сообществу, но выбор доли каждого игрока u_i затрагивает интересы остальных членов сообщества. Консенсус теоретически здесь достигается путём выбора такого правила распределения общих возможностей, который удовлетворяет всех участников. Один из принципов, удовлетворяющих общим интересам – принцип Парето, что предполагает решение задачи $\max_{\{x_i \in X_i\}} \sum_i \lambda_i f_i(x_i, u_i)$ и построение функций $x_i^*(u_i)$. Здесь коэффициенты λ_i отражают общее мнение относительно эффективности вклада отдельных участников в общий критерий коалиции.

После этого выбор соответствующих консенсусных долей u_i^* следует из решения задачи $\max_{u \in U} \sum_i \lambda_i f_i(x_i^*(u_i), u_i)$. Пока здесь в изложении принципиальной схемы опустим проблемы, которые возникают при неединственности решений оптимизационных задач. При практической реализации Проекта участники Коалиции, придерживаясь теоретической схемы, вырабатывают некоторый протокол назначения конкретных значений параметров консенсусных \tilde{u}_i и при алгоритмическом, независимом выборе этих значений \tilde{u}_i каждый участник решает далее автономную задачу $\max_{x_i \in X_i} f_i(x_i, \tilde{u}_i)$.

Таким образом в Проекте реализована идея децентрализации.

УЧАСТНИКИ. Число участников в динамике $N_{t+1} = N_t + n_t^+ - n_t^-$

n_t^+ – число вошедших в Проект с вероятностью $\alpha_t^+(N_t)$, n_t^- – число вышедших с вероятностью $\alpha_t^-(N_t)$,

procedure updateGeneration {

Input { N_t }

Output { N_{t+1} }

//вход новых участников

$a^+ = \text{random}(\alpha^+)$;

$N_{a^+} = \text{initialisatoin}(a^+)$;

//выход старых участников

{ I_{a^-} } = $\text{randomVector}(N_t)$;

$N_{a^-} = \text{select}(\{N_t\}, \{I_{a^-}\})$;

$N_{t+1} = N_t \cup N_{a+} \setminus N_{a-}$
return N_{t+1} }

ДИНАМИКА формирования цепочки блоков информации

Цепочка Блоков BC_t – это вектор (массив) = $\{BN_{b_t,t}, (BN_{b_t,t}, t' = t-1, tr_{i,j,t}, t' = t-1)\}$,

$BN_{b_t,t}$ – уникальный идентификатор (имя) блока, b_t – номер блока. Структура блока:

```
Block{
    block id;
    previous block;
    transactions;}
```

```
procedure addNewBlock{
    Input NewBlock, BCq,t
    Output BCp,t+1
    if(validation(NewBlock)){
        p = NewBlock.id
        BCp,t.addBlock(NewBlock);
        transactionPool.remove(NewBlock.transactions);}
    return BCt+1}
```

ДИНАМИКА КАПИТАЛА в кошельке в коинах.

$$K_{i,t+1} = K_{i,t} + I\{BN_{i,t} \in BC_{i,t}\} \left(M_{i,t} + \sum_{tr_{k,q,t} \in B_{i,t}} m_{tr_{k,q,t}} \right) + \sum_j c_{tr_{j,i,t}}$$

$K_{i,t}$ – баланс кошелька участника i в момент времени t ,

$M_{i,t}$ – приход коинов участнику i за счёт работы (решения конкурентной задачи и успеха i -го участника),

$I\{BN_{i,t} \in BC_{i,t}\}$ – индикатор, того что блок созданный участником i добавлен в блокчейн $BC_{i,t}$,

$m_{tr_{k,q,t}}$ – комиссия в коинах, которую получает участник i за добавление транзакции $tr_{k,q,t}$,

$c_{tr_{j,i,t}}$ – перевод средств в коинах от участника j участнику i .

```
procedure updateBalance{
    Input  $K_{i,t}$ ,  $BC_{i,t}$ 
    Output  $K_{i,t+1}$ 
    S = 0;
    {BNp,t} = takeLast(BCi,t);
    for(BNj,t ∈ {BNp,t}){
        if(i=j){
            for(trk,q,t ∈ BNj,t.transactions)
                S=S+fee(trk,q,t);
            S=S+ reward(BNj,t);}
        for(trk,q,t ∈ BNj,t.transactions)
            if(q=i) S=S+ coin(trk,q,t);
    }
     $K_{i,t+1} = K_{i,t} + S;$ 
    return  $K_{i,t+1}$ }
```

УПРАВЛЕНИЕ УЧАСТНИКА. Каждому i -му участнику доступны следующие возможности:

- участник может с вероятностью β_i принять решение об отключении от сети (он будет не доступен для других участников сети).
- участник может с вероятностью γ_i принять решение об изменении своей мощности $p_{n,t}$

$$\Pr(BN_{i,t} \in BC_{i,t}) = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^n p_j} \quad \text{– вероятность того, что } i \text{ участник в момент времени } t$$

добавит блок. Понятие мощности приписываем только майнерам, так как только они борются за право добавления блока. Мощность участников, которые не занимаются майнингом, можно определить как $p_i = 0$.

ДИНАМИКА цифровых активов

Кроме того участники сети могут заключать сделки о переводе средств или продаже цифровых активов. Говоря о продаже цифрового актива, имеется в виду передача права собственности: запись в реестре свидетельствует о смене собственника и, как полагается, достаточна для распоряжения и предъявления права.

$$A_{i,t+1} = A_{i,t} + a_{i,t}^+ - a_{i,t}^-$$

Весь актив передается посредством транзакций

```

procedure updateActives {
  Input  $A_{i,t}$ ,  $BC_{i,t}$ 
  Output  $A_{i,t+1}$ 
   $S = 0$ ;
   $\{BN_{p,t}\} = \text{takeLast}(BC_{i,t})$ ;
  for( $BN_{j,t} \in \{BN_{p,t}\}$ ) {
    for( $tr_{k,q,t} \in BN_{j,t}.transactions$ ) {
      //получение актива
      if( $q=i$ )  $S = S + \text{active}(tr_{k,q,t})$ ;
      //передача актива
      if( $k = i$ )  $S = S - \text{active}(tr_{k,q,t})$ ;
    }
  }
   $A_{i,t+1} = A_{i,t} + S$ ;
  return  $A_{i,t+1}$  }

```

СЦЕНАРИИ имитационного эксперимента

В первую очередь необходимо провести имитацию положительного сценария: все участники добросовестны и строго следуют протоколу сети. Далее необходимо добавить механизмы защиты системы: проверка блоков и транзакций, исключение недобросовестных участников.

Список литературы

1. Ерешко А.Ф., Вахранев А.В. Эскиз модели технологии распределённых реестров, часть 1 . Настоящий сборник 2018 г.

The balance model of the blockchain technology, part 2

Art.F. Ereshko
 Computer Centre RAS FRC CSC RAS
 A.V. Vakhranov
 Lomonosov MSU, Moscow, Russia

Паттерны кредитных рейтингов промышленных компаний стран БРИКС *

Карминский А.М.¹, Дьячкова Н.Ф.¹, Гришунин С.В.²
¹Школа финансов, НИУ ВШЭ, Москва, Россия,

²Санкт-Петербургский государственный технический университет им. Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

Введение. Данная работа посвящена изучению вопроса о связи кредитных рейтингов и финансовыми показателями промышленных компаний. В основу исследования был взят один из современных методов построения нелинейных взаимосвязей для выделения групп разнородных объектов влияния, также известный как метод паттернов. Дополнительно, было проведено эконометрическое оценивание выделенных разнородных групп, полученных паттернов промышленных компаний, с помощью модели Тобина. Результаты работы можно использовать в целях практического управления финансовыми рисками на краткосрочном периоде времени.

Постановка задач исследования. Нужно учесть, что в контексте краткосрочного прогнозирования финансовых рисков и отслеживания уровня их изменений, важно учитывать однородность объектов по выделяемой группе. Группа взаимодействующих объектов, обладает схожими характеристиками и объекты идентичны по уровню организации.

Важной задачей риск-менеджмента является выделение таких групп объектов во времени. Сегодняшние задачи управления рисками позволяют говорить о том, что выделение общих или схожих показателей у различных объектов указывает на схожий уровень финансовых рисков.

В данном случае, выделение общих паттернов – схожих черт – для промышленных компаний из стран БРИКС, позволяет сформировать точные представления об уровне развития и подверженности финансовым рискам в той или иной степени вне зависимости от их страновой принадлежности.

В результате проведенного вычислительного эксперимента, собранные наблюдения были разделены на группы и с помощью регрессионного анализа выделены наиболее значимые факторы, влияющие на значение кредитного рейтинга и уровень финансовых рисков каждой группы относительно других групп из всей выборки.

Обзор литературы. Проблема поиска паттернов для разнородных объектов и вопрос разделения для межстрановых выборок опирается на фундаментальные исследования, среди которых можно выделить работы [3, 6] где рассматриваются вопросы об изменениях оценок кредитных рейтингов во времени и деградации кредитных рейтингов. Большинство исследований [2, 4, 5] в этом направлении мало затрагивали тему изменения уровня кредитных рейтингов во времени и влияния на них изменения финансовых показателей и трансформации компаний за тот же период.

Сегодняшние возможности изучения и построения карт распределения рисков позволяют на основе длительных панельных данных выделить области для распознавания паттернов при автоматической обработке данных с использованием компьютерных алгоритмов и использовать полученные закономерности для точной классификации различных категорий объектов по уровню реализации рисков.

Методология исследования. Данные. Модель паттернов кредитных рейтингов.

База данных собрана с 2006 по 2016 гг. по промышленным компаниям из стран БРИКС, количество наблюдений – 12 170. В выборку вошло 114 промышленных компаний, имеющих различные кредитные рейтинги, от инвестиционных до спекулятивных.

* Работа выполнена коллективом авторов при поддержке НИУ ВШЭ.

В основе метода паттернов была разработана процедура оценки с помощью кластеризации данных: были определены средние и медианные значения по различным оценкам кредитных рейтингов, после чего было произведено последовательное отсечение из общей совокупности выборки на несколько подвыборок, из которых поэтапно были выделены получены тринадцать групп компаний.

$$r_k(t+1) = r_k(t) + \alpha_t * h_{vk}(t)$$

$$\times \begin{cases} \left([x(t) - r_v(t)] + [r_v(t) - r_k(t)] \left(\frac{d_{vk}}{\Delta_{vk} \lambda} - 1 \right) \right), \text{ для всех } r_v(t) \text{ между } x(t) \text{ и } r_k(t) \\ \left([x(t) - r_v(t)] - [r_v(t) - r_k(t)] \left(\frac{d_{vk}}{\Delta_{vk} \lambda} - 1 \right) \right), \text{ для } r_k(t) \text{ между } x(t) \text{ и } r_v(t) \\ \left([x(t) - p] + [p - r_k(t)] \left(\frac{d_{vk}}{\Delta_{vk} \lambda} - 1 \right) \right), \text{ для всех остальных значений, в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

Выше $r_k(t)$ $r_v(t)$ – оцифрованные значения кредитных рейтингов; p – вероятность попадания в пограничную зону; α_t – результат определения попадания в группу, равно 0 или 1; $h_{vk}(t)$ – уровень, определенный для перехода в соседнюю группу.

Результаты моделирования.

Таким образом, сгруппированные данные, на основе многих реальных наборов данных, а именно кредитных рейтингов и финансовых показателей промышленных компаний были получены точечные оценки относительно всей выборки по странам БРИКС, представлены на рисунке 1.

На их основе были получены 13 паттернов кредитных рейтингов для компаний, имеющих в результате кластеризации схожие количественные оценки и проведено выделение медианных значений (результаты представлены на рисунке 2). Результаты оценки модели представлены в таблице 1.

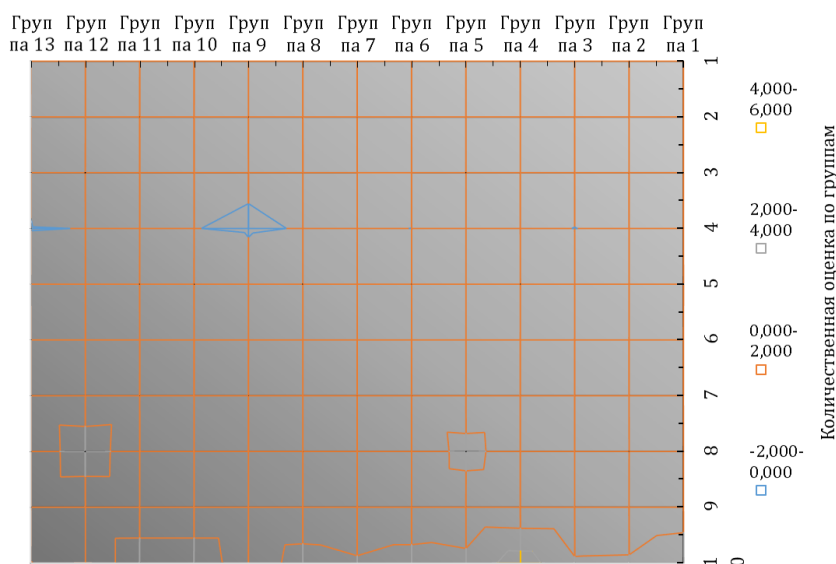


Рис. № 1. Общий рисунок паттернов кредитных рейтингов по 13 группам

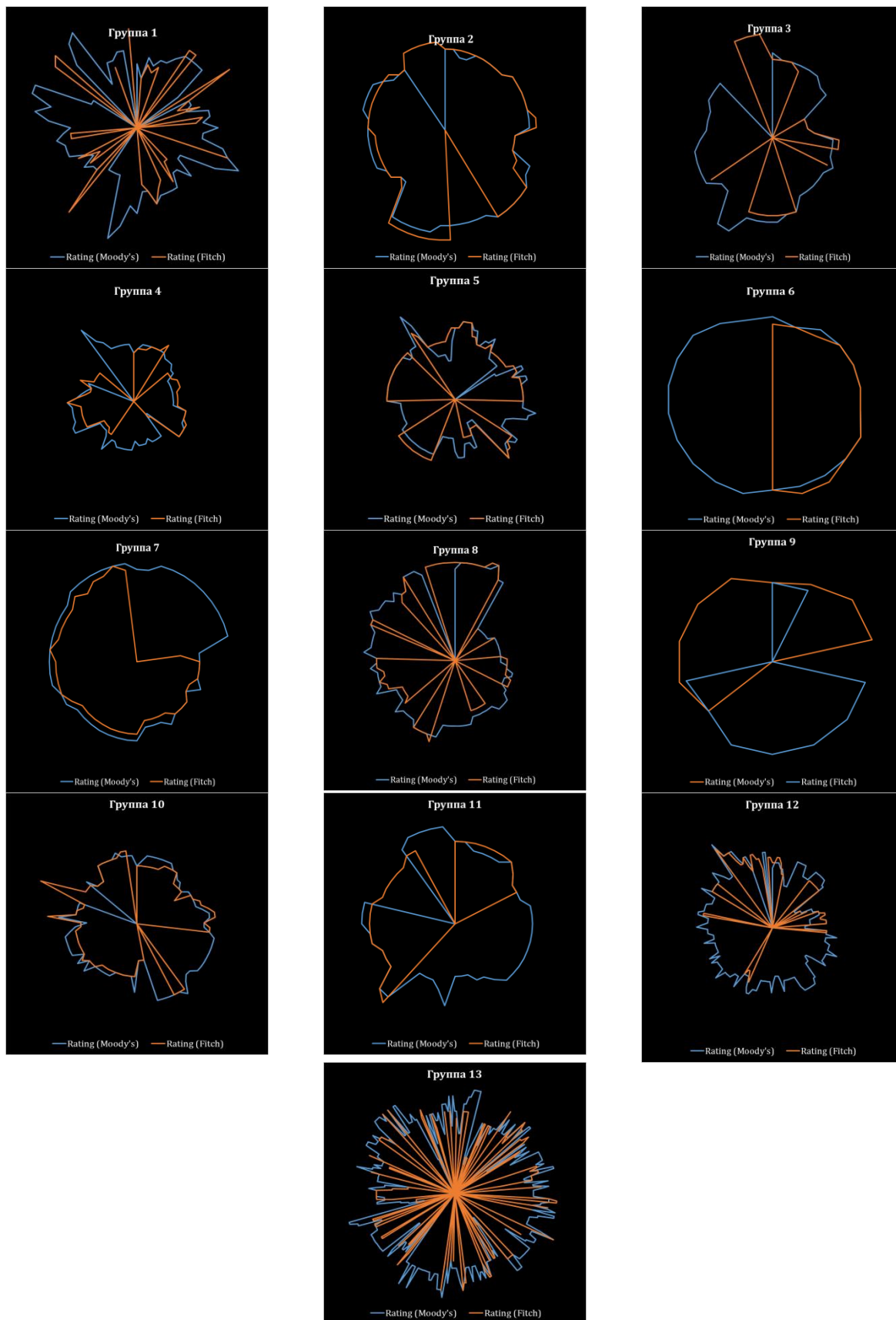


Рис. № 2. Паттерны промышленных компаний на основе кредитных рейтингов агентств Moody's и Fitch

Таблица № 1. Оценки модели Тобина для различных групп кредитных рейтингов

| | PG1 | PG2 | PG3 | PG4 | PG5 | PG6 | PG7 | PG8 | PG9 | PG10 | PG11 | PG12 | PG13 |
|--------------------------------------|------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Relation_to_y | 0.0054 | 0.0167 | 0.0676 | -0.1795 | -0.0231 | - | 0.6539 | 0.1743* | - | 0.4609* | -0.0172 | 0.1049 | -0.1614** |
| TOTALASSETS | 0.0342 | 0.0227 | 0.0035 | 0.0008 | 0.0088 | -0.0214 | 0.0051 | -0.0011 | 0.0051 | 0.0052*** | 0.0019 | 0.0025 | 0.0007 |
| Discrete | -0.0001 | -0.0009 | 0.0005 | 0.0003 | -0.0007 | 0.0037 | 0.0027 | -0.0015*** | 0.0005* | 0.0002 | -0.0001 | -0.0020*** | -0.0013*** |
| EbM^2 | -0.3533 | 0.9126 | -3.3484 | 0.9562 | 1.1527* | 4.4246* | -2.0473 | 0.0679 | 1.3436 | -2.1551 | 0.5213 | 0.1793 | 0.4069*** |
| EbInt^2 | -0.0000 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0001 | -0.0000 | 0.0135** | -0.0000 | -0.0000 | 0.0021 | -0.0001 | -0.0006 | 0.0011 | -0.0000 |
| DebtBookCap | 0.5249 | -0.0998 | 0.3002 | -0.2381 | 0.2618 | -1.1293* | 0.4606 | -0.3643 | -0.0361 | -0.4338 | январ.21 | 0.1809 | -0.0279 |
| RCFDebt | 0.0777 | -0.1359 | 0.0523 | -0.0915 | -0.0086 | -2.0982*** | 0.5106 | -0.0331 | -0.6163 | -0.1527 | 0.1957 | 0.0233 | 0.1596 |
| CurrentRatio | -0.2255*** | 0.1169 | -0.1140 | -0.0489 | 0.0423 | 0.0128 | 0.1082 | -0.2906*** | 0.2374 | 0.0884 | 0.4665* | 0.0038 | -0.0170 |
| RatingMoodyS | -0.1798*** | -0.0935*** | -0.0756*** | -0.0874*** | -0.1180*** | -0.0793 | -0.1950*** | -0.0867*** | -0.0654*** | -0.0543*** | -0.1100*** | -0.1117*** | -0.1248*** |
| Country_du1 | -1.4948*** | 0.0999 | -0.8235*** | -0.3342* | 0.0509 | - | - | -0.2474* | - | -0.0859 | -0.5843* | -0.2887** | -0.1395 |
| Country_du2 | -0.2452 | 0.8455*** | -0.2711 | - | - | - | - | -0.1105 | - | - | - | -0.0493 | - |
| Country_du3 | -0.2868* | - | - | -0.0830 | 0.1104 | - | 0.3046 | 0.1278 | - | - | - | -0.0470 | -0.0473 |
| Country_du4 | 0.0057 | 0.2107 | -0.7744*** | - | 0.4145*** | - | - | -0.0114 | - | -0.0701 | -0.1462 | 0.3582 | 0.2634* |
| Country_du5 | - | - | 0.1521 | -0.0354 | 0.2886 | -0.1719 | - | - | - | - | 0.1713 | - | 0.1489 |
| Date_dummy2008 | 0.0096 | 0.2412* | 0.0074 | 0.1461 | -0.0187 | -0.0320 | -0.0414 | 0.0532 | - | -0.1686* | -0.0820 | 0.0297 | 0.0904 |
| Cons | 2.8251*** | 0.9471* | 1.6681*** | 1.6991*** | 1.5028*** | 1.5889** | 1.8614 | 2.1429*** | 0.7728 | 1.0209*** | 0.8116 | 1.6233*** | 1.9265*** |
| Средняя оценка относительно 1 группы | | СРАВНЕ НИИ 1 И 2 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 3 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 4 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 5 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 6 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 7 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 8 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 9 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 10 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 11 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 12 группы | СРАВНЕ НИИ 1 И 13 группы |
| | 0,307 | 0,557 | 0,342 | 0,11 | 0,184 | -0,024 | 0,439 | 0,041 | 0,268 | 0,492 | -0,141 | 0,004 | |

Заключение.

Были рассмотрены данные за период с 2006 по 2016 года промышленных компаний из стран БРИКС. На основе широких межстрановых панельных данных были выделены с помощью метода паттернов тринадцать разнородных групп, которые далее были оценены с помощью модели Тобина (таблица 1).

Список литературы

1. Gentle J. Mining for patterns in financial time series // JSM Proceedings, Section on Statistical Learning and Data Mining, American Statistical Association, Alexandria, VA, 2012. PP. 2978–2988
2. Mai V.H., Dao T. Pattern discovery in the financial time series based on local trend // Advances in Intelligent Systems and Computing. Springer, 2017. PP.538-549
3. Parnes D. Time series patterns in credit ratings // Finance Research Letters 4. 2007. PP. 217–226
4. Shumway R., Stoffer D. Time series analysis and its applications. Springer, 2011
5. Timmermans M., Heijmans R., Daniels H. Cyclical patterns in risk indicators based on financial market infrastructure transaction data // Working Paper No. 558, De Nederlandsche Bank NV, 2017
6. Weissbach R., Mollenhauer T. Modeling rating transitions // The Korean Statistical Society. 2011, Elsevier. PP. 469-480

Patterns in credit ratings of industrial companies of the BRICS countries

Karminsky A. M., D'yachkova N. F., Grishunin S. V.
School of Finance, SRU HSE, Moscow, Russia

Increase of Banks' Credit Risks Forecasting Power by the Usage of the Set of Alternative Models

A.M. Karminsky, E.P. Khromova
The School of Finance, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

Abstract

The paper is aimed to compare the divergence of existing credit risk models and to create a synergic model with superior forecasting power. This paper suggests an algorithm of creation a synergic model based on a Rating model and Probability of Default model of Russian banks. The paper demonstrates that Rating models, if applied alone, tend to overestimate instability of a bank, whereas Probability of Default models give underestimated results. As a result of assigning of optimal weights and monotonic transformations to these models, the new synergic model of banks' credit risks with higher forecasting power (predicted 44% of precise estimates) was obtained.

Theoretical background

There are various methods of assessing the financial performance and controlling the level of credit risk of a bank, an evaluation of its probability of a default and a rating grade are among them. The probability of default (PD) is the likelihood of a bank failure over a fixed assessment horizon, while a rating determines the class to which a company belongs based on the PD. Although both of these methods are studied a lot, a forecasting power of these models still has a wide area of improvement. Both of these methods suffer from consistent biases that may lead to misleading results.

PD estimates provided by a model forecast are underestimated, because of imbalanced structure of datasets containing defaults. The occurrence of the default event is rare, so a PD model becomes over fitted towards non-default events [1, 6, 10]. Even the classical balancing data methods provided by He and Garcia (2009) and Garcia et al. (2012) do not fully solve this problem and a PD model gives underestimated results [2, 6, 13].

On the other hand, rating models are not fully reliable either. The main reason for that is a bad proxy of the dependent variable in the model. Researchers obtain only information about ratings that were assigned by some rating agencies (RAs) that are a subjective opinion of an agency and depends on its conservatism and reputation. It was found that previously the activity of rating agencies has had little regulation, allowing rating agencies to avoid responsibility for inaccuracies (overestimation) in assigned ratings, while investors were suffering huge losses [14]. However, in the most recent times it was shown that RAs are very cautious in estimation of banks financial stability as their reputation fully depends on it. A reputation of a RA suffers more when an agency predicts an overestimated rating grade. Therefore, nowadays RAs tend to be overcautious and react sharply on any bad news of a bank in order not to have a reputation of a “late reaction” or “corrupted” agency. Therefore, it was shown that the ratings models have the property of overestimation of financial instability of a bank and this gets worse if apply the model out-of-sample [4, 7, 8]. In the context of this problem, the first hypothesis of this paper is formulated. *Hypothesis 1*: There is a significant divergence in the predictions of credit ratings’ and PD models: credit ratings’ models tend to overestimate the financial disease of a bank, whereas PD models give underestimated results.

Therefore, observing this divergence of ratings and PD modeling, an idea of combination of these two forecasts in order to increase the predictive power of financial instability of a bank has come in mind to different researchers. Note that these two approaches give exactly opposite skewnesses of their predictors that makes their combination even more reliable. For example, Christophe J. Godlewski in 2007 provided comparison of banks' credit ratings in emerging countries and their corresponding Probabilities of Default. The research showed the rating tends to aggregate banks' default risk information into intermediate-low rating grades and thus proved ratings' partial divergence with the results of a PD scoring model. Following that, Pompella M. and Dicanio A. in 2017 introduced a new approach (PC-Mahalanobis Method), which has parts from PD and Credit Rating modeling, for testing the validity of bank ratings assigned by Rating Agencies. However, the PC-Mahalanobis Method doesn't provide numerical interpretation of results and allows only to determine whether an observation belongs to any of the two binary groups: healthy or likely-to-fail banks. In contrast, this research provides a method of forecasting an exact rating of a bank with a 30 dimensional accuracy. Therefore, following a new literature stream, this paper provides a new algorithm of creation of a synergic model that was applied on the Rating model and Probability of Default model of Russian banks. According to the second hypothesis (*Hypothesis 2*) of this research, the usage of the set of alternative models (ratings and PD) will improve banks' credit risks forecasting power.

The algorithm of this paper includes several steps. First step is to construct PD model and credit ratings' model separately on the same dataset using the basic rating scale adjustment provided by Karminsky and Sosurko (2011). After the predicted values of the both models are generated, calibration of ratings and PD by the methodology of Pomasanov and Vlasov (2008) is realized in order to bring ratings and PD into the single scale. Then the forecasting errors of each model are compared by the descriptive statistics parameters of their distributions (mode, median, skewness). The divergence of both models from the actual rating is realized and the optimal weight coefficients and monotonic transformations for these two models that bring the forecasting errors' distribution closer to a normal distribution are calculated. The obtained synergic model that consists of the set of alternative models is further checked for its out-of- sample fit.

Data and application of PD and Rating models separately

This research is based on the “Banks and Finance” database provided by the informational agency “Mobile”. The panel dataset of Russian banks was used in the analysis. The total number of banks after filtration was 395 (86 of them experienced the default). The financial performance of these banks was considered on a quarterly basis from the year 2007 to 2016, so the overall amount of observations was 11627 that is enough to make consistent conclusions.

As for the modeling methods of this research binary probit regressions were chosen for PD estimation and Multinomial ordered probit for credit ratings modeling. The variable specification of the models was continuously challenged by the choice of financial variables, their cross terms and macroeconomic variables used as principal components (PCs). The final model specification for a PD and rating models is summarized below:

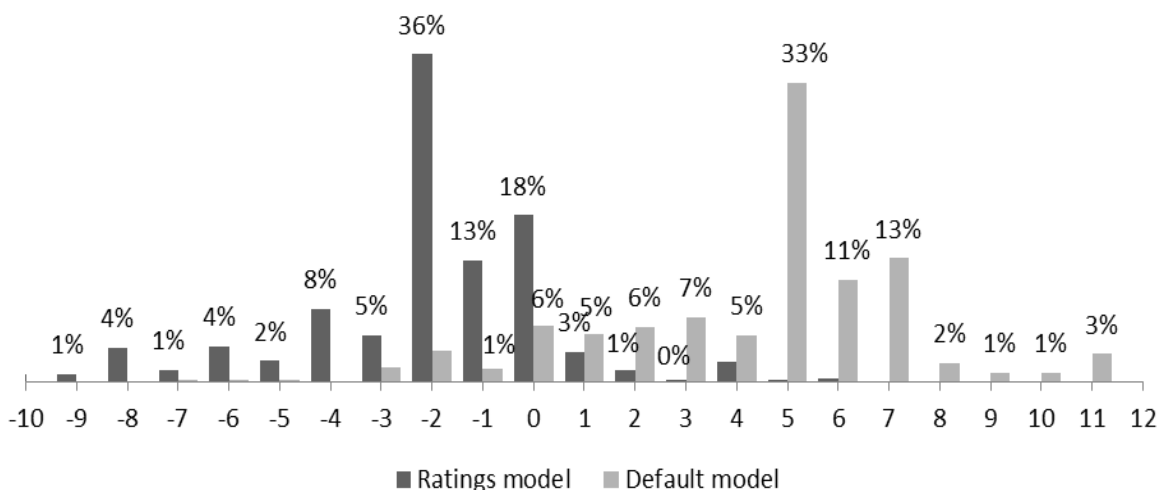
$$\begin{aligned}
 PDorRat = & \alpha_{1it} \frac{Equity}{Assets} + \alpha_{2it} \frac{Operating_Expense}{Operating_Income} + \alpha_{3it} Net_Interest_Morgin + \\
 & + \alpha_{4it} Interbank_Ratio + \alpha_{5it} Market_Share_PC + \alpha_{6it} Asset_Liquidity_PC + \\
 & + \alpha_{7it} Macro_PC1 + \alpha_{8it} Macro_PC2
 \end{aligned} \quad (1)$$

For the precise visualization PD model’s forecasts were converted into the base rating scale and the difference between the actual rating grade and the rating grade predicted by PD model was calculated. Graph 1 shows the distributions of forecasted errors of rating and PD model calibrated in the same scale of rating grades. Moreover, the percentages of precise predictions and deviations of less than one rating grade were calculated for each model.

Graph 1

Distribution of deviations of Ratings model and PD model forecasts (%)

| | Ratings model | PD model |
|--------------|---------------|----------|
| $\Delta=0$ | 18.2% | 6,4% |
| $ \Delta <1$ | 34,8% | 12,3% |



(Source: author’s calculations)

From the graph above we can see the disproportional distributions of forecasted errors for both models. The share of correct forecasts ($\Delta = 0$) in the rating model was 18%, while the default model appeared to be even more skewed than ratings’ model and forecasted correctly only in 6% of cases. In addition, the percentage of forecasts with a deviation of not more than one rating class from the actual rating ($|\Delta| < 1$) for rating’s model and PD model was 34.8% and 12.3% respectively. The rating model had the property of forecasting a lower than actual

rating grade, while PD model, on the contrary, underestimated the financial problem of banks and predicted a higher than actual rating. Graph 1 shows that in the PD model the positive prediction error dominates the negative one, which means that the actual numeric ratings exceed their forecasts in this model. However, the decreasing numerical values assigned to ratings relative to their symbolic grades means this tendency implies the reverse: the ratings forecasted by the PD model are overstated. This happened because defaults model initially had imbalanced data and even formation of a representative sample didn't solve the problem of over-education of the PD model towards the non-defaulted banks. The distribution of ratings' model forecasted errors is much more symmetric with respect to zero, however, it also shows the skewed pattern that was discussed before. Therefore, the first hypothesis of this paper was not rejected after empirical modelling. Indeed, ratings models tend to overestimate the financial instability of a bank, whereas PD models underestimate it.

Construction of a synergic model

In order to construct a reliable synergic model, the ratings' grade forecasts by PD and rating's model were computed for the same observations. Then the regression, where the dependent variable was the actual rating and explanatory variables were the fitted values of Rating and Default model were run on the 3011 observations. The most efficient synergic model was obtained as a logarithmic combination of PD default and Rating model:

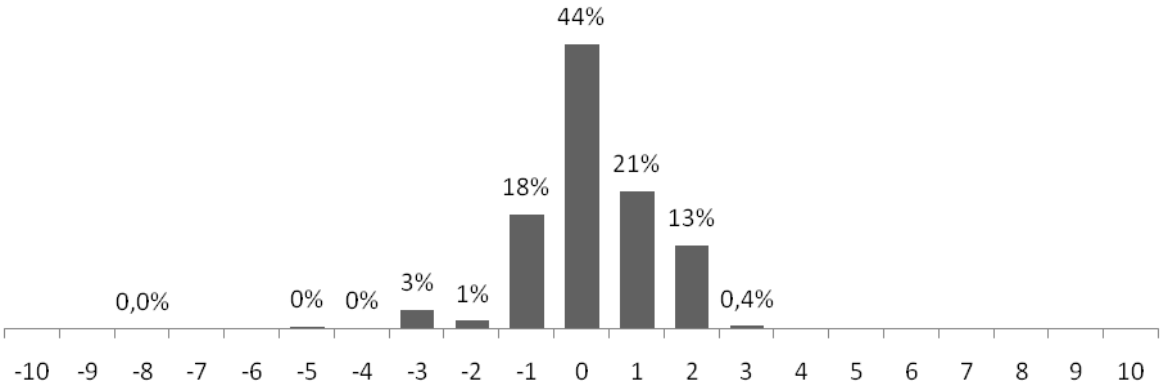
$$Y_{it} = \alpha + \beta_1 \text{Log}_{20}(\text{Rat}_{it} - \text{PD}_{it}) + u_{it} \tag{2}$$

Where Y_{it} – is the actual rating, PD_{it} and Rat_{it} are the predicted ratings by PD model and Ratings model respectively. The obtained distribution of the forecasted errors of this synergic model is illustrated on Graph 2.

Graph 2

Distribution of forecast errors for the logarithmic synergic model

| | Logarithmic synergic model |
|--------------|----------------------------|
| $\Delta=0$ | 44.4% |
| $ \Delta =1$ | 83,3% |



(Source: author's calculations)

The synergic model that was obtained by the logarithm of difference of rating and PD forecasts was found to have the highest predicted power with the smallest deviations. Note, that this distribution has very thin tails, so such model does not have any prediction errors higher than three rating grades. Therefore, this optimal combination can bring us to the most consistent estimates with forecasting power of more than 44% of precise ratings and 83% of deviation less than one rating grade.

When tested out-of-sample the logarithmic model can accurately predict the grade of the expected rating with a probability of 31.4 and provides 72.3% of deviation less than one

rating grade. Based on this analysis we can conclude that logarithmic synergic model can have a practical use for predicting the credit risks. Moreover, it should be noted that the horizontal scale in all forecast errors distributions shows the deviation of actual rating from the forecast basing on the 30-grades rating scale. Such scale is much more detailed than the usual 22-grade scale of any international rating agency. That means that all results in this research are even more precise if we transform our forecasts to the 22-grade scale.

Conclusion

In this research it was found that there is a significant divergence in the predictions of credit ratings' and PD models: credit ratings' models tend to overestimate the probability of financial disease of a bank, whereas PD models give underestimated results, so the first hypothesis was not rejected. Indeed, the distribution of ratings forecast errors have negative mode, while PD models forecasts have positive mode. Therefore, both models have forecasting bias that decreases the number of correctly predicted forecasts.

Moreover, the paper provides an algorithm of adjustment the previously used models of credit risks to a single scale and creation a synergic reliable model of banks' credit risks by the usage of the set of alternative models based on publicly available information. As a result, the logarithmic synergic model with higher forecasting power (that predicted 44% of precise estimates out of 30-grade scale) was obtained.

In further research we are going to apply such technique of derivation for a synergic model to all other credit risk measurements. Moreover, more sophisticated methods of balanced dataset formation that are discussed in the papers [3, 5] should be also tested. Furthermore, some other statistical or artificial intelligence methodologies can be used in order to obtain a better forecast of separate models that will allow to construct a synergy with higher predictive power.

References

1. Esarey J., Pierce A. Assessing Fit Quality and Testing for Misspecification in Binary-Dependent Variable Models // *Political Analysis*. 2012. V. 20, № 4. P. 480–500.
2. Florez-Lopez R., Ramon-Jeronimo J. M. Modelling credit risk with scarce default data: on the suitability of cooperative bootstrapped strategies for small low-default portfolios // *The Journal of the Operational Research Society*. 2014. V. 65, № 3. P. 416–434.
3. Garcia V., Sanchez J., Mollineda R. On the effectiveness of preprocessing methods when dealing with different levels of class imbalance // *Knowledge-Based Systems*. 2012. V. 25, №1. P. 13–21.
4. Godlewski C. J. Are Ratings Consistent with Default Probabilities? Empirical Evidence on Banks in Emerging Market Economies // *Emerging Markets Finance & Trade*. 2007. V. 43, № 4. P. 5–23.
5. He H., Garcia E. A. Learning from Imbalanced Data // *IEEE Trans. Knowledge and Data Engineering*. 2009. V. 21, № 9. P. 1263–1284.
6. Karminsky A. M., Kostrov A. The back side of banking in Russia: forecasting bank failures with negative capital // *International Journal of Computational Economics and Econometrics*. 2017. V. 7, № ½. P. 170–209.
7. Karminsky A. M., Khromova E. Modelling banks' credit ratings of international agencies // *Eurasian Economic Review*. 2016. V. 6, P. 341–363.
8. Karminsky A. M., Khromova E. Extended Modelling of Banks' Credit Ratings // *Procedia Computer Science*. 2016. V. 91, P. 201–210.
9. Karminsky A.M., Sosurko V.V. The unified rating mapping: a step from the myth to reality // *Bankovskoe delo (Banking subject)*. 2011. V. 6, P. 58–63. (in Russian)

10. Lanine G., Vennet R. Failure prediction in the Russian bank sector with logit and trait recognition models. *Expert Systems with Applications*, (2006). 30(3), 463–478.
11. Pomasanov M., Vlasov A. Calibration of national rating systems // *Rynek cennich bumag (Security market)*. 2008. P. 74–79. (in Russian)
12. Pompella M., Dicanio A. Ratings based Inference and Credit Risk: Detecting likely-to-fail Banks with the PC-Mahalanobis Method // *Economic Modelling*. 2017. V. 67, P. 34–44.
13. Rösch D., Scheule H. Forecasting probabilities of default and loss rates given default in the presence of selection // *The Journal of the Operational Research Society*. 2014. V. 65, № 3, P. 393–407.
14. Solovjova I. New Approaches to Regulating the Activities of Rating Agencies: a Comparative Analysis // *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 2016. V. 229, P. 115 – 125.

Сравнительный анализ алгоритмов машинного обучения для задач кредитного скоринга

Л.Ф. Петров, В.А. Архипов
РЭУ имени Г.В. Плеханова, Москва, Россия

Рассматриваются алгоритмы машинного обучения применительно к задачам кредитного скоринга. Ставится задача сравнительного анализа на основе тестирования некоторых алгоритмов с использованием данных о заемщиках - юридических лицах, участвующих в кредитном процессе.

Под машинным обучением для задач кредитного скоринга понимается процесс установления функциональной зависимости $y = f(X)$, где y – целевая бинарная переменная, характеризующая факт наличия дефолта в кредитной истории заемщика, X – набор факторов, каждый из которых априори имеет некоторое направленное воздействие на целевую переменную.

1. Описание данных, метрики качества

Задача кредитного скоринга рассматривается как частный случай задачи бинарной классификации, в которой целевое событие - факт реализации дефолта. Факт дефолта определяется следующим образом:

- Заемщик признается находящимся в дефолте, если суммарная длительность просроченных платежей по его кредитным обязательствам превышает 90 дней в течение 18 месяцев с начала наблюдения;

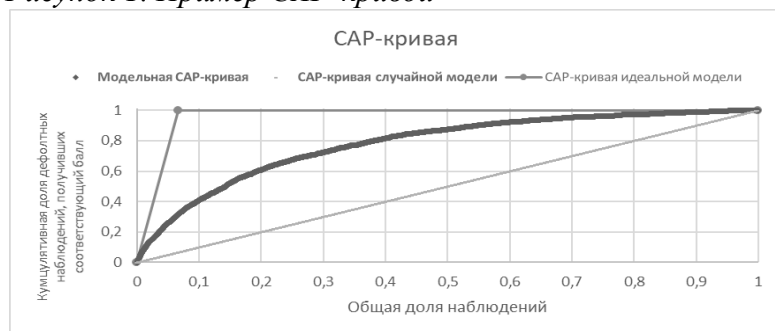
- Заемщик признается не находящимся в дефолте, если в течение 18 месяцев с начала наблюдения для него не было зафиксировано суммарных просрочек платежей по кредитным обязательствам, превышающих 90 дней.

Метрикой качества алгоритмов принимается коэффициент Джини [1], который непосредственно связан с CAP-кривой (Cumulative Accuracy Profile) [2].

CAP-кривая показывает, какой части дефолтных клиентов модель присваивает относительно худший скоринговый балл. Соответствующий CAP-кривой коэффициент Джини (*Gini*) вычисляется следующим образом [1]:

$$Gini = \frac{\text{Площадь между модельной CAP – кривой и диагональю}}{\text{Площадь между CAP – кривой идеальной модели и диагональю}}$$

Рисунок 1. Пример CAP-кривой



Коэффициент Джини варьируется в интервале $[0, 1]$, где 1 – идеальная модель, 0 – случайные результаты (аналогичные подбрасыванию монеты).

В качестве исходных данных использовалась выборка кредитных заявок крупнейших банков России, относящиеся к сегменту «Малый бизнес (ИП и ООО)». Список влияющих факторов включает как данные из кредитной анкеты (срок кредита, сумма кредита, максимальное число дней просрочки по кредитам за последние 2 года, число собственников и т.д.), так и финансовые показатели (среднемесячная прибыль за последний год, среднемесячные операционные расходы за последний год, ROE и т.д.). Общее количество учтенных факторов составило 47 (28 факторов на основе кредитной заявки и 19 факторов на основе финансовых показателей). Временной горизонт для выборки составил 36 мес.

Исходная выборка была разделена на три части: обучающую, кросс-валидационную и тестовую. При обучении производился подбор коэффициентов соответствующей модели, на выборке для кросс-валидации осуществлялся выбор гиперпараметров (параметры, не определяемые на этапе отыскания оптимума целевой функции модели, но задаваемые до этапа обучения модели, например, число базовых алгоритмов в ансамбле, коэффициент регуляризации), при тестировании оценивалось итоговое качество моделей по коэффициенту Джини. Соотношения между выборками, число наблюдений и уровни дефолта (Default Rate, DR) приведены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные

| Data | % от всей выборки | Число наблюдений | Число дефолтов | DR, % |
|-----------------------------|-------------------|------------------|----------------|--------------|
| Обучающая выборка | 60 | 85 454 | 5779 | 6.76% |
| Выборка для кросс-валидации | 20 | 28 485 | 1926 | 6.76% |
| Выборка для тестирования | 20 | 28 483 | 1926 | 6.76% |
| Итого | 100 | 142 422 | 9631 | 6.76% |

2. Алгоритмы машинного обучения в аспекте решения задачи кредитного скоринга

Построение модели машинного обучения предполагает решение оптимизационной задачи: определяется набор параметров модели, минимизирующий заданную функцию потерь. Параметрами модели в данном случае являются весовые коэффициенты входящих в нее факторов, а также другие параметры, обусловленные спецификой конкретной модели. Функции потерь моделей основаны на сопоставлении фактических значений целевого события с его прогнозными вероятностями. Результатом работы всех моделей является прогнозное значение вероятности наступления целевого события – дефолта.

Поиск минимума функции потерь по набору параметров осуществляется с помощью стохастического градиентного спуска.

Для сопоставления различных моделей использовался фиксированный набор факторов. Общую схему процесса обучения каждой модели можно представить следующим образом:

- Определение оцениваемых коэффициентов алгоритма, а также настроечных гиперпараметров;
- Задание сетки поиска (grid search) – множества комбинаций гиперпараметров алгоритма, каждую из которых необходимо протестировать на выборке для валидации;
- Оценка коэффициентов моделей на обучающей выборке, исследование метрики качества на выборке для валидации. По результатам выбирается наиболее предпочтительная модель с точки зрения соотношения коэффициент Джини/сложность модели;
- Для наиболее предпочтительной модели измеряется итоговое качество работы на отложенной тестовой выборке.

2.1. Модель с логистической функцией потерь [3]

Классический алгоритм на основе логистической функции потерь:

$$J(\theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^i \log(h_{\theta}(x^i)) + (1 - y^i) \log(1 - h_{\theta}(x^i)), \text{ где}$$

J – функция потерь;

θ – вектор весовых коэффициентов при факторах модели;

m – размер выборки;

$h_{\theta}(x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta(x)}}$ – вероятность принадлежности объекта к классу с меткой 1;

i – порядковый номер наблюдения;

Целевое событие связано с факторами следующим образом:

$$y(x) = \frac{1}{1 + \exp^{-\theta(x)}},$$

x – набор факторов.

2.2. Случайный лес (Random Forest) [4]

Random forest является ансамблевым методом машинного обучения и представляет собой объединение N базовых алгоритмов в композицию. Базовыми алгоритмами могут быть любые модели, позволяющие решить поставленную задачу бинарной классификации – например, решающее дерево, логистическая регрессия, метод опорных векторов. Итоговая композиция определяется средним арифметическим прогнозов базовых алгоритмов.

В качестве базовых алгоритмов в данном случае выступают решающие деревья [5].

Алгоритм построения модели случайного леса формулируется следующим образом.

1. Для всех b ($b = 1, \dots, B$, B – число решающих деревьев):

- а. Определяется bootstrap-выборка (формируется случайным отбором наблюдений с возвращением) размером N из обучающей выборки
- б. Строится решающее дерево T_b , рекурсивно повторяя следующие шаги для каждого листа дерева до тех пор, пока минимальное число наблюдений в одном листе не достигнуто:
 - i. Случайным образом выбирается m факторов из всего доступного списка
 - ii. Определяется наилучшее разбиение среди m
 - iii. Узел разбивается на две части

2.3. Градиентный бустинг [6]

Основная идея данного алгоритма схожа с концепцией случайного леса – в основе лежит некоторое количество базовых алгоритмов, результаты работы которых агрегируются для итогового предсказания композиции. Однако, в отличие от алгоритма случайного леса, базовые алгоритмы градиентного бустинга строятся последовательно, а не параллельно, при этом каждый следующий алгоритм строится с учетом целевой функции, минимизирующей ошибки предыдущего алгоритма. Таким образом, градиентный бустинг – это пример алгоритма направленного построения ансамбля моделей. Итоговая композиция является суммой, а не средним:

$$a_N(x) = \sum_{n=1}^N b_n(x)$$

a – композиция алгоритмов, N – число итераций, b – базовый алгоритм, n – порядковый номер базового алгоритма, x – набор факторов.

Алгоритм градиентного бустинга.

Составляющие:

$\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, n}$ – набор данных, где x_i – вектор факторов для i -го наблюдения, y_i – значение целевого признака для i -го наблюдения,

M – число итераций, $L(y, a)$ – функция потерь, $b(x)$ – базовый алгоритм.

1. Инициализация градиентного бустинга первоначальным значением

$$f_0 = \arg \min \sum_{i=1}^n L(y_i, c), \text{ где } c \text{ – некоторая константа}$$

2. Для каждой итерации $t = 1, \dots, M$ повторять:

а. Расчет остатков r_i

$$r_{it} = - \left[\frac{\partial L(y_i, a(x_i))}{\partial a(x_i)} \right] \text{ для всех } i = 1, \dots, n$$

б. Построение очередного алгоритма на остатках

$$b_n(x) = \arg \min \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (b(x_i) - r_i)^2$$

с. Добавление построенного алгоритма к композиции

$$a_n(x) = \sum_{m=1}^n b_m(x)$$

3. В зависимости от критерия останова продолжить цикл, либо остановить обучение на данном этапе

3. Результаты реализации рассмотренных алгоритмов.

В таблице 2 представлены полученные при тестировании результаты сравнительного анализа рассмотренных алгоритмов.

Таблица 2. Результаты сравнительного анализа алгоритмов

| Алгоритм | Коэффициент Джини (по убыванию) |
|------------------------------|---------------------------------|
| Градиентный бустинг | 65.64% |
| Случайный лес | 57.02% |
| Логистическая функция потерь | 45.82% |

Полученные результаты могут быть использованы аналитическими подразделениями банков для определения приоритетных моделей в задачах кредитного скоринга.

Список литературы

1. Rezac M., Rezac F. How to measure the quality of credit scoring models //Finance a Uver. – 2011. – Т. 61. – №. 5. – С. 486.
2. Frunza M. C. Computing a standard error for the Gini coefficient: an application to credit risk model validation //The Journal of Risk Model Validation. – 2013. – Т. 7. – №. 1. – С. 61.
3. Hastie, T., Tibshirani, R. and Friedman, J. H. The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction (2nd ed.). New York: Springer (2009).
4. Ho Т. К. The random subspace method for constructing decision forests //IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. – 1998. – Т. 20. – №. 8. – С. 832-844.
5. Quinlan J. R. Induction of decision trees //Machine learning. – 1986. – Т. 1. – №. 1. – С. 81-106.
6. Friedman J. H. Greedy function approximation: a gradient boosting machine //Annals of statistics. – 2001. – С. 1189-1232.

Comparative analysis of machine learning algorithms for credit scoring problems

L.F. Petrov, V.A. Arkhipov
Plekhanov RUE, Moscow, Russia

Реализация преимущества при различных подходах к оптимизации портфеля коалиции

В.Г. Саркисов
Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Работа посвящена исследованию эффективности объединения в коалицию инвесторов с различным уровнем неприятия риска (профилями риска). Моделируется портфель коалиции, состоящей из двух инвесторов. Первый из них является консервативным и основное внимание уделяет снижению риска. Второй инвестор – агрессивный, для него важна потенциально высокая доходность, при этом приемлемый уровень риска значительно выше, чем у консервативного инвестора. В качестве математического описания портфеля используется модель Марковица, в качестве критерия доходности выступает математическое ожидание доходности за некоторый период, а в качестве критерия риска – дисперсия доходности за этот же период, кредитование не допускается. В [1] показано, что в модели Марковица портфель коалиции может иметь преимущество по риску и доходности перед объединением оптимальных портфелей отдельных инвесторов, и сформулированы условия возникновения этого преимущества. Обобщение на случай множества разнородных критериев приведено в [2] и [3].

Для формирования портфеля использовался следующий алгоритм:

1. Рассчитывалась эффективная граница множества допустимых портфелей. Все портфели границы являются недоминируемыми по Парето, то есть, не существует ни одного допустимого портфеля, который был бы не хуже портфеля границы одновременно по риску и доходности и при этом строго лучше хотя бы по одному из этих критериев.
2. На эффективной границе выбирались индивидуальные оптимальные портфели инвесторов в соответствии с их уровнями неприятия риска.

3. Рассчитывались параметры объединения индивидуальных портфелей. Например, портфель первого инвестора содержит 10 акций Газпрома и 100 акций Сбербанка, а второго – 30 Газпрома и 50 Сбербанка. Тогда объединенный портфель будет содержать $10+30=40$ акций Газпрома и $100+50=150$ Сбербанка. Этот портфель не принадлежит эффективной границе, за исключением случая, когда все инвесторы коалиции имеют очень близкие предпочтения.
4. В качестве портфеля коалиции на эффективной границе выбирался один из портфелей, являющихся доминирующим по Парето относительно объединенного портфеля.

Последний шаг предполагает некоторую свободу выбора, так как существует множество таких доминирующих портфелей. Границами этого множества являются два портфеля:

- 1) Портфель с таким же риском, как у объединенного портфеля, но с максимальной при таком риске доходностью.
- 2) Портфель с доходностью, равной доходности объединенного портфеля, и минимально возможным при такой доходности риском.

Кроме этой пары граничных портфелей, возможно использование промежуточных вариантов, предполагающих различные промежуточные соотношения снижения риска и повышения доходности.

Если информация о предпочтениях инвесторов позволяет не только выбрать оптимальный индивидуальный портфель на эффективной границе, но и описать предпочтения в виде целевой функции, то доминирование относительно объединенного портфеля можно рассматривать, используя эти целевые функции в качестве критериев. Такой подход несколько расширяет множество для выбора портфеля коалиции, допуская варианты некоторого повышения риска при существенном росте доходности или снижения доходности при существенном снижении риска. Более подробный анализ такого расширенного подхода приведен в [2].

В настоящей работе рассматриваются два описанных выше граничных варианта.

При выборе первого варианта (максимальная доходность при зафиксированном уровне риска) инвесторы получают дополнительную полезность в виде повышения математического ожидания доходности портфеля. В таком виде дополнительная полезность может быть легко распределена между инвесторами.

Более того, дополнительная полезность может быть ассоциирована с некоторым новым активом, доходность которого равна разности доходностей выбранного портфеля коалиции и объединенного портфеля. Математическое ожидание доходности такого актива положительно. Численное моделирование показывает, что в большинстве случаев соотношение доходности и риска такого актива не хуже, чем у исходных активов, включаемых во все рассматриваемые портфели.

Такой актив может послужить в качестве базового для некоторого набора производных инструментов. Например, один участник коалиции может продать другому опцион или даже построить некоторую опционную стратегию. Такая формализация позволяет гибко перераспределить риски и доходы между участниками коалиции, при этом заранее однозначно зафиксировав взаимную ответственность.

Также данный актив может быть продан внешнему инвестору, не являющемуся участником коалиции. В этом случае к активу применяются те же критерии доходности и риска, что и к реальным активам.

При выборе второго варианта (минимальный риск при фиксированной доходности) инвесторы получают полезность в виде снижения риска. Если новый актив сформировать по аналогии с первым вариантом, вычитая доходность объединенного портфеля из доходности портфеля коалиции, то полученный актив будет иметь близкое к нулю математическое ожидание доходности и существенный риск.

Высокий риск связан с тем, что новый актив оптимизирован, чтобы компенсировать излишнюю изменчивость доходности объединенного портфеля. В идеале он будет иметь такую же изменчивость, но с противоположным знаком. Соответственно, риск такого актива сопоставим с риском объединенного портфеля. Очевидно, что самостоятельной ценности такой актив не имеет, продать его стороннему инвестору практически невозможно. С другой стороны, внутри коалиции данный актив может использоваться для формализации перераспределения риска между участниками, например, путем построения опционных стратегий.

Список литературы

1. Саркисов В.Г. Система оптимального управления коллективными инвестициями в модели Марковица // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2013. № 4 (40). С. 45-52
2. Болдырева И.А., Бородач Ю.В., Головкин В.Б., Малышенко В.А., Малышенко К.А., Саркисов В.Г., Финогенова Ю.Ю. Финансовый рынок и финансово-инвестиционная инфраструктура. – Новосибирск: СибАК, 2015. 170с.
3. Саркисов В.Г. Основы синтеза системы управления коллективными инвестициями // Труды XXVIII Междунар. науч. конф. Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2015. № 3 (73). С. 98-103.

Realizations of the Advantages with Different Approaches to Optimizing the Coalition's Portfolio

V.G. Sarkisov

Samara State Technical University, Samara, Russia

Вычислительные эксперименты с моделью добычи цифровых валют

А.Н. Сытов

ВЦ имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН Москва, Россия

Предлагается динамическая имитационная модель добычи участником некоторой криптовалюты. Рассматривается вариант добычи индивидуально, в автономном режиме, и в пуле. Моделирование проводится в дискретном времени на некотором конечном интервале. Шаг по времени выберем равным τ , а нумерацию шагов введем следующим образом: $t=1,2,\dots,T$. Все потоковые переменные относятся ко всему временному интервалу, соответствующему номеру t . Фазовые переменные относятся к началу шага.

Далее у нас будет только одна основная фазовая переменная – это денежные средства участника. Мы будем также использовать термин “капитал”, считая, что это синоним накопленным денежным средствам участника. Основным интерес для нас будет представлять капитал участника в конце последнего шага. Деятельности майнеров по добыче валюты сопутствует обработка массивов информации, которые формируются в виде блоков. Блоки имеют свой идентификатор, который создается на основе решения переборной задачи (поиска так называемого параметра *nonce*) в процессе производства продукта (майнинг, *proof-to-work*) и содержат проведенные майнером транзакции. Задача имеет вид: найти решение неравенства $h(\text{block}, \text{nonce}) \leq d$ относительно параметра *nonce*, где d задается алгоритмически по заданной известной формуле, h -криптографическая хэш-функция *sha256*, утверждённая Бюро стандартов США, *block* – заданная характеристика предыдущей записи участника. Поскольку моделирование процесса добычи криптовалюты мы будем

проводить в предположении случайного характера неопределенных факторов, то конечный капитал участника представляет собой случайную величину. С помощью метода Монте-Карло мы построим ее распределение, вычислим математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение. Эти две величины будут являться критериями в модели. На основе их значений можно сравнить процесс добычи криптовалюты в автономном режиме и в пуле, в том числе для различных правил распределения вознаграждения, установленных владельцами пулов для их участников.

Примем следующие обозначения: c_t – цена (в долларах) на интервале t одной единицы криптовалюты, g_t – вознаграждение за добытый блок, в единицах криптовалюты; например, количество биткоинов, которое майнер получает за добытый блок. Награда за блок — премия, которую получает майнер или группа майнеров, работающих в пуле, за добавление очередного блока в цепочку блокчейн.

Денежные средства измеряются в фиатных деньгах (в данных расчётах в долларах, выбор валюты непринципиален).

Переменными, которые характеризуют состояние майнера являются запасы криптовалюты $N_{u,t}$ и его денежные средства $M_{u,t}$. Динамика этих переменных описывается следующими соотношениями:

$$N_{u,t+1} = N_{u,t} - X_{u,t}^s + X_{u,t}^m, N_{u,1} = N_u^1;$$

$$M_{u,t+1} = M_{u,t} + X_{u,t}^s \cdot c_t - W_{u,t} - R_{u,t}, M_{u,1} = M_u^1.$$

Здесь мы приняли следующие обозначения:

$X_{u,t}^s$ – проданное количество единиц криптовалюты, $X_{u,t}^m$ – добытая криптовалюта, $W_{u,t}$ – денежные средства расходуемые на покупку нового оборудования $R_{u,t}$ – расходы по оплате электроэнергии. Будем записывать $R_{u,t} = q_{u,t} \cdot e_t$, где q_t - потребляемая оборудованием электроэнергия и e_t - стоимость электроэнергии на шаге t ,

Обозначим через $B_{u,t}$ число структурных единиц (блоков), созданных автономно на шаге t . $H_{u,t}$ мощность оборудования майнера на шаге t . Эта величина определяет число проведенных вычислений в единицу времени, связанных с перебором параметров для нахождения значения хэш функции (хэша) с заданными свойствами в единицу времени. Фактом одного вычисления считается проверка значения одного хэша при данном значении попсе.

Число проведенных вычислений на шаге t есть $H_{u,t} \cdot \tau$.

В рамках нашей модели считается, что $B_{u,t}$ представляет собой случайную величину с биномиальным распределением. Будем это записывать как $B_{u,t} \sim \text{Bin}(H_{u,t} \cdot \tau, p_t^b)$. Параметры этого распределения $H_{u,t} \cdot \tau$ и p_t^b . p_t^b - это вероятность нахождения хэша с заданными свойствами, $p_t^b = 1/(2^{32} \cdot D_t)$.

D_t - это сложность сети на шаге t . Будем это записывать как $B_{u,t} \sim \text{Bin}(H_{u,t} \cdot \tau, p_t^b)$.

В предположении независимости проверки каждого попсе и считая, что на шаге t длины τ сложность сети не меняется, число добытых блоков будет представлять собой сумму независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение Бернулли с параметром p_t^b .

В пуле участник решает несколько иную задачу. Он подбирает попсе, который позволит получить так называемый стандартный вариант - блок с хэш, который подошел бы, если бы параметр сложности был равен единице. Событие, что данный

после позволяет получить такой хэш, опять же моделируется бернуллиевской случайной величиной, только теперь с вероятностью “успеха” $p_t^s = 1/2^{32}$.

(В формуле для p_t^b мы положили $D_t = 1$).

Тогда, аналогично рассуждениям выше, число стандартных вариантов (share) $S_{v,t}$, добытых участником v пула на шаге t представляет собой сумму $H_{v,t} \cdot \tau$ независимых и одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин с параметром p_t^s . Эта сумма будет являться случайной величиной с биномиальным распределением $S_{v,t} \sim \text{Bin}(H_{v,t} \cdot \tau, p_t^s)$. Организатор пула проверяет хэш каждого присланного стандартного варианта. Если он окажется теперь не более текущей цели, то организатор пула получает вознаграждение за добытый блок. Этот процесс опять же моделируется бернуллиевской случайной величиной, но теперь уже с вероятностью успеха $d_t = 1/D_t$. Можно записать $p_t^b = p_t^s \cdot d_t$. Число добытых пулом блоков $B_{V,t} | S_{V,t} \sim \text{Bin}(S_{V,t}, d_t)$, где $S_{V,t} = \sum_v S_{v,t}$.

Индивидуальное участие в добыче. Будем считать, что участник не создает запасы криптовалют, то есть будем считать, что полученную в качестве вознаграждения от добычи блока криптовалюту, участник сразу же продает, например на бирже, за доллары.

$$X_{u,t}^m = B_{u,t} \cdot g_t.$$

Добыча в пуле. Динамика капитала участника в случае добычи в пуле описывается аналогичным соотношением как и при добычи в одиночку: Для более равномерного и предсказуемого получения вознаграждения майнеры объединяют свои вычислительные мощности в пулы (от англ. pool — общий фонд). Выплаты майнеру рассчитываются исходя из отправленных им пулу стандартных вариантов (shares) (блоков с хэшем, который подошёл бы, если бы параметр сложности был равен единице). С точки зрения криптовалютной системы, пул выступает как мощный соло-майнер, который получает вознаграждение на общих основаниях. Но за счёт своей совокупной мощности, вероятность получения награды у пула равна сумме вероятностей получить награду каждого из его участников. Полученное вознаграждение распределяется между членами в соответствии с установленными владельцем пула правилами. Существуют, по меньшей мере два основных вида начисления наград:

Proportional — После нахождения пулом блока награда делится пропорционально вкладу каждого участника.

PPS — Вознаграждается каждый присланный стандартный вариант (из расчёта текущего вознаграждения за блок, деленного на текущую сложность).

Некоторые результаты расчетов. Число интервалов времени $T = 100$. Длина одного интервала $\tau = 1$ день. Число реализаций 100 тысяч.

Оценки для математического ожидания и среднеквадратичного отклонения в долларах (соответственно):

Автономное поведение: {1273.12, 9852.97}

PPS: {1286.2, 0.00933313} MPPS: {570.496, 535.277}

Proportional: {1286.73, 1164.3}

Как следует из расчётов, в случае автономного поведения средний конечный капитал примерно такой же, как и в случае в пуле, но среднеквадратичное отклонение конечного капитала в этих случаях при добыче в пуле меньше.

Приведем графики распределений конечного капитала при добыче в пуле.

Распределение конечного капитала при добыче в пуле и методе PPS:

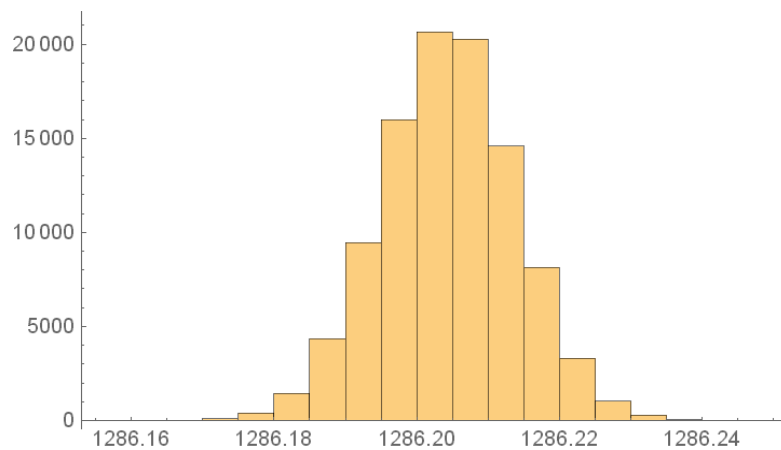


Рис. 1. Распределение конечного капитала в случае метода PPS

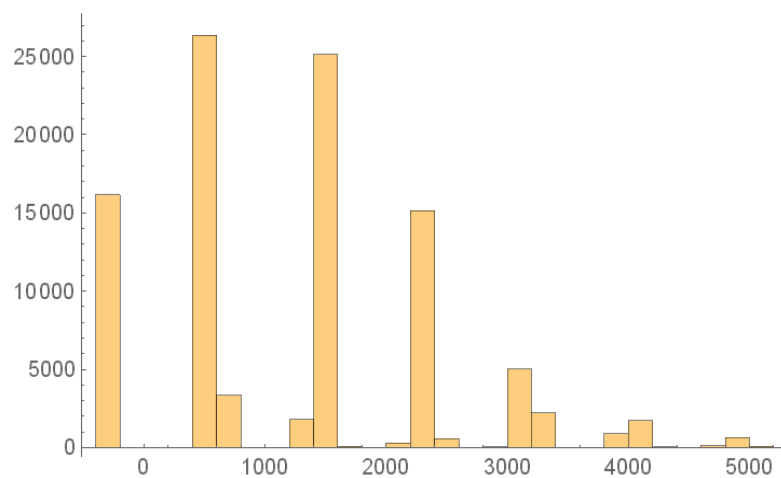


Рис. 2. Распределение конечного капитала в случае метода Proportional.

Список литературы

1. Meni Rosenfeld. Analysis of Bitcoin Pooled Mining Reward Systems. arXiv:1112.4980 [cs.DC]
2. Михайлов, Г. А. Статистическое моделирование. Методы Монте-Карло : учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 371 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс).
3. <https://ru.bitcoin.it>, <https://bitcoin.org/ru/vocabulary>

Simulation modeling of cryptocurrencies mining process

A.N. Sytov

Dorodnicyn Computing Centre FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Анализ некоторых аспектов использования криптовалют как средства платежа*

Р.И. Яминов

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Введение

С момента появления биткоина, первой криптовалюты, прошло около 10 лет. За это время криптовалюты получили широкую известность, но новые деньги, первоначально созданные как электронный аналог обычных бумажных денег, пока не получили особого распространения как средство платежа [1]. Цель данного исследования состоит в том, чтобы изучить возможность распространения криптовалют в качестве средства платежа и отдельных параметров, связанных с этим.

На текущий момент есть отдельные немногочисленные исследования в области криптовалют, так Arauzo [2] положительно отвечает на вопрос о возможности создания и существования единой электронной монеты для проведения международных платежей и показывает, что возможна экономическая выгода от этого. В ряде других работ Battistoni [3] и Luther [4] исследуется возможность распространения криптовалют и приводятся необходимые условия для того, чтобы это осуществилось. Используя разные подходы и предпосылки, авторы приходят к противоположным выводам.

Chiu и Wong [5] строят модель для изучения различных технологий электронных платежей и возможных их преимуществ над традиционными деньгами, а также определяют существенные характеристики электронных денег, которые могут помочь внедрить более эффективное распределение ресурсов. Fernandez-Villaverde и Sanches [6] моделируют криптовалюту как частные деньги и анализируют, когда конкуренция приводит к повышению эффективности. Chiu и Koeprl [7] разработали общую модель равновесной денежной модели для изучения оптимального проектирования криптовалютной системы на основе блокчейна и выполнения количественной оценки схемы с использованием откалиброванной модели на данных по транзакциям биткоина.

Есть работы по моделированию и предсказанию волатильности криптовалют с использованием и адаптацией модели волатильности из фондового рынка акций: Catani, Grassi и Ravazzolo [8] для биткоина и Chu, Chan, Nadarajah и Osterrieder [9] для наиболее популярных криптовалют.

В данной работе предлагается исследовать «идеальную» ситуацию, в которой криптовалюты используются как средство платежа и приводятся необходимые условия для этого, в частности, необходимость снижения волатильности цен.

Анализ количества криптовалют

На текущий момент существуют сотни различных криптовалют с различной популярностью. Возникает вопрос, снизится ли их количество или только возрастет. Для ответа на этот вопрос строится модель, основанная на равновесии Нэша.

Рассмотрим ситуацию, когда цены стабилизируются (в предпосылке, что такая ситуация возможна), волатильность низкая и, следовательно, низкий риск владения криптовалютой

Агенты, участвующие в экономических итерациях, делятся на две категории:

- 1) Те, которые используют криптовалюту для совершения транзакций, в свою очередь, делятся на:
 - покупателей товаров или услуг,
 - продавцов товаров или услуг.

* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А

Покупатели товаров или услуг инициируют транзакции по покупке услуг или товаров с помощью криптовалюты. Возникновение потребности в товаре или услуги для конкретики моделируется пуассоновским процессом. Для осуществления транзакции покупатель на рынке покупает криптовалюту, осуществляет платеж (перевод криптовалюты) магазину/поставщику услуг, после чего магазин/поставщик услуг через какое-то время продает полученную криптовалюту на рынке.

- 2) Агенты, обеспечивающие ликвидность для первых. Остальные участники рынка, имеют некоторую внутреннюю оценку стоимости криптовалюты, и если текущая цена ниже стоимости, то покупают, если выше, то продают одну единицу криптовалюты. Такое разбиение не снижает общности рассуждений, так как любого реального агента можно представить в виде совокупности таких единичных агентов.

Предположим, что агенты продавцы услуг или товаров (S) оценивают криптовалюту $c \in Cr$ по $+1$ независимым параметрам $\{c_{ic}\}_{i=1..N}$ для совершения сделки с разными весами $\{a_{iS}\}_{i=0..N+1}$, где $a_{iS} \geq 0$ и $\sum_i a_{iS} = 1$. Здесь первый параметр ($i = 0$) популярность (распространенность) $Q_{cB} = \sum_B q_{cB}$. Для поддержания приема платежей у продавца есть некие затраты r_s и его выигрыш записывается следующим образом:

$$U_S(q_{cS}) = \sum_{c \in Cr} q_{cS} \cdot \left(a_{0S} \cdot Q_B + \sum_{i=1..N} a_{iS} \cdot c_{ic} - a_{+1S} \cdot r_c \right),$$

где $q_{cS} \in \{0; 1\}$ выбор агента S по принятию или нет платежей по валюте $c \in Cr$.

Аналогично покупатели услуг или товаров оценивают криптовалюту и имеют затраты r_c , но они выбирают поддерживать только ту валюту, которую принимает продавец.

$$U_B(q_B(S)) = \sum_S q_{cS} \cdot \left(\sum_{i=1..N} a_{iB} \cdot c_{ic} - a_{N+1B} \cdot r_c \right) \Big|_{c=q_B(S)},$$

где $q_B(S) \in Cr$ выбор криптовалюты агентом B для оплаты в магазине S .

В результате получилась игра в нормальной форме, где стратегия у агента продавца товара или услуги – вектор q_{cS} , а у агента покупателя товара или услуги – функция $q_B(S)$. Можно показать, что в равновесии Нэша будет использоваться не более $N + 1$ криптовалют, где N количество отличительных характеристик, влияющие на их выбор. При этом их будет не более, чем количество собственных векторов у матрицы:

$$C = \|c_{ic}\|_{c \in Cr}^{i=1..N+1},$$

где за принимается $c_{N+1c} = -r_c$.

Влияние волатильности на возможность использования криптовалют как инструмента для осуществления платежей

Вначале покажем, что волатильность цен теоретически может добавлять небольшую долю прямых затрат, но данный результат не достижим на практике из-за возможности покупателей отказаться от покупки. Продавец товара/услуги, для того чтобы не потерять в цене при продаже, должен одновременно с фиксацией цены для покупателя купить страховку от изменения цены: продать фьючерс на необходимый объем. Стоимость фьючерса на конкурентном рынке не может отличаться в большую сторону от текущей стоимости базового контракта более, чем на стоимость денег, в противном случае арбитражеры возьмут деньги в долг купят базовый контракт и продадут фьючерс и так до тех пор, пока не исчезнет неэффективность.

Получается, что затраты составляют небольшую часть от цены, но на практике покупатель не может быть уверен в том, что у него купят продукт до момента получения денег, и он должен или принять этот риск, заложив в цену, или хеджировать его другими инструментами, например, покупкой call опциона, но цены опционов

растут с ростом волатильности. Формула Блэка-Шоулза для цены опциона с ценой страйка, равной текущей цене актива, выглядит так:

$$P_{call} = S \cdot (N(d_1) - e^{-rT} N(d_1 - \sigma\sqrt{T})),$$

где $d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, S – текущая цена актива (криптовалюты), $N(x)$ – кумулятивная функция распределения стандартного нормального распределения, r – безрисковая процентная ставка, T – время экспирации опциона, σ – волатильность базового актива.

Соответственно, с ростом волатильности растут транзакционные издержки продавца, которые он закладывает в цену, и, начиная с некоторого момента, они превысят выгоду от приема криптовалют и в итоге или продавец откажется от приема криптовалют, или покупатель будут выбирать другие более выгодные схемы платежей. Поэтому в периоды высокой волатильности можно ожидать снижения количества транзакций по уплате за товары или услуги в криптовалютах.

Волатильность

Если проанализировать текущую реализацию ряда криптовалют, то в предложенной системе отсутствуют механизмы по снижению волатильности. Любое резкое изменение во внутренней оценке стоимости криптовалюты у агентов, обеспечивающих ликвидность, приводит к резкому изменению цены. Но с другой стороны, в случае отсутствия резких изменений оценок внутренней стоимости, система не будет самостоятельно дестабилизироваться и будет иметь низкую волатильность.

Механизмом по стабилизации стоимости, например, мог бы выступать механизм по изменению (созданию или удалению) криптовалют. Но, например текущий механизм создания биткоина: «майнинг», реализованный в том виде, как сейчас, не подходит на роль данного механизма, потому что предполагает динамическую подстройку сложности «майнинга» и тем самым количество желающих проводить эмиссию валюты не влияет на уровень эмиссии. В результате, если цена биткоина (или аналогичных криптовалют) растет, то количество желающих проводить эмиссию растет до тех пор, пока стоимость эмиссии новой валюты не сравняется с затратами. И аналогично, наоборот, при снижении цены уменьшается количество желающих. Но подобные изменения не влияют на средний уровень эмиссии из-за его динамической подстройки. Если сравнить, например, с золотом, то там нет такой «подстройки», поэтому снижение цены ведет к снижению активности по добыче золота, что в свою очередь снижает объем эмиссии (добычи) золота, а это выступает механизмом стабилизации.

Заключение

Если криптовалюты продолжают развиваться, то можно ожидать, что в будущем произойдет резкое снижение числа криптовалют до числа различающих их характеристик. Например, сейчас можно выделить около 10 потребительских характеристик (скорость проведения платежа; разные параметры платежа, например, разная степень анонимности – публичности; различные особенности, например, возможность создания смартконтрактов) и, соответственно, можно ожидать снижения числа криптовалют.

Текущая схема реализации не содержит внутренних механизмов по снижению волатильности, и если не будет изменен механизм или не будет добавлен внешний фактор стабилизации, то можно ожидать, что волатильность на рынке криптовалют сохранится. В тоже время высокая волатильность негативно сказывается на возможности использования криптовалют для проведения платежей.

Список литературы

1. Hileman G., Rauchs M. Global cryptocurrency benchmarking study. Cambridge Centre for Alternative Finance. 2017.
2. Araúzo P.O. Brave New Monetary World: Exploring The Idea Of An International Cryptocurrency. // Master's Thesis Economics 2016 – 2017. Radboud University. 2017.

3. Battistoni L. Emerging cryptocurrency trust in an agent-based model. Universita di Torino. Anno Accademico 2016/2017.
4. Luther W.J. Cryptocurrencies, Network Effects, and Switching Costs. Kenyon College.
5. Chiu J., Wong T.N. On the essentiality of E-money // Bank of Canada Staff Working Paper. No. 2015-43.
6. Fern'andez-Villaverde J., Sanches D., (2016). Can currency competition work? // National Bureau of Economic Research No. w22157. 2016.
7. Chiu J., Koepl T. The Economics of Cryptocurrencies – Bitcoin and Beyond
8. Catania L., Grassi S., Ravazzolo F. Predicting the Volatility of Cryptocurrency Time-Series // CAMP Working Paper Series. ISSN: 1892-2198. No 3/2018
9. Chu J., Chan S., Nadarajah S., Osterrieder J. GARCH Modelling of Cryptocurrencies // Journal of Risk and Financial Management

Analysis of some aspects of using crypto currency as payment instrument

R.I. Yaminov

Dorodnicyn Computing Centre FRC CSC RAS, Moscow, Russia

СЕКЦИЯ № 10

ИО В СТРАХОВАНИИ И РИСК МЕНЕДЖМЕНТЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Бритков В.Б., Ройзензон Г.В. Междисциплинарный подход к анализу риска | 340 |
| Киселев В.Г. Оптимальная стратегия агрофирмы при мультирисковом страховании урожая | 345 |

Междисциплинарный подход к анализу риска*

В.Б.Бритков

ИСА ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

МФТИ, г. Москва

Г.В.Ройзензон

ИСА ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

МФТИ, г. Москва

НИУ МЭИ, г. Москва

В ключевых отраслях экономики России наблюдается значительный износ оборудования. В этой связи крайне востребованы различные методы поиска аналогов и заменителей научно-технических решений и технологий, эффективная реализация которых в РФ связана с определенными трудностями. В условиях введения различных санкций по отношению к РФ со стороны технологически развитых зарубежных стран важность данного аспекта существенно возрастает. Таким образом, обозначенная проблема технологического отставания увеличивает вероятность крупных аварий и техногенных катастроф. В связи с этим актуальна разработка различных новых подходов к анализу риска в рамках самых разных предметных областей, в частности: крупномасштабные технологии (например, атомная энергетика [2, 9], строительство и эксплуатация магистральных газо- и нефтепроводов [12, 13], транспорт [20]); финансовая сфера (например, анализ кредитного риска [15]); анализ политических рисков [4] и ряд других. В частности, при построении различных индикаторов устойчивого развития [16] учет политических рисков представляется крайне важным и востребованным. Широта различных прикладных областей применения методов анализа риска лишней раз подчеркивает их междисциплинарный характер.

Весьма перспективным является поиск аналогов и заменителей научно-технических решений и технологий с использованием модели циклов Кондратьева [8]. Математическая модель циклов Кондратьева построена на основе аксиоматики, связывающей экономический рост с инвестициями и эффективностью инноваций. В частности, использование такой модели весьма актуально для развивающихся экономик. Анализ модели циклов Кондратьева показывает, что прорыв в группу развитых стран возможен на восходящей фазе цикла Кондратьева в период растущего глобального спроса на продукцию новых технологий. Так, Япония смогла выйти в

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-07-00865, 16-29-12901, 16-29-12878).

технологические лидеры на волне развития технологий твердотельной электроники в восходящей фазе 4-го цикла Кондратьева, а Южная Корея – на волне развития технологий больших интегральных схем в восходящей фазе 5-го цикла Кондратьева. Таким образом, использование модели циклов Кондратьева является достаточно важным и востребованным инструментом для анализа различных типов рисков (причем, не обязательно, только технологических).

Совершенно новые типы рисков связаны с внедрением в повседневную жизнь технологий, использующих искусственный интеллект (интеллектуальные биржевые роботы, системы оценки кредитного риска [15], беспилотные автомобили и летательные аппараты [1] и т.п.). К концу следующего десятилетия можно ожидать лавинообразный рост (несколько десятков миллиардов единиц) числа разнообразных интеллектуальных устройств (ИУ) разного масштаба (интеллектуальных роботов (ИР), умных машин, умных предприятий, умных городов и т.п.) [1]. Соответственно, подобное развитие событий приведет к необходимости обработки огромных массивов информации, поступающих от ИУ. В этой связи исследователи столкнутся с проблемой обработки больших данных (big data) совершенно другого масштаба, даже по сравнению с текущим моментом. Под большими данными понимаются такие данные, объем которых превосходит текущие возможности оперирования ими в обозримый период. Важным направлением исследований является использование больших данных в рамках интерактивных компьютерных систем [6]. Таким образом, можно предложить альтернативное определение больших данных, формулируемое следующим образом: под большими данными понимаются массивы разнородной (структурируемой, слабо структурируемой и неструктурируемой) информации, которые не могут быть непосредственно использованы в человеко-машинных процедурах многокритериального принятия решений. С учетом вышеизложенного, рост числа ИУ требует разработки совершенно новых подходов к оценке технологических рисков [9], в которых будут гармонично сочетаться возможности интеллектуальных устройств самостоятельно предотвращать какие-либо нежелательные последствия (аварии) и возможности человека вмешиваться в такие процессы. Очевидно, что роль человеческого фактора при оценке технологических рисков (например, статистические и экспертные подходы) будет постепенно сокращаться (человек просто физически не успеет среагировать на различные опасные ситуации, которые могут возникать при использовании ИУ). Соответственно при таких обстоятельствах более общую трактовку получает проблема этики в области систем искусственного интеллекта [10]. Использование технологий искусственного интеллекта потребует проектирования ситуационных центров (далее СЦ) нового поколения для отслеживания состояния огромного числа ИУ для возможности оперативного вмешательства в их работу [6]. Таким образом, ускорение темпа развития информационных технологий ставит новые задачи и предоставляет новые возможности использования СЦ для решения самого широкого круга вопросов мониторинга различных сфер деятельности с точки зрения оценки и прогнозирования самых разных типов рисков.

В общем случае под измерением риска понимают определение опасности от того или иного источника (вида деятельности) для индивидуума или группы [12]. Отметим основные четыре подхода, которые используются для измерения риска.

Первый подход хорошо известен как инженерный. В рамках данного подхода основные усилия направлены на сбор статистических данных о поломках, авариях, связанных с утечкой вредных веществ в окружающую среду [9]. Инженерный подход ориентирован на количественный расчет вероятности поломок, отказов и других нежелательных событий. Тем не менее, пример с аварией на японской АЭС Фукусима говорит о том, что почти невозможное сочетание казалось бы нескольких маловероятных событий (землетрясение, цунами и наводнение) имело место и привело к совершенно катастрофическим последствиям. Кроме того, достаточно

распространены случаи, когда прецедентная информация отсутствует (например, при решении совершенно новой задачи уникального выбора— места строительства экспериментального термоядерного реактора).

Второй подход принято называть модельным. Данный подход предполагает моделирование процессов, которые могут спровоцировать различные нежелательные последствия (аварии и т.п.) [9]. В рамках данного подхода проблема состоит в том, что построение модели сложной системы может потребовать достаточно много времени. К моменту завершения построения модели сама сложная система может значительно трансформироваться, и процесс моделирования фактически придется начинать заново [11]. В этом случае перспективным представляется применение концепции, которая предполагает разработку и использование одновременно сразу нескольких моделей и возможность сопоставлять результаты моделирования. Указанная концепция была использована при создании человеко-машинной системы моделирования под систему моделей глобального развития, которая реализовывалась во ВНИИСИ (в данный момент ИСА ФИЦ ИУ РАН), начиная с 1979 года [7]. Подход с использованием системы моделирования позволил управлять процессами создания моделей и их использования для решения задач демографии, оценки экономических потенциалов и ряда др. В последнее время активно развивается математическая теория риска и безопасности [19], весьма перспективная, в том числе и для модельного подхода.

Третий подход к измерению риска известен как экспертный. Как уже было отмечено, при применении инженерного и модельного подходов достаточно часто возникают ситуации, когда наблюдается дефицит статистических данных (или есть сомнения в их достоверности). Кроме того, при построении моделей в ряде случаев затруднительно выявить различные зависимости (так называемые слабоструктурированные задачи [13]). В такой ситуации фактически единственным источником сведений являются эксперты [12, 13, 15]. В рамках данного подхода сложности состоят в субъективности суждений экспертов, а также в механизмах обработки как количественных, так и качественных экспертных оценок.

В качестве примера приложения экспертного подхода можно привести опыт ИСА ФИЦ ИУ РАН в финансовой сфере (анализ кредитного риска [15]). Получение достаточно надежных оценок заемщика кредитов является сложной задачей, так как нет единого индикатора вероятности невозврата средств. Существует множество индикаторов (факторов, критериев), которые необходимо принимать во внимание. Каждый такой фактор вносит определенный вклад в общую оценку. Классификация кредитов для внутренних нужд банка может и должна учитывать самые различные параметры кредитного проекта (например, если в качестве заемщика выступает юридическое лицо (организация, фирма, корпорация и т.п.)). При этом необходимо учитывать так называемые данные нефинансового характера. Общее качество кредита является достаточно сложной функцией отдельных его составляющих. Эта функция не может быть определена путем объективных расчетов. Обстановка, в которой работает банк, непрерывно изменяется из-за изменения общей экономической ситуации. Следовательно, правила оценки качества кредитов могут базироваться на политике руководства банка, на интуиции и опыте его руководителей.

Классификация банковских кредитов по группам риска может осуществляться либо на основе экспертной оценки опытного кредитного работника, либо с помощью регулярной процедуры агрегирования оценок отдельных параметров кредита, полученных от профильных специалистов банка или привлеченных экспертов. При грамотной постановке процесса кредитования параллельно используются оба метода. Известны автоматизированные системы классификации, построенные на основе статистических методов, нейронных сетей и методах анализа больших данных. Однако такие процедуры требуют «хороших» статистических рядов, которые в ряде случаев недоступны в современной российской банковской практике. Такие системы не всегда

позволяют проследить «логику» классификации и, следовательно, избежать ошибок. Кроме того, большинство параметров, описывающих кредитный проект, имеют качественный характер, и формальная оцифровка оценок при использовании статистических процедур создает лишь видимость точности.

Представляется логичным использовать опыт руководящих лиц банка — членов кредитного комитета — для определения существенных (в данных экономических условиях) параметров кредитного проекта и построения правил классификации кредитов в полученном пространстве всевозможных сочетаний этих параметров. Для решения данной слабоструктурированной задачи использован метод порядковой классификации многокритериальных альтернатив ЦИКЛ с сокращением размерности признакового пространства [15, 17]. Этот метод позволяет поэтапно строить классификацию, проверять информацию на непротиворечивость, получать общее решающее правило. После ряда итераций были выделены классы качества банковских кредитов и построена иерархическая система критериев. Далее была проведена классификация возможных кредитов в многомерном пространстве шкал критериев. При этом проверялось качество полученных результатов. Первоначально были построены классификации кредитов на нижнем уровне, внутри описанных групп критериев. В качестве классов качества для каждой группы выступали общие оценки на шкалах критериев первого уровня иерархии. После классификации эти общие оценки наполнялись конкретным содержанием. В итоге были получены решающие правила определения качества произвольного кредита. Практика внедрения системы показала, что вроде бы ясно понимаемая всеми участниками кредитного комитета кредитная политика банка, «воплощалась» в довольно сильно различающиеся классификации. Процесс сведения их в результирующую классификацию потребовал кропотливой работы и затрат рабочего времени высших управленцев банка.

И, последний, четвертый подход к анализу риска, известен как социологический [3, 5, 12, 14, 18]. В рамках данного подхода предполагается измерить восприятие населением и его отдельными группами того или иного риска. В этой связи весьма актуально применение методов социальной информатики, которые носят ярко выраженный междисциплинарный характер [5, 18]. При оценке политических рисков учет подобной социологической информации представляется очень важным (пример кризиса на Украине (2014-2017 гг.), где вопрос отношения населения к евроинтеграции был одним из определяющих).

Таким образом, в представленной работе проанализированы современные междисциплинарные проблемы оценки риска. Рассмотрены различные подходы к измерению риска. Проведен критический анализ различных подходов к измерению риска, который позволяет заключить, что при оценке рисков достаточно важно самое пристальное внимание уделить способам их измерений.

Список литературы

1. Анализ больших данных в интеллектуальной робототехнике / Г. В. Ройзензон, В. Э. Карпов, В. Е. Павловский, В. Б. Бритков // 10-я Всероссийская Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2017). Материалы докладов / Под ред. И. А. Каляева. — Т. 2. Робототехника и мехатроника (РиМ-2017). — Ростов-на-Дону, Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2017. — С. 107–112.
2. Башлыков А. А., Еремеев А. П. Основы конструирования интеллектуальных систем поддержки принятия решений в атомной энергетике. — М.: ИНФРА-М, 2017. — 351 с.
3. Бек У. Общество риска. На пути к другому модерну. — М.: Прогресс-Традиция, 2000. — 384 с.
4. Брамс С. Дж., Тейлор А. Д. Делим по справедливости, или гарантия выигрыша каждому. — М.: Синтег, 2002. — 196 с.

5. Бритков В. Б., Садовский В. Н. Проблематика и методы социальной информатики // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник / Под ред. Д. М. Гвишиани, В. Н. Садовского. — № 25. 1997. М.: УРСС, 1997.— С. 80–92.
6. Бритков В. Б., Ройзензон Г. В., Фридман А. Я. Многокритериальный подход к оценке ситуационных центров // Проблемы прогнозирования чрезвычайных ситуаций. XV Всероссийская конференция. Сборник материалов.— М.: ФКУ Центр «Антистихия» МЧС России, 2016.— С. 26–28.
7. Геловани В. А., Бритков В. Б., Дубовский С. В. СССР и Россия в глобальной системе (1985-2030): Результаты глобального моделирования. — М.: URSS, 2018.— 320 с.
8. Дубовский С. В. Прогнозирование кризисов в циклах Кондратьева // Проблемы теории и практики управления. — 2016.— № 6.— С. 93–96.
9. Интеллектуальные системы поддержки принятия решений в нештатных ситуациях с использованием информации о состоянии природной среды / В. А. Геловани, А. А. Башлыков, В. Б. Бритков, Е. Д. Вязилов. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 304 с.
10. Карпов В. Э., Готовцев П. М., Ройзензон Г. В. К вопросу об этике и системах искусственного интеллекта // Философия и общество. — 2018.— № 2(87).— DOI: 10.30884/jfio/2018.02.07.
11. Ларичев О. И. Объективные модели и субъективные решения. — М.: Наука, 1987. — 191 с.
12. Ларичев О. И. Проблемы принятия решений с учетом факторов риска и безопасности // Вестник АН СССР. — 1987.— Т. 57, № 11. — С. 38–45.
13. Ларичев О. И. Вербальный анализ решений. — М.: Наука, 2006. — 181 с.
14. Малинецкий Г. Г. Чтоб сказку сделать былью...: Высокие технологии — путь России в будущее. — 3-е изд. — М.: Ленанд, 2015. — 224 с.
15. Метод многокритериальной классификации ЦИКЛ и его применение для анализа кредитного риска / А. А. Асанов, О. И. Ларичев, Г. В. Ройзензон и др. // Экономика и математические методы. — 2001. — Т. 37, № 2. — С. 14–21.
16. Построение индикаторов устойчивого развития с использованием методов многокритериального принятия решений / В. Б. Бритков, Р. Д. Зайцев, Р. А. Перелет, Г. В. Ройзензон // XII Всероссийская конференция «Методологические проблемы управления макросистемами». Материалы докладов. — Апатиты: ФИЦ КНЦ РАН, 2018.— С. 3–8.
17. Ройзензон Г. В. Способы снижения размерности признакового пространства для описания сложных систем в задачах принятия решений // Новости искусственного интеллекта.— 2005. — № 1. — С. 18–28.
18. Социальная информатика: Основания, методы, перспективы / В. Б. Бритков, А. А. Давыдов, Т. И. Жукова и др.; Под ред. Н. И. Лапина. — 3-е изд. — М.: URSS, 2010.— 216 с.
19. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика / Под ред. В. А. Владимирова, Ю. Л. Воробьева, Г. Г. Малинецкого, С. С. Салова. — М.: Наука, 2000. — 432 с.
20. Цыгичко В. Н., Черешкин Д. С. Безопасность критически важных объектов транспортного комплекса. — Saarbrücken: LambertAcademicPublishing, 2014. — 224 с.

Interdisciplinary risk analysis approach

Britkov V.B.

*Institute for Systems Analysis, Federal Research Center
“Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow*

MIPT, Moscow,

Royzenon G.V.

*Institute for Systems Analysis, Federal Research Center
“Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow*

MIPT, Moscow

MPEI, Moscow

Оптимальная стратегия агрофирмы при мультирисковом страховании урожая

В.Г.Киселев

ФИЦ ИУ РАН ВЦ РАН, Москва, Россия

В настоящее время у нас в стране единственным способом хеджирования природных рисков в растениеводческой отрасли сельского хозяйства является страхование производства. Вообще говоря, существует два вида агрострахования: страхование урожая, когда страхуется некоторый уровень производства сельскохозяйственной продукции, и страхование дохода, когда страхуются риски как от малой урожайности, так и от изменения продажной цены.

Сначала несколько слов об отечественных публикациях на тему агрострахования. Что касается экономико – математических моделей агрострахования, то публикации на эту тему вообще отсутствуют, а в доступных отечественных публикациях (например, [5-7, 10-11]) приводятся лишь словесные описания некоторых программ и даются некоторые рекомендации относительно значений традиционных параметров программ страхования, таких как величина страхового тарифа, степень участия государства в данной страховой программе и так далее. Все это относится к программам страхования урожая, а публикации, касающиеся страхования дохода, вообще отсутствуют, поскольку в реальной жизни таких программ в России еще нет.

Несколько другая ситуация с зарубежными публикациями на тему агрострахования. Если классические виды страхования актуарной математикой изучены достаточно глубоко (основной книгой по этой тематике является книга [1], переведенная на русский язык), то с агрострахованием не все так благополучно. Вообще говоря, этой проблеме посвящено очень большое количество публикаций (эту оценку дает GoogleScholar), но в них в основном рассматриваются только экономические и социальные вопросы применения различных программ страхования различных культур в различных регионах всего мира, часто с приведением таблиц и графиков, обсуждаются вопросы климата и влияние его на растениеводство, социальные вопросы, связанные со страхованием. Очень много публикаций такого рода посвящены социальным вопросам, т.е. оценке влияния агрострахования на изменение уровня жизни населения. Приведем несколько примеров таких работ. В работе [13] обсуждается вопрос использования страхования как способ минимизации риска в сельском хозяйстве. В работе [17] исследуется важный вопрос о влиянии различных факторов на решение фермеров в конкретном штате США о страховании своего производства растениеводческой продукции, а в работе [19] на основании детального анализа различной информации в течении 11 сезонов в ряде районов Индии предлагаются некоторые изменения в существующей страховой политике с целью повышения ее эффективности. В работе [20] наряду с рассмотрением теоретических

вопросов влияния неопределенностей на страхование урожая фермеров проводится анализ применения страхования в Бангладеш. Основным результатом этого анализа заключается в том, что существующее агрострахование не смогло привлечь фермеров, которые не увидели преимуществ предложенной программы страхования – страховые тарифы завышены и не соответствуют рискам при производстве различных культур.

В качестве примера зарубежных опубликованных работ, использующих математические методы исследования, приведем несколько интересных работ. В работе [16] рассматриваются варианты хеджирования доходов при неопределенности в величине урожая и цене на эту продукцию. Этими вариантами являются опционы, фьючерсы и страхование урожая и дохода. С помощью численного моделирования показана целесообразность использования опционов (в дополнение к фьючерсам) а также использование фьючерсов в сочетании со страхованием урожая. В следующей работе [18] развиваются исследования на эту тему.

Отметим тот факт, что во всех проводимых исследованиях отмечается важность наличия достаточной статистической информации и чаще всего предполагается, что такая информация имеется. Один способ обработки сельскохозяйственной информации, основанный на применении в качестве тренда линейный сплайн, был предложен автором. Этот способ построения эмпирической функции распределения использует имеющуюся информацию в полном объеме.

Теперь о задаче, которая рассматривается в данном сообщении.

В процедуре агрострахования всегда принимают участие три объекта: страховая фирма, агрофирма и государство. Наличие государства в агростраховании, как показывает опыт, обязательно. В данной работе предполагается, что поведение государства и страховой фирмы известно и фермеру предстоит выбрать оптимальную для себя стратегию страхования. Для обоснованного выбора фермером своего поведения предлагается данная методика.

В настоящее время в России практически применяется только страхование урожая, а среди возможных программ этого вида используется мультирисковая программа страхования производства сельскохозяйственных культур – самый распространенный, если не единственный, вид агрострахования в нашей стране.

Формализованное описание этой программы и исследование ее свойств приведено, например, в работах [2] – [4].

Напомним, что это такое. Рассмотрим сейчас случай страхования урожая одной культуры агрофирмой на площади S .

Пусть y_- и y_+ – минимальная и максимальная урожайности этой культуры, а Ey – ее среднее значение. Пусть цена единицы полученной продукции равна c . Страховая урожайность y_α – то значение урожайности, ниже которой страховая компания выплачивает страховое возмещение, равное стоимости недополученного урожая. С единицы площади при единичной цене это $r = (y - y_\alpha)_+$. (Здесь знак $+$ означает функцию Хевисайда).

Часть $0 < \gamma < 1$ страховой премии выплачивается из федерального и местного бюджетов. (Широкий опыт применения агрострахования показывает, что без помощи государственных органов страхования в растениеводстве невозможно). Следовательно, страхователь должен заплатить страховой фирме с единичной площади (при единичной цене) только величину.

$$\pi_f = (1 - \gamma)(1 + \theta)Er,$$

где θ – надбавка страховой компании, обеспечивающая ее экономическую эффективность (см.[1, 4]). Таково краткое описание программы страхования, достаточное для наших целей.

Для агрофирмы целесообразность страхования определяется двумя показателями. Первый показатель – это средний доход агрофирмы, а второй показатель, ради чего и производится страхование, – это надежность получения урожая.

С надежностью получения урожая все просто. Если страховая урожайность равна y_α , $P(y < y_\alpha) = p_\alpha$, то это значит, что с вероятностью $(1 - p_\alpha)$ производитель будет получать урожай, не меньший запланированного, а с вероятностью p_α будет недобор, который будет компенсироваться страховой компанией в размере y_α . Пусть страхователь выбрал для себя значение y_α и решил застраховать урожай с площади S . Тогда доход агрофирмы равен

$$\frac{1}{cS} D_f = y + r - \pi_f,$$

а средний доход агрофирмы определяется выражением

$$\frac{1}{cS} ED_f = Ey + \psi \int_{y_-}^{y_\alpha} (y_\alpha - y) f(y) dy = Ey + \psi Er,$$

где $\psi = \gamma - \theta(1 - \gamma)$ – важный показатель, который мы назовем индикатором программы страхования. Пределы изменения индекса страхования

$$-\theta = \psi_{\min} (\theta > 0, \gamma = 0) \leq \psi \leq \psi_{\max} (\theta = \forall, \gamma = 1) = 1.$$

Заметим, что с введением индекса программы страхования плату за страхование агрофирмы можно записать в компактном виде $\pi_f = (1 - \psi)Er$.

Отсюда следует, что при $\psi > 0$ средний доход агрофирмы при страховании больше среднего дохода без страхования. Это условие удобно переписать или в виде $\theta < \frac{\gamma}{1 - \gamma}$

или в виде $\gamma > \frac{\theta}{1 + \theta}$. В первом случае – это ограничение сверху на величину рискованной надбавки при фиксированном γ , а второе неравенство является ограничением снизу на величину господдержки при фиксированной страховой надбавке. В противном случае страхование уменьшает средний доход агрофирмы. При отсутствии господдержки ($\gamma = 0$) при страховании средний доход фирмы убывает.

Выясним теперь, как влияет на средний доход агрофирмы величина застрахованной урожайности. В [3] показано, что

$$\frac{dED_f}{dy_\alpha} = cS\psi \int_{y_-}^{y_\alpha} f(y) dy = cS\psi P_\alpha.$$

Как видно, опять все определяет знак индикатора ψ . Если он положителен, то средний доход агрофирмы возрастает с увеличением y_α , в противном случае – убывает. Когда это происходит, было сказано чуть выше. Этот результат понятен, так как в первом случае увеличение дохода определяется помощью государства, а при недостаточной поддержке очевиден тот факт, что чем выше требуемая надежность получения урожая, тем больше за это надо платить.

Таким образом, аграрий (страхователь) перед заключением договора о страховании должен решить вопрос о выборе параметров страховой программы.

Предположим, что страхователь выбрал некоторое значение y_α и застраховал урожай с площади S , но, может быть, ему выгоднее выбрать смешанную стратегию, т.е. страховать разные площади с разной гарантией надежности.

Исследуем этот вопрос, т.е. рассмотрим случай, когда имеется возможность страховать различные площади с различным уровнем гарантии. Итак, имеется дискретный набор страховых уровней

$$y_{\alpha}^i \in Y_{\alpha} .$$

Каждому значению y_{α} соответствует застрахованная с этим уровнем площадь S^i . и

$$\sum_i S^i = S .$$

Тогда средний доход фермерского хозяйства будет равен

$$ED_f = \sum_i S^i ED_f(y_{\alpha}^i) ,$$

где

$$ED_f(y_{\alpha}^i) = cS^i [Ey + \psi Er^i(y_{\alpha}^i)] .$$

Требуется найти такие значения площадей S^i , которые бы максимизировали со всех площадей средний доход фермера, т.е. надо решить задачу

$$\max_{\sum_i S^i = S, S^i \geq 0} \sum_i S^i [Ey + \psi Er^i(y_{\alpha}^i)] .$$

Это задача линейного программирования, из свойств которой известно, что количество ненулевых переменных S^i равно количеству ограничений, т.е. равно единице. Следовательно, для решения поставленной задачи достаточно найти

$$\max_i \psi Er^i(y_{\alpha}^i) .$$

Если $\psi > 0$, то надо найти максимальное значение среднего риска, в противном случае – минимальное.

Можно показать, что

$$\frac{dEr^i}{dy_{\alpha}^i} = (y_{\alpha}^i - y_-) f(y_{\alpha}^i) > 0 ,$$

т.е. $Er^i(y_{\alpha}^i)$ – возрастающая функция своего аргумента и тогда

$$\max_i Er^i(y_{\alpha}^i) = Er^i(\max_i y_{\alpha}^i)$$

при $\psi > 0$ и наоборот, если $\psi < 0$, то максимум среднего дохода достигается при минимальном значении страхового урожая, но всегда этот максимум достигается при чистой стратегии.

Зная оптимальную стратегию, исходя из значения индикатора программы ψ , фермер может оценить свой средний доход при своем выборе определенного значения страховой урожайности.

Как уже было сказано выше, значение страховой урожайности однозначно определяет и надежность получения урожая. Здесь был рассмотрен случай традиционной оценки случайной величины – дохода, основанный на среднем его значении и страховой вероятности, но более естественным для оценки страхования по-видимому является другая характеристики разброса – величина дисперсии дохода, но это требует самостоятельного исследования.

Список литературы

1. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбит С., Хикман Дж. Актуарная математика, М.: Янус-К, 2001. 655 с.
2. Киселев В.Г., Системный анализ основных систем агрострахования, М.: ВЦ РАН, 2012 28 с.
3. Киселев В.Г. Актуарная математика в агростраховании. М.: ВЦ РАН, 2011. 29 с.
4. Киселев В.Г. Обоснование региональной мультирисковой программы страхования сельскохозяйственных культур. Управление большими системами, Сборник трудов. Выпуск 61. М.: ИПУ РАН. 2016. С.168–190.
5. Современная практика сельскохозяйственного страхования. // Агрострахование в России, 2004, октябрь. С. 29-42.

6. Гриценко Н.Б., Зимина А.П. Организация сельскохозяйственного страхования за рубежом // Финансы и кредит, М.: №29, 2006. С. 71– 75.
7. Довбий И.П. Страхование агрорисков за рубежом. // Банки. Лизинг. Страхование, 2008. №6
8. Киселев В.Г. Информационная база региональной системы агрострахования. // Труды 5-й Международной конференции «Управление большими системами» М.: ИПУ РАН, 2011.
9. Киселев В.Г. Особенности информационного обеспечения системы страхования сельскохозяйственного производства. // Материалы международной научно-практической конференции «Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы». г. Орел, 2011, С.236-240.
10. Страхование урожая сельскохозяйственных культур с государственной поддержкой. // Практическое пособие по организации страхования сельхозкультур. М.: МСХ РФ, ФГУФАГПССАП (Федеральное государственное учреждение «Федеральное агентство по государственной поддержке страхования в сфере агропромышленного производства» Министерства сельского хозяйства РФ).
11. Шинкаренко Р. Международный опыт страхования сельскохозяйственных рисков // agroinsurance.com/ru/practice.
12. Kaylen M.S., Lochman E.T., Preckel P.V. Farm – level analysis of agricultural insurance: A mathematical programming approach // *Agricultural Systems*, 1989, vol.30.
13. Shashi Kiran A.S., K.B. Umesh. Crop Insurance – Strategy to minimize risk in Agriculture // *International Economics*, Brasil, 2012.
14. Fraser R. W. An Analysis of willingness to for crop insurance // *The Australian Journal of Agricultural and Resource Economics*, 2012
15. Lutfor R.M. Crop insurance as a risk reducing measure: issue and problem // *Bangladesh journal of public administration*, 1990, vol.4.
16. Mahul O. Hedging price risk in the presence of crop yield and revenue insurance // *European Review of Agricultural Economics*, 2003 v.30 №2.
17. Ginder M., Spaulding A., Fudor K. Factors affecting crop insurance purchases decisions by farmers in Northern Illinois // *Agricultural Finance Review*, 2009, v.69, №1.
18. Mahul O., Wright B. Designing optimal crop revenue insurance // *American journal of Agricultural Economics* – 2003, vol.85 №3
19. Vyas V.S., Singh S. Crop insurance in India: Scope for improvement // *Economics and political weekly*, 2006
20. Rahman M.L. Crop insurance as a risk reducing measure: issues and problem // *Bangladesh journal of public administration* 1990, Vol. 4. №1

Optimum strategy of the agrofirm with multirisk crop insurance

Kiselev V.G.

Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS

СЕКЦИЯ № 11

ИО В БИОЛОГИИ, МЕДИЦИНЕ, ФИЗИКЕ И ЭКОЛОГИИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| F.Aleskerov, O.Khutorskaya, A.Buldyaev, and A.Yamilov Parkinson's disease: network analysis of publications' influence | 350 |
| Белолипецкий А.А., Митрофанов А.В. Об обратной задаче к уравнению Эмдена – Фаулера, описывающего тепловые режимы тонкопленочных рентгеновских фильтров | 351 |
| Белотелов Н.В., Коноваленко И.А., Назарова В.М. Пространственно-временная динамика в агентной модели «ресурс-потребитель» | 354 |
| Валуев А.М., Лозинская М.А. Учет атмосферного переноса загрязнений при выборе программы выполнения геотехнологического процесса | 357 |
| Каменев Г.К. Калибровка динамических моделей с условиями на трубку траекторий | 360 |
| Лепская М.А. Построение математической модели функционирования пенсионных фондов в рамках задачи оценки их устойчивости | 365 |
| Меньшикова О.Р., Меньшиков И.С. Использование системного психологического тестирования и нейрообручей для прогнозирования поведения участников лабораторных экономических экспериментов | 368 |
| Пастухова Ю.И., Кокорин В.А. Об оценивании рисков в кардиологии | 372 |
| Разжевайкин В.Н. Об отсутствии влияния однородной миграции на возникновение пандемии в классической модели динамики эпидемии | 375 |
| Седуш А.О., Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р. Влияние биологического и психологического пола на поведение участников экономических экспериментов | 379 |
| Semenov K.O. Mathematical model of the cryogenic fuel layer formation process during the laser target cooling | 382 |
| Тимме Е.А. Подходы к оптимизации тренировочных нагрузок в спорте | 385 |
| Умывакин В.М., Швец А.В. Метод вербально-числового анализа экологического риска | 387 |
| Шпитонков М.И. Исследование физиологических временных рядов методами стохастической динамики | 393 |

Parkinson's disease: network analysis of publications' influence

F.Aleskerov, O.Khutorskaya, A.Buldyaev, and A.Yamilov
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Parkinson's disease (PD) is a chronic and progressive movement disorder, meaning that symptoms continue and worsen over time. More than 10 million people worldwide are living with Parkinson's disease and approximately 60,000 (USA) are diagnosed with Parkinson's disease each year and this number does not reflect the thousands of cases that go undetected.

Obviously, researchers from different fields and various communities create more and more studies. For today the total number of patents is more than 100 thousand. Taking into account a large number of works related to PD, some approaches are needed for scientists who try to find out how significant a particular article is, to learn more about a field or topic and to determine how much impact a particular author has.

One of these approaches is citation analysis or methods of measuring the impact and assumed quality of a research, an author, or an institution based on the number of times works and/or authors have been cited by others. In network analysis networks of citations are modeled as graphs, where the nodes are identification numbers (and other information, which can be received from the databases) of publications, and the edges of the graph carry the information about the citations between them.

New methods of centrality analysis are used to identify pivotal works. The key advantage of these approaches with comparison to existing methods is that we consider long-distance connections as well as special attributes of papers and group influence on them. This allows to detect hidden key publications: while classical measures detect explicit powerful works our methods also detect works that influence other papers in groups.

Another approach is semantic analysis, which involves determining the thematic proximity of works based on the processing of text information contained in these works (annotations, keywords). This analysis allows to cluster studies by direction and to construct another type of graph in which nodes are identification numbers (and other information, which can be received from the databases) of publications, and the edges indicate a content proximity between the nodes.

In this study recently developed network analysis algorithms including new centrality indices, semantic analysis and analysis of study areas development have been applied for publications databases on different aspects of Parkinson's disease. Articles with keywords "Parkinson's disease" were analyzed. Data were taken from Web of Science publications database and consist of more than 75000 articles dated from 1980 to 2017.

Об обратной задаче к уравнению Эмдена – Фаулера, описывающего тепловые режимы тонкопленочных рентгеновских фильтров

А.А.Белолипецкий¹, А.В.Митрофанов²

¹*ВЦ им А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН,* ²*Физический институт им П.Н.Лебедева РАН. Москва, Россия*

При исследовании тепловых задач, связанных с конструированием и изготовлением фронтальных тонкопленочных рентгеновских фильтров ключевой вопрос – это экспериментальное определение коэффициентов теплопроводности тонких слоев материалов фильтров, которые могут заметно отличаться от табличных значений, Так, в работе [1] экспериментально определялась теплопроводность свободно подвешенных на кольцевой оправе в вакууме подогреваемых образцов рентгеновских фильтров при радиационном сбросе тепла излучением. В стационарных условиях измерялся радиальный профиль температуры и излучательная способность поверхности образца и из уравнения баланса энергии расчетным путем (численным решением уравнения) находился коэффициент теплопроводности пленки. В работах [2-3] обсуждались проблемы охлаждения защитного фильтра детектора рентгеновского излучения. В данном сообщении рассматривается математическая модель, как по измеренному профилю температуры пленочного образца на тонкой кольцевой оправе решением уравнения баланса тепловой энергии с участием излучения определить коэффициент теплопроводности пленки, используя разные физические приближения и известные методы преобразования нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим модельный объект или образец – термостатированное металлическое кольцо (оправку) с внутренним радиусом R , на которое крепится в механическом и

тепловом контакте тонкая плоская однородная по площади и толщине пленка рентгеновского фильтра, коэффициент теплопроводности которой λ слабо зависит от температуры T , толщина пленки δ , и температуры оправки T_1 . Рассмотрим математическую модель теплообмена тонкой круговой пленки радиуса R и толщиной δ . Будем полагать, что пленка нагрета до температуры до температуры $T(r)$. Поэтому, согласно закону Стефана – Больцмана, пленка излучает энергию в окружающую среду. В этом случае процесс теплообмена можно описать уравнением

$$\delta\lambda\left(\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr}\right) = 2\varepsilon\sigma T^4, \quad (1)$$

где λ - коэффициент теплопроводности материала пленки, σ - постоянная Стефана – Больцмана, ε - излучательная способность пленки, по предположению, постоянная величина, одинаковая для обеих её сторон. Граничные условия запишем в виде:

$$T(R) = T_1, \quad (2)$$

Здесь T_1 - температура внешнего периметра пленки, равная температуре опорного кольца.

$$\delta\lambda\frac{dT}{dr} = j_1 \text{ при } r = R, \quad (3)$$

j_1 - линейная плотность внешнего потока тепла, который теряет (или приобретает) пленка на граничном контуре из-за теплообмена с крепящим ее кольцом. Введем безразмерные переменные $x = r/R, y = T/T_1$. Тогда, после замены переменных, уравнение (1) примет вид

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = xAy^4, \quad (4)$$

$$\text{где } A = \frac{2\varepsilon\sigma T_1^3 R^2}{\delta\lambda}.$$

В общем случае уравнение (4) относится к классу модифицированных уравнений Эмдена-Фаулера [4] и не имеет решения в квадратурах. Однако его можно свести к последовательному решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, что заметно облегчит дальнейшие численные расчеты.

Граничные условия (2) (3) запишутся как

$$y(1) = 1 \quad (5)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{Rj_1}{\delta\lambda T_1} = c - \text{это безразмерная величина.} \quad (6)$$

Итак, мы ищем решение в виде

$$y = x^{-2/3}z(x) \quad (7)$$

Подставим его в уравнение (4). Предварительно найдем

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{2}{3}x^{-5/3}z + x^{-2/3}z', \quad y'' = \\ &= \frac{10}{9}x^{-8/3}z - \frac{4}{3}x^{-5/3}z' + x^{-2/3}z''. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим (8) в (4).

$$\frac{10}{9}x^{-8/3}z - \frac{4}{3}x^{-5/3}z' + x^{-2/3}z'' - \frac{2}{3}x^{-8/3}z + x^{-5/3}z' = Ax^{-8/3}z^4.$$

Приведя подобные, получим

$$\frac{4}{9}z - \frac{1}{3}xz' + x^2z'' = Az^4. \quad (9)$$

$$\text{Обозначим } u = xz'. \quad (10)$$

Тогда $z'' = \frac{u'x - u}{x^2}$. Откуда $x^2z'' = u'x - u = u \frac{u'}{z'} - u = u \frac{du}{dz} - u$. Подставив

полученные выражения для xz' , x^2z'' в (9), получим нелинейное ОДУ первого порядка для $u(z)$

$$u \frac{du}{dz} - \frac{4}{3}u = Az^4 - \frac{4}{9}z. \quad (11)$$

Проинтегрируем это уравнение. Предварительно заметим, что из граничного условия (5) $u(1) = 1$ имеем

$$z_0 = 1. \quad (12)$$

Кроме того, из (10) $u = xz' = y'x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}x^2z$.

Отсюда, из граничного условия $y'(1) = c$ и (12) получим $u_0 = z'(1) = c + \frac{2}{3}$.

Проинтегрируем теперь уравнение (11) по z от z_0 с начальным условием $u = u_0$ и получим функцию $u(z)$.

Чтобы найти функцию $y(x)$, достаточно определить функцию $z(x)$ (см. (7)). Для

этого интегрируем уравнение (10) $\frac{dz}{dx} = \frac{u(z)}{x}$ от $x_0 = 1$ до $x = 0$ с начальным условием

$z_0 = 1$. И это завершает решение задачи (4).

Сравнивая полученные для разных значений коэффициента теплопроводности λ расчетные решения с экспериментальной кривой профиля температуры, находим такое значение коэффициента теплопроводности, при котором эти кривые наиболее близки. Тогда найденное значение λ можно интерпретировать как фактический (экспериментальный) коэффициент теплопроводности тонкопленочного образца.

Список литературы

1. А.Я. Лопатин, В.И. Лучин, Н.Н. Салашенко, Н.Н. Цыбин, Н.И. Чхало. Измерение коэффициентов теплопроводности многослойных пленочных структур. Материалы XXI Международного симпозиума «Нанопластика и нанопластика». 2017. Т.1. С. 408.
2. А.В. Митрофанов. Тепловой режим тонкопленочных рентгеновских фильтров при больших потоках излучения от Солнца. Материалы XX международного симпозиума «Нанопластика и Нанопластика». Нижний Новгород. Материалы Симпозиума. 2016, Т1. С. 386 – 387.
3. А.В. Митрофанов. Квантовая электроника. 2018. Том 48. №2. С. 105.
4. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М: Факториал. 1997. С. 245.

On Inverse Problem for Emden-Fauler Equation, which describes the Heat Regimes of thin film X-Ray Filters

A.A.Belolipetskiy¹, A.V.Mitrofanov²

*Dorodnicyn Computing Centre FRC CSC RAS¹ Physical P.N.Lebedev institute RAS².
Moscow, Russia*

Пространственно-временная динамика в агентной модели «ресурс-потребитель»

Н.В. Белотелов¹, И.А. Коноваленко², В.М. Назарова³

¹ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

²МФТИ, Москва, Россия

³МГТУ им.Н.Э.Баумана, Москва, Россия

Одной из центральных задач популяционной экологии является моделирование пространственно-временной динамики популяции с учетом индивидуальных эколого-физиологических характеристик особей, формирующих популяцию. В работе исследуется агентная модель системы «ресурс-потребитель», описывающая пространственно-временную динамику популяции, взаимодействующей с возобновимым ресурсом, которая была предложена в работе [1].

В модели учитывается эколого-физиологический цикл жизни особи. Рассматривается алгоритм, описывающий пищевую и социальную пространственную динамику особей. В ней подробно описывается жизненный цикл особей. Основной переменной, описывающей состояние особи, является «масса – энергия» особи, которая трактуется как энергия или жизнеспособность особи. Особенностью модели является введение нелокального взаимодействия между агентами. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, которые имитируют групповое движение особей по ареалу, а также описан модельный эксперимент, когда групповой тип поведения животных вследствие изменения характеристик окружающей среды становится индивидуальным, после чего из-за изменения в параметрах окружающей среды и поведении животных формируется стадо, которое в дальнейшем переходит снова к групповому типу поведения.

Основной целью моделирования является изучение влияния различных эколого-физиологических параметров, описывающих особь, на формирование различных пространственно-временных режимов поведения популяции. Особый интерес представляет моделирование стадного и территориального поведения животных и влияние на него подвижности особей. Известно, что подвижность животных связана с их размером.

Описание модели

Ареал обитания моделируемой популяции, на котором равномерно произрастает ресурс (трава), является прямоугольной целочисленной решёткой ($i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, F$). Границы ареала представляют собой непроницаемые для особей преграды. Уравнения роста ресурса $m_t^{i,j}$ имеют вид:

$$m_{t+1}^{i,j} = m_t^{i,j} + K^{i,j} - \theta_t^{i,j}, \quad m_t^{i,j} = \min(m_t^{i,j}, H^{i,j}),$$

где $m_t^{i,j}$ - количество ресурса в точке (i, j) в момент времени t , а $\theta_t^{i,j}$ - доля изъятия ресурса, если в точке (i, j) в данный момент есть особь. Считается, что количество ресурса в каждой точке ограничено предельным значением $H^{i,j}$ (локальной емкостью среды). При его уменьшении за счет выедания особями популяции он с постоянной скоростью за такт $K^{i,j}$ восстанавливается до предельного значения $H^{i,j}$.

Считается, что в рассматриваемом ареале находится некоторое множество подвижных особей. Каждая особь описывается следующим вектором состояния в момент времени t : координатами в ареале, возрастом τ , массой n_t^τ , радиусом индивидуальной подвижности R и радиусом обзора r . Радиус индивидуальной активности – это максимальное расстояние, которое может преодолеть особь за один

такт. А под радиусом обзора в модели понимается характеристика круга, который видит особь. В модели рассматриваются следующие процессы, меняющие состояние особи: рождение, старение, потребление ресурса, гибель, перемещение по ареалу. Опишем влияние этих процессов на состояние особи.

Процесс старения увеличивает возраст особи на единицу. Процесс потребления ресурса зависит от возраста и текущей массы. В модели считается, что с возрастом потребление ресурса уменьшается в соответствии с выражением

$$\theta_t^{i,j} = C_1 m_t^{i,j} n_t^{i,j} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \left(1 - \frac{n_t^{i,j}}{N}\right),$$

где C_1, T, N - некоторые постоянные, характеризующие физиологию рассматриваемых животных (C_1 - коэффициент, учитывающий энергетическую ценность ресурса, T - предельный возраст особи, N - предельная масса особи). Гибель особи определяется условием недостатка «энергии» (ресурса), а именно условием «отрицательности массы» ($n_t \leq 0$), которая необходима для поддержания затрат на основной метаболизм.

Процесс рождения особей в модели описан следующим образом. По достижении определенного размера особь в соответствии с распределением Бернулли со средним значением ζ случайным образом порождает другую особь нулевого возраста и имеющую треть массы материнской особи, при этом материнская особь теряет половину своей текущей массы, которая тратится на выкармливание потомства.

Перемещение особи S за один временной такт ограничивается радиусом индивидуальной активности ($S < R$) и при этом теряется часть «энергии», которая пропорциональна текущей массе и перемещению особи $C_2 n_t S$. Уравнение баланса «энергии» записывается следующим образом: $C_2 n_t S$

$$n_{t+1}^{k,m} = n_t^{i,j} + \theta_t^{i,j} - C_2 n_t^{i,j} S - \alpha n_t^{i,j} \beta - \lambda(\zeta) \frac{n_t^{i,j}}{2},$$

где $C_2 n_t S$ - затраты на перемещение; $\alpha n_t^{i,j} \beta$ - затраты на основной метаболизм;

$\lambda(\zeta) \frac{n_t^{i,j}}{2}$ - затраты на рождение ($\lambda(\zeta) = 1$ - происходит рождение в момент времени t , в противном случае $\lambda(\zeta) = 0$). В модели считается, что рождение происходит в среднем один раз за некоторый период времени.

Перейдем к описанию алгоритма перемещения особей. В модели предполагается, что существует два фактора, влияющих на движение, это пищевая активность и активность, связанная с взаимодействием с другими особями. Мы это взаимодействие в дальнейшем будем называть социальным.

Алгоритм пищевой активности заключается в следующем. На каждом такте работы модели особь определяет ближайший к ней участок, на котором находится ресурс. Причем «анализируемая» территория равна кругу радиусом обзора r . Особь переходит на найденный участок, если он ближе радиуса индивидуальной активности R , иначе сдвигается на R в его направлении. Если ресурса поблизости нет, выбирается случайное направление.

Для социальной подвижности делается следующее предположение. У каждой особи существуют две круговые окрестности, имеющие радиусы Δ_1 и Δ_2 ($\Delta_1 < \Delta_2$). Если другая особь находится внутри круга радиуса Δ_1 , то они отталкиваются, а если внутри кольца, то притягиваются. Вне круга радиуса Δ_2 социального взаимодействия нет. Притяжение и отталкивание описывается заданием изменения расстояния между особями на фиксированные величины a и A , соответствующие притяжению и отталкиванию, которые мы в дальнейшем будем называть потенциалами притяжения и

отталкивания. Социальное взаимодействие происходит попарно, итоговое смещение каждой особи является суммой смещений ко всем остальным особям за такт по вышеописанному закону.

Итоговое перемещение, определяемое совместным влиянием пищевого и социального перемещения, определяется по правилу: если масса особи меньше некоторой пороговой величины M , то перемещение определяется только пищевой активностью, а если масса превышает это значение, то перемещение определяется только социальной активностью.

Описание численных экспериментов

Модель реализована в среде MatLab. Программа позволяет изменять все параметры модели, включая размеры участка и начальное пространственно-временное распределение особей по ареалу. Особенностью созданной системы является ее возможность использовать результат предыдущего эксперимента в качестве начальных данных для продолжения расчета с измененными параметрами модели. Дополнительной особенностью модели является наличие в ней возможности введения барьеров, которые экранируют нелокальное взаимодействие между особями, а также изменения характеристик продуктивности ресурса.

Описанная выше модель при различных значениях параметров и начальных условиях позволяет получить очень большое разнообразие пространственно-временных режимов функционирования. Это и автоволновые решения, которые, как правило, получаются при рассмотрении только пищевого перемещения и отсутствии социального режима перемещения; это и различные режимы вымирания популяции в случае несбалансированности демографических процессов популяции и продуктивности ресурса. Это и колебательные решения, если анализировать динамику общей численности популяции.

Наиболее интересными режимами пространственно-временной динамики, которые были получены при имитациях, являются групповое поведение особей. Этот тип пространственно-временной динамики характеризуется наличием локализованной в пространстве группы особей, которые совершают скоррелированное движение по ареалу.

Большой интерес представляют изменение пространственно-временной динамики нескольких групп скоррелированных особей, которые возникают при увеличении продукционных характеристик ареала. В частности, найден режим пространственных «автоколебаний», который заключается в периодических изменениях пространственной динамики системы. А именно, несколько групп скоррелированных особей, перемещающихся по пространству ареала, в определенный момент времени теряют свою скоррелированность и распределение особей по пространству становится случайным. По прошествии некоторого времени они снова формируют групповой тип поведения. Это режим имеет периодический характер. При этом, если смотреть суммарную численность, то ее изменения имеют циклический характер.

Были проведены имитационные эксперименты для изучения влияния параметров, связанных с нелокальным взаимодействием между особями. Проведен анализ влияния характеристик продукционного процесса ресурса на динамику популяции. Также проводились численные эксперименты, описывающие пространственную неоднородность продукционных процессов.

Список литературы

1. Белотелов Н.В., Коноваленко И.А. Моделирование влияния подвижности особей на пространственно-временную динамику популяции на основе компьютерной модели. //Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8. № 2. С. 297-305.

2. Мак-Фарленд Д. Поведение животных: психобиология, этология и эволюция, М., Мир, – 1988.
3. Маргалеф Р. Облик биосферы. М., Наука, – 1992.
4. Разжевайкин В.Н. Анализ моделей динамики популяций. М., МФТИ, – 2010.
5. Свиричев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии, М., Наука, – 1987.
6. Свиричев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ, М., Наука, – 1978.
7. Lee C. T., Hoopse M. F, Diehl J., Gilliland W., Huxel G, Leaver E.V., Mccann K., Umbanhowar J., Moglner A. . Non-local Concepts and Models in Biology// J. theor. Biol. – 2001.– V. 210 – p.201-219.
8. Mac Nally R. . Modelling confinement experiments in community ecology: differential mobility among competitors.// Ecological Modelling. – 2000. – V.129. , – p.65-85.

Spatio-temporal dynamics in agent-based models of «resource-consumer»

N.V. Belotelov¹⁾, I.A. Konovalenko²⁾ V.M. Nazarova³⁾

¹⁾*FRC «Computer Science and Control» RAS, Moscow, Russia*

²⁾*MIPT, Dolgoprudniy, Russia*

³⁾*Bauman Moscow State Technical University, Russia*

Учет атмосферного переноса загрязнений при выборе программы выполнения геотехнологического процесса

А.М. Валуев

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

М.А. Лозинская

Научно-исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия

Понятие геотехнологии не имеет общепринятого определения, но в целом к предмету этой науки относят методы ведения разного рода работ, затрагивающих земную поверхность и ее недра. К ним относится строительство дорог и дорожных сооружений, дамб, плотин, фундаментов и подземных сооружений (строительная геотехнология), открытые и подземные горные работы. Их общие черты связаны с нарушением целостности участка литосферы и зачастую созданием искусственного ландшафта, в результате чего сильно изменяется состояние природной среды, в т.ч. поверхностных и подземных вод, почв. Работа тяжелой техники и выполнение взрывных работ на скальных грунтах ведет к загрязнению газами и породной пылью атмосферного воздуха в зоне их ведения.

Применительно к открытым горным работам рассматриваются как текущие, так и долговременные последствия загрязнений: «загрязняющие атмосферу вещества в большинстве случаев не прекращают воздействия и после освобождения атмосферы от них. Соединения, выпавшие в почву, проникают в грунтовые воды, входя в состав растительных, а затем пищевых продуктов» [1]. Тем не менее, значительная доля таких последствий (в пределе, «проявляющихся в уничтожении почвенного покрова и биоценоза» [1]) количественно оценивается. «Работами ВГУ, НИИКМА доказано, что сегодня опасно для здоровья человека использовать в рационе питания продукты животноводства, полученные на фураже, заготовленном в радиусе 5–7 км от карьеров. Не рекомендуется также употребление в пищу зерновых культур, выращенных на землях в радиусе до 15–17 км от источника пылевых выбросов» [1]. Что касается текущих эффектов запыленности и загазованности с превышением ПДК, они осложняют работу

людей оборудования непосредственно в зоне выполнения геотехнологических процессов, так и жизнедеятельность на прилегающих территориях в зоне их влияния, которая в ряде случаев захватывает городские поселения. В г. Нижний Тагил площадь земель, занятых горными отводами, в пределах городской территории составляет 30%, аналогичная ситуация имела место в районах угледобычи западной Германии.

В целом, зона явного влияния загрязнений от геотехнологических процессов даже на крупнейших карьерах ограничена полосой в несколько километров, но в пределах этой полосы эффект загрязнения значителен. При ведении работ меньшего масштаба, но внутри города, загрязнения затрагивают условия жизни многочисленного населения [2, 3]. Следует подчеркнуть, что перераспределение работ во времени и пространстве способно повлиять на распространение загрязнений. Об этом говорят размеры крупнейших карьеров (которые являются и крупнейшими загрязнителями), составляющие несколько километров в длину и ширину.

Краткосрочные эффекты загрязнения определяются процессами переноса, зависящими от текущего состояния атмосферы, длительные — являются результатом медленных динамических процессов. Первые довольно успешно моделируются [4], но применяемые программные средства трудно, если вообще возможно, напрямую соединить со средствами и методами принятия управленческих решений. В моделях рассматривается динамика конвективно-турбулентного диффузионного переноса в мелком временном масштабе и в непрерывных координатах, с учетом текущих значений таких переменчивых величин, как направление и скорость ветра, температура и влажность воздуха. В численных расчетах пространство и время дискретизируется, но эта дискретизация может также быть мелкой и никак не связана с разделением пространства на зоны ведения отдельных работ, а времени — на сроки их выполнения или иные временные интервалы, имеющие организационное и технологическое значение. Для описания медленных процессов изменения природной среды под влиянием распространения загрязнений со времен первых работ Форрестера и Медоуза и поныне часто используется математический аппарат разностных уравнений [5]. Последний хорошо стыкуется с формой моделей принятия решений для природно-технологических комплексов [6].

В задачах выбора программы выполнения геотехнологического процесса различного типа пространственная область ведения работ разбивается на отдельные участки, которые рассматриваются как вершины графа геотехнологического процесса. Так же в качестве вершин графа могут рассматриваться части сооружений и элементы создаваемого искусственного рельефа. С вершинами связываются переменные, значения которых определяются для различных этапов выполнения процесса, как дискретные (тип текущей операции), так и непрерывные, выражающие объем выполненной доли операции (в начале или конце этапа). Технологические взаимосвязи могут иметь две формы: для одного момента времени — между разными элементами, как правило, пространственно смежными, и между состояниями одного элемента в последовательные моменты времени. Зависимости эти могут быть двух родов:

1. нельзя вести некоторые виды работ, если состояние на смежных участках этому препятствует (например, нельзя извлекать грунт, если грунт не извлечен на вышележащем участке);

2. нельзя вести работы, если не выполнены технологически предшествующие (экскавировать скальный грунт, пока он не взорван; вести фундаментные работы, пока не вырыт котлован).

Разделение переменных на переменные управления и состояния и гибридная динамика с учетом указанных зависимостей определяется по типу общей модели [7]. В рамках такого представления могут быть введены вершины графа для участков, на которых работы не ведутся, но ограничивается уровень загрязнения.

Для того чтобы учесть в задаче выбора производственной программы перенос загрязнителей, вызываемых определенными работами на отдельных участках, на другие рассматриваемые участки с учетом сезонных или прогнозируемых атмосферных процессов, необходимо интегрировать в него модель переноса в виде, отвечающем форме рассматриваемых задач. С этой точки зрения, приемлемым вариантом является использование апробированной модели [8], основанной на аппроксимации разностного решения уравнения турбулентной диффузии, сведенной к последовательности аналитических выражений, неявным образом выражающих зависимость распределения концентрации загрязнений от интенсивности выбросов в их источниках. Последние связываются с характером операций, их интенсивностью и свойствами массива в местах их проведения. Следует отметить, что для расчета необходимо задать состояние атмосферы — температуру и скорость ветра, фактически — их прогнозные значения, основанные на знании климата территории ведения работ. Модель [8] отражает текущее распространение загрязнителей и может применяться для периодов относительной стабильности состояние атмосферы. Для рассмотрения более длительных периодов применима модель [9], являющаяся развитием [8].

Список литературы

1. Семячков А.И., Славиковская Ю.О., Дребенштедт К. Эколого-экономические аспекты деятельности предприятий горной промышленности. Екатеринбург: Ин-т экономики УрО РАН, 2013.
2. Фирсов Р.Г., Сеймова Г.В. Оценка внутриквартального пылевого загрязнения рабочей и жилой зон городского квартала при проведении строительных работ // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2017. №50 (69). С. 338–344.
3. Мухаметшина Р.М., Падемирова Р.М. Оценка экологического ущерба от загрязнения атмосферы вредными выбросами при использовании дорожно-строительных машин // Евразийский союз ученых. 2015. №8-2. С. 102–103.
4. Козырев С.А., Амосов П.В. Моделирование аэродинамических процессов в глубоких карьерах // Глубокие карьеры: сб. докл. Всерос. науч.-техн. конф. с межд. участием, 18–22 июня 2012 г. Апатиты; СПб: ГоИ КНЦ РАН, 2012. С. 470–474.
5. Kamenev G.K., Lyulyakin O.P., Sarancha D.A., Lysenko N.A., Polyansky V.O. From chaos to order. Difference equations in one ecological problem // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2016. Vol. 31, No. 5. P. 253–265.
6. Валуев А.М. Математические модели и методы пространственно-временного распределения ресурсов при открытой угледобыче. М.: МГГУ, 2007.
7. Valuev A.M. A new model of resource planning for optimal project scheduling // Mathematical Modelling and Analysis. 2007. Vol. 12, No. 2. P. 255–266.
8. ОНД-86. Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий. – Л.: Гидрометеиздат, 1987.
9. Методика расчета осредненных за длительный период концентраций выбрасываемых в атмосферу вредных веществ (дополнение к ОНД86). – СПб.: ГГО им. А.И. Воейкова, 2005.

Taking into account atmospheric pollution transfer when selecting a geotechnical process execution program

A.M. Valuev

*Mechanical Engineering Research Institute named after A. Blagonravov of the RAS,
Moscow, Russia*

M. A. Lozinskaya

Research technological University "MISIS", Moscow, Russia

Калибровка динамических моделей с условиями на трубку траекторий*

Г.К. Каменев

Вычислительный Центр ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Рассматривается задача калибровки (идентификации) динамических моделей с параметрами. При заданном начальном множестве в пространстве фазовых переменных требуется подобрать сочетание параметров, при котором все траектории системы удовлетворяют заданным условиям. Предлагается решать такую задачу методом множеств идентификации [1]. На первом этапе рассматривается задача построения эpsilon-покрытия множества сочетаний параметров, характеризующихся функцией принадлежности трубки траекторий, основанной на некотором шаблоне (эpsilon-сети) начального множества, к классу трубок, удовлетворяющих заданным условиям. Выбирается сочетание параметров, при рассматриваемом шаблоне удовлетворяющее заданным ограничениям на трубку траекторий. На втором этапе методом построения эpsilon-покрытий неявно заданных множеств [2] строится трубка траекторий для всего заданного начального фазового множества и осуществляется проверка заданных ограничений. В случае, если требования не удовлетворяются, осуществляется повторение первого этапа с уточненным шаблоном. Рассматриваемая технология может использоваться в экологии и экономике для подборки параметров в моделях популяций или совокупностей агентов, причем в качестве некоторых параметров могут использоваться экзогенные переменные. Технология проиллюстрирована на модели популяции, описывающей поведение человеческого капитала в информационном обществе.

Рассмотрим динамическую модель непрерывного или дискретного типа:

$$dx(t)/dt = f(x(t), \lambda, t), x \in R^n, \lambda \in \Lambda \subset R^m, x(t_0) \in X \subset R^n, t \in [t_0, t_1];$$

$$x(t+1) = x(t) + f(x(t), \lambda, t), x \in R^n, \lambda \in \Lambda \subset R^m, x(t_0) \in X_0 \subset R^n, t = t_0, \dots, t_1.$$

Пусть $\Omega = [t_0, t_1]$ в непрерывном случае и $\Omega = \{t_0, \dots, T\}$ – в дискретном. При этом X есть множество начальных фазовых состояний, а Λ есть множество допустимых параметров. Обозначим через $g(x(t_0), \lambda, t)$ решение (фазовый вектор $x(t)$), полученный с помощью рассматриваемой модели для конкретных $\lambda \in \Lambda$, $x(t_0) \in X$, $t \in \Omega$. Получение этого решения может быть оформлено в виде однозначного отображений F и F^+ ставящих в соответствии набору $\lambda \in \Lambda$, $x(t_0) \in X$, $t \in \Omega$ значение фазового вектора $g(x(t_0), \lambda, t) = x(t)$ и расширенного фазового вектора $(g(x(t_0), \lambda, t), t)$, т.е.

$$F: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow g(x(t_0), \lambda, t), F^+: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow (g(x(t_0), \lambda, t), t).$$

Множество $R(x(t_0), \lambda) = \{(g(x(t_0), \lambda, t), t): t \in \Omega\}$ в расширенного фазовом пространстве назовем *траекторией* системы при заданных начальном векторе $x(t_0)$ и векторе параметров λ . В наших обозначения $R(x(t_0), \lambda) = F^+(x(t_0), \lambda, \Omega)$.

Определим множество фазовых состояний динамической системы в момент t при заданных параметрах λ как

$$G(\lambda, t) = \{g(x(t_0), \lambda, t): x(t_0) \in X\}.$$

В наших обозначения $G(\lambda, t) = F(X, \lambda, t)$. Определим трубку траекторий динамической системы при заданных параметрах λ :

$$H(\lambda) = \{R(x(t_0), \lambda): x(t_0) \in X\}.$$

В наших обозначения $H(\lambda) = R(X, \lambda) = F^+(X, \lambda, \Omega)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00465).

Множество $G(\lambda, t)$ принадлежит фазовому пространству R^n . Его возможно интерпретировать как *множество достижимости* рассматриваемой динамической системы с заданным множеством начальных фаз X и зафиксированным управлением λ . Множество $H(\lambda)$ принадлежит расширенному на время фазовому пространству R^{n+1} . Сечениями $H(\lambda)$ при заданном времени t являются множества $G(\lambda, t)$. Применяемые методы предполагают, что множества A , X , и $H(\lambda)$ являются ограниченными.

Рассматриваемые множества имеют неявное описание в виде точно-множественных отображений:

$$R(x(t_0), \lambda): X \times A \times \Omega \rightarrow \{F^+(x(t_0), \lambda, t): t \in \Omega\},$$

$$G(\lambda, t): A \times \Omega \rightarrow \{F(x(t_0), \lambda, t): x(t_0) \in X\},$$

$$H(\lambda): A \rightarrow \{F^+(x(t_0), \lambda, t): x(t_0) \in X, t \in \Omega\},$$

Рассмотрим **задачу калибровки** (идентификации) модели, т.е. подборку параметров $\lambda \in A$, при условиях наложенных на множества R , G или H . На множестве параметров введем характеристическую функцию $W(\lambda)$, равную 1, если для данного λ выполняются заданные условия и 0 – в противном случае.

Для (приближенной) проверки наложенных условий множества R , G , H должны получить явное (приближенное) описание. Универсальным средством аппроксимации сложных метрических объектов являются ε -сети.

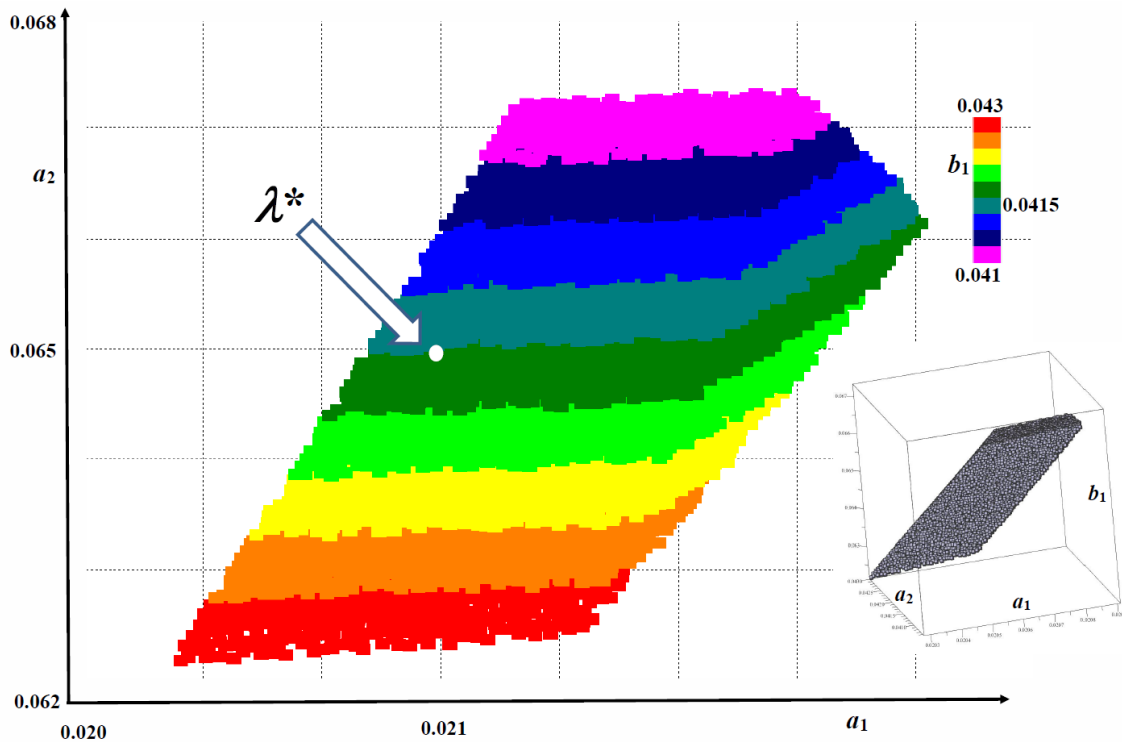


Рис. 1. Множество допустимых параметров A^*_W

Подмножество называется ε -сетью, если любая точка множества находится от нее на расстоянии, не большем, чем ε . В евклидовом пространстве любое ограниченное множество для любого положительного ε имеет ε -сеть, состоящую из конечного числа точек. ε -сеть позволяет приближенно описать (метрически кодировать) множество с точностью ε . Совокупность шаров радиуса ε с центрами в точках в ε -сети покрывает все множество (т.е. множество принадлежит этой совокупности) и называется ε -покрытием. При этом для любой точки ε -покрытия существует точка (центр одного из шаров), принадлежащая множеству и отстоящая от нее не более, чем на ε . Таким образом, ε -покрытие осуществляет аппроксимацию множества с метрической точностью ε .

Рассмотрим случай, когда на аппроксимируемом множестве задана вероятностная мера. Тогда его подмножество называется (ε, δ) -сетью, если вероятность нахождения точки на расстоянии от нее, превышающем ε не больше δ . Совокупность шаров радиуса ε с центрами в точках в (ε, δ) -сети называется (ε, δ) -покрытием. Доля множества, покрываемого (ε, δ) -покрытием, составляет $1-\delta$, вероятность точки попасть вне (ε, δ) -покрытия составляет δ . Понятие (ε, δ) -сети впервые введено Шенноном [3]. Методы построения (ε, δ) -сетей и аппроксимации с помощью (ε, δ) -покрытий для стохастически заданных множеств предложены в [2]. Приведем краткое изложение используемого подхода к оценке качества покрытий.

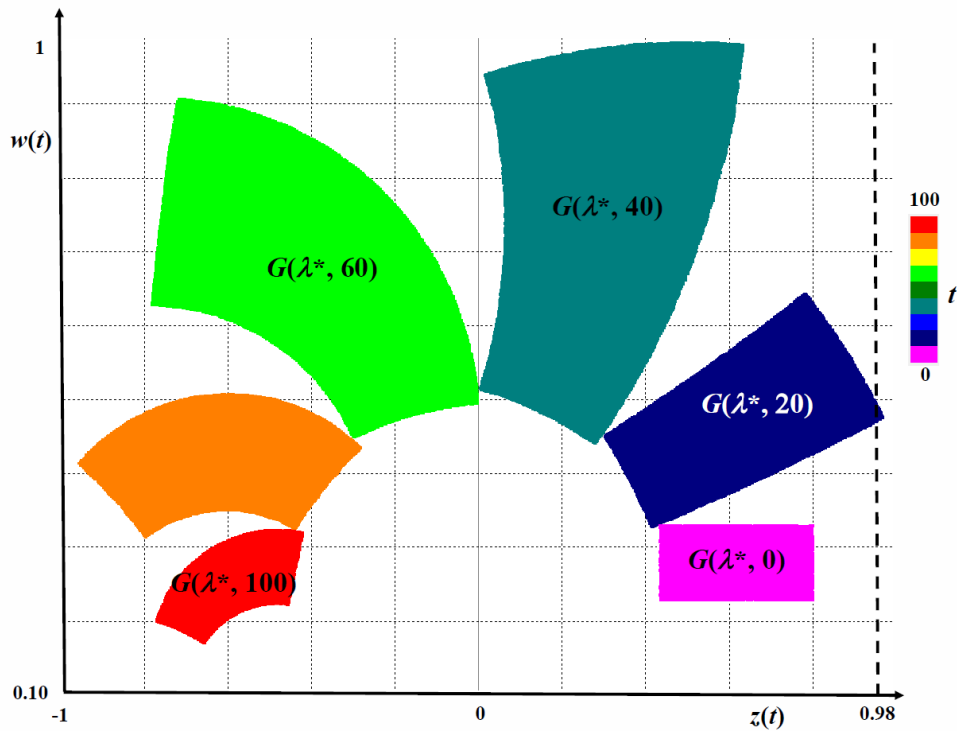


Рис. 2. Множества достижимости $G(\lambda^*, t)$ для отдельных возрастов

Под полной (ε, δ) -покрытия мы будем понимать величину $\eta=1-\delta$. Для ее оценки будем использовать [2] независимую выборку объема N , полученную с помощью заданной на множестве вероятностной меры. Для данного подмножества (проверяемой ε -сети) найдем для каждой точки из выборки минимальное расстояние до этого подмножества. Пусть доля точек выборки, оказавшихся на расстоянии ε от проверяемой ε -сети равна η^* . Величина η^* является в этом случае выборочной оценкой полноты η . Насколько точна эта оценка? Будем оценивать ее с помощью вероятности χ того, что случайная выборка объема N даст нам правильную оценку. Величину χ будем называть надежностью оценки полноты η по ее выборочной оценке η^* . Показано [2], что можно рассчитать надежность χ того, что η больше η^* , уменьшенной на некоторую величину $\Delta(\chi, N)$, зависящую от объема выборки N и надежности χ :

$$\mathbf{P} \{ \eta > \eta^* - \Delta(\chi, N) \} \geq \chi,$$

где $\Delta(\chi, N) = [-\ln(1-\chi)/(2N)]^2$. Например, если $\eta^*=1$, т.е. все точки выборки попали в ε -покрытие (такое покрытие будем называть полным), то с вероятностью χ построено покрытие полнотой $1 - \Delta(\chi, N)$, т.е. $(\varepsilon, \Delta(\chi, N))$ -покрытие. Величину $1 - \Delta(\chi, N)$ будем называть предельной полнотой, т.к. никакая выборка объема N не может с надежностью χ обеспечить большую полноту покрытия. Для $N=30000$ и $\chi=0.999$ имеем $\Delta(\chi, N)=0.01$. Это значит, что приблизительно для 999 тестовых выборок объема N из 1000 подлинное значение величины η можно оценить величиной $\eta^*-0.01$ и предельная полнота покрытия равна 0.99.

Воспользуемся подходом метода множеств идентификации [1], для построения и визуализации множества параметров Λ_w , для которых выполняются условия W , т.е. $\Lambda_w = \{\lambda \in \Lambda: W(\lambda)=1\}$. Наиболее трудоемким при таком подходе является проверка условия $W(\lambda)$ для всех $x(t_0) \in X$. Поэтому предлагается разбить задачу на несколько этапов. На первом этапе рассматривается задача построения (ε, δ) -покрытия множества Λ_w^* для неявно заданных множеств

$$R^*(x(t_0), \lambda): X^* \times \Lambda \rightarrow \{F^+(x(t_0), \lambda, t): x(t_0) \in X^*, t \in \Omega, W(\lambda)=1\},$$

$$G^*(\lambda, t): \Lambda \times \Omega \rightarrow \{F(x(t_0), \lambda, t): x(t_0) \in X^*, W(\lambda)=1\},$$

$$H^*(\lambda): \Lambda \rightarrow \{F^+(x(t_0), \lambda, t): x(t_0) \in X^*, t \in \Omega, W(\lambda)=1\},$$

основанных на некотором шаблоне (эпсилон-сети) X^* начального множества X . Выбирается сочетание параметров $\lambda^* \in \Lambda_w^*$, т.е. при рассматриваемом шаблоне удовлетворяющее ограничениям, $W(\lambda^*)=1$. На втором этапе методом построения (ε, δ) -покрытий неявно заданных множеств [2] строятся множества $R(x(0), \lambda^*)$, $G(\lambda^*, t)$, $H(\lambda^*)$ и осуществляется проверка ограничений W . В случае, если требования не удовлетворяются, осуществляется повторение первого этапа с уточненным шаблоном.

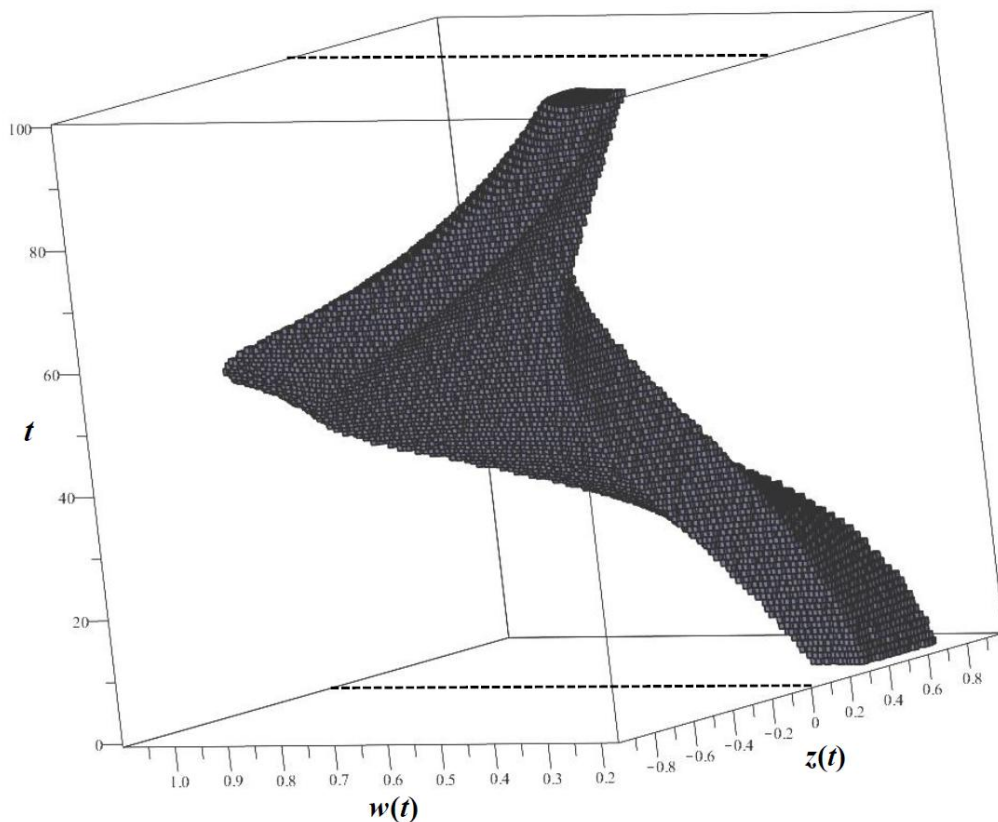


Рис. 3. Откалиброванная трубка траекторий $H(\lambda^*)$

Проиллюстрируем рассмотренную технологию на простой модели человеческой популяции в условиях информационного общества [4]. В этой модели человек рассматривается исключительно в качестве субъекта обработки информации (освоения, хранения, использования). В этом качестве человек имеет две ключевые характеристики: когнитивные способности $x(t)$ и общий объем освоенной им информации (накопленные знания) $w(t)$, а также возраст t :

$$z(t+1) = z(t) + a_1 z(t)^2 - a_2 w(t)^2,$$

$$w(t+1) = w(t) + b_1 z(t)w(t).$$

Данная модель условна и не претендует на полноту, но отражает существенные закономерности изменения когнитивных способностей и знаний (упорядоченной информации) человека. Стартовым возрастом в модели считается 20 лет ($t_0=0$), максимальным расчетный возраст принят в 120 лет ($t_1=100$). Фиксация события $z(t) < -1$

означает выбытие человека из информационной популяции, в этом случае дальнейший расчет траектории прекращается. На основе исследования когнитивных способностей человека (в частности, индекса IQ), можно установить следующий диапазон возможных стартовых когнитивных способностей: $0.44 \leq z(t_0) \leq 0.8$, кроме того должно выполняться калибровочное требование $z(t) \leq 1$. Общий объем стартовой освоенной человеком информации $w(t_0)$ является трудно верифицируемой характеристикой. Принято, что в стартовой (возраст 20 лет) популяции она должна различаться на 25-50%. Предварительное исследование (в настоящей работе мы его опускаем) на шаблонах малой детализации показало, что для рассматриваемой задачи удобно принять этот диапазон в виде $0.23 \leq w(t_0) \leq 0.33$. Кроме того, можно получить предварительную оценку диапазона изменения параметров модели: $0.015 \leq a_1 \leq 0.023$, $0.058 \leq a_2 \leq 0.068$, $0.039 \leq b_1 \leq 0.044$. Тем самым определяются введенные выше фазовый вектор $x(t) = (z(t), w(t))$, стартовое множество X , вектор параметров $\lambda = \{a_1, a_2, b_1\}$ и множество допустимых параметров Λ .

Необходимо подобрать значение вектора параметров λ^* так чтобы были выполнены следующие калибровочные и содержательные (вытекающие из известных в социологии свойств), требования:

$$G(\lambda^*, t) \in \{z: -1 \leq z \leq 1\}, t \in \Omega,$$

$$G(\lambda^*, 100) \neq \emptyset, G(\lambda^*, 40) \in \{z: z \geq 0\}, G(\lambda^*, 60) \in \{z: z \leq 0\}, G(\lambda^*, 20) \cap \{z: z \geq 0.98\} \neq \emptyset.$$

Зададим на X шаблон X^* в виде равномерной сетки из 11 узлов по каждой из переменных. На рис. 1 представлено (ε, δ) -покрытие множества Λ^*_w . Выберем на нем некоторую точку ε -сети – сочетание параметров $\lambda^* = (0.0210, 0.0650, 0.0415)$, обеспечивающую выполнение условия $W(\lambda^*) = 1$.

Построим теперь трубку траекторий $H(\lambda^*)$ для исходного стартового множества X . На рис. 2 изображены (ε, δ) -покрытия с высокой точностью для сечений $H(\lambda^*)$, т.е. множеств $G(\lambda^*, t)$ при шаге по времени в 20 лет. Из рисунка видно, что все требования калибровки выполнены, в частности: множество $G(\lambda^*, 20)$ почти касается уровня $z=1$, множество $G(\lambda^*, 40)$ лежит в полуплоскости $z \geq 0$; множество $G(\lambda^*, 60)$ лежит в полуплоскости $z \leq 0$. Сама искомая трубка траекторий изображена на рис. 3.

Список литературы

10. Каменев Г.К. Многокритериальный метод множеств идентификации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т56. N11. С. 1872-1888.
11. Каменев Г.К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. №11. С. 1751-1760.
12. Шеннон К. Математическая теория связи (1948), приложение 7. В кн. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд. Иностранной Литературы, 1963.
13. Каменев Г.К., Каменев И.Г. Применение методов многомерного анализа для изучения социологических совокупностей // Труды отдела математического моделирования экономических систем ВЦ ФИЦ ИУ РАН, 2018 (в печати).

Calibration of dynamic models with conditions on the trajectory tube

G.K.Kamenev

Federal Research Center of Informatics and Management of the RAS, Moscow, RF

Построение математической модели функционирования пенсионных фондов в рамках задачи оценки их устойчивости

М.А. Лепская

*Московский физико-технический институт (государственный университет),
Москва, Россия*

В данной статье рассматривается задача поиска вероятности разорения пенсионного фонда на конечном временном интервале. В качестве базовой модели рассматривается стандартная модель Крамера-Лундберга, которая претерпевает модификацию в данной работе в результате задания параметров поступления и выплат в фонд в виде случайных величин [1, 2]. Существует ряд факторов [3], которые можно рассматривать в качестве случайных величин в модели: время смерти участников пенсионной схемы, заработную плату участников, количество участников схемы, финансовые показатели (ставки дисконтирования и инвестиционного дохода, коэффициент инфляции, рост уровня заработной платы). Каждый из этих факторов с учетом задания их в виде случайных величин влияет на недетерминированность параметров поступлений и выплат в пенсионной схеме. В данной статье в качестве случайных факторов в постановке задачи рассматриваются количество человек, вступающие в пенсионную схему в год рассмотрения, и случайная смертность. Математическая модель процесса накопления и расходования средств пенсионного фонда.

а) Математическая модель динамики портфеля пенсионного фонда.

Рассмотрим пенсионную схему со следующими параметрами:

1. Участники вступают в пенсионную схему и начинают платить взносы в возрасте a лет.
2. Достигнув возраста r лет участник выходит на пенсию и начинает получать пенсионные выплаты.
3. Что число участников старше R лет пренебрежимо мало.
4. Число людей $n(t)$ возраста a , вступивших в пенсионную схему в t -ый год рассмотрения является случайной величиной.
5. Вступление и выход из пенсионной схемы в возрасте отличном от a невозможны.

Тогда в произвольный момент времени t возрастной состав участников пенсионной схемы может быть представлен в виде вектора:

$$\vec{N}_t = \begin{bmatrix} N(t, a) \\ N(t, a+1) \\ \dots \\ N(t, x) \\ \dots \\ N(t, r) \\ \dots \\ N(t, R) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

каждая координата $N(t, x)$ которого соответствует числу участников схемы возраста x по состоянию на год t .

Согласно сделанному выше предположению, первый элемент этого вектора соответствует числу участников, вновь вступивших в пенсионную схему в год t , и таким образом верно следующее равенство:

$$N(t, a) = n(t), \quad (2)$$

Рассмотрим теперь группу $N(t, x)$ участников, которые в год t находятся в возрасте x лет. В год $t+1$ их возраст составит соответственно $x+1$ лет, а их число может быть представлено следующим образом:

$$N(t+1, x+1) = \sum_{i=1}^{N(t, x)} \xi_i(x), \quad (3)$$

где сумма берется по всей рассматриваемой группе, а величины $\xi_i(x)$ являются индикаторами события, состоящего в том, что i -ый участник рассматриваемой группы пережил прошедший год:

$$\xi_i(x) = \begin{cases} 1, & p(x) \\ 0, & 1-p(x) \end{cases}. \quad (4)$$

Здесь сделано предположение об однородности участников заданной возрастной группы, выражающееся в равенстве вероятностей $p(x)$ дожить до возраста x для всех участников. С учетом такого определения величин $\xi_i(x)$ выражение (3) представляет собой сумму числа успехов в $N(t, x)$ одинаковых испытаниях Бернулли, а величина $N(t+1, x+1)$ имеет биномиальное распределение:

$$N(t+1, x+1) \square Bin(N(t, x), p(x)). \quad (5)$$

В результате обобщения вышесказанного для всех возрастных групп, состав участников пенсионной схемы в $t+1$ год может быть представлен как:

$$\vec{N}_{t+1} = \begin{bmatrix} N(t+1, a) \\ N(t+1, a+1) \\ \dots \\ N(t+1, x) \\ \dots \\ N(t+1, r) \\ \dots \\ N(t+1, R) \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} n(t) \\ Bin(N(t, a), p(a)) \\ \dots \\ Bin(N(t, x-1), p(x-1)) \\ \dots \\ Bin(N(t, r-1), p(r-1)) \\ \dots \\ Bin(N(t, R-1), p(R-1)) \end{bmatrix} = f(\vec{N}_t, n(t), p). \quad (6)$$

Таким образом, зная возрастной состав участников фонда в произвольный год t , можно спрогнозировать его динамику в течение любого временного промежутка.

Умножая вектор \vec{N}_t на матрицу E^w с единицами на первых r диагональных элементах, получим вектор \vec{N}_t^w , содержащий только работающую часть участников пенсионной схемы. Аналогично, умножением \vec{N}_t на матрицу E^l с единицами на последних $R-r$ диагоналях получим вектор \vec{N}_t^l , характеризующий число пенсионеров:

$$\vec{N}_t^w = E^w \vec{N}_t; \quad \vec{N}_t^l = E^l \vec{N}_t; \quad (7)$$

$$E^w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad E^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

б) Математическая модель пенсионных взносов и выплат.

Начальная годовая ставка пенсионных выплат является долей f от последней ставки заработной платы перед выходом на пенсию. Таким образом, для участника схемы, выходящего на пенсию (т.е. достигающего возраста r) момент времени t , прогнозируемая годовая ставка пенсионных выплат составит $fw(r)e^{rt}$. Для пенсионера возраста x момент времени t прогнозируемая годовая ставка пенсионных выплат

равна $fw(r)e^{\tau(t-(x-r))}h(x)$, $x \geq r$, где $h(x)$ – поправочный коэффициент, применяемый к исходной ставке пенсионных выплат размера $fw(r)e^{\tau(t-(x-r))}$ тем лицам, которые вышли на пенсию $x-r$ лет назад. Заметим, что $h(r)=1$. Например, $h(x)$ может быть экспоненциальной функцией $e^{\beta(x-r)}$, где β – постоянный коэффициент прироста (возможно, связанный ожидаемым темпом инфляции). Введем обозначение для ставки пенсионных выплат для пенсионера:

$$b_t = fw(r)e^{\tau(t-(x-r))}h(x) = Ce^{\tau t} [h(x)e^{\tau(r-x)}] = Ce^{\tau t} F(x), \quad (9)$$

где

$$C = fw(r). \quad (10)$$

Взнос каждого участника пенсионной схемы определяется следующим образом:

$$q_t = fwa_r^h e^{-\delta(r-x)} m(x) e^{\tau(t+r-x)} = Ce^{\tau t} [a_r^h e^{-\delta(r-x)} m(x) e^{\tau(r-x)}] = Ce^{\tau t} G(x), \quad (11)$$

где $m(x)$ – функция плотности нарастания актуарных обязательств по пенсиям (функция $m(x)$ непрерывна для $a < x < r$, непрерывна справа в точке a слева в точке r так, что $m(x)=0$ для $x > r$), а

$$a_r^h = \sum_{x=r}^{\infty} e^{-\delta(x-r)} h(x) \frac{s(x)}{s(r)}, \quad (12)$$

где $s(x)$ – функция дожития (вероятность того, что новорожденный достигнет возраста x):

$$s(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x), \quad x \geq 0, \quad s(0) = 1. \quad (13)$$

Список литературы

1. Бойков А.В. Модель Крамера-Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и её применение, 2002. Т. 47. Вып.3. С. 549–553.
2. Виноградов О.П. Об одном элементарном методе получения оценок вероятности разорения // Обозрение прикладной и промышленной математики, 1998. Т.5. Вып.1. С. 134-149.
3. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования // Томск: Изд-во Томского университета, 2004.

Construction of a mathematical model for the functioning of pension funds in the aspect of the problem of assessing their sustainability

M.A. Lepskaya

*Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Moscow, Russia*

Использование системного психологического тестирования и нейрообручей для прогнозирования поведения участников лабораторных экономических экспериментов*

Меньшикова О.Р.^{1,2}, Меньшиков И.С.^{2,3}

¹*Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия*

²*Московский физико-технический институт (государственный университет),*

³*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия*

Лаборатория экспериментальной экономики (ЛЭЭ) существует в МФТИ 15 лет, а до этого 12 лет она функционировала в РАНХиГС. Сотрудники лаборатории являются специалистами в области теории игр, принятия решений и экспериментальной экономики. За эти годы накоплен опыт проведения различных социально-экономических экспериментов и сопоставления поведения их участников с предсказаниями теории игр, в которой все рассматриваемые игры уже проанализированы и изучено оптимальное поведение рациональных участников (интересующихся только максимизацией своего выигрыша). В последнее время в ЛЭЭ большое внимание уделяется играм, в которых изучаются такие социально значимые характеристики личности как кооперативность, стремление к равенству, доверие, благодарность, социальная ответственность, конформизм [1-2].

Анализ выходных файлов показывает, что участники демонстрируют весьма разнообразное поведение в одних и тех же ситуациях. Попытки объяснить наблюдаемую гетерогенность в поведении участников экспериментов привели нас к необходимости учитывать их психологические и физиологические различия. В ЛЭЭ был создан специальный сайт для психологического тестирования, на котором за годы исследования было протестировано 15 000 человек. Для измерения физиологических показателей мы используем систему различных приборов, состоящую из 10 стабิโลграфических кресел, кардиодатчиков, измеряющих RR-интервалы и нейрообручей Muse, фиксирующих электроэнцефалограмму участников.

Перед началом каждого эксперимента участники проходят следующие психологические тесты: MBTI [3], Эннеаграмма [4], тест Адизеса [5], тест «Роли в коллективе» Белбина [6], Big Five [7], тест на феминность/маскулинность Сандры Бем [8]. Биологический и психологический пол участников, определяемый с помощью теста Сандры Бем, а также их психологические характеристики, позволяют провести кластеризацию участников по психологическим признакам, выделив однородные по психологическим характеристикам группы. Выделенные группы существенно различаются и по поведенческим характеристикам, следовательно, психофизиологические характеристики участников экспериментов могут помочь предсказать результат эксперимента.

Обилие выходных шкал используемых тестов требует исследовать их взаимосвязи. Тест Белбина отличается от остальных тем, что он показывает, какая из девяти ролей в команде человеку удастся лучше всего. Зная психологический тип претендентов на некоторую роль в команде, а также понимая, как теоретически тип соотносится с ролью в команде, можно заранее предсказать, кто из претендентов будет лучше справляться с указанной ролью.

Установлена взаимосвязь компонент различных тестов. Выделено 5 кластеров (см. Рис. 1).

* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

Западный кластер объединяет наиболее ответственных, дисциплинированных и организованных людей, которых характеризует Перфекционизм (1, Эннеаграмма), Организованность (J, MBTI), Сознательность (C, Big Five).

Северный кластер – это мастера общения, имеющие высокие показателями по шкалам Экстраверсия (E, MBTI), Экстраверсия (E5, Big Five), Открытость (O, Big Five), компонента Red (R, Структограмма).

Восточный кластер состоит из людей, которые приносят в коллектив новые идеи: Энтузиасты (7, Эннеаграмма), Генераторы идей (PL, Белбин), Творческие люди (P, MBTI), Исследователи ресурсов (RI, Белбин).

Южный кластер образуют наиболее концентрированные и углубленные люди, которым можно поручить большую серьезную работу: Интроверты (I, MBTI), Специалисты (SP, Белбин), Педанты (CF, Белбин), шкала Blue (B, Структограмма).

Центральный кластер попали командные игроки, которые всегда миролюбивы и готовы помочь: Помощник (2, Эннеаграмма), Лоялист (6, Эннеаграмма), Миротворец (9, Эннеаграмма), Душа команды (TW, Белбин), Исполнитель (IMP, Белбин), Соглашатель (A, Big Five).

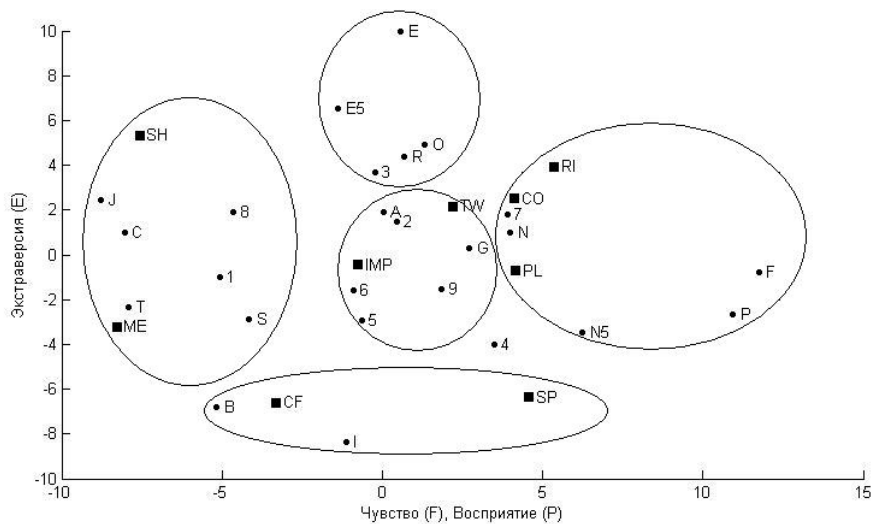


Рис. 1. Расположение 34 шкал пяти тестов на карте главных компонент.

Ключевая роль в системе тестирования принадлежит тесту Эннеаграмма. Из него можно вывести результаты тестов MBTI, тестов Сандры Бем и Адизеса. На рис. 2 изображен куб, в вершинах которого расположены шкалы теста Эннеаграмма. Чем ближе расположены вершины, тем выше корреляция соответствующих шкал. Кросскорреляционная матрица шкал тестов Эннеаграмма и MBTI позволяет утверждать, что на левой грани куба расположены экстравертные типы (E) на правой – интровертные (I), нижняя грань – думающие (T), верхняя грань – чувствующие (F), передняя грань – интуитивные (T), задняя грань – сенсорные (S).

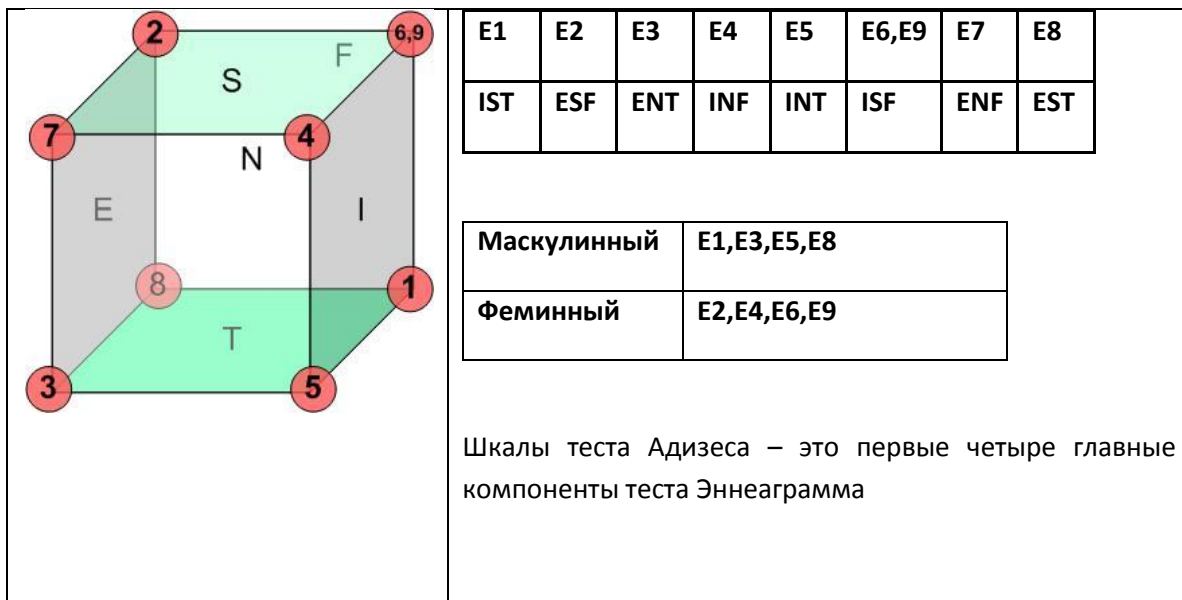


Рис. 2. Иллюстрация ключевой роли теста Эннеаграмма.

В каждой вершине куба пересекается три грани, а поскольку мы уже знаем, к какой шкале теста MBTI относится грань, то можем для каждой вершины куба записать три соответствующие буквы из теста MBTI. Напомним, что у Карла Юнга, который является родоначальником этой теории, тоже было три шкалы, последнюю шкалу J/P добавила Изабель Майерс-Бриггс при создании своего теста, считая ее независимой от первых трех шкал. Но это не так. Сочетания SJ и NP являются наиболее устойчивыми и встречаются намного чаще, чем NJ и SP.

При исследовании психологических данных больших групп особую ценность приобретают методы визуализации, позволяющие представить данные всей группы на одной картинке. С помощью метода главных компонент мы рисуем график на плоскости, где по осям отложены первые две компоненты теста Эннеаграмма для каждого человека. Оказалось, что главные компоненты наделены определенным смыслом: первая главная компонента отвечает за волевые качества человека, а вторая за его открытость и общительность. Тестирование больших коллективов (800 человек) с указанием должности тестирующихся людей позволило нам изучить, где на карте двух главных компонент находятся директора департаментов, их заместители, начальники отделов и их заместители, бухгалтеры, финансисты, юристы, программисты и т.д. Был, например, изучен вопрос, как на карте должны располагаться точки, соответствующие руководителю и его заместителю, чтобы между ними не возникало противоречий.

Добавление в нашу систему тестирования тестов Сандры Бем и теста Адизеса заставило нас исследовать взаимосвязи указанных тестов с ранее используемыми тестами. Получился любопытный результат: деление людей на феминных и маскулинных в соответствии с тестом Сандры Бем определяется первой главной компонентой теста Эннеаграмма, а четыре шкалы P, A, E, I теста Адизеса хорошо приближаются первыми четырьмя главными компонентами теста Эннеаграмма. Это подчеркивает ключевую роль теста Эннеаграмма в системе тестирования и позволяет использовать накопленные базы данных теста Эннеаграмма для прогнозирования результатов теста Адизеса.

В последнее время развились технологии исследования мозга: магнитно-резонансная томография, энцефалография. Для совместного решения проблем, связанных с исследованием мозга, представителям различных дисциплин приходится частично погружаться в смежные области. Так было и с нами. Для изучения особенностей участников экспериментов и предсказания их поведения мы стали

использовать нейрообручи MUSE, разработанные канадской фирмой Interaxon. С их помощью ведутся весьма продвинутое современные исследования электрической активности мозга ведущими университетами [9, 10]. Нейрообруч Muse оборудован семью сенсорными датчиками, которые получают и распознают сигналы мозговой активности. Muse весьма миниатюрный, он весит всего лишь 60 г и лишен проводов. Одевать его очень просто: нейрообруч должен проходить посередине лба, а дуги закрепляются за ушами как очки. Датчики записывают информацию, которая по Bluetooth передается на смартфон, а также может быть записана в компьютер в виде текстового файла формата CSV, причем данные записываются примерно каждую секунду в агрегированном виде или 256 раз в секунду, если нужны полные данные.

Показания снимаются с четырех точек: две из них расположены на лбу (AF7 и AF8), а две – за ушами (TP9 и TP10). Нечетные индексы означают левую сторону, четные – правую.

С каждой из четырех точек снимаются потенциалы, на основе которых за 4 секунды (1024 измерения) рассчитываются пять ритмов: Дельта (δ) 1-4 Гц, Тета (θ) 4-8 Гц, Альфа (α) 7.5-13 Гц, Бета (β) 13-30 Гц, Гамма (γ) 30-44 Гц. Кроме того, записываются и могут быть просмотрены в реальном времени сырые данные с четырех точек измерения в микровольтах.

С каждым измерением рассматривается, как минимум, четыре графика:

- 1) пять ритмов в динамике;
- 2) усреднение пяти ритмов в динамике;
- 3) сырой сигнал с четырех точек;
- 4) усредненный сырой сигнал с четырех точек.

Было произведено более 100 измерений в состоянии покоя испытуемых: глаза закрыты (ГЗ, 3 минуты), глаза открыты (ГО, 3 минуты).

Наблюдение 1. Из 120 возможных порядков ритмов классификация графиков усредненных пяти ритмов в динамике позволяет выделить три основные группы, определяющиеся доминируемым ритмом, которым может быть Дельта ритм, Альфа ритм или Бета ритм.

Наименее выраженными во всех наших наблюдениях были Гамма и Тэта ритмы.

Процесс увеличения концентрации внимания (его можно было наблюдать при переходе от ГЗ к ГО, но не только) характеризовался ростом Бета и Гамма ритмов и уменьшением активности Дельта и Тэта ритмов. Альфа ритм мог присоединиться в своем движении к первой группе или второй, но чаще наблюдалась комбинация, в которых движения Бета и Гамма ритмов были в противофазе с движением Альфа ритма. Это согласуется с общепринятой логикой трактовки этих ритмов.

Наблюдение 2. Исследования показали, что каждый человек может быть в любом из трех состояний, но доли пребывания в этих состояниях различны и зависят, по-видимому, от психологического типа личности.

Другая классификация данных ЭЭГ может быть получена на основе графиков усредненных сырых сигналов с четырех точек.

Наблюдение 3. Проведена классификация измерений на основе следующих факторов:

- синхронизация сигналов на симметричных точках: TP9 и TP10, AF7 и AF8;
- асинхронные сигналы на симметричных точках;
- различия амплитуд колебаний сигналов на различных точках.

Есть основания полагать, что продолжение исследований на основе сочетания различных психофизиологических методов с анализом поведения участников лабораторных экспериментов позволит продвинуться в понимании процессов принятия решений в социально-экономических взаимодействиях.

Список литературы

1. *Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р., Чабан А.Н., Бойко Д.К., Старков Д.М.* Лабораторный анализ социальных процессов принятия решений // ТРУДЫ МФТИ. 2017. Том 9, № 3, С. 86-97.
2. *Berkman E.T., Lukinova E., Menshikov I., Myagkov M.* (2015) Sociality as a Natural Mechanism of Public Goods Provision // PLoS ONE 10(3): e0119685. doi:10.1371/journal.pone.0119685
3. *Isabel Briggs Myers, Peter B. Myers.* Gifts Differing: Understanding Personality Type. 1995.
4. *Don Richard Riso, Russ Hudson.* Discovering your personality type. The essential introduction to the enneagram. Houghton Mifflin Company. Boston – New York, 2003.
5. *Маданес И., Маданес Р., Адизес И.* От застоя к росту. Как раскрыть и развить в себе потенциал бизнес-лидера. М.: «Манн, Иванов и Фарбер», 2015.
6. *Белбин Р.М.* Команды менеджеров. Как объяснить их успех или неудачу. М., Кивитс, 2012.
7. *Furnham A.* The big five versus the big four: the relationship between the Myers-Briggs Type Indicator (MBTI) and NEO-PI five factor model of personality // Personality and Individual Differences. – 1996. – Т. 21. – №. 2. – С. 303-307
8. *Bem S.L.* The measurement of psychological androgyny // J. of Consulting and Clinical Psychology. 1974, V. 42, No. 2, pp. 155-162.
9. *Kovacevic N, Ritter P, Tays W, Moreno S, McIntosh AR* (2015) ‘My Virtual Dream’: Collective Neurofeedback in an Immersive Art Environment // PLoS ONE 10(7): e0130129. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0130129>
10. *Krigolson O, Chad C. Williams C, Angela Norton A, Hassall C. and Francisco L. Colino F.* Choosing MUSE: Validation of a Low-Cost, Portable EEG System for ERP Research // Front. Neurosci., 10 March 2017 <https://doi.org/10.3389/fnins.2017.00109>

Use of system psychological testing and neuro headbands to predict the behavior of participants in laboratory economic experiments

O.R. Menshikov^{1,2}, I.S. Menshikov^{1,3}

¹MIPT, Dolgoprudniy, Russia

²RANEPА, Moscow, Russia

³FRC «Computer Science and Control» RAS, Moscow, Russia

Об оценивании рисков в кардиологии

Ю.И.Пастухова, В.А.Кокорин

ЦЭМИ РАН, Москва, Россия

ФГБОУ ВО РНИМУ им. Н.И. Пирогова, Москва, Россия

В исследование было включено 457 пациентов с инфарктом миокарда, успешно пролеченных и выписанных из стационара. В ранние сроки госпитализации у них определялся ряд показателей (клинических, анамнестических, лабораторных и инструментальных), а также оценивалось проводимое лечение. Срок наблюдения составил в среднем 44 месяца (колебался от нескольких месяцев до 14 лет).

Оценивались следующие конечные точки: смерть, сердечно – сосудистая смерть, экстренные сердечно - сосудистые госпитализации, возвратная стенокардия, повторный

инфаркт миокарда, ХСН (хроническая сердечная недостаточность), тяжелая ХСН и комбинированная конечная точка (сердечно - сосудистая смерть и/или повторный инфаркт миокарда (ИМ) и/или тяжелая ХСН).

Выделяются следующие основные задачи: выявление факторов риска развития осложнений инфаркта (т.е. конечных точек) на основании тех показателей, которые были оценены, а также разработка шкал риска, позволяющих разделять в ранние сроки заболевания больных на группы риска и проводить дифференцированное лечение.

Основные недостатки базы данных: пациенты наблюдались на протяжении разных интервалов времени, многие показатели определялись не у всех пациентов, ряд пациентов были "утрачены" в течение периода наблюдения.

Формально поставленную задачу можно представить как построение оценки вероятности события, соответствующего значению 1 конечной точки (в данной работе исследуются только бинарные конечные точки).

Рассмотрим задачу оценивания вероятности p наступления события A (например, развития хронической сердечной недостаточности) по результатам многомерной выборки X_1, X_2, \dots, X_n , где $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$ и соответствующим значениям конечных точек Y_1, Y_2, \dots, Y_n . Распределение векторов X_i считается неизвестным, Y_i принимает значение 1, если событие A произошло и значение 0 в противном случае.

Решить данную задачу можно с помощью моделей бинарного выбора. Сделанный выбор обозначается переменной Y , которая, как уже указывалась, принимает значение 1, когда выбрана первая альтернатива, иначе значение 0. Входные переменные x_1, \dots, x_k могут выражать и качественные, и количественные признаки. Задача состоит в установлении взаимосвязи между зависимой переменной Y и одной или более независимыми переменными x .

Простейшей моделью двоичного выбора является линейная вероятностная модель, где вероятность p события A определяется линейной функцией объясняющих переменных.

$$p_i = P(Y_i = 1) = b_0 + b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + \dots + b_kx_{ik}, \quad i=1, \dots, n.$$

Величина p является ненаблюдаемой, судить о ней можно лишь по наблюдаемому значению переменной Y .

Рассмотрим линейную регрессионную модель следующего вида:

$$Y_i = b_0 + b_1x_{i1} + \dots + b_kx_{ik} + \varepsilon_i = \mathbf{X}_i^T \mathbf{B} + \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (1)$$

где $\mathbf{B} = (b_0, b_1, \dots, b_k)^T$ - вектор коэффициентов, $\mathbf{X}_i = (1, x_{i1}, \dots, x_{ik})^T$, $E(\varepsilon_i | X_i) = 0$. Таким образом, .

Обозначим $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k$ - оценки параметров модели (1), построенные по методу наименьших квадратов. Ошибки ε_i модели не распределены по нормальному закону и гетероскедастичны (дисперсия ошибок непостоянна и зависит от объясняющих переменных), более того, распределение ошибок не является непрерывным. Поэтому применять обычные в таких случаях тестовые статистики некорректно. Кроме этого, предсказанное значение $\mathbf{X}_i^T \hat{\mathbf{B}}$ может оказаться больше 1 и меньше 0.

Модель (1) можно преобразовать, используя функцию равномерного распределения $F(w)$. Тогда оценка вероятности будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{p}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{X}_i^T \hat{\mathbf{B}} < 0, \\ \mathbf{X}_i^T \hat{\mathbf{B}}, & \text{если } 0 \leq \mathbf{X}_i^T \hat{\mathbf{B}} \leq 1, \\ 1, & \text{если } \mathbf{X}_i^T \hat{\mathbf{B}} > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Правило оценивания (2) называется обычно моделью линейной вероятности. Хотя процедура оценивания (1) может давать несмещенные оценки, предсказанные значения \hat{p} в (2) всегда смещены. Эта модель в силу перечисленных выше свойств на практике

применяется довольно редко. Однако зачастую очень неплохо описывает исходные выборочные данные.

Линейная модель вероятности была использована для построения оценки вероятности появления возвратной стенокардии. В качестве объясняющих переменных были выбраны: пол, возраст, ИМТ, время до поступления (час.), ЧСС в мин. (исходно), САД мм. рт. ст. (исходно), ДАД мм. рт. ст. (исходно), ренин (исходно), ангиотензин (исходно), альдостерон (исходно), ФВ (исходно), ФВ (через 6 месяцев), ср. ЧСС (исходно), ЖЭС (исходно), время до реперфузии (час.), ББ после выписки (дозировка мг.), ИАПФ в стационаре (дозировка мг.).

Для моделей дискретного выбора не существует показателя качества оценивания, аналогичного коэффициенту R^2 . На практике рассматриваются многочисленные меры качества «подгонки» модели. Одной из наиболее прозрачных является вычисление процента угаданных значений. Для вычисления прогнозируемых (угаданных) значений \hat{Y} применим правило:

$$\hat{Y}_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \hat{p}_i \geq 0,5, \\ 0, & \text{если } \hat{p}_i < 0,5. \end{cases} \quad (3)$$

Использование порогового значения 0,5 в (3) не всегда разумно. Часто в качестве порогового значения выбирают долю единиц в векторе зависимых значений Y , т.е. доля реализаций события A (возвратная стенокардия). Это обосновано, когда число единиц существенно отличается от числа нулей в обучающей выборке. В данном случае пороговое значение 0,5 допустимо.

Таблица «попаданий и промахов» будет выглядеть следующим образом:

| | | |
|--------------------------|---------------------|---|
| Фактические значения Y | Число предсказанных | |
| | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Процент правильно угаданных исходов здесь равен 85,7%. Считается, что модели с процентом угадывания, большим 70%, обладают хорошей предсказательной силой.

Чтобы избежать проблем, связанных с использованием модели линейной вероятности, в качестве оценки вероятности наступления события используют стандартную логистическую функцию распределения (логит-оценивание) или стандартную функцию нормального распределения (пробит-оценивание), аргументом которой является линейная функция объясняющих переменных $X_i^T \hat{B}$. Оценки коэффициентов $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k$ находятся методом максимального правдоподобия. Считается, что как логит-модель так и пробит-модель дают приемлемые и очень похожие результаты. В логит-оценивании искомая оценка вероятности имеет вид:

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + e^{-X_i^T \hat{B}}} \quad (4)$$

Процент правильно угаданных исходов для рассматриваемой проблемы оценивания вероятности возвратной стенокардии мало отличается от ранее найденного (86%), но логит-анализ позволяет по-иному по сравнению с методом наименьших квадратов, интерпретировать полученные оценки коэффициентов $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k$. Для определения

степени влияния включенных в модель факторов на вероятность наступления события находятся предельные эффекты коэффициентов. Предельный эффект коэффициента \hat{b}_j вычисляется как частная производная вероятности наступления события по независимой переменной x_j и равен

$$\frac{e^{x_i^T \hat{B}}}{(1+e^{x_i^T \hat{B}})^2} \hat{b}_j, \quad j=1, \dots, k; \quad i=1, \dots, n.$$

При достаточно большом числе подходящих для моделирования данных средние предельные эффекты позволяют сравнить воздействие различных факторов на вероятность наступления исследуемого события. Хотя более важной представляется задача использования формул (4) для расчета рисков наступления событий (конечных точек) для каждого больного. Для этого необходимо четко определиться с выбором параметров x_j , используемых в модели (возможно различных для каждой из конечных точек), определять их для каждого больного, не допуская пропусков. При возрастании объема базы данных целесообразно периодически пересчитывать оценки коэффициентов $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k$ с целью улучшения качества оценивания.

Список литературы

1. Ю.И.Пастухова, В.А.Кокорин. Статистический анализ факторов, влияющих на развитие хронической сердечной недостаточности// Обозрение прикладной и промышленной математики. 2013. Т. 20, вып. 3.1. С. 340-341.

On estimation of risk in cardiology

Yu.I.Pastukhova, V.A.Kokorin

CEMI RAS, Moscow, Russia

Pirogov's RNRMU, Moscow, Russia

Об отсутствии влияния однородной миграции на возникновение пандемии в классической модели динамики эпидемии

Разжевайкин В.Н.

ФИЦ ИУ РАН, ул. Вавилова, 40, 119333, Москва, Россия

Классическая модель динамики эпидемии, предложенная МакКормиком и Кендриком, имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \alpha \cdot S \cdot I - (\beta + \gamma)I, \\ \frac{dS}{dt} = -\alpha \cdot S \cdot I + \gamma \cdot (N - S). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $I = I(t)$ – численность инфицированных, $S = S(t)$ – восприимчивых, $\alpha > 0$ – контактное число, $\beta > 0$ – выздоровления, $N > 0$ – общая численность населения в рассматриваемом регионе, считающаяся постоянной, так что $I(t)$, $S(t)$, равно как и число устраненных $R(t) = N - (S(t) + I(t))$ (т.е. не являющихся ни инфицированными, ни восприимчивыми; их называют также иммунными) остаются неотрицательными при неотрицательных начальных условиях таких, что $S(0) + I(0) \leq N$. Поскольку общая численность популяции остается постоянной, то общая смертность $\gamma > 0$ совпадает с общей рождаемостью и называется коэффициентом обновления. В модели обновление

осуществляется таким образом, что этим все новорожденные считаются восприимчивыми, а сама рассматриваемая инфекция на демографические процессы не влияет, так что коэффициенты рождаемости и смертности у всех трех групп (восприимчивых, инфицированных и устраненных) одинаковы. Член $\alpha \cdot S \cdot I$ в (1) задает темп перехода восприимчивых особей популяции в инфицированные в соответствии с гипотезой встреч представителей с различными статусами, пропорциональный численностям для каждого из них.

Система (1) в области $S \geq 0, I \geq 0$ всегда имеет одно «тривиальное» положение равновесия $S^* = N, I^* = 0$, соответствующее отсутствию пандемии. Такое соответствие обусловлено тем, что инфицированные особи в нем отсутствуют. В некоторых случаях возможно также существование и «нетривиального» положения равновесия $S' = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}, I' = \frac{\gamma(N - S')}{\alpha S'}$, соответствующего наличию пандемии. При $S' \geq N$ в области $U = \{S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq N\}$ имеется только тривиальное положение равновесия. Нетрудно проверить, что в этом случае оно является глобальным аттрактором для решений задачи Коши с начальными условиями из указанной области. Напротив, локализация нетривиального положения равновесия в области положительных значений соответствует линейной неустойчивости тривиального и задается условием $N > S'$.

Далее мы считаем, что популяция подразделена по нескольким регионам, нумеруемым далее индексом $i = 1, \dots, n$. В качестве базовой гипотезы предполагается, что жители каждого из регионов (под таковыми понимаются индивидуумы, имеющие данный регион в качестве постоянного места проживания, т.е. «прописанные» в этом регионе) проводят часть своего времени за его пределами, распределяя его по остальным регионам. Обозначим через $\varepsilon_{ij} \geq 0$ долю времени, проводимого жителем i -го региона в j -м, так что ε_{ii} – время, проводимое им в домашних условиях и $\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} = 1$.

В соответствии с гипотезой встреч предполагается, что заражение происходит при контакте восприимчивых с инфицированными с вероятностью, пропорциональной доле времени, проведенной ими совместно, т.е. в одних и тех же регионах. Пусть N_i – общая численность жителей i -го региона, $I_i(t)$ – число инфицированных жителей этого региона в момент времени t , $S_i(t)$ – число восприимчивых жителей этого региона. Тогда, как и выше, $R_i(t) = N_i - I_i(t) - S_i(t)$ – число устраненных. При сделанных предположениях динамика эпидемии будет описываться следующей системой из $2n$ уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dI_i}{dt} = \alpha S_i \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{jk} I_j \right) - (\beta + \gamma) I_i, i = 1, \dots, n, \\ \frac{dS_i}{dt} = -\alpha S_i \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{jk} I_j \right) + \gamma (N_i - S_i), i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку из системы (2) следует $\frac{dR_i}{dt} = \beta I_i - \gamma R_i$, то

$U = \{S_i \geq 0, I_i \geq 0, S_i + I_i \leq N_i, i = 1, \dots, n\}$ -- область, инвариантная для ее решений.

Далее мы будем ассоциировать возможность возникновения пандемии с неустойчивостью тривиального положения равновесия

$$\{S_i^* = N_i, I_i^* = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Его устойчивости соответствует локализация всех $2n$ (с учетом кратности) собственных значений якобиана \mathbf{J} правой части системы (2), вычисленного в этом положении равновесия, в левой комплексной полуплоскости. Его вычисление дает:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha \text{diag}(\mathbf{N}) \mathbf{E} \mathbf{E}^T - (\beta + \gamma) \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\alpha \text{diag}(\mathbf{N}) \mathbf{E} \mathbf{E}^T & -\gamma \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где в клетках проставлены $n \times n$ блоки, $\mathbf{0}$ -- нулевая, а $\mathbf{1}$ -- единичная $n \times n$ матрицы, $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_n)^T$, $\text{diag}(\mathbf{N})$ -- диагональная матрица с вектором \mathbf{N} на главной диагонали, а $\mathbf{E} = (\varepsilon_{ij})$ -- $n \times n$ матрица корреспонденций. Поскольку якобиан \mathbf{J} имеет блочно треугольный вид, то его спектр совпадает с объединением спектров его диагональных блоков. Второй из них -- диагональный со значением $-\gamma < 0$ на всех местах на главной диагонали, так что неустойчивость может возникнуть только при наличии собственных значений у первого блока $\mathbf{A} = \alpha \text{diag}(\mathbf{N}) \mathbf{E} \mathbf{E}^T - (\beta + \gamma) \mathbf{1}$, имеющих неотрицательную вещественную часть, и будет заведомо иметь место при наличии таковых с положительной вещественной частью.

В однородном случае мы считаем $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \leq \frac{1}{n}$ для $i \neq j$, $\varepsilon_{ii} = 1 - (n-1)\varepsilon \geq \varepsilon$, и $N_i = N > 0$ для $i, j = 1, \dots, n$. При таких предположениях первый блок якобиана будет иметь вид $\mathbf{A} = \alpha N (\mathbf{E} \mathbf{E}^T) - (\beta + \gamma) \mathbf{1}$. Симметричная $\mathbf{E} \mathbf{E}^T$ матрица имеет структуру

$$\mathbf{E} \mathbf{E}^T = \delta \mathbf{1} + \nu \mathbf{\Gamma}, \quad \text{где } \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ -- матрица, состоящая из единиц,}$$

$$\nu = \varepsilon(2 - n\varepsilon) > 0, \quad \delta = (1 - n\varepsilon)^2 \geq 0. \quad (4)$$

Поскольку $\text{rank } \mathbf{\Gamma} = 1$, то матрица $\mathbf{\Gamma}$ имеет единственное отличное от нуля собственное значение $\lambda_1 = n$, соответствующее собственному вектору $(1, \dots, 1)^T$. В силу ее симметричности этот вектор ортогонален $(n-1)$ -мерному ядру $\text{Ker } \mathbf{\Gamma}$. Поскольку любой вектор является собственным для единичной матрицы, то спектр матрицы $\mu \mathbf{\Gamma} + \eta \mathbf{1}$ состоит из двух собственных значений: $\lambda_2(\eta) = \eta$, имеющего геометрическую кратность $(n-1)$ и $\text{Ker } \mathbf{\Gamma}$ в качестве собственного подпространства, и простого (для $\mu > 0$)

$$\lambda_1(\eta, \mu) = (\mu n + \eta) > \lambda_2(\eta) \quad (5)$$

с тем же собственным вектором $(1, \dots, 1)^T$. В случае матрицы $\mathbf{A} = \mu \mathbf{\Gamma} + \eta \mathbf{1}$ имеем:

$$\mu = \alpha \nu N, \quad \text{и } \eta = \alpha \delta N - (\beta + \gamma). \quad (6)$$

Устойчивость тривиального положения равновесия в точечной модели означает выполнение неравенства $\rho = \frac{\beta + \gamma}{\alpha N} \geq 1$. Поскольку при $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ будет выполнено неравенство $\delta < 1$, то при $\rho > 1$ будет также $\eta < 0$, т.е. система (2) в линейном приближении в окрестности тривиального положения равновесия, будет устойчива по отношению к возмущениям из $\text{Ker } \mathbf{\Gamma}$. Это означает, что потеря устойчивости за счет введения миграций возможна только по отношению к возмущениям на выделенном собственном направлении $(1, \dots, 1)^T$, т.е. при выходе собственного значения $\lambda_1(\eta, \mu)$ с увеличением ε в положительную область. Покажем, что этого не происходит.

Подставляя в (5) выражения (6), находим

$$\lambda_1 = ((\alpha n N)n + \alpha \delta N - (\beta + \gamma)) = \alpha N(vn + \delta - \rho),$$

так что с учетом (4)

$$\lambda_1 = \alpha N(\varepsilon(2 - n\varepsilon)n + (1 - n\varepsilon)^2 - \rho) = 1 - \rho < 0.$$

Таким образом, введение в однородную систему миграций с постоянными коэффициентами $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ не может привести к потере устойчивости тривиального положения равновесия.

Представленный здесь результат является следствием сделанного выше предположения об однородности блужданий особей по различным регионам. В случае его нарушения пандемия в популяции все же может возникнуть. Грубо говоря, наличие одного или нескольких мест преимущественного времяпрепровождения особей из различных регионов может привести такие места к приобретению ими статуса «очагов» пандемии.

Приведем пример. Пусть имеется единственный «предпочтительный» с точки зрения времяпрепровождения регион (ему соответствует номер $i = 1$). Предположим, что в нем все особи всех регионов, включая и особей самого этого региона, проводят львиную долю времени, равную $1 - (n - 1)\varepsilon$. Все остальное время независимо от места прописки особи распределяется поровну между остальными $(n - 1)$ регионами и равно для каждого из них $\varepsilon > 0$. В этом случае матрица корреспонденций имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 - (n - 1)\varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ 1 - (n - 1)\varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - (n - 1)\varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Для $EE^T = \xi \Gamma$ находим $\xi = 1 - 2(n - 1)\varepsilon + n(n - 1)\varepsilon^2$. Нормируя на численность жителей одного региона, т.е. полагая $N = 1$, находим собственное значение матрицы $A = \alpha \text{diag}(N)EE^T - (\beta + \gamma)\mathbf{1}$, равное $\lambda = \alpha n \xi - (\beta + \gamma)$. С учетом условия устойчивости тривиального положения равновесия при отсутствии миграций, задаваемого неравенством $(\beta + \gamma) > \alpha$, находим условие возникновения пандемии

$$\alpha n \xi > (\beta + \gamma) > \alpha. \quad (7)$$

Условие (7) может быть достигнуто при любом $n \geq 2$ лишь только $\varepsilon > 0$ будет достаточно малым.

Отметим также, что описанная в построенном примере пандемия имеет очаговый характер, т.е. может распространяться от очага (т.е. региона, порождающего массовую смену статуса особей с восприимчивых к инфицированным) к периферии (регионы, где нет условий для такой смены). Такая ярко выраженная локализация представляет собой довольно часто наблюдаемое явление. Иллюстрацией тому могут служить многочисленные детские инфекционные заболевания, распространяющиеся в школах и дошкольных учреждениях и больничные инфекции. В случае последних существенную роль играет также повышенная доля изначально инфицированных (в рамках настоящей модели этот фактор не является существенным, поскольку определяет лишь начальные условия), и сниженный уровень иммунной защиты у основного контингента (в модели этому соответствует увеличение параметра α).

Следует обратить внимание также на то, что в силу (7) ни инкубационный период, обратно пропорциональный коэффициенту выздоровления β , ни демографические параметры, задаваемые в модели коэффициентом обновления γ , не являются специфическими характеристиками, связывающими миграцию в популяциях с

возможностью возникновения эпидемии. Поскольку они являются довольно устойчивыми по отношению к различным мероприятиям терапевтического и профилактического характера, то отсюда можно сделать вывод о необходимости концентрации усилий по предотвращению распространения очаговых инфекций на сокращении факторов скученности и времени пребывания индивидуумов в местах с повышенным ее уровнем. На организационном уровне в свете вышесказанного в периоды повышения риска возникновения эпидемий наиболее эффективной представляется такая последовательность действий, которая в первую очередь исключает указанные выше факторы, приводящие к возникновению эпидемических очагов.

Полученные здесь на основе построенной модели и приведенного примера выводы имеют многочисленные статистические и исторические подтверждения.

Список литературы

1. Бейли Н. Математика в медицине и биологии. М.: Мир, 1970. 328 с.

About absence of uniform migration influence onto pandemic arising in classical model of epidemic dynamics

V.N. Razzhevaikin

FIC IC RAS, str. Vavilova, 40, 119333, Moscow, Russia

Влияние биологического и психологического пола на поведение участников экономических экспериментов *

А.О. Седуш¹, И. С. Меньшиков^{1,2}, О.Р. Меньшикова^{1,3}

¹МФТИ (ГУ),

²ВЦ им. А. А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ,

³РАНХиГС

Москва, Россия

В современном мире не теряет своей актуальности проблема общин. В разных научных сферах уже давно пытаются ее решать [1,2], в жизни законодательно разделяют права и обязанности сторон. Но, как показывает опыт, этот подход не является достаточно эффективным, люди нарушают договоренности и действуют так, чтобы обогатиться самим и сейчас, а общее благо или долгосрочный положительный эффект их не интересует. К сожалению, иногда это приводит к трагическим последствиям.

В Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ уже несколько лет проводятся эксперименты [3], помогающие понять, как сделать так, чтобы участники без предварительных договоренностей использовали кооперативную стратегию, а также выяснить, какие люди более склонны к кооперативному поведению. В каждом эксперименте принимали участие 12 человек, в основном это были ранее незнакомые друг с другом студенты МФТИ.

Было проведено 27 экспериментов, в них принимало участие 324 человека: 202 мужчины и 122 женщины. В рассматриваемой серии экспериментов использовались игры «Дилемма заключенного» (Prisoners' Dilemma) и «Ультимативный делёж» (Ultimatum Game). В каждой игре участники случайным образом разбивались на пары, при этом партнер оставался неизвестным и менялся в каждой попытке. Затем следовал

* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

этап знакомства или начальный этап групповой социализации. Ведущий знакомил участников при помощи игры «Снежный ком», а потом каждый рассказывал о себе и своих интересах то, что хотел. После этого участники по желанию разбивались на две команды по 6 человек. И снова играли, но уже только внутри своих команд, однако, партнер, как и в первой части эксперимента, также оставался неизвестным.

Результат 1. Начальный этап групповой социализации изменяет стратегии участников в сторону кооперативности, то есть после знакомства и при игре в маленьких группах, люди склонны отойти от индивидуалистической стратегии и «получать удовольствие от честной игры» (по отзывам участников).

Таблица 1. Изменение ключевых показателей у мужчин и женщин до и после социализации.

| | ДЗ1 | ДЗ2 | УД1 | УД2 |
|---------|------|------|------|------|
| Мужчины | 0.22 | 0.60 | 3.93 | 4.49 |
| Женщины | 0.25 | 0.48 | 3.94 | 4.31 |

Для более подробного анализа были рассмотрены группы мужчин и женщин, а также было произведено разбиение по психологическому тесту MBTI по четырем шкалам: Экстраверсия (E) – Интроверсия (I), Сенсорность (S) – Интуитивность (N), Мышление (T) – Чувство (F), Суждение (J) – Восприятие (P) [4].

Результат 2. В «Дилемме заключенного» доля кооперативных ходов до социализации больше у женщин, а после – у мужчин для всех рассматриваемых психологических шкал, то есть знакомство гораздо большее влияние оказывает на мужчин. Так в ДЗ доля кооперативных ходов у мужчин после социализации выросла на 0,38 ($N_M=202$, $p\text{-value} < 0,001$), а у женщин на 0,23 ($N_W=122$, $p\text{-value} < 0,001$).

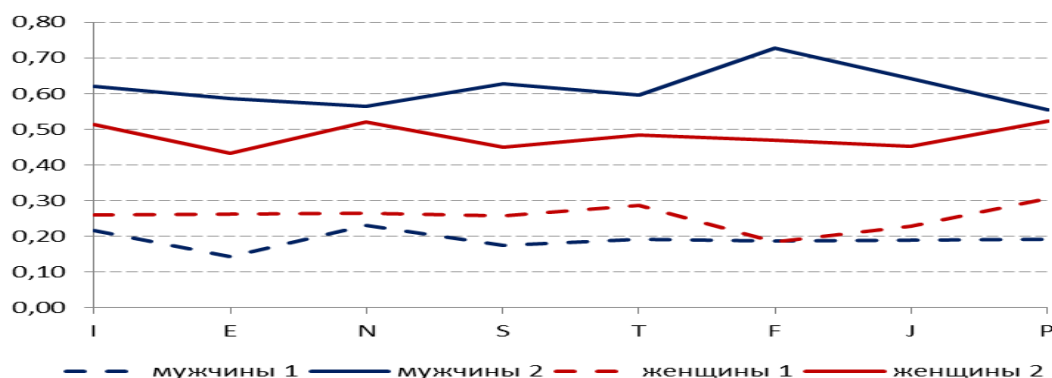


Рис. 1. Доля кооперативных ходов в игре «Дилемма заключенного» у мужчин и женщин по психотипам MBTI.

Результат 3. В игре «Ультимативный делёж» также повысилось среднее предложение партнеру после социализации, причем у мужчин изменение показателя было большим, чем у женщин по всем психологическим типам. В УД у мужчин среднее предложение выросло на 0,56 ($N_M=202$, $p\text{-value} < 0,001$), а у женщин на 0,37 ($N_W=122$, $p\text{-value} < 0,001$). Но в этой игре уровни предложения мужчин и женщин по психологическим типам после социализации стали неразличимы.

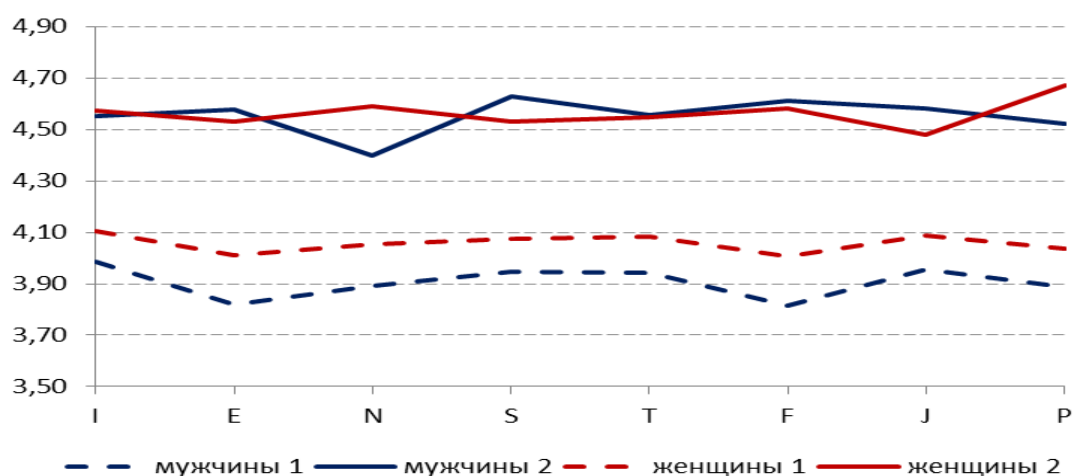


Рис. 2. Среднее предложение в игре «Ультимативный делёж» у мужчин и женщин по психотипам MBTI.

Результат 4. Шкала F теста MBTI является наиболее гендерно-зависимой по поведению в ДЗ. Мужчины с высокими показателями по этой шкале ведут себя наиболее кооперативно после социализации, а женщины – наименее кооперативно (см. рис. 1, таблицу 2), при том, что высокие показатели по этой шкале больше присущи женщинам.

Таблица 2. Разность уровней кооперативности мужчин и женщин после социализации в игре «Дилемма заключенного» по психотипам MBTI.

| | I | E | N | S | T | F | J | P |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|-------------|------|------|
| Разность уровней кооперативности | 0.11 | 0.15 | 0.04 | 0.18 | 0.11 | 0.26 | 0.19 | 0.03 |

Этот результат говорит о том, что необходимо разделять личностные особенности участников не только с помощью психологических тестов, но и обязательно по гендерным признакам. В данном случае у мужчин и женщин с похожими психологическими особенностями возникает противоположное поведение.

Поскольку люди, относящиеся к типу F, отличаются чувствительностью, эмоциональностью, а эти черты в современном обществе больше приписываются женщинам, мы обратились к теории Сандры Бем [5] про разделение людей по психологическому полу. Согласно этой теории у каждого человека есть не только физиологический, но и психологический пол, который определяется по тому, какими качествами обладает данный человек. То есть люди, характеризующиеся как независимые, напористые, агрессивные, уверенные в себе, относятся к маскулинному типу, а те, которым свойственна мягкость, уступчивость, чувствительность – к феминному.

Для групп по психологическому полу выявлена другая закономерность.

Результат 5. В обеих играх и до и после социализации более кооперативно ведут себя феминные индивиды. В Таблице 3 видно, что социализация заметно улучшает показатели в обеих группах.

Таблица 3. Изменение ключевых показателей у маскулинных и феминных индивидов до и после социализации.

| | ДЗ1 | ДЗ2 | УД1 | УД2 |
|-------------|------|------|------|------|
| Маскулинные | 0.22 | 0.49 | 3.91 | 4.39 |
| Феминные | 0.25 | 0.61 | 3.96 | 4.45 |

В ДЗ доля кооперативных ходов у маскулинных индивидов после социализации увеличилась на 0,25 ($N_M=164$, $p\text{-value} < 0,001$), а в группе феминных на 0,36 ($N_F=160$, $p\text{-value} < 0,001$).

value < 0,001). В УД среднее предложение у маскулиных индивидов увеличилось на 0,48 ($N_M=164$, p-value < 0,001), а у феминных на 0,49 ($N_F=160$, p-value < 0,001).

Было показано, что социализация дает хорошие результаты по улучшению социальных характеристик участников экспериментов в обеих играх: доли кооперативных ходов в «Дилемме заключенного» и среднего предложения в «Ультимативном дележе». Важно отметить, что это верно не только в целом, но и для отдельных групп участников, определяемых биологическим и психологическим полом и психологическим типом.

Показано, что социализация сильнее действует на мужчин: если до социализации уровни кооперативности мужчин были не лучше соответствующих характеристик у женщин, то социализация больший эффект в обеих играх дает в группе мужчин.

Было обнаружено, что для прогнозирования эффекта социализации нельзя ограничиться знанием только психологического типа участника, поскольку бывает, что женщины и мужчины одного типа ведут себя диаметрально противоположным образом.

Список литературы

1. Ostrom E. *Governing the commons: The evolution of institutions for collective action*. Cambridge: Cambridge University Press; 1990.
2. Fehr E, Schmidt KM. A theory of fairness, competition, and cooperation. *Q J Econ*. 1999; 114(3): 817–868.
3. Berkman ET, Lukinova E, Menshikov I, Myagkov M. Sociality as a Natural Mechanism of Public Goods Provision // *PLoS ONE* 10(3), 2015: e0119685. doi:10.1371/journal.pone.0119685
4. Quenk N. L. *Essentials of Myers-Briggs Type Indicator [R] Assessment*. Essentials of Psychological Assessment Series. – John Wiley & Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY 10158, 2001.
5. Bem S.L. The measurement of psychological androgyny // *J. of Consulting and Clinical Psychology*. 1974, V. 42, No. 2, pp. 155-162.

The influence of the biological and psychological gender on the behavior of participants in economic experiments

A.O. Sedush¹, I. S. Menshikov^{1,2}, O.R. Menshikova^{1,3}

¹MIPT,

²*Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS,*

³PANEPА

Moscow, Russia

Mathematical model of the cryogenic fuel layer formation process during the laser target cooling

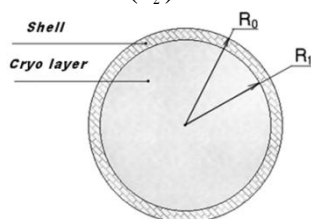
K.O. Semenov

Dorodnicyn Computing Center of FRC CSC RAS, Moscow, Russia

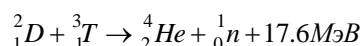
This work involves the problem of mathematical modeling the cryogenic fuel layer formation process during the laser target cooling and its numerical solving. For formation time determination of fuel layer to a solid substance a mathematical model of gaseous fuels desublimation process is developed and a numerical solution of the problem is proposed. Such

task is relevant considering the problems associated with the freestanding laser spherical targets production processes (FST) developed in the laboratory of thermonuclear targets Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences [1].

The laser target is a thin-walled spherical polymer shell symmetrically filled with a cryogenic layer of deuterium (D_2) and tritium (T_2) mix in the solid state.



The nuclear fusion process starts with a powerful laser impulse as a result the thermonuclear reaction starts and the same time great energy is released. An example of such reaction is shown below.



An important condition for triggering a thermonuclear reaction of synthesis is the solid state of the fuel target layer. To ensure the required condition and the quality of the fuel layer, it is necessary to be able to determine the main parameters of formation process and calculate them. Below we consider the process of cooling the laser target and divide it into the following stages:

1. Cooling to the conditions when solid fuel layer formation starts.
2. Formation of solid fuel layer.

First, we consider the cooling for the conditions when solid fuel layer formation starts. The main task is the estimation of cooling time to the moment of desublimation process starts. To do this, we create a mathematical model of gas cooling to the temperature of the triple point with its convective mixing.

The temperature distribution in the shell of the nuclear target we describe by the quasilinear equation of heat conductivity

$$c_{sh}(T_{sh})\rho_{sh}(T_{sh})\frac{\partial T_{sh}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{sh}(T_{sh})\frac{\partial T_{sh}}{\partial r} \right)$$

Where parameters are $(T_g), (P)$ – gas temperature and its pressure are independent of the distance – (r) to the center of the target and (T_{sh}) – the temperature distribution in the target shell.

The heat balance equation describes the heat flux at the gas / shell border

$$c_g(T_g)\rho_g V_g \frac{dT_g}{dt} = S k_{sh}(T) \frac{\partial T_{sh}}{\partial r} \Big|_{r=R_1}$$

Here $\rho_g = const$ – gas density in the laser target, $V_g = \frac{4}{3}\pi R_1^3$ – gas volume, $S = 4\pi R_1^2$ – the spot contact area of interior target shell surface with gas. The boundary and initial conditions are the following $T_{sh}|_{r=R_1} = T_g(t)$ and $T_{sh}|_{r=R_0} = T_0$ – this means that the temperatures on the interior and external shell surfaces are respectively equal to the temperatures of the gas and the external environment. At the initial moment of time, the initial temperature distribution in the shell has the next form

$$T_{sh}(r,0) = \frac{r-R_0}{R_0-R_1} T_0 + \frac{R_0-r}{R_0-R_1} T_1$$

Now we construct the difference scheme [2] with the following condition

$$c_i \rho_i \frac{(y_i - \hat{y}_i)}{\tau} = \frac{1}{h} \left[k_{i+\frac{1}{2}} \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{(y_i - y_{i-1})}{h} \right],$$

here τ – time step, $h = \frac{R_0 - R_1}{N}$ – grid step and N – number of grid nodes,

$r_i = R_1 + ih \in [R_1, R_0]$ – current radius coordinate at node number i ,

$c_i, \rho_i, k_i, k_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(k_{i+1} + k_i)}{2}, k_{i-\frac{1}{2}} = \frac{(k_i + k_{i-1})}{2}$ – coefficients for the shell at done number i , y_i – temperature values at grid nodes, \hat{y}_i – temperature values at grid nodes calculated at the previous step.

It is possible to use the elimination method [3] for solving the difference scheme. At each time step the temperature gradient on the interior shell surfaces is $\left(\frac{\partial T_{sh}}{\partial r} \Big|_{r=R_i+0} \approx \frac{(y_1 - y_0)}{h} \right)$ and

the temperature

$$T_g(t+\tau) = T_g(t) - \tau \frac{3k_s(T_g(t))}{c_g(T_g(t))\rho_g R_1} \frac{(y_0 - y_1)}{h}.$$

So the gas in the target has temperature T_f that is close to the triple point temperature of hydrogen T_{tp} . There is no solid fuel layer yet. During further cooling there is gas desublimation process.

It is possible to use the next system of thermal conduction equations with spherical coordinates to describe this model, where $R_0, R_1, \xi(t)$ – external, internal radii of the target and a function of the distance from the center of the target to the internal boundary of the solid fuel layer.

$$\begin{cases} c_g(T)\rho_g(\xi(t))\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2k_g(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right], 0 < r < \xi(t), \\ c_s(T)\rho_s\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2k_s(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right], \xi(t) < r < R_1, \\ c_{sh}(T)\rho_{sh}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2k_{sh}(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right], R_1 < r < R_0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} T(t, \xi(t)) = T_{tp} = const > 0, t \geq 0, \\ \mu\rho_s \frac{d\xi(t)}{dt} = k_s(T=T_{tp})\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=\xi(t)-0} - k_g(T=T_{tp})\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=\xi(t)+0} \end{cases} \quad (2)$$

The gas density depends on time in the system of equations (1)–(2)

$$\rho_g(\xi(t)) = \rho_g \Big|_{r=0} \left(\frac{R_1}{\xi(t)} \right)^3 + \rho_s \left(\frac{\xi(t) - R_1}{\xi(t)} \right)^3 \quad (3)$$

the density of the gas decreases while solid layer growth, here (ρ_s) – solid layer density, $(\rho_g \Big|_{r=0})$ – initial gas density $(\rho_s > \rho_g \Big|_{r=0})$. The border conditions means $T \Big|_{r=R_0} = T_0$ on external shell

surface always external environment temperature, and $k_g(T)\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ there is zero heat flow

in the target center. Initial conditions are

$$T(r, t=0) = \begin{cases} T_f - \frac{r(T_f - T_p)}{R_1}, \text{ npu } 0 \leq r \leq R_1, \\ T_p - \frac{(r - R_1)(T_p - T_0)}{(R_0 - R_1)}, \text{ npu } R_1 \leq r \leq R_0, \end{cases},$$

This is a difference scheme for the described process

$$r^2 \tilde{C}(T, r) \frac{\partial T}{\partial t} = 2r \tilde{k}(T, r) \frac{\partial T}{\partial r} + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\tilde{k}(T, r) \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

And a purely implicit difference scheme has the following form

$$r_i \tilde{c}_i \rho_i \frac{(y_i - \hat{y}_i)}{\tau} = 2 \tilde{k}_i \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})}{2h} + r_i \frac{1}{h} \left[\tilde{k}_{i+\frac{1}{2}} \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h} - \tilde{k}_{i-\frac{1}{2}} \frac{(y_i - y_{i-1})}{h} \right].$$

According to formula (3) the gas density $\rho_g(t)$ is calculated. Calculation stops when gas density is going near to zero value. Results of calculation are shown in the table below.

Table Calculation results

| | | | | | | | |
|--|-----|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\rho_g, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| $t_{\text{sub}}, 10^{-3} \text{ c}$ | 5.4 | 8.8 | 13. 1 | 18. 5 | 25. 1 | 32. 8 | 41. 9 |

For the following parameters $N = 500$, $\tau = 10^{-5} \text{ c}$, $\Delta = 0.03 \text{ K}$, $T_f = 14 \text{ K}$.

The obtained cooling times are tens of milliseconds. The assumptions made in the model can not significantly (by orders of magnitude) change the actual cooling time.

The use of the above numerical methods in the models under investigation is quite suitable for practical problems. The results showed good consistency with the theoretical results [4].

References

1. Aleksandrova I.V. Belolipetskii A.A. Koresheva E.R. Cryogenic targets for the reactor // Part I Diffusion filling of spherical shells with fuel. Lebedev Physical Institute of the RAS. Moscow. 2012. P. 1-134.
2. Samarsky A.A. Theory of difference schemes // Moscow: Nauka, 1989.
3. Samarsky A.A., Moiseenko B.D. Economical scheme of a through account for the multidimensional Stefan problem // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1965. Part 5. No. 5.
4. Belolipetsky A.A., Malinina E.A., Semenov K.O. Mathematical model of the degradation of the fuel layer when the laser target is heated by thermal radiation in the reactor working chamber // Proceedings of the Computational Mathematics and Cybernetics Faculty M.V. Lomonosov Moscow State University. Moscow. 2009. P. 5-19.

Подходы к оптимизации тренировочных нагрузок в спорте

Е.А.Тимме

ГКУ «Центр спортивных инновационных технологий и подготовки сборных команд» Москомспорта, Москва, Россия

Построение плана тренировочных нагрузок для достижения наилучшего спортивного результата к заданному соревновательному дню является одной из важнейших задач теории спорта [1]. При этом, динамика роста спортивных результатов определяется особенностями индивидуальных адаптационных реакций организма

спортсмена на физическую нагрузку [2]. Для описания взаимосвязи тренировочных нагрузок и спортивных результатов используется классическая модель [3]:

$$p_t = p_0 + \sum_{s=0}^{t-1} (k_1 e^{-\frac{t-s}{\tau_1}} - k_2 e^{-\frac{t-s}{\tau_2}}) w_s, \quad (1)$$

где

p_0, p_t – значения спортивного результата в начальный момент и в момент времени t , соответственно;

τ_1, τ_2 – характерное время запаздывания тренированности и усталости;

k_1, k_2 – коэффициенты линейной суперпозиции эффектов тренированности и усталости.

Существуют модификации модели (1), отражающие эмпирические закономерности формирования кумулятивных, отставленных и остаточных тренировочных эффектов.

При этом может быть поставлена как прямая задача – прогноз спортивного результата по известному тренировочному плану и параметрам модели, так и две обратные задачи – идентификация параметров модели по известным данным и построение оптимальной тренировочной программы по заданному целевому результату.

Задача идентификация параметров решается применением обобщенного метода наименьших квадратов.

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_t | p_t - \sum_{s=0}^{t-1} f(\theta) w_s |^2, \quad (2)$$

где θ – вектор параметров модели; $f(\theta)$ -весовая функция нагрузки; $0 < \lambda \leq 2$.

Задача оптимизации тренировочной программы может быть поставлена как максимизация спортивного результата к определенному дню.

$$(w_{T_1}, \dots, w_{T_2}) = \arg \max_{t=T_2} \left| \sum_{s=T_1}^{T_2} f(\theta^*) w_s \right|, \quad (3)$$

где $[T_1, T_2]$ – рассматриваемый временной интервал.

В тоже время, возможно ввести определенные ограничения в задачу, такие как: протяженность микроцикла тренировочных занятий, максимальная тренировочная нагрузка за одну тренировку, минимальное количество дней отдыха за определенный период [4]. Эти ограничения существенно сужают область поиска оптимального решения.

Имеет смысл также говорить о многокритериальной оптимизации тренировочных нагрузок. Если за первый критерий взять суммарный объем тренировочных нагрузок, а за второй – спортивный результат к определенному дню, то минимизируя первый критерий и максимизируя второй, приходим к задаче поиска границы Парето [5].

$$(w_{T_1}, \dots, w_{T_2}) = \arg \max_{t=T_2} \left(\left| \sum_{s=T_1}^{T_2} f(\theta^*) w_s \right| \wedge \min_{t \in [T_1; T_2]} \sum_{s=T_1}^{T_2} w_s \right) \quad (4)$$

Анализируя множество Парето-оптимальных решений, тренер может по фиксированному объему нагрузки за определенный тренировочный период найти наилучший тренировочный план, приводящий к максимальному результату к концу этого периода или по целевому спортивному результату найти минимальный

объем нагрузки, при которой этот результат может быть достигнут и сгенерировать соответствующий тренировочный план.

Список литературы

1. Тимме Е. А. Применение имитационного моделирования для планирования и оптимизации тренировочных нагрузок у спортсменов и лиц опасных профессий // Седьмая всероссийская научно-практическая конференция «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2015) 21–23 октября 2015 г. – Москва: Институт проблем управления РАН, 2015. – С. 361-369.
2. Блоковая периодизация спортивной тренировки. / Иссурин В. Б. – Москва: Советский спорт, 2010. – 281 с.
3. Banister E. Modeling elite athletic performance // Physiological testing of elite athletes. – 1991. – P. 403-424.
4. Schaefer D., Asteroth A., Ludwig M. Training plan evolution based on training models // International Symposium "Innovations in Intelligent Systems and Applications" (INISTA) –IEEE, 2015. – P. 1-8.
5. Тимме Е. А. Оптимизация тренировочных планов // Всероссийская научно-практическая конференция по вопросам спортивной науки в детско-юношеском спорте и спорте высших достижений (30 ноября-2 декабря 2016 г.). Сборник материалов – М: ЦСТиСК Москомспорта, 2016. – С. 222-225.

Approaches to optimization of training loads in sports

E.A. Timme

Moscow Center of Advanced Sports Technologies, Moscow, Russia

Метод вербально-числового анализа экологического риска

В.М. Умывакин, А.В. Швец

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Воронеж, Россия

В соответствии с указом Президента РФ от 19.04.2017 г. № 176 «О Стратегии экологической безопасности Российской Федерации на период до 2025 года» одной из целей государственной политики в сфере обеспечения экологической безопасности является «обеспечение качества окружающей среды, необходимого для благоприятной жизни человека и устойчивого развития экономики», что предполагает мониторинг соответствия экономической и иной деятельности установленным нормам и требованиям в области охраны окружающей среды и обеспечения экологической безопасности. В Федеральном законе РФ от 02.01.2002 № 7-ФЗ «Об охране окружающей среды» под экологическим риском понимается «вероятность наступления события, имеющего неблагоприятные последствия для природной среды и вызванного негативным воздействием хозяйственной и иной деятельности, чрезвычайными ситуациями природного и антропогенного характера».

Пусть качество окружающей среды (ОС) характеризуется набором $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ частных показателей качества (ПК), по каждому из которых заданы требования y_j^* , $1, 2, \dots, m$. Если не выполняются требования хотя бы по одному ПК, то состояние геообъекта будем называть критическим. Под экологическим риском далее будем понимать возможность перехода геообъекта в критическое состояние. Для поддержки принятия решений по управлению экологическим риском применяются информационные системы комплексного мониторинга геообъектов, основными функциями которого являются наблюдение, оценка и прогноз изменений

экологической ситуации на основе интегрального квалиметрического критерия.

Можно выделить следующие особенности задачи анализа экологического риска: а) одновременное качественное (вербальное) и количественное описание исходных данных и результата, поэтому необходимо использование вербально-числовых шкал; б) риск – это вероятностная категория, однако, имеется дефицит исходных статистических данных, необходимых для классического частотного определения вероятности неблагоприятного события, поэтому особое значение имеет наличие вероятностной интерпретации используемых оценок; в) частные оценки должны оценивать степень несоответствия ПК установленным нормам и требованиям.

Таким образом, для разработки метода вербально-числового анализа экологического риска необходима разработка вероятностно-квалиметрических моделей оценок геообъектов с учетом перечисленных особенностей.

В работах [1-3] предложен методический аппарат построения частных и интегральной оценок загрязнения ОС. Пусть $\{O^1, O^2, \dots, O^N\}$ – совокупность объектов комплексного мониторинга (ОКМ), $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ – множество частных ПК, характеризующих их состояния, $y_j(O^i) = y_j^i$ – значение j -го частного ПК для i -го ОКМ, y_j^* – предельно допустимое значение, отражающее нормативное требование к качеству ОС всех ОКМ по j -му ПК. При построении интегральной квалиметрической оценки ОКМ исходные величины y_j^i и y_j^* преобразуются к безразмерным величинам, принимающим значения из интервала $[0,1]$: $\mu_j^i = \mu_j^i(y_j^i)$ – частной абсолютной квалиметрической оценке по j -му ПК для i -го ОКМ и $\varepsilon_j = \varepsilon_j(y_j^*)$ – соответствующему нормативному уровню по j -му ПК. Требование к качеству ОС i -го ОКМ по j -му ПК выполнено, если $y_j^i \leq y_j^*$ и $\mu_j^i \geq \varepsilon_j$. Построение частной абсолютной квалиметрической оценки μ_j^i и соответствующих нормативных уровней ε_j может осуществляться различными способами, например:

$$\mu_j^i = \left[\frac{(b_j - y_j^i)}{(b_j - a_j)} \right]^k, \quad \varepsilon_j = \left[\frac{(b_j - y_j^*)}{(b_j - a_j)} \right]^k, \quad (1)$$

где a_j, b_j – соответственно нижняя и верхняя границы интервала изменения j -го ПК, $j=1,2,\dots,m$. При $k=1$ имеем линейное преобразование интервала $[a_j, b_j]$ в безразмерную шкалу $[0, 1]$, а при $k \neq 1$ – нелинейное. Отметим, что при $k \rightarrow \infty$ $\mu_j^i \rightarrow 0$, а при $k \rightarrow 0$ $\mu_j^i \rightarrow 1$.

Частная относительная квалиметрическая оценка d_j^i , как функция величин ε_j и μ_j^i , должна удовлетворять следующим условиям: 1) $0 \leq d_j^i \leq 1$ при $\mu_j^i \geq \varepsilon_j$ (оценка измеряется в квалиметрической шкале $[0,1]$); 2) $d_j^i = 0$ при $\varepsilon_j = 0, \mu_j^i > 0$ (оценка минимальна, если нет требований к качеству ОС); 3) $d_j^i = 0$ при $\mu_j^i = 1$ и $\mu_j^i > \varepsilon_j$ (оценка минимальна при «идеальном» качестве ОС независимо от требований); 4) $d_j^i = 1$ при $\mu_j^i = \varepsilon_j \neq 0$ (оценка максимальна при предельно низком допустимом качестве ОС).

В работе [3] показано, что при $\mu_j^i \geq \varepsilon_j$ частная относительная квалиметрическая оценка по j -му ПК для i -го ОКМ имеет вид:

$$d_j^i = \left[\varepsilon_j (1 - \mu_j^i) \right] / \left[\mu_j^i (1 - \varepsilon_j) \right]. \quad (2)$$

и характеризует величину степени несоответствия i -го ОКМ заданным требованиям к качеству ОС по j -му ПК.

Рассмотрим вероятностную интерпретацию частных относительных квалиметрических оценок d_j^i [2-3]. Пусть A^i и B_j^i – соответственно события, состоящие в том, что для i -го ОКМ не выполнены требования к качеству ОС в целом и по j -му ПК, а \bar{B}_j^i – событие, противоположное событию B_j^i . Тогда $d_j^i = P(A^i | \bar{B}_j^i)$ – субъективная вероятность невыполнения требований к качеству ОС в целом для i -го ОКМ при условии, что выполнены требования к качеству ОС по j -му ПК. Это позволяет построить интегральную квалиметрическую оценку ОКМ, тоже имеющую вероятную интерпретацию, необходимую для формализации понятия «экологический риск».

Пусть качество ОС характеризуется двумя частными ПК – y_1, y_2 , тогда d_1, d_2 – соответствующие частные относительные квалиметрические оценки ОКМ по этим ПК, $d = d(d_1, d_2)$ – интегральная квалиметрическая оценка ОКМ.

Согласно теореме, сформулированной И.Б. Руссманом [3], в классе многочленов двух переменных $d(d_1, d_2)$ существует лишь три (с точностью до постоянных параметров) функции, удовлетворяющие условиям коммутативности (равноценности) и ассоциативности (иерархической одноуровненности). Эти функции имеют вид: 1) $d(d_1, d_2) = c$; 2) $d(d_1, d_2) = d_1 + d_2 + c$; 3) $d(d_1, d_2) = a(d_1 + d_2) + bd_1d_2 + a(a-1)/b$, где a, b, c – произвольные константы, $b \neq 0$.

При выполнении условий ассоциативности и коммутативности частных относительных квалиметрических оценок ОКМ и дополнительных требований ограниченности ($0 \leq d(d_1, d_2) \leq 1$ при $0 \leq d_1, d_2 \leq 1$) и нейтральности ($d(d_1, 0) = d_1$, $d(0, d_2) = d_2$, $d(0, 0) = 0$, $d(1, 1) = 1$) интегральная квалиметрическая оценка i -го ОКМ имеет вид:

$$d^i = d_1^i + d_2^i - d_1^i d_2^i = 1 - (1 - d_1^i)(1 - d_2^i). \quad (3)$$

Данная формула интерпретируется как вероятность суммы совместных независимых событий, заключающихся в невыполнении требований к качеству ОС i -го ОКМ в целом при условии, что выполнены требования по первому и второму ПК.

В общем случае интегральная квалиметрическая оценка i -го ОКМ имеет следующую структуру:

$$d^i = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - d_j^i), \quad (4)$$

Величину d^i можно интерпретировать как субъективную вероятность $P(A^i | \bar{B}_1^i \bar{B}_2^i \dots \bar{B}_m^i)$ невыполнения требований к качеству ОС в целом для i -го ОКМ при условии, что выполнены требования по всем частным ПК. Чем меньше ее значение, тем выше качество ОС.

Формула (4) допускает обобщение для случая $m > 2$ неравноценных частных относительных квалиметрических оценок d_j^i :

$$d^i = 1 - \prod_{j=1}^m [1 - d_j^i]^{\lambda_j}, \quad (5)$$

где λ_j – весовые коэффициенты частных относительных квалиметрических оценок d_j^i , удовлетворяющие условию:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Интегральная квалиметрическая оценка d вида (5) является средней величиной по

Коши, т.е. удовлетворяет условию $\min(d_1^i, d_2^i, \dots, d_m^i) \leq d^i \leq \max(d_1^i, d_2^i, \dots, d_m^i)$, а, следовательно, принадлежит классу функций осреднения [2]. Отметим, что интегральная квалиметрическая оценка d вида (4) не является средней величиной по Коши. Интегральная квалиметрическая оценка d вида (5) является средневзвешенным «квазигеометрическим» в смысле ассоциативного среднего по А.Н. Колмогорову и допускает представление в виде [2]:

$$f(d_1, d_2, \dots, d_m) = \varphi^{-1} \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varphi(d_j) \right), \quad (7)$$

при $\varphi(d_j) = -\ln(1-d_j)$.

Для весовых коэффициентов λ_j , удовлетворяющих условию (6), формула (7) допускает следующее обобщение:

$$f(d_1, d_2, \dots, d_m) = \varphi^{-1} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi(d_j) \right). \quad (8)$$

Для чисел $d_j, j=1, 2, \dots, m$ и набора весовых коэффициентов λ_j , удовлетворяющих условию (6), имеет место следующее соотношение:

$$\left[1 - \prod_{j=1}^m (1-d_j) \right] \geq \max_{j=1, 2, \dots, m} \{d_j\} \geq \left[1 - \prod_{j=1}^m (1-d_j)^{\lambda_j} \right] \geq \sum_{j=1}^m \lambda_j d_j \geq \prod_{j=1}^m d_j^{\lambda_j} \geq \min_{j=1, 2, \dots, m} \{d_j\}. \quad (9)$$

Таким образом, средневзвешенная квазигеометрическая величина является оценкой «снизу» (более «мягкой» оценкой) для интегрального критерия (4), имеющего вероятностную интерпретацию, и оценкой «сверху» (более «жесткой» оценкой) для средневзвешенного арифметического и средневзвешенного геометрического и имеет системный смысл. Рассмотренная интегральная квалиметрическая оценка ОКМ может применяться для прогноза экологической ситуации в информационной системе комплексного мониторинга ОС.

С информационной точки зрения число $I_j = I_j(d_j) = -\ln(1-d_j) = \ln[1/(1-d_j)]$ является мерой неопределенности информации (частной информационной оценкой), т.к. оценка d_j имеет вероятностную интерпретацию. При этом интегральная информационная оценка определяется как: $I = I(d) = \ln[1/(1-d)] = \sum_{j=1}^m \lambda_j I_j$. На

практике «улучшение» качества ОС совпадает с увеличением значений частных относительной квалиметрической и информационной оценок d_j и I_j . Рассмотрим

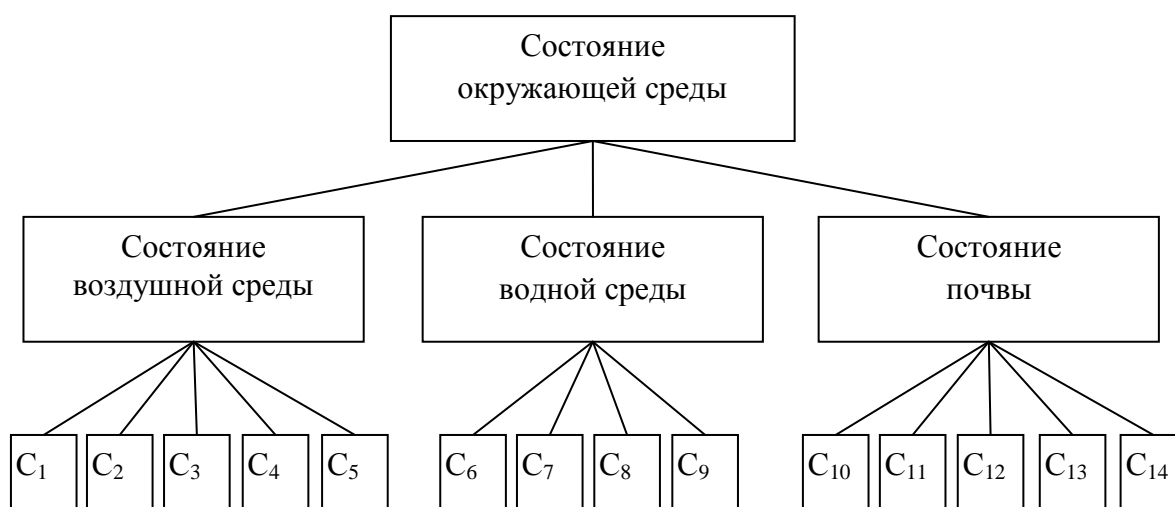
величину d_e такую, что: $\bar{I}_j = \ln[1/(1-d_e)] - \ln[1/(1-d_j)] = \ln[(1-d_j)/(1-d_e)] = \ln[1/(1-d_e)] - I_j$. Если $d_e = 1-1/e \approx 0.63$ (оценка качества, соответствующая самому «худшему» ОКМ), то $\bar{I}_j = 1 - \ln[1/(1-d_j)]$ и, следовательно, $\bar{I} = \bar{I} = 1 - I$.

Поэтому для содержательной интерпретации интегральной квалиметрической оценки ОКМ целесообразно использовать зеркальную вербально-числовую шкалу Харрингтона (табл. 1), для которой $d_e = 1-1/e \approx 0.63$ является точкой неустойчивости, предполагающей переход ОКМ в «некачественное» (критическое) состояние [2]. Это дает возможность автоматизировать процедуры содержательной интерпретации и визуального представления полученных результатов.

Таблица 1 – Уровень некачественности окружающей среды по шкале Харрингтона

| Ранг | Содержательное описание градации | Численное значение |
|------|----------------------------------|--------------------|
| 1 | Очень высокий | (0.8, 1) |
| 2 | Высокий | (0.63, 0.8] |
| 3 | Средний | (0.37, 0.63] |
| 4 | Низкий | (0.2, 0.37] |
| 5 | Очень низкий | (0, 0.2] |

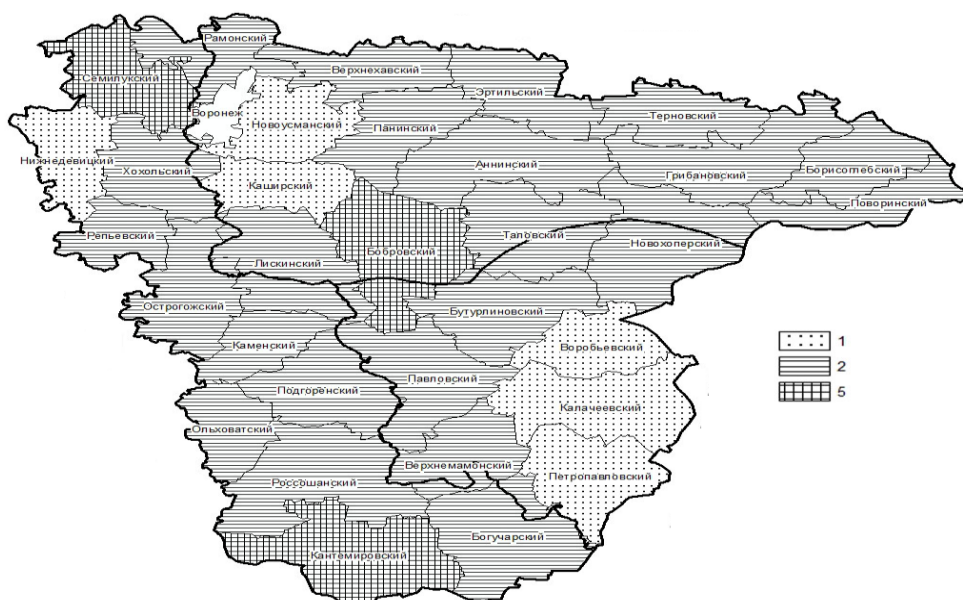
Рассмотрим применение интегральной квалиметрической оценки ОКМ для анализа экологической ситуации в 32 муниципальных районах Воронежской области в категориях риска. Построение интегральной оценки риска химического загрязнения ОС осуществляется в соответствии с иерархической структурой, представленной на рисунке 1.



C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – соответственно содержание диоксида азота, взвешенных веществ (пыли), диоксида серы, оксида углерода, свинца в воздухе; C_6, C_7, C_8, C_9 – соответственно содержание марганца, железа, нитратов, нитритов в воде; $C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}$ – соответственно содержание меди, цинка, свинца, кадмия, никеля в почве

Рисунок 1 – Фрагмент иерархической структуры экологической ситуации в регионе

Зонирование Воронежской области по интегральной оценке риска химического загрязнения ОС в вербально-числовой шкале Харрингтона приведено на рисунке 2.



1 – очень низкий; 2 – низкий; 3 – средний; 4 – высокий; 5 – очень высокий
 Рисунок 2 – Интегральная оценочная карта риска химического загрязнения окружающей среды в муниципальных районах Воронежской области в шкале Харрингтона

Интегральная квалиметрическая оценка в системе экологического мониторинга обеспечивает информационную поддержку принятия управленческих решений по снижению риска химического загрязнения ОС.

Для муниципальных районов с очень высоким риском химического загрязнения ОС необходима неотложная разработка рекомендаций по снижению риска на федеральном уровне. Для районов с низким и очень низким риском химического загрязнения ОС добиваются компромисса между стоимостью мероприятий по снижению риска и пользой от них. Такие меры носят локальный характер и применяются к конкретным источникам опасности.

Список литературы

1. Михайлов В.В., Умывакин В.М., Швец А.В. Анализ геоэкологического риска на основе квалиметрической интегральной оценки загрязнения окружающей среды // Тр. VIII Моск. междунар. конф. по исслед. операций (ORM2016), Москва, 17-22 окт. 2016 г. / Вычисл. центр им. А.А. Дородницына Федер. исслед. центра «Информатика и управление» Российской академии наук. М., 2016. Т. II. С.158-161.
2. Зибров Г.В. Квалиметрические модели вербально-числового анализа экологической опасности территорий природно-хозяйственных геосистем / Г.В. Зибров, В.М. Умывакин, А.В. Швец // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2013. № 1. С. 112–118.
3. Каплинский А.И. Моделирование и алгоритмизация слабоформализованных задач выбора наилучших вариантов систем / А.И. Каплинский, И.Б. Руссман, В.М. Умывакин. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1991. 168 с.

Method of verbal-numerical analysis of environmental risk

V.V. Umyvakin, A. V. Shvets

Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin" (Voronezh), Voronezh, Russia

Исследование физиологических временных рядов методами стохастической динамики

М.И. Шпитонков

ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ “Информатика и управление” РАН Москва, Россия

В последние годы все больше внимания уделяется роли сердечно-сосудистых нарушений в патогенезе дегенеративных заболеваний ЦНС. Сердечно-сосудистые заболевания занимают не последнее место и в клинической картине таких больных, однако при этой патологии предполагается обратная причинно-следственная связь: дегенерация центральных и периферических нервных структур приводит к нарушению вегетативной регуляции сердечной деятельности, развитию, так называемой, «нейрокардиоваскулярной нестабильности» [3,4] и нарушению кардиоприспособительных реакций при нагрузочных тестах.

Исследования показали, что у таких больных наблюдается дегенерация центральных вегетативных структур.

В последнее десятилетие исследователи обратились к изучению вегетативной регуляции сердца, используя для этого неинвазивный и широко доступный метод спектрального анализа колебаний частоты сердечных сокращений (ЧСС) [1, 2]. В основе метода лежит гипотеза, что сердечная деятельность находится под постоянным вегетативным и гуморальным влиянием. Изменение частоты сердечных сокращений (длительности R-R интервалов) обусловлены симпатическими и парасимпатическими вегетативными влияниями на синусовый узел.

При исследовании динамики длительности RR-интервалов сердечных сокращений традиционно используются такие стандартные статистические методы, как анализ распределения интервалов, Фурье-анализ и анализ автокорреляционной функции. При анализе длительности RR-интервалов как временного ряда хорошо выявляются циклические компоненты, связанные с дыхательной деятельностью, и т.п.

По сравнению с автокорреляционной функцией, характерных для нормы и больных с заболеваниями сердечно-сосудистой системы без нарушения регуляторных функций, имеются существенные отличия. Автокорреляционная функция быстро (примерно за 30 секунд) падает до нуля, тогда как обычно это снижение идет значительно медленнее. Кроме того, на ней не видно дыхательного ритма.

Такие особенности динамики длительности RR-интервалов может быть связана со спецификой исследуемых больных, у которых имеются регуляторные нарушения на уровне слишком слабой обратной связи, из-за чего частота пульса меньше связана с изменениями состояния, чем в норме.

Для выявления различий между лицами с болезнью Паркинсона, являющимися более сохранными, и лицами с болезнью Альцгеймера мы вычислили для их ЭКГ показатели Херста .

Впервые данный показатель был предложен гидрологом Херстом , измерявшим колебания уровня воды в резервуаре для нильской плотины относительно среднего с течением времени [5]. Значение показателя оказалось близким к 0.74. Этот способ анализа временных рядов стал называться методом нормированного размаха (R/S -анализ). Херст показал, что для большинства естественных явлений, включая речные стоки, температуры, осадки и т.п., характерное значение показателя Херста больше 0.5. В книге Э. Петерса [6] R/S -анализ был применен для исследования экономических временных рядов (курсы валют, акций компаний и т.п.). Он также везде оказался больше 0.5. В работе [7] исследовалась динамика длительности RR-интервалов ЭКГ

больных болезнью Паркинсона в покое и в ортопробе (то есть после того, как пациент из положения лежа вставал). Здесь показатель Херста оказался меньше 0.5 (0.378 в покое и 0.444 для ортопробы). Надо отметить, что больше мы нигде не встречались в литературе с подобными фактами (т.е. чтобы показатель Херста был меньше 0.5).

Одной из целей данной работы являлось построение модельного процесса с показателем Херста $0 < H < 0.5$. Другой целью работы являлось вычисление показателей Херста для ЭКГ больных с болезнью Паркинсона и больных с болезнью Альцгеймера и на основе этих показателей исследование возможности диагностики данных состояний.

Рассмотрим вычисление показателем Херста (H). Пусть имеется ряд экспериментальных данных $\{x_i\}$. Для вычисления H применяют следующую процедуру. Вначале вычисляют $X_{t,N}$ - накопленное отклонение за N периодов:

$$X_{t,N} = \sum_{i=1}^t (x_i - M_N), \quad (1)$$

где x_i - элемент исследуемого ряда, M_N - среднее за N периодов. Затем находят размах отклонения R :

$$R = \max(X_{t,N}) - \min(X_{t,N}) \quad (2)$$

После делят R на стандартное отклонение исследуемых данных S и получают нормированный размах R/S . Далее вычисляют показатель Херста H из следующего выражения:

$$R/S = (aN)^H, \quad (3)$$

где N - число наблюдений, a - некоторая константа, H - показатель Херста.

Из (3), получают:

$$H = \frac{\log(R/S)}{\log aN} \quad (4)$$

Численное значение H заключено между 0 и 1. Если ряд представляет собой случайное блуждание, то в соответствии со статистической механикой $H = 0.5$. Для чисто детерминированного движения $H = 1$. При $0.5 < H < 1.0$ мы имеем персистентные или трендоустойчивые ряды. Если $0 \leq H < 0.5$, то это соответствует антиперсистентным, или эргодическим рядам. Такой тип системы часто называют «возврат к среднему». Если система демонстрирует рост в предыдущий период, то, скорее всего в следующем периоде начнется спад. Такой ряд более изменчив, чем ряд случайный, т.к. состоит из частых реверсов спад-подъем.

Будем моделировать следующую модификацию винеровского процесса с дополнительной периодикой:

$$W_1(i) = W(i) \sin\left(\frac{2\pi i}{k}\right), \quad \text{где} \quad W(i) = W(i-1) + q\sqrt{|t(i) - t(i-1)|} - \text{винеровский процесс,}$$

$$W(1) = 0, \quad q \in N(0,1).$$

Здесь каждый винеровский процесс представляет собой временной ряд в 1000 значений, для подсчета одного показателя Херста H моделируется 100 процессов и вычисляется среднее значение H . Значение t менялось от 1 до 1000 с постоянным шагом 1. Мы ввели дополнительную периодику с помощью функции $\sin\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$ и,

соответственно, дополнительный параметр k . Именно он представляет наибольший интерес. Будем менять значение параметра k от 10 до 500 с шагом 1.

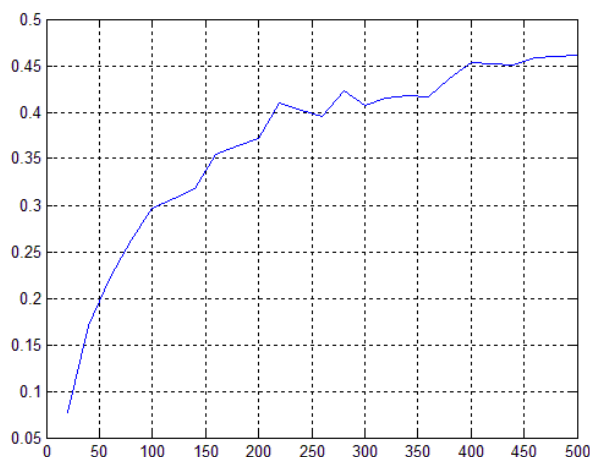


Рис. 1. График зависимости показателя Херста от периода дополнительного множителя.

По оси X отложены значения параметра k , по оси Y - показатель Херста. Из графика видно, что вариация значения периода позволяет получать любое значение показателя Херста от 0 до 0.5, причем при малых k мы имеем малые значения H , соответственно при больших k показатель Херста больше. Это объясняется тем, что при малых k значение аргумента у функции \sin большое и наблюдаются осцилляции с большой частотой, что и приводит к частым реверсам спад-подъем временного ряда, и соответственно, к малому показателю Херста.

Для выявления различий между лицами с болезнью Паркинсона, являющимися более сохранными, и лицами с болезнью Альцгеймера мы вычислили для их ЭКГ показатели Херста.

В исследовании принимали участие 52 больных (26 мужчин и 26 женщин) старше 65 лет. Из них 27 были с болезнью Паркинсона, остальные - с болезнью Альцгеймера. Исследовались ряды данных длин RR-интервалов от 800 до 2000 точек.

Были получены следующие результаты. Среднее значение показателя Херста для больных болезнью Паркинсона $\bar{H} = 0.41$, для болезни Альцгеймера $\bar{H} = 0.33$. В данном случае это соответствует представлениям о норме в виде некоторой характерной средней величины, на которую накладываются эндогенные и экзогенные отклоняющие факторы, и уменьшающихся отклонениях величин RR от среднего в динамике. Таким образом можно сказать, что эти показатели достаточно сильно отличаются у этих групп больных и по ним вполне можно проводить диагностику лиц с данными заболеваниями.

Важной количественной характеристикой аттрактора, несущей информацию о степени сложности поведения динамической системы, является *корреляционная размерность* D_c [8]. Алгоритм расчета D_c основан на вычислении корреляционного интеграла, в качестве которого выступает функция $C(\delta)$, для каждого δ равная нормированному числу пар точек рассматриваемого объекта, расстояние между которыми не превосходит δ :

$$C(\delta) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \theta(\delta - |y_i - y_j|), \quad (5)$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда.

Величина суммы зависит от δ , причем, если эта зависимость имеет степенной вид $C(\delta) \propto \delta^{D_c}$, то исследуемое множество фрактально, а величина D_c - его корреляционная размерность. Для практического вычисления корреляционной размерности на графике $\ln(C(f)) = f(\ln(\delta))$ выделяют область линейной зависимости (области скейлинга) и функция аппроксимируется прямой линией методом наименьших квадратов. Тогда тангенс угла наклона графика является размерностью D_c . Для сравнения покажем на одном графике зависимость $D(m)$ для разных типов данных:



Рис.2. Зависимость корреляционной размерности от размерности вложенного аттрактора для различных состояний пациентов.

В нашем случае не наблюдается насыщения зависимости D_c от m для здоровых людей и видно насыщение для людей с заболеваниями. Здесь m - размерность вложения (наименьшая целая размерность пространства, содержащего весь аттрактор). Она соответствует количеству независимых переменных, однозначно определяющее установившееся движение динамической системы. Корреляционная размерность больных болезнью Паркинсона $D_c \approx 3.3$, больных болезнью Альцгеймера зависимости $D_c \approx 4$. Таким образом, имеется возможность диагностики типа заболевания на основе данных о корреляционной размерности временного ряда интервалов электрокардиограммы.

Список литературы

1. Баевский Р. М., Кириллов О. И., Клецкин С. З. Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе. - М.: Наука, 1984. - 221с.
2. Вейн А.М. Вегетативные расстройства: Клиника, лечение, диагностика./ Под ред. А.М. Вейна. – М.: МИА – 2002. – 752 с.
3. Ballard C., Shaw F., McKeith I. et al. High prevalence of neurovascular instability in neurodegenerative dementias // Neurology. – 1998. - Vol. 51 – P. 1760-1762.
4. Kenny R., Kalaria R., Ballard C. Neurocardiovascular instability in cognitive impairment and dementia // Ann. N.Y. Acad. Sci. – 2002 – Vol. 977 (Nov.) – P. 183-195.
5. Hurst H. Long-term storage capacity of reservoirs. //Transaction of the American Society of Civil Engineers. 116, p. 770-808.
6. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. М., Мир, 2000, 333 с.
7. Герасимов А.Н., Тишкова И.Г., Шпионков М.И. Исследование динамики частоты сердечных сокращений у больных с заболеваниями ЦНС методами стохастической

динамики. // Исследование операций (модели, системы, решения). М.: ВЦ РАН, 2007, с.29-35.

8. Головкин В.А. Нейросетевые методы обработки хаотических процессов // В книге «Лекции по нейроинформатике». – М.: МИФИ, 2005. – С. 43-88.

Research of physiological time series by stochastic dynamics methods

M.I. Shpironkov

Dorodnicyn Computing Centre, FCR CSC RAS, Moscow, Russia

СЕКЦИЯ № 12

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Горелов М.А. Игра с ограничениями на количество и содержание доступной информации | 398 |
| Дикусар В.В., Вуйтович М., Грибов А.Г. Игры с конечным объемом передаваемой информации | 403 |
| Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Свертка Гермейера: доказательство существования (в смешанных стратегиях) гарантированного по выигрышам и рискам равновесия | 406 |
| Кудрявцев К.Н., Стабулит И.С., Ухоботов В.И. Антагонистические нечеткие игры: Т-седловая точка | 408 |
| Лебедев В.Н. Решение и приложения игр на победителя | 412 |
| Луценко М.М. Бескоалиционная игра «Агенты против центра» | 414 |
| Mazalov V.V. Price-quality competition in public transportation network | 419 |
| Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р., Полюдова Д.С., Старков Д.М. Лабораторные игры с противоположными интересами | 420 |
| Мохонок Е.З. Неантагонистическая дифференциальная игра с ограничением на время наблюдения | 424 |
| Новикова Н.М., Поспелова И.И. Смешанные стратегии в векторной игре и свертка Гермейера | 428 |
| Гудков С.М., Новикова Н.М. Приближенное доминирование и приближенное равновесие | 433 |
| Khmelnitskaya A.B., van der Laan G., Talman D. Centrality rewarding Shapley and Myerson values for undirected graph games | 435 |
| Olgun M.O., Palanci O., Qasim E., Weber G.W., Alparslan Gök S.Z. Grey transportation games | 436 |
| Palanci O., Olgun M.O., Weber G.W., Alparslan Gök S.Z. Grey Baker-Thompson rule | 439 |
| Ergun S., Usta P., Zeynep S., Alparslan Gök S.Z., Weber G.W. A cooperative game theoretical model on emergency logistics planning after natural disasters | 440 |

Игра с ограничениями на количество и содержание доступной информации

М. А. Горелов
ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Введение

Систематическое исследование иерархических игр было начато Ю.Б. Гермейером [1]. В статье [1] была сформулирована и изучена базовая модель теории иерархических игр, получившая название игры Γ_2 . В дальнейшем эта модель видоизменялась и обобщалась во многих направлениях. Мы отметим лишь два из них.

В игре Γ_2 предполагается, что игрок верхнего уровня (Центр) в момент выбора своего управления имеет полную информацию об управлении, выбранном его партнером. А.Ф. Кононенко и В.С. Алиев начали исследование игр, в которых игрок верхнего уровня может использовать информацию об управлении второго игрока, но получает он ее в некотором агрегированном виде (см. [2] и другие работы тех же авторов). Таким образом, некоторые выборы подчиненного для Центра неразличимы.

В работе [3] было начато исследование моделей, в которых для игрока верхнего уровня в принципе доступна любая информация о действиях его партнера, но объем информации, которую Центр может получить и своевременно обработать, ограничен заранее заданным числом.

Ниже рассматривается модель, в которой оба эти ограничения на информированность Центра учитываются одновременно.

1. Игра и информация

Начнем рассмотрение с игры в нормальной форме $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$. Здесь U – множество управлений первого игрока, V – множество управлений второго, $g: U \times V \rightarrow \square$ и $h: U \times V \rightarrow \square$ – их функции выигрыша.

Сделаем стандартные предположения. Множества U и V будем считать наделенными топологиями и компактными, а функции g и h – непрерывными в этих топологиях.

Игра Γ моделирует «технология» управляемой системы. Опишем информированность игроков. Будем считать, что второму игроку ничего не известно о выборе первого. А первый игрок может использовать некую информацию о выборе партнера. Но, во-первых, эта объем этой информации не может превосходить заданной величины n бит. А, во-вторых, есть определенные ограничения на содержание этой информации, так что некоторые выборы второго игрока для его партнера неразличимы. Естественно предположить, что это отношение «неразличимости» является отношением эквивалентности. В пределах указанных ограничений содержание используемой информации вправе выбирать первый игрок.

Сформулированные содержательные соображения формализуются следующим образом.

В дальнейшем через $\Phi(X, Y)$ будем обозначать класс всех функций, отображающих множество X в множество Y .

Обозначим буквой Ω множество классов эквивалентности управлений $v \in V$ по отношению «неразличимости». Пусть $T: V \rightarrow \Omega$ – соответствующее каноническое отображение. Таким образом, если второй игрок выберет управление $v \in V$, то первому игроку будет в принципе доступна информация о значении $T(v) \in \Omega$. Но есть еще ограничение на объем используемой информации. Поэтому будем считать, что информация об элементе $T(v)$ кодируется некоторым словом $r = (r_1, \dots, r_n)$ из множества $N = \{0,1\}^n$. Способ кодировки $P: \Omega \rightarrow N$ выбирает первый игрок. Кроме того, он, разумеется, вправе выбирать способ использования полученной информации $u_*: N \rightarrow U$.

Таким образом, множество стратегий первого игрока представляет собой декартово произведение $\Phi(N, U) \times \Phi(\Omega, N)$. Допустим, первый игрок фиксировал стратегию (u_*, P) , а второй выбрал управление v . Тогда первый игрок получит сообщение $P(T(v)) \in N$ и выберет управление $u = u_*(P(T(v)))$. Соответственно, его выигрыш будет равен $g(u_*(P(T(v))), v)$.

Итак, определена новая игра двух лиц в нормальной форме $\Gamma_* = \langle U_*, V, g_*, h_* \rangle$, где $U_* = \Phi(N, U) \times \Phi(\Omega, N)$ а функции $g_*: U_* \times V \rightarrow \square$ и $h_*: U_* \times V \rightarrow \square$ определены условиями $g_*((u_*, P), v) = g(u_*(P(T(v))), v)$ и $h_*((u_*, P), v) = h(u_*(P(T(v))), v)$.

Все параметры рассматриваемой модели, а именно, четверка $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, множество Ω , отображение T и число n считаются точно известными обоим игрокам.

2. Отношение к неопределенности

Начнем определения максимального гарантированного результата первого игрока в игре $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, предложенного Ю.Б. Гермеером [1] и ставшего уже классическим.

Предположим, что Центр обладает правом первого хода, то есть он первым выбирает свою стратегию $u \in U$ и этот выбор становится известным второму игроку до того, как он зафиксировал свою стратегию $v \in V$.

В таком случае второй игрок принимает свое решение «в условиях полной определенности», соответственно его поведение становится предсказуемым. Поскольку первый игрок знает интересы партнера, он вправе ожидать, что при фиксированной стратегии u тот выберет управление v из множества

$$BR_{\kappa}(u) = \left\{ v \in V : h(u, v) = \max_{w \in V} h(u, w) \right\}.$$

Проблема возникает тогда, когда стратегия u такова, что максимум в предыдущей формуле не достигается. Будем считать, что в таком случае первый игрок предполагает, что возможные выборы второго игрока содержатся в множестве

$$BR_{\kappa}(u) = \left\{ v \in V : h(u, v) \geq \sup_{w \in V} h(u, w) - \kappa \right\}$$

при некотором значении $\kappa > 0$.

Предполагая, что по отношению к оставшейся неопределенности первый игрок осторожен, приходим к следующему определению.

Определение 1. Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре Γ равен

$$R_{\kappa}(\Gamma) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in BR_{\kappa}(u)} g(u, v).$$

Можно исходить из иной логики рассуждений второго игрока. Естественно предположить, что при известной стратегии u все выборы второго игрока разделятся на «рациональные» и «нерациональные». Можно думать, что это разделение происходит по пороговому принципу: существует такое число λ , что управления, для которых выполняется неравенство $h(u, w) \geq \lambda$ рациональны, а все прочие – нет. Вновь считая, что первый игрок осторожен по отношению к рациональным выборам партнера, приходим к следующему определению.

Определение 2. Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Γ , если существуют такие стратегия $u \in U$ и число λ , что выполняются условия

1°. существует стратегия $w \in V$, для которой $h(u, w) \geq \lambda$;

2°. для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u, v) \geq \gamma$, либо $h(u, v) < \lambda$.

Точная верхняя грань $R(\Gamma)$ гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом первого игрока в игре Γ .

Рассуждения, приведшие к этим двум определениям, вполне разумны. Поэтому не удивительно, что «для большинства» игр эти определения эквивалентны в том смысле, что $R(\Gamma) = R_{\kappa}(\Gamma)$. Чтобы сделать это утверждение точным в [4] было предложено следующее определение.

Определение 3. Игру Γ назовем хорошей, если для любой стратегии $\omega \in U$ найдется такая стратегия $u \in U$, что

$$\inf_{v \in BR_{\kappa}(u)} g(u, v) \geq \inf_{v \in BR_{\kappa}(\omega)} g(\omega, v)$$

и максимум $\max_{v \in V} h(u, v)$ достигается.

В [4] было доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Для любой хорошей игры Γ и любого $\kappa > 0$ справедливо равенство $R(\Gamma) = R_{\kappa}(\Gamma)$.

Для нас основной интерес представляет игра $\Gamma^* = \langle U^*, V, g^*, h^* \rangle$. Для нее справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. При сделанных топологических предположениях относительно параметров игры $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, соответствующая игра $\Gamma_* = \langle U_*, V, g_*, h_* \rangle$ является хорошей.

Замечание. Доказательство леммы 2 не сложно, но оно, в отличие от доказательства леммы 1, нестандартно. Дело в том, что множество U_* является сложным функциональным пространством. Поэтому обычные топологические соображения не работают. Вместо них приходится использовать структурные особенности множества U_* , а они для каждой модели свои. Впрочем, если использовать определение 2 как основное, то всех этих проблем можно избежать.

Из этих двух лемм следует, что в рассматриваемом нами случае определения 1 и 2 эквивалентны. Поэтому можно пользоваться тем из них, которое удобнее. Во многих случаях таковым является определение 2.

3. Вычисление максимального гарантированного результата

Согласно определению 2 число γ является гарантированным результатом в игре Γ_* тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\begin{aligned} \exists (u_*, P) \in U_* \exists \lambda \in \square : & [\exists w_* \in V_* : h_*((u_*, P), w_*) \geq \lambda] \& \\ & \& [\forall v_* \in V_* g_*((u_*, P), v_*) \geq \gamma \vee h_*((u_*, P), v_*) < \lambda]. \end{aligned}$$

Используя структуру игры Γ_* эту формулу можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \exists (u_*, P) \in \Phi(N, U) \times \Phi(\Omega, N) \exists \lambda \in \square : & [\exists w \in V : h(u_*(P(T(w))), w) \geq \lambda] \& \\ & \& [\forall v \in V g(u_*(P(T(v))), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(T(v))), v) < \lambda]. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \exists u_* \in \Phi(N, U) \exists P \in \Phi(\Omega, N) \exists \lambda \in \square : & [\exists w \in V : h(u_*(P(T(w))), w) \geq \lambda] \& \\ & \& [\forall v \in V g(u_*(P(T(v))), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(T(v))), v) < \lambda]. \end{aligned}$$

Цель данной работы состоит в том, чтобы упростить эту формулу так, чтобы она не содержала функциональных пространств (буквы Φ).

Поменяем порядок кванторов существования

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \square \exists u_* \in \Phi(N, U) \exists P \in \Phi(\Omega, N) : & [\exists w \in V : h(u_*(P(T(w))), w) \geq \lambda] \& \\ & \& [\forall v \in V g(u_*(P(T(v))), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(T(v))), v) < \lambda]. \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно общей тактике исследования подобных задач (см., например, [4]), на следующем этапе нужно «расцепить» две части условия (1), соответствующие пунктам 1° и 2° определения 2 (в формуле (1) они разделены знаком конъюнкции). В данной задаче это требует некоторых усилий.

Обозначим $W(\omega) = \{v \in V : T(v) = \omega\}$.

Тогда условие (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \square \exists u_* \in \Phi(N, U) \exists P \in \Phi(\Omega, N) : & [\exists \varpi \in \Omega \exists w \in W(\varpi) : h(u_*(P(\varpi)), w) \geq \lambda] \& \\ & \& [\forall \omega \in \Omega \forall v \in W(\omega) g(u_*(P(\omega)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(\omega)), v) < \lambda]. \end{aligned} \quad (2)$$

Для агрегата $\varpi \in \Omega$, существование которого предусмотрено первой частью условия (2), должна выполняться вторая часть этого условия. Следовательно, условие (2) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \square \exists u_* \in \Phi(N, U) \exists P \in \Phi(\Omega, N) : & \{ \exists \varpi \in \Omega : [\exists w \in W(\varpi) : h(u_*(P(\varpi)), w) \geq \lambda] \& \\ & \& [\forall v \in W(\varpi) g(u_*(P(\varpi)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(\varpi)), v) < \lambda] \} \& \\ & \& [\forall \omega \in \Omega \forall v \in W(\omega) g(u_*(P(\omega)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(\omega)), v) < \lambda]. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь заметим, что условие (3) эквивалентно условию

$$\begin{aligned}
& \exists \lambda \in \square \exists u_* \in \Phi(N, U) \exists P \in \Phi(\Omega, N) \exists Q \in \Phi(\Omega, N) : \\
& \{ \exists \varpi \in \Omega : [\exists w \in W(\varpi) : h(u_*(Q(\varpi)), w) \geq \lambda] \& \\
& \& [\forall v \in W(\varpi) g(u_*(Q(\varpi)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(Q(\varpi)), v) < \lambda] \} \& \\
& \& [\forall \omega \in \Omega \forall v \in W(\omega) g(u_*(P(\omega)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(\omega)), v) < \lambda].
\end{aligned} \tag{4}$$

Необходимость условия (4) для выполнения условия (3) очевидна. Докажем достаточность.

Пусть условие (4) выполнено. Фиксируем $\lambda \in \square$, $u_* \in \Phi(N, U)$, $P \in \Phi(\Omega, N)$, $Q \in \Phi(\Omega, N)$, $\varpi \in \Omega$ и $w \in W(\varpi)$ так, что

$$\begin{aligned}
& h(u_*(Q(\varpi)), w) \geq \lambda \& [\forall v \in W(\varpi) g(u_*(Q(\varpi)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(Q(\varpi)), v) < \lambda] \& \\
& \& [\forall \omega \in \Omega \forall v \in W(\omega) g(u_*(P(\omega)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(\omega)), v) < \lambda].
\end{aligned} \tag{5}$$

С помощью условия (5) непосредственно проверяется, что для функции

$$P^0(\omega) = \begin{cases} Q(\omega), & \text{если } \omega = \varpi, \\ P(\omega), & \text{если } \omega \neq \varpi, \end{cases}$$

выполняется условие

$$\begin{aligned}
& h(u_*(P^0(\varpi)), w) \geq \lambda \& [\forall v \in W(\varpi) g(u_*(P^0(\varpi)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P^0(\varpi)), v) < \lambda] \& \\
& \& [\forall \omega \in \Omega \forall v \in W(\omega) g(u_*(P^0(\omega)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P^0(\omega)), v) < \lambda].
\end{aligned}$$

Тем более справедливо условие (3).

Формулу (4) можно переписать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned}
& \exists \lambda \in \square \exists u_* \in \Phi(N, U) : \{ \exists Q \in \Phi(\Omega, N) \exists \varpi \in \Omega : [\exists w \in W(\varpi) : h(u_*(Q(\varpi)), w) \geq \lambda] \& \\
& \& [\forall v \in W(\varpi) g(u_*(Q(\varpi)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(Q(\varpi)), v) < \lambda] \} \& \\
& \& \exists P \in \Phi(\Omega, N) [\forall \omega \in \Omega \forall v \in W(\omega) g(u_*(P(\omega)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(\omega)), v) < \lambda].
\end{aligned} \tag{6}$$

Условие

$$\begin{aligned}
& \exists Q \in \Phi(\Omega, N) \exists \varpi \in \Omega : [\exists w \in W(\varpi) : h(u_*(Q(\varpi)), w) \geq \lambda] \& \\
& \& [\forall v \in W(\varpi) g(u_*(Q(\varpi)), v) \geq \gamma \vee h(u_*(Q(\varpi)), v) < \lambda],
\end{aligned}$$

очевидно, равносильно условию

$$\begin{aligned}
& \exists b \in N \exists \varpi \in \Omega : [\exists w \in W(\varpi) : h(u_*(b), w) \geq \lambda] \& \\
& \& [\forall v \in W(\varpi) g(u_*(b), v) \geq \gamma \vee h(u_*(b), v) < \lambda].
\end{aligned}$$

Преобразуем формулу

$$\exists P \in \Phi(\Omega, N) : \forall \omega \in \Omega \forall v \in W(\omega) [g(u_*(P(T(v))), v) \geq \gamma \vee h(u_*(P(T(v))), v) < \lambda].$$

Можно поменять местами кванторы существования и общности

$$\forall \omega \in \Omega \exists r \in N : \forall v \in W(\omega) [g(u_*(r), v) \geq \gamma \vee h(u_*(r), v) < \lambda].$$

Таким образом, условие (6) равносильно следующему:

$$\begin{aligned}
& \exists \lambda \in \square \exists u_* \in \Phi(N, U) : \exists b \in N \exists \varpi \in \Omega : [\exists w \in W(\varpi) : h(u_*(b), w) \geq \lambda] \& \\
& \& [\forall v \in W(\varpi) g(u_*(b), v) \geq \gamma \vee h(u_*(b), v) < \lambda] \& \\
& \& \forall \omega \in \Omega \exists r \in N : \forall v \in W(\omega) [g(u_*(r), v) \geq \gamma \vee h(u_*(r), v) < \lambda].
\end{aligned}$$

В этой формуле осталось одно функциональное пространство $\Phi(N, U)$. Чтобы избавиться от него, воспользуемся тем, что множество N содержит $m = 2^n$ элементов. Поэтому последнее условие равносильно условию

$$\begin{aligned}
& \exists \lambda \in \square \exists (u_0, \dots, u_{m-1}) \in U^m : \exists b \in N \exists \varpi \in \Omega : [\exists w \in W(\varpi) : h(u_b, w) \geq \lambda] \& \\
& \& [\forall v \in W(\varpi) g(u_b, v) \geq \gamma \vee h(u_b, v) < \lambda] \& \\
& \& \forall \omega \in \Omega \exists r \in N : \forall v \in W(\omega) [g(u_r, v) \geq \gamma \vee h(u_r, v) < \lambda],
\end{aligned} \tag{7}$$

где, как обычно, U^m означает декартову степень множества U .

Таким образом, установлен следующий факт.

Теорема 1. Для того, чтобы число γ было гарантированным результатом первого игрока в игре Γ_* , необходимо и достаточно выполнение условия (7).

Формула (7) позволяет найти структуру оптимальной стратегии Центра.

При необходимости кванторы в формуле (7) могут быть заменены операторами максимума и минимума. Правда, в данной задаче из-за наличия в формуле (7) точечно-множественного отображения $W(\omega)$ просто получаются необходимые и достаточные условия, совпадающие лишь для игр общего положения. Исследование нерегулярных случаев требует достаточно тонкого геометрического анализа.

Заключение

Полученные результаты можно обобщать, по крайней мере, в двух направлениях.

Можно считать, что решения в рассматриваемой модели принимаются за три «полухода»: сначала второй игрок выбирает агрегат $\omega \in \Omega$; затем на основе сообщения $P(T(\omega))$ первый игрок выбирает управление $u \in U$; и, наконец, второй игрок выбирает управление v из множества $W(\omega)$. Разумеется, значительный интерес представляет исследование более общих динамических систем управления.

Второе направление связано с популярной на западе теорией контрактов. Можно рассмотреть случай, когда результаты управления системой зависят не только от управлений игроков, но и от некоего внешнего неопределенного фактора. При этом Центр имеет возможность наблюдать некий агрегат, зависящий от выбора подчиненного и этого неопределенного фактора.

В обоих направлениях получены значительные результаты, но имеются и нерешенные проблемы. Предложенный выше подход открывает новые перспективы для их исследования.

Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // ДАН. 1971. Т. 198, № 5. С. 1001–1004.
2. Алиев В.С., Кононенко А.Ф. Точное агрегирование в теоретико-игровых моделях. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
3. Горелов М.А. Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации // Автоматика и телемеханика, 2011. № 3. С. 124–144.
4. Горелов М.А. Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. Вып. 67. М.: ИПУ РАН, 2017. С.4–31.

A Game with Restrictions on volume and contents of information accessible

M.A. Gorelov

CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Игры с конечным объемом передаваемой информации

В.В. Дикусар¹, М. Вуйтович², А.Г. Грибов³

^{1,3}*МФТИ, Москва, Россия*

²*Технологического-Гуманитарного университета, Радом, Польша.*

Проблемы передачи информации имеют принципиальное значение для теории принятия решений и математического моделирования конфликтных ситуаций. Предыстория поднимаемого в данной работе вопроса такова. Объемы и моменты

передачи информации, способы информационных обменов представляют собой одну из наиболее существенных сторон процесса принятия решений в условиях конфликта и неопределенности, поэтому их описание появилось уже в первых работах Цермело Э. и Дж. фон Неймана по теории игр. В этих работах рассматривались, по существу, игры в позиционной форме. Игроки делали конечное число ходов, причём каждый ход для данного игрока соответствует выбору одной из конечного множества альтернатив, Игроки принимали решения, находясь в соответствующих информационных множествах и располагая информацией о предшествующих выборах других игроков. Соответственно, множества управлений игроков были сугубо конечными, и объемы передаваемой информации тоже были конечны.

На основе позиционных игр путём введения стратегий выбора решений, как функций от наличной информации, были построены игры в нормальной форме, и для них были определены смешанные стратегии в работах Дж. фон Неймана и Э. Бореля. Множества смешанных стратегий уже континуальны, но обмена информацией об этих стратегиях не предполагалось.

В дальнейшем задача была обобщена, и началось исследование игр в нормальной форме с произвольно большими множествами стратегий, преимущественно континуальными, как, например, в выпуклых играх. Но довольно долго информационные обмены в таких моделях не учитывались. Работа Г. фон Штакельберга по анализу игр «лидер-ведомый» не привлекла должного внимания.

И лишь существенно позднее были предприняты попытки описать обмены информацией с помощью игр в нормальной форме (N. Howard, Ю.Б. Гермейер, Н.С. Кукушкин). После этого исследования моделей подобного рода приняли массовый характер (см., например, И.А. Ватель, Ф.И. Ерешко, В.А. Горелик, В.В. Федоров, А.Ф. Кононенко, М.А. Горелов, В.Н. Бурков, Д.А. Новиков и др.). Но во всех этих работах неявно предполагалось, что от игрока к игроку может быть передан любой объем информации, в том числе и бесконечный (ведь уже для того, чтобы локализовать точку на отрезке, нужно знать счетное число цифр в записи действительного числа). Понятно, что в таком случае приходится иметь дело с математической идеализацией, правомерность которой должна быть обоснована. Обычно бесконечность появляется как удобная замена большого конечного числа. И чтобы указанная идеализация была оправданной, нужно, чтобы решения, найденные на модели с большим конечным объемом информации и на модели с бесконечным объемом информации, были близкими. В данной работе на одном примере выясняется, действительно ли это всегда так.

Второй вопрос, тесно связанный с предыдущим, заключается в следующем: а можно ли считать объемы информации, передаваемые в реальных процессах «большими»? Чтобы ответить на него, нужно уточнить, что в данном случае понимается под словом «большой». Допустим, что имеется две модели одного процесса, в одной из которых предполагается передача гигабайта информации, а в другой – терабайта. Если оптимальные решения, найденные с помощью этих моделей будут существенно различаться, то, по крайней мере, гигабайт информации в данной ситуации следует признать «малым» объемом. И если в реальности оперирующая сторона не в силах в реальное время получить и обработать больше гигабайта информации, то это обстоятельство следует явно учесть в модели.

Разумеется, вопрос о том, является ли ограничение на объем передаваемой информации существенным, должен решаться каждый раз отдельно. Но есть некоторые факты, которые свидетельствуют о том, что чаще всего ответ на него будет положительным, объем существенен. В самом деле, практика управления организационными системами показывает, что в соответствующих процессах передаются весьма значительные объемы информации, и они имеют тенденцию к росту. Последнее из этих двух обстоятельств как раз и свидетельствует о том, что реальные

объемы информации являются «малыми» в указанном выше смысле. А первое приводит к пониманию того, что исследование соответствующих моделей вряд ли возможно без привлечения математических моделей и численных методов.

И коль скоро мы пришли к рассмотрению моделей с ограниченным объемом передаваемой информации, то естественно встает вопрос о содержании этой информации: раз уж мы не можем передать всю информацию, нужно передавать наиболее ценную. То есть встает вопрос о синтезе рациональных процедур обмена информацией.

Принципиальное значение данные вопросы имеют также для такой реальной прикладной сферы, как использование систем математических моделей в теории и практике экономического анализа. Логика развития и прикладные запросы привели в настоящее время тому, что математическое моделирование служит основным инструментом анализа экономических процессов. Диапазон моделей варьируется от простейших статических макроэкономических моделей «совокупный спрос-совокупное предложение» до сложнейших динамических систем, учитывающих оборот сотен продуктов в десятках регионов. Системный анализ развивающейся экономики, связанный с именами А.А. Петрова, И.Г. Поспелова, А.А. Шананина, представляет собой общий подход к разработке математических моделей национальной и региональной экономики для анализа её состояния и оценки последствий экономической политики государства. Главная особенность подхода в том, что в моделях в явном виде описаны внутренние механизмы самоорганизации экономики. Государственная экономическая политика описывается как воздействия на параметры этих механизмов. При разработке модели выявляются и описываются экономические агенты и их отношения. Активности экономических агентов описываются как их индивидуальные и коалиционные поведения и взаимодействия. Указанные соотношения образуют теоретико-игровые модели, и выбор решений осуществляется путем формирования стратегий поведения агентов, которые совершают при этом многообразные информационные обмены. Описание поведения агентов выводится из принципов рациональности, агенты решают задачи оптимального управления, и передача информации играет существенную роль.

Проблемы соотнесения теоретических результатов при принятии решений в условиях различных интересов на иерархических уровнях организационных систем и конкретных реализаций имеют место и в теории активных систем. Выработанные механизмы стимулирования в организационных системах при их практической реализации требуют дискретизации функциональных соотношений, и соответственно возникает вопрос должной корректности принимаемой аппроксимации.

Первые модели такого рода по оценке объемов передаваемой информации были исследованы в работах М.А. Горелова. В этих работах в качестве принципа оптимальности рассматривался принцип максимального гарантированного результата. В данной работе в качестве оптимальных решений рассматриваются равновесия по Нэшу.

В работах для игр двух лиц были построены модели принятия решений при ограниченном объеме передаваемой информации, исследованы структуры оптимальных решений информационных расширений исходной игры, т.е. конструктивных условий равновесия по Нэшу, разработаны эффективные методы поиска равновесий в терминах исходной игры и исследованы асимптотические свойства полученных решений при ограничениях на объем передаваемой информации.

Результаты этих работ обобщаются здесь на случай игр многих лиц.

Список литературы

1. Грибов А.Г. Дикусар В.В. Передача конечного объёма информации в играх многих лиц. В серии "Сообщения по прикладной математике". М.: ВЦ РАН, 2011.

The games with finite volume of the transmitted information

V.V.Dikusar¹, M.Wojtowicz², A.G.Gribov³.

^{1,3}MIPT, Dolgoprudniy, Russia

Technology Humanitarian University, Radom, Poland

Свертка Гермейера: доказательство существования (в смешанных стратегиях) гарантированного по выигрышам и рискам равновесия

В.И. Жуковский¹, К.Н. Кудрявцев²

¹МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия

При исследовании слабой эффективности (максимальности по Слейтеру) оценок в теории многокритериальных задач Ю.Б. Гермейером была предложена свертка критериев, названная впоследствии *сверткой Гермейера*. В настоящем сообщении эта свертка является основой доказательства двух положений:

- во-первых, в достаточных условиях существования гарантированных по выигрышам (исходам) и рискам равновесий по Нэшу; эти условия сводятся к нахождению седловой точки (точнее минимаксной стратегии) специальной гермейеровской свертки, эффективно строящейся по функциям выигрыша игроков и функциям риска (сожаления) по Сэвиджу-Нихансу;

- во-вторых, в доказательстве существования гарантированных по исходам и рискам равновесий в смешанных стратегиях (при компактности множеств стратегий и неопределенностей, а также непрерывности функций выигрыша).

Рассматривается бескоалиционная игра N лиц в нормальной форме и при стратегической неопределенности

$$\Gamma = \langle N = \{1, \dots, N\}, \{X_i\}_{i \in N}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i \in N} \rangle.$$

Предполагается, что $N = \{1, \dots, N\}$ – множество порядковых номеров игроков, множество $X_i \in \text{compR}^{n_i}$ стратегий x_i игрока i , множество ситуаций x есть $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$, скалярная функция выигрыша i -го игрока $f_i(x, y) \in C(X \times Y)$, множество интервальных неопределенностей $Y \in \text{compR}^m$ и стратегические неопределенности $y(\cdot): X \rightarrow Y$, $y(\cdot) \in Y^X$.

По функциям выигрыша $f_i(x, y)$ строятся гарантии выигрышей $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$ ($i \in N$), ибо для каждого $x \in X$ будет $f_i(x, y) \geq f_i[x] \quad \forall y \in Y$ ($i \in N$).

Далее для «игры гарантий»

$$\Gamma_g = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i[x]\}_{i \in N} \rangle$$

применяется ситуация x^e равновесия по Нэшу [1]

$$\max_{x_i \in X_i} f_i[x^e \| x_i] = f_i[x^e] \quad (i \in N),$$

а для исходной игры Γ – функция риска (сожаления) по Сэвиджу-Нихансу [2,3]

$$R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y) \quad (i \in N).$$

Для функций риска $R_i(x, y)$, также как для функций выигрыша $f_i(x, y)$, могут быть построены гарантии по рискам, но здесь уже

$$R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y) \geq R_i(x, y) \quad \forall y \in Y \quad (i \in N).$$

Функции $R_i(x, y)$, гарантии по выигрышам $f_i[x]$ и гарантии по рискам $R_i[x]$ ($i \in \mathbf{N}$) непрерывны (см., например, в [4]).

Исходной игре Γ ставим в соответствие бескоалиционную игру N лиц (уже без неопределенности)

$$\Gamma_N = \langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{\Phi_i[x] = f_i[x] - \sigma_i R_i[x]\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle,$$

где $\sigma_i = \text{const} \in (0; 1)$.

Как показывают примеры, множество ситуаций равновесия по Нэшу игры Γ_N может быть *внутренне неустойчивым*, т.е. могут существовать две ситуации равновесия по Нэшу $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ такие, что $\Phi_i[x^{(1)}] > \Phi_i[x^{(2)}]$ ($i \in \mathbf{N}$). Исключим этот недостаток дополнительным требованием оптимальности по Парето равновесия по Нэшу.

Далее используем N -вектора $f = (f_1, \dots, f_N)$, $R = (R_1, \dots, R_N)$.

Определение. Тройку $(x^P, f^P, R^P) \in X \times \mathbf{R}^{2n}$ назовем *сильно гарантированным по выигрышам и рискам неухудшаемым равновесием по Нэшу* игры Γ (СГВР), если во-первых, $f^P = f[x^P]$, $R^P = R[x^P]$;

во-вторых, существуют непрерывные на X скалярные функции $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$,

$R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y)$, где

$$R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y);$$

в-третьих, не пусто множество X^e ситуаций равновесий по Нэшу x^e в «игре гарантий» Γ_N , то есть

$$\max_{x_i \in X_i} \Phi_i[x^e \| x_i] = \Phi_i[x^e] \quad (i \in \mathbf{N});$$

в-четвертых, ситуация x^P максимальна по Парето в N -критериальной задаче гарантий

$$\langle X^e, \{\Phi_i[x]\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle,$$

то есть несовместна система неравенств

$$\Phi_i[x] \geq \Phi_i[x^P] \quad (i \in \mathbf{N})$$

при любом $x \in X^e$, из которых хотя бы одно строгое.

Как и в [5-7], для доказательства существования сильно гарантированного по выигрышам и рискам неухудшаемого равновесия по Нэшу игры Γ рассмотрим гермейеровскую свертку функций выигрыша игры Γ_N . А именно, введем, во-первых, новые переменные $z = (z_1, \dots, z_N) \in X$ и $N+1$ скалярные функции

$$\psi_i(x, z) = \Phi_i[z \| x_i] - \Phi_i[z] \quad (i \in \mathbf{N}), \quad \psi_{N+1}(x, z) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \Phi_i[x] - \sum_{i \in \mathbf{N}} \Phi_i[z],$$

во-вторых, свертку Гермейера $\psi(x, z)$ вида $\psi(x, z) = \max_{r=1, \dots, N+1} \psi_r(x, z)$.

Ниже приводится достаточное условие существования сильно гарантированного по выигрышам и рискам неухудшаемого равновесия по Нэшу, сводящее задачу построения СГВР к поиску седловой точки антагонистической игры, сконструированной по исходной бескоалиционной игре при стратегической неопределенности.

Теорема 1. Если в антагонистической игре $\Gamma_a = \langle X, Z = X, \psi(x, z) \rangle$ существует седловая точка (x^0, z^*) :

$$\psi(x, z^*) \leq \psi(x^0, z^*) \leq \psi(x^0, z) \quad \forall x, z \in X,$$

то минимаксная стратегия z^* является СГВР в исходной игре Γ .

Следующая теорема доказывает существование СГВР в смешанных стратегиях при стандартных для математической теории игр ограничениях.

Теорема 2. Если в игре Γ множества X_i, Y суть компакты, а функции $f_i(x, y)$ ($i \in N$) непрерывны на $X \times Y$, то в Γ существует СГВР в смешанных стратегиях.

Список литературы

1. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games // Proceedings of the National Academy of Sciences of USA. 1950. V. 36, № 1. P. 48–49.
2. Savage L.Y. The theory of statistical decision // Journal of American Statistic Association. 1951. V. 46, № 1. P. 55–67.
3. Nichans J. Zur Preisbildung bei Unterwissen // Schweizerische Zeitschrift Association. 1951. V. 46, № 3. P. 55–67.
4. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М.: КРАСАНД, 2016.
5. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. Pareto-optimal Nash equilibrium: Sufficient conditions and existence in mixed strategies // Automation and Remote Control. 2016. V. 77, № 8. P. 1500–1510.
6. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. Mathematical foundations of the Golden Rule. I. Static case // Automation and Remote Control. 2017. V. 78, № 10. P. 1920–1940.
7. Гусейнов А.А., Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Математические основы Золотого правила нравственности. Теория нового, альтруистичного уравнивания конфликтов в противоположность «эгоистичному» равновесию по Нэшу. М.: ЛЕНАНД, 2016.

Germeyer convolution: the proof of existence (in mixed strategy) of a guaranteed by outcome and risks equilibria

V.I. Zhukovskiy¹, K.N. Kudryavtsev²

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

Антагонистические нечеткие игры: T-седловая точка*

К.Н. Кудрявцев¹, И.С. Стабулит², В.И. Ухоботов²

¹Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия

²Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Теория нечетких множеств, начавшаяся с пионерской работы Лотфи Заде [1], к настоящему времени распространилась и на задачи принятия решений в конфликтных системах. Первая попытка применить нечеткие множества в теории игр была предпринята в [2]. В ней использовались нечеткие множества для того, чтобы описать

* Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

веру каждого из игроков в выбор стратегии остальных. С тех пор вышло большое количество работ, посвященных использованию теории нечетких множеств в различных классах как бескоалиционных, так и кооперативных игр. Подробный обзор полученных результатов представлен Муссой Ларбани [3]. Стоит отметить, что большинство работ было посвящено матричным и биматричным играм. Однако, даже для этих классов игр, до настоящего времени не было предложено достаточно обоснованного понятия решения. Дело здесь, скорее всего, в том, что для нечетких чисел нет единой, принятой всеми, операции сравнения.

Итак, следуя [4], приведем некоторые основные определения. Под нечетким множеством A универсального (обычного) множества $X \subseteq \mathbb{R}$ с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ понимается совокупность пар, составленных из элементов x универсального множества X и соответствующих им степеней принадлежности $\mu_A(x)$ элементов x нечеткому множеству A .

Определение 1. [4] *Нечеткое множество A , определенное на \mathbb{R} с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, называется нечетким числом, если оно удовлетворяет следующим свойствам:*

1. функция $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху;
2. $\mu_A(x) = 0$, если $x \notin [a, d]$;
3. существуют действительные числа b и c такие, что $a \leq b \leq c \leq d$ и
 - a) $\mu_A(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$,
 - b) $\mu_A(x)$ монотонно убывает на $[c, d]$,
 - c) $\mu_A(x) = 1$ при $\forall x \in [b, c]$.

Ядром нечеткого числа A называется множество $Core(A) = [b, c]$.

Определение 2. [4] *Пусть A – нечеткое число. Если функция принадлежности A имеет вид*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a+l}{2}, & \text{при } x \in [a-l, a], \\ \frac{a+r-x}{2}, & \text{при } x \in [a, a+r], \\ 0, & \text{при } x \notin [a-l, a+r], \end{cases}$$

то A называется треугольным нечетким числом, и обозначается $A = (a, l, r)$.

Далее будем использовать символ \mathbf{F} для обозначения множества всех нечетких чисел, и \mathbf{F}_3 для обозначения множества треугольных нечетких чисел.

Другой подход к определению нечетких чисел – через множества уровня. Множеством уровня α нечеткого множества A называется

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} | \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Каждое A_α представляет собой замкнутый интервал $A_\alpha = [g_A(\alpha), G_A(\alpha)]$, где

$$g_A(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} | \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad G_A(\alpha) = \sup \{x \in \mathbb{R} | \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

С помощью множеств уровня могут быть определены и операции сложения нечетких чисел и умножения на неотрицательное число. Пусть $A+B=C$ и $D=\lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда для всех $\alpha \in [0, 1]$

$$C_\alpha = [g_A(\alpha) + g_B(\alpha), G_A(\alpha) + G_B(\alpha)] \text{ и } D_\alpha = [\lambda g_A(\alpha), \lambda G_A(\alpha)].$$

Важной задачей в теории нечетких множеств является сравнение нечетких чисел. К настоящему времени разработано несколько подходов к ее решению. Один из таких подходов – дефаззификация, сопоставление, по определенному правилу, каждому нечеткому числу некоторого четкого (действительного) значения. Было предложено уже несколько десятков операторов дефаззификации, среди них индекс Ягера [5]

$$Y(A) = \frac{1}{2} \int_0^1 (g_A(\alpha) + G_A(\alpha)) d\alpha.$$

В [6] предложен оператор дефаззификации

$$V_P(A) = \int_Y f_A(\alpha) dP(\alpha),$$

где множество $Y \subseteq [0,1]$, P – распределение вероятностей на Y , функция $f_A(\alpha)$ выбирается ЛПР (лицом, принимающим решение), исходя из его субъективных предпочтений.

В [7] для сравнения нечетких чисел был предложен оператор

$$U(A, \nu) = \int_0^1 ((1-\nu)g_A(\alpha) + \nu G_A(\alpha)) d\alpha.$$

Здесь параметр $\nu \in [0,1]$ соответствует различному поведению ЛПР. Другие операторы дефаззификации приведены в [8].

Определение 3. Пусть $A, B \in \mathbf{F}$ и $T: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{R}$ некоторый оператор дефаззификации ($T(\cdot) = Y(\cdot), V_P(\cdot), U(\cdot, \nu)$ и т.п.). Будем говорить, что B предпочтительнее A по оператору T ($A \prec_T B$) тогда и только тогда, когда

$$T(A) \leq T(B).$$

Будем называть нечеткие числа A и B эквивалентными по оператору дефаззификации T тогда и только тогда, когда $A \prec_T B$ и $B \prec_T A$.

Как показывает следующий пример, отношение порядка \prec_T зависит от выбора оператора дефаззификации T .

Пример 1. Пусть $A, B, C \in \mathbf{F}_3$, $A = (52, 30, 30)$, $B = (55, 30, 12)$, $C = (50, 10, 20)$ и для сравнения используется оператор $T(\cdot) = U(\cdot, \nu)$.

Заметим, что для треугольного нечеткого числа $D = (a, l, r)$ оператор $U(\cdot, \nu)$ принимает вид

$$U(\cdot, \nu) = a + \frac{\nu r - (1-\nu)l}{2}.$$

Далее, при $\nu = 0$ получим $U(A, 0) = 37$, $U(B, 0) = 40$, $U(C, 0) = 45$. При $\nu = \frac{1}{2}$ будет

$U\left(A, \frac{1}{2}\right) = 52$, $U\left(B, \frac{1}{2}\right) = 51,5$, $U\left(C, \frac{1}{2}\right) = 52,5$. А при $\nu = 1$ значения операторов

станут $U(A, 1) = 67$, $U(B, 1) = 61$, $U(C, 1) = 60$.

Тогда

$$A \prec_{U(\cdot, 0)} B \prec_{U(\cdot, 0)} C, \quad B \prec_{U\left(\cdot, \frac{1}{2}\right)} A \prec_{U\left(\cdot, \frac{1}{2}\right)} C, \quad C \prec_{U(\cdot, 1)} B \prec_{U(\cdot, 1)} A.$$

Перейдем теперь к основной части доклада, рассмотрим антагонистическую игру с нечеткими выигрышами

$$\Gamma = \langle X, Y, f(x, y) \rangle.$$

В игре Γ первый игрок выбирает свои стратегии $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, а второй $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$. На множестве ситуаций $X \times Y$ определена нечеткая функция выигрыша первого игрока $f(x, y): X \times Y \rightarrow \mathbf{F}$, значение которой на реализовавшейся ситуации – его выигрыш. Выигрыш второго игрока, соответственно, составляет $-f(x, y)$.

Заметим, что принимая решение игроки, в партии игры Γ , вынуждены ориентироваться не на точное значение функции выигрыша, а лишь на нечеткое. Как было показано в примере 1, порядок предпочтений игроков зависит от применяемого способа сравнения нечетких выигрышей. Следовательно, любое понятие решения, как субъективный фактор, должно учитывать выбранный способ сравнения выигрышей.

Введем аналог понятия седловой точки.

Определение 4. Пусть $T: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}$ некоторый оператор дефаззификации. Ситуацию $(x^*, y^*) \in X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ назовем T -седловой точкой игры Γ , если для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$

$$f(x, y^*) \prec_T f(x^*, y^*) \prec_T f(x^*, y).$$

Отметим, что если $(x^{(1)}, y^{(1)})$ и $(x^{(2)}, y^{(2)})$ две различные T -седловые точки игры Γ , то выигрыши $f(x^{(1)}, y^{(1)})$ и $f(x^{(2)}, y^{(2)})$ эквивалентны по оператору T .

Чтобы получить конструктивный способ построения T -седловых точек игры Γ , рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру

$$\Gamma_c = \langle X, Y, \varphi(x, y) \rangle,$$

где множества X, Y стратегий игроков те же самые, что в игре Γ , а функция выигрыша первого игрока

$$\varphi(x, y) = T(f(x, y)).$$

Теорема 1. Ситуация $(x^*, y^*) \in X \times Y$ будет T -седловой точкой игры Γ тогда и только тогда, когда (x^*, y^*) является седловой точкой вспомогательной игры Γ_c .

Для построения T -седловой точки в смешанных стратегиях дополнительно потребуется свойство линейности оператора дефаззификации.

Определение 5. Оператор дефаззификации $T: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}$ называется линейным оператором дефаззификации, если для всех $A, B \in \mathbf{F}$ и для любых положительных констант λ_1 и λ_2 выполняется равенство

$$T(\lambda_1 A + \lambda_2 B) = \lambda_1 T(A) + \lambda_2 T(B).$$

Теорема 2. Пусть $T: \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}$ является линейным оператором дефаззификации. Ситуация $(x^*, y^*) \in X \times Y$ будет T -седловой точкой в смешанных стратегиях игры Γ тогда и только тогда, когда (x^*, y^*) является седловой точкой в смешанных стратегиях вспомогательной игры Γ_c .

Аналогичные теореме 2 результаты для биматричных игр с нечеткими платежами получены в [8]. Отметим, что интерес также представляет ситуация, в которой игроки, не имея возможности договариваться, ориентируются на различные операторы дефаззификации. Этому подходу авторы планируют посвятить дальнейшие исследования.

Список литературы

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. V. 8, № 3. P. 338-353.

2. Butnariu D. Fuzzy games: a description of the concept // Fuzzy sets and systems. 1978. V. 1, № 3. 181-192.
3. Larbani M. Non cooperative fuzzy games in normal form: A survey // Fuzzy Sets and Systems. 2009. V. 160, № 22. P. 3184-3210.
4. Zimmermann H. J. Fuzzy Set Theory – and its Applications. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.
5. Yager R. R. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval // Information sciences. 1981. V. 24, № 2. P. 143–161.
6. Ibanez L.M.C., Munoz A.G. A subjective approach for ranking fuzzy numbers // Fuzzy sets and systems. 1989. V. 29, № 2. P. 145–153.
7. Ухоботов В.И., Михайлова Е.С. Об одном подходе к сравнению нечетких чисел в задачах принятия решений // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2015. Т. 7, № 1. С. 32–37.
8. Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Ukhobotov V.I. A Bimatrix Game with Fuzzy Payoffs and Crisp Game // Proceedings of the 8th International Conference «Optimization and Applications» (OPTIMA-2017), Petrovac, Montenegro, Oktober 2-7, 2017. CEUR-WS, 2017. V. 1987. P. 343–349.

Antagonistic fuzzy games: T-saddle-point

K.N. Kudryavtsev¹, I.S. Stabulit², V.I. Ukhobotov²
¹*South Ural State University, Chelyabinsk, Russia*
²*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*

Решение и приложения игр на победителя

В.Н.Лебедев
Волгоградский Государственный Университет, Волгоград, Россия

Игра двух лиц проходит непрерывно по ребрам конечного, двудольного, ориентированного графа без тупиков до того момента, когда будет пройдена вершина, в которой были ранее [1]. В одной доле вершин ходит А, в другой доле ходит В. В игре на победителя побеждает игрок А, если вес возникшего цикла неотрицательный и игрок В в противном случае. Вес цикла – сумма весов ребер цикла. Вес ребра – действительное число из интервала [-1,1]. В циклической игре выигрыш игрока А, получаемый от В, есть средний вес возникшего цикла. Приведенные игры являются конечными, с полной информацией, поэтому существует равновесие по Нэшу в Байесовских стратегиях, и существуют цены. Приведенные игры эквивалентны относительно полиномиальной сводимости.

Мы рассматриваем вопрос алгоритмической сложности решения игр на победителя. Известно, что задача принадлежит классу $NP \cap co-NP$, но детерминированная полиномиальность на данный момент не установлена. В работе показано, что представленная задача решения игры на победителя принадлежит к классу сглаженной полиномиальной сложности.

Неформально говоря, основной результат работы в том, что алгоритм потенциальных преобразований [1] поразрядного уточнения данных является статистически полиномиальным. Есть некоторая аналогия с симплекс-методом решения задач линейного программирования. Хотя и известны экспоненциальные примеры для обоих алгоритмов, но их вычислительная сложность в среднем является полиномиальной [6], [2]. В работах [4],[6] развит подход к оценке временной сложности алгоритмов посредством анализа устойчивости оптимальных решений задачи при округлении начальных данных. В статье [5] был дан результат о

полиномиальной сглаженной сложности циклических игр, но в работе допущена ошибка. Так же в работе [3] допущена ошибка.

Из работы [1] следует наличие оптимальных, равномерных Марковских (стационарных) стратегий. Стационарность означает не зависимость от предыстории траектории, равномерность оптимальной стратегии означает не зависимость от начальной вершины игры. Цены определяются средним весом цикла, на который выйдет игра согласно оптимальным стационарным стратегиям.

Для решения игры на победителя, мы рассматриваем вычислительную схему поразрядного приближения точных данных. На k -м шаге определены разряды $1, \dots, k$ после запятой весов ребер. Применяем вспомогательный алгоритм потенциальных преобразований [1]. Находим знаки цен циклической игры и, следовательно, решаем игру на победителя. Проверяем устойчивость найденных оптимальных стационарных стратегий для самого неблагоприятного исхода точной игры на победителя. При сохранении знаков цен останавливаемся. В противном случае переходим к очередному этапу. Число необходимых этапов алгоритма определяется величиной точной, минимальной по модулю цены циклической игры. Если эта цена не меньше 2^{-k} , остановка алгоритма произойдет не позже $k + 2$ -ого шага (при самом неблагоприятном исходе знак минимальной по модулю цены не сможет измениться $2^{-k} - 2 \cdot 2^{-k-2} \geq 0$). Основным фактором обоснования статистической эффективности алгоритма потенциальных преобразований является:

Утверждение. Пусть задан произвольный граф без тупиков $(V = A \cup B; E)$. Рассматриваем множество исходов, полученных при случайном распределении весов ребер $h': E \rightarrow [-1, 1]$ с условием: веса ребер являются независимыми случайными величинами. Известно, что плотности вероятностей весов $f(h'(e)), e \in E$ - непрерывные, ограниченные сверху величиной $a \geq 1/2$ функции на интервале $[-1, 1]$. Тогда плотность распределения ближайшей к нулю цены циклической игры существует и ограничена сверху величиной $ma; m = |E|$.

Основной момент доказательства использует тот факт, что изменение веса только одного ребра оптимального цикла изменяет значение минимальной по модулю цены в силу единственности оптимальных циклов. Таким образом, значения весов $m-1$ -го ребра будут однозначно определять вес рассматриваемого ребра, чтобы получить благоприятствующий исход с заданной минимальной по модулю ценой.

Дискретный аналог этого утверждения представлен в работе [2]. Утверждение позволяет оценить сложность алгоритма.

Оценим вероятность, того что минимальная по модулю цена p не более 2^{-k} .

$\Pr(p \leq 2^{-k}) \leq 2^{-k} ma$ по приведенному утверждению. Поэтому $\Pr(p > 2^{-k}) > 1 - 2^{-k} ma$.

Тогда алгоритм завершит работу за не более $k+2$ шага с мерой:

$\Pr(p > 2^{-k}) > 1 - 2^{-k} ma$. Берем $k = \log_2(am \cdot const)$, где $const \geq 1$ - произвольная константа. Тогда решим задачу за не более чем $k + 2$ шага с мерой не менее $1 - 1/const, const \geq 1$. Сложность алгоритма:

$$(1/2^{-1} + \dots + 1/2^{-(k+2)}) \cdot poly(n) \leq 2^{k+3} poly(n) = a \cdot const \cdot poly'(n)$$

с вероятностью не менее $1 - 1/const$ для произвольных констант $a \geq 1/2, const \geq 1$, на произвольном графе с не более чем n вершинами. Здесь использована известная линейная по численным параметрам оценка сложности вспомогательного алгоритма работы [1]. Последняя оценка соответствует определению сглаженной полиномиальной сложности [4].

Приложением данной тематики являются богатые выразительные возможности игр на победителя. Временные логики ветвящегося времени выразимы в рамках игр на победителя. Также μ -исчисления сводимы к таким играм. Разработана программа

алгоритма потенциальных преобразований для информационной системы составления транспортного расписания, которая показывает некоторые возможности для практического применения.

Список литературы

1. Гурвич В. А., Карзанов А. В., Хачиян Л. Г. Циклические игры и нахождение минимаксных средних циклов в ориентированных графах // Журнал вычислительной математика ВМиМФ. 1988. Т. 28, № 9. С. 1407–1417.
2. Лебедев В.Н, Цурков В.И. Степенной в среднем алгоритм решения антагонистических игр на графе// Известия РАН. Теория и системы управления. 1918. № 1. С. 89–97.
3. Лебедев В.Н. Скорость сходимости к равновесию для потенциальных игр./ Труды VIII Московской международной конференции по исследованию операций. 17-22 октября. 2016. труды, II том. С. 182–185.
4. R.Beier, B.Vocking. Typical properties of winners and losers in discrete optimization // SIAM Journal on Computing. 2006. V. 35. № 4. P. 855-881.
5. Boros E., Elbassioni K., Fous M., Gurvich V., Makino K., Manthey B. Stochastic mean payoff games: Smoothed analysis and approximation schemes/ In Proc. of the 38th Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming. ICALP. Lecture Notes in Computer Science. Sprienger. 2011.
6. Spielman D.A., Teng S.H. Smoothed analysis: An attempt to explain the behavior of algorithm in practice// Communications of the ACM. 2009. V. 52, № 10. P. 76–84.

Solution and application of the game on a winner

V.N. Lebedev

Volgograd State University, Russia

Бескоалиционная игра «Агенты против центра»

М.М. Луценко

ПГУПС Александра Первого, Санкт-Петербург, Россия

Введение

Среди моделей управления рассмотрим те, в которых один игрок (центр, лидер) пытается управлять действиями других игроков (агентов, ведомых). Как правило, в этих моделях центр обладает всей необходимой информацией об интересах агентов и их возможных действиях, а агенты обладают аналогичной информацией о центре и о принятом центре решении. Таким образом, стратегиями агентов становятся функции, зависящие от принятого центром решения. Подобные модели часто встречаются в экономике. В частности, можно указать на хорошо известное равновесие Штакельберга на одно продуктом рынке [6]. Более сложным моделям управления с полной информированностью сторон посвящены работы [1].

Если агенты принимают решение при отсутствии информации о действии центра, то модель существенно усложнится. В этом случае агенты пытаются предсказать планируемую стратегию центра. Возникающая в этом случае конфликтная ситуация хорошо моделируется бескоалиционной игрой со специально устроенными функциями выигрыша. Мы рассмотрим тот случай, когда агенты действуют независимо друг от друга и величины их выигрышей зависят лишь от действий конкретного агента и центра [4,5]. Кроме того, мы предполагаем, что интересы агентов и центра противоположны. Такую конфликтную ситуацию удастся свести к антагонистической игре агентов против центра. Таким образом, мы получаем часто наблюдаемый факт, что для получения устойчивого выигрыша независимые агенты интуитивно объединяются в коалицию, действующую как один игрок против центра.

Следовательно, центр должен вести себя так, как будто он участвует в антагонистической игре против агентов.

Игра «агенты против центра»

Центр (контрольно-ревизионное управление, Госавтоинспекция, и т. д.), действуя в своих интересах, проводит одно из возможных мероприятий сразу на n игровых площадках. Каждый из n агентов, действуя на своей игровой площадке, принимает независимо от других агентов некоторое решение из своего множества решений. Мы предполагаем, что выигрыш каждого агента определяется лишь его стратегией и проводимым мероприятием центра, а выигрыш центра равен сумме проигрышей всех агентов. Требуется дать такие рекомендации участникам конфликтной ситуации, которые они примут.

Определение 1. Бескоалиционная игра $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$ с множеством игроков $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ называется игрой агентов против центра, если

а) выигрыши агентов (игроков из множества $\{1, 2, \dots, n\}$) зависят лишь от стратегий самого агента и стратегии центра:

$$h_k(x_0, \bar{x}) = h_k(x_0, x_k), \text{ где } \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ – набор стратегий агентов.}$$

б) Выигрыш центра (игрок 0) зависит от его стратегии и значений функций выигрышей агентов:

$$h_0(x_0, \bar{x}) = h_0(x_0, h_1, h_2, \dots, h_n).$$

в) Функция выигрыша h_0 не возрастает по переменным h_1, h_2, \dots, h_n .

Теорема 1. (О прямоугольности множества оптимальных стратегий центра) Если в игре агентов против центра $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$ с $n+1$ игроком ситуации $s' = (x'_0, \bar{x}')$ и $s'' = (x''_0, \bar{x}'')$ будут равновесными, то в этих ситуациях и ситуациях (x'_0, \bar{x}'') , (x''_0, \bar{x}') значения функций выигрыша центра h_0 равны.

Доказательство. Из определений ситуаций равновесия [7] $s' = (x'_0, \bar{x}')$ для функций выигрыша агентов верны следующие неравенства:

$$h_k(s') = h_k(x'_0, \bar{x}') \geq h_k(x'_0, \bar{x}' | x''_k) = h_k(x'_0, x''_k) = h_k(x'_0, \bar{x}'') \text{ при } k = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Аналогичные неравенства можно записать для ситуации равновесия $s'' = (x''_0, \bar{x}'')$:

$$h_k(s'') = h_k(x''_0, \bar{x}'') \geq h_k(x''_0, \bar{x}'' | x'_k) = h_k(x''_0, x'_k) = h_k(x''_0, \bar{x}') \text{ при } k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Из определения ситуации равновесия $s' = (x'_0, \bar{x}')$ запишем неравенства для функции выигрыша центра:

$$h_0(s') = h_0(x'_0, \bar{x}') = h(x'_0, h_1(x'_0, \bar{x}'), \dots, h_n(x'_0, \bar{x}')) \geq \\ h(x'_0, h_1(x'_0, \bar{x}'), \dots, h_n(x'_0, \bar{x}') | x''_0) = h(x''_0, h_1(x''_0, \bar{x}'), \dots, h_n(x''_0, \bar{x}')).$$

Из неравенств (2) и свойств функции h_0 последнее выражение не превосходит величины $h(x''_0, h_1(x''_0, \bar{x}''), \dots, h_n(x''_0, \bar{x}'')) = h_0(s'')$. Следовательно, для функции выигрыша центра h_0 верны следующие неравенства: $h_0(s') \geq h_0(x''_0, \bar{x}') \geq h_0(s'')$.

Аналогично доказываются неравенства: $h_0(s'') \geq h_0(x'_0, \bar{x}'') \geq h_0(s')$. Следовательно,

$$h_0(s') = h_0(x''_0, \bar{x}') = h_0(s'') = h_0(x'_0, \bar{x}'') = h_0(s').$$

Таким образом, центр выбирает свою стратегию независимо от действий агентов. Коалиция, составленная из всех агентов, должна договориться (отгадать) какую ситуацию равновесия будет разыгрывать центр.

Определение 2. Бескоалиционная игра $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$ с множеством игроков $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ называется игрой агентов против центра с аддитивной функцией выигрыша [4], если

а) выигрыши агентов (игроков из множества $\{1, 2, \dots, n\}$) зависят лишь от стратегий самого агента и стратегии центра:

$$h_k(x_0, \bar{x}) = h_k(x_0, x_k), \text{ где } \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ – набор стратегий агентов.}$$

б) Выигрыш центра (игрок 0) зависит от его стратегии и значений функций выигрышей агентов аддитивным образом:

$$h_0(x_0, \bar{x}) = h_0(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = -\sum_{k=1}^n h_k(x_0, x_k). \quad (3)$$

В описанной выше игре можно считать, что все игроки играют против центра.

Теорема 2. (Частичная прямоугольность множества оптимальных стратегий агентов.) Если в игре агентов против центра с аддитивной функцией выигрыша $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$ ситуации $s' = (x'_0, \bar{x}')$ и $s'' = (x''_0, \bar{x}'')$ будут равновесными, то в ситуациях $s' = (x'_0, \bar{x}')$ и (x'_0, \bar{x}'') выигрыши агентов будут равными, аналогичные равенства верны и для ситуаций $s'' = (x''_0, \bar{x}'')$ и (x''_0, \bar{x}') .

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что значения функции выигрыша центра h_0 равны в четырех указанных точках. Докажем эти равенства и для функций выигрыша агентов.

$$h_k(s') = h_k(x'_0, \bar{x}') \geq h_k(x'_0, \bar{x}''), \quad k = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Сложим все эти неравенства. В результате мы получим:

$$-h_0(x'_0, \bar{x}') = \sum_{k=1}^n h_k(x'_0, \bar{x}') \geq \sum_{k=1}^n h_k(x'_0, \bar{x}'') = -h_0(x'_0, \bar{x}'').$$

Из доказанного свойства функции h_0 следует, что $h_0(x'_0, \bar{x}') = h_0(x'_0, \bar{x}'')$. Это равенство верно лишь в том случае, когда все неравенства (3) оказываются равенствами. Аналогично доказываются равенства $h_0(x''_0, \bar{x}') = h_0(x''_0, \bar{x}'')$.

Пример. Центр инвестирует денежные средства в один из двух проектов. Каждый из проектов выполняют два подрядчика (агента). Каждый из проектов они могут выполнять в европейском и хорошем качестве, причем прибыль агентов при выполнении в европейском качестве больше. Потери центра равны сумме прибылей подрядчиков. Мы считаем, что все игроки выбирают свои стратегии независимо друг от друга [5].

Составим бескоалиционную игру трех лиц. Запишем возможные матрицы выигрышей агентов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

В этой игре центр (игрок 0) выбирает номер строки сразу для обеих матриц (номер проекта). Агенты (игроки 1 и 2) выбирают номера столбцов каждый в своей матрице (варианты выполнения проекта). Проигрыш центра равен сумме выигрышей агентов. В этой игре существует две ситуации равновесия: $s' = (1; 1; 1)$, $s'' = (2; 1; 1)$. В этих ситуациях выигрыш центра равен (-9). Выигрыши агентов равны: 5 и 4 для ситуации s' ; 4 и 5 для ситуации s'' . Таким образом, выигрыши агентов различны в разных

ситуациях равновесия, а центр может выбирать какому агенту достанется больший выигрыш.

Антагонистическая игра, сопряженная к игре «агенты против центра»

По всякой бескоалиционной игре можно построить антагонистическую игру несколькими способами. Для игры агенты против центра с аддитивной функцией выигрыша мы рассмотрим тот способ, при котором все агенты объединяются и действуют совместно как один игрок. Если за второго игрока взять центр, то у нас получается антагонистическая игра, так как выигрыш первого игрока равен проигрышу второго.

Определение 3. Антагонистическая игра $\Gamma_a = \langle X, Y, h \rangle$ называется сопряженной к аддитивной игре агенты против центра $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$, если множество стратегий игрока 1 – множество возможных стратегий (совместных действий) агентов $X = \prod_{k=1}^n X_k$, множество стратегий игрока 2 – множество стратегий центра $Y = X_0$, а функция выигрыша игрока 1 (совокупности агентов) равна

$$h(x, y) = \sum_{k=1}^n h_k(y, x_k), \text{ где } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X, y \in Y$$

Итак, множество стратегий игрока 1 в игре Γ_a – множество упорядоченных наборов стратегий игроков: $X = X_1 \times \dots \times X_n$, а проигрыш игрока 2 (центра) в антагонистической игре равен выигрышу центра в исходной бескоалиционной игре: $h_0(x_0, \bar{x}) = -h(x, y)$. Следующая теорема сводит решение игры «агенты против центра» с аддитивной функцией выигрыша к решению антагонистической игры.

Теорема 3. Предположим, что в бескоалиционной игре «агенты против центра» $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$ с аддитивной функцией выигрыша центра существует ситуация равновесия $s' = (x'_0, \bar{x}')$, тогда

а) ситуация $s^* = (x^*, y^*)$ с $x^* = \bar{x}'$, $y^* = x'_0$ будет ситуацией равновесия в сопряженной антагонистической игре $\Gamma_a = \langle X, Y, h \rangle$.

б) Если пара $s^* = (x^*, y^*)$ ситуация равновесия в игре $\Gamma_a = \langle X, Y, h \rangle$, то $s' = (x'_0, \bar{x}')$ при $x^* = \bar{x}'$, $y^* = x'_0$ будет ситуацией равновесия в бескоалиционной игре $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$.

Доказательство. а) Так как пара $s' = (x'_0, \bar{x}')$ – ситуация равновесия в бескоалиционной игре, то $h_0(x'_0, \bar{x}') \geq h_0(x_0, \bar{x}')$ при всех $x_0 \in X_0$. Следовательно, $h(x^*, y^*) = -h_0(x'_0, \bar{x}') \leq -h_0(x_0, \bar{x}') = h(x^*, y)$, где $x^* = \bar{x}'$, $y^* = x'_0$, $y = x_0$. С другой стороны, $h_k(x'_0, \bar{x}') \geq h_k(x'_0, \bar{x})$ при $k = \overline{1, n}$. Следовательно,

$$h(x^*, y^*) = \sum_{k=1}^n h_k(x'_0, x'_k) \geq \sum_{k=1}^n h_k(x'_0, x_k) = h(x, y^*),$$

где $x^* = \bar{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $y^* = x'_0$, $x = \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

б) Из неравенства $h(x^*, y^*) \leq h(x^*, y)$ и равенства (2.1) следует неравенство $h_0(x'_0, \bar{x}') \geq h_0(x_0, \bar{x}')$ при $x^* = \bar{x}'$, $y^* = x'_0$, $y = x_0$. Из неравенства

$h(x^*, y^*) \geq h(x, y^*)$ следует $\sum_{k=1}^n h_k(x'_0, x'_k) \geq \sum_{k=1}^n h_k(x'_0, x_k)$. Если для всех k кроме фиксированного номера k_0 взять $x_k = x'_k$, то мы получим неравенство $h_{k_0}(x'_0, x'_{k_0}) \geq h_{k_0}(x'_0, x_{k_0})$. Следовательно, для всех k выполняются неравенства $h_k(x'_0, x'_k) \geq h_k(x'_0, x_k)$ и ситуация $s' = (x'_0, \bar{x}')$ будет равновесием в игре Γ .

Смешанные расширения бескоалиционных игр

Если в бескоалиционной игре отсутствует ситуация равновесия, то переходят к смешанному расширению игры. Для этого расширим множество стратегий игроков и доопределим функцию выигрыша. Благодаря этому приему можно доказать, что бескоалиционные игры с конечными множествами стратегий имеют ситуации равновесия в смешанных стратегиях.

Определение 4. Смешанной стратегией игрока k в бескоалиционной игре $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$ называется вероятностная мера на множестве чистых стратегий X_k . Если множество стратегий X_k игрока k конечно, то смешанная стратегия может быть представлена в виде вектора $\mu^k = (\mu_1^k, \mu_2^k, \dots, \mu_{n_k}^k)$, где n_k - мощность множества X_k , а μ_i^k - вероятность с которой игрок k выбирает стратегию с номером i [3, 4].

Смешанным расширением бескоалиционной игры $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$ называется бескоалиционная игра $\bar{\Gamma} = \langle I, \{\bar{X}_k\}, \{H_k\} \rangle$, в которой \bar{X}_k - множество смешанных стратегий игрока k , H_k - функция выигрыша игрока k , значения которой находятся по формулам:

$$H_k(\mu) = \int h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mu^1(x_1) d\mu^2(x_2) \dots d\mu^n(x_n)$$

где $\mu = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n)$ - набор смешанных стратегий. Величину $H_k(\mu)$ интерпретируют как средний выигрыш игрока k за одну партию, если этот игрок использует смешанную стратегию μ^k .

Теорема 4. Пусть $\Gamma = \langle I, \{X_k\}, \{h_k\} \rangle$ - игра n агентов против центра с аддитивной функцией выигрыша, а $\bar{\Gamma} = \langle I, \{\bar{X}_k\}, \{H_k\} \rangle$ - ее смешанное расширение, тогда выигрыши игроков будут иметь вид:

$$H_0(\mu_0, \bar{\mu}) = H_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = - \sum_{k=1}^n H_k(\mu_0, \mu_k), \quad H_k(\mu_0, \bar{\mu}) = H_k(\mu_0, \bar{\mu}_k),$$

где μ_0 - смешанная стратегия центра, а $\bar{\mu} = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n)$ - набор смешанных стратегий агентов. Следовательно, при переходе к смешанному расширению игра агенты против центра с аддитивной функцией выигрыша остается такой же.

Определение 4. Смешанным расширением антагонистической игры $\Gamma = \langle X, Y, h \rangle$ будет также антагонистическая игра $\bar{\Gamma} = \langle \bar{X}, \bar{Y}, H \rangle$, в которой функция выигрыша имеет вид: $H(\mu, \nu) = \int h(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$, где μ - вероятностная мера на множестве X , а ν - вероятностная мера на множестве Y .

Обозначим через $(\bar{\Gamma})_a = \langle X_a, \bar{Y}, H_a \rangle$, игру сопряженную к смешанному расширению игры агенты против центра Γ , в которой

$$H(\bar{\mu}, v) = \sum_{k=1}^n H_k(v, \mu^k), \quad \bar{\mu} = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n) \in X_a = \prod_{k=1}^n \bar{X}_k$$

С другой стороны можно построить смешанное расширение игры Γ_a , то есть игру $\bar{\Gamma}_a = \langle \bar{X}, \bar{Y}, H \rangle$. Эти две игры имеют разные множества смешанных стратегий, так как

$$\bar{X} = \left(\prod_{k=1}^n X_k \right) \neq \prod_{k=1}^n \bar{X}_k = X_a.$$

Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
2. Луценко М.М. Теория статистических решений. Ч. 1: учеб. пособие. СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2011.
3. Луценко М.М. Теория статистических решений. Ч. 2: учеб. пособие. СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2012.
4. Lutsenko M. M. The Agents against the Center/ В кн.: Game Theory and Management. Abstracts of the Eleventh International Conference. 2017. С. 108–110.
5. Луценко М.М. Об оптимальном взаимодействии агентов с центром. В сб: Профессиональное образование, наука и инновации в XXI веке. Сборник трудов XI Санкт-Петербургского конгресса. 2017. С. 175–176.
6. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения: Учебное пособие./ Мазалов. СПб.: Лань, 2010.
7. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.

A game «Agents against center»

M.M. Lutsenko

Petersburg State Transport University, Russia

Price-quality competition in public transportation network*

V.V.Mazalov

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian

Research Center, Russian Academy of Sciences, Russia

We consider a two-stage noncooperative game of n players on a public transportation network. Here players are the passenger transportation companies (carriers). Service requests form a Poisson process with an intensity rate matrix Λ .

On the first stage the players determine the intensities of the service (bus amount, scheduling). Then players announce prices for their services and passengers choose an appropriate service by minimizing their individual costs (the ticket price and the expected service time) (see [1]). For each carrier, we solve the pricing problem and define the equilibrium intensity flows in the conditions of competition. After that we find the optimal scheduling for the companies. A special emphasis is placed on linear and $\$M/M/1\$$ latency functions. Finally, we provide illustrative examples which explain the essence of our approach.

* This research is supported by the Russian Fund for Basic Research (projects 16-51-006, 16-01-00183)

References

1. Mazalov V.V., Melnik A.V. Equilibrium prices and flows in the passenger traffic problem // *International Game Theory Review*. 2016. V. 18, № 1. P. 1–19.

Лабораторные игры с противоположными интересами*

И.С. Меньшиков^{1,2}, О.Р. Меньшикова^{2,3}, Д.С. Полюдова², Д.М. Старков²

¹ФИЦ «Информатика и управление», Москва, Россия

²МФТИ, Долгопрудный, Россия

³РАНХиГС при Президенте РФ, Москва, Россия

Ю.Б. Гермейер привил своим ученикам желание анализировать взаимодействие людей с различными интересами и в различных условиях информированности [1, 2]. В 1970-е годы речь могла идти только о теоретическом построении игровых моделей, что уже было весьма увлекательным занятием. Некоторые классы моделей, например, игры с фиксированной последовательностью ходов, казалось, давали возможность обоснованного прогноза поведения участников. Однако лабораторные эксперименты 1990-х полностью разрушили такое представление [3, 4]. Оказалось, что люди не всегда ведут себя полностью рационально в соответствии со своими интересами, причем отклонения от рациональности нельзя считать только случайными ошибками слабо подготовленных участников экспериментов. Эти отклонения носят, в том числе, и систематический характер, связанный с социальными и этическими представлениями людей, которые трудно строго формализовать. Более того, специальная процедура социализации в форме краткосрочной процедуры знакомства участников эксперимента дает существенный сдвиг в поведении людей, что приводит к отходу от индивидуально рационального поведения в сторону социального оптимума [5, 6].

На базе Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ (ЛЭЭ) проводятся многочисленные эксперименты с привлечением в качестве участников студентов МФТИ различных факультетов через специальную группу ВКонтакте. Психофизиология принятия решений исследуется нами с помощью системы психологического тестирования и специального программно-аппаратного комплекса, состоящего из 10 стабилографических кресел [7–10].

В данной работе мы остановимся на последних наших исследованиях по двум лабораторным играм, которые находятся у нас в процессе разработки: (1) информационные каскады и (2) аукцион максимальной стоимости по второй цене.

Изучение информационных каскадов (ИК) актуально в связи с развитием современных средств коммуникации людей, например, в социальных сетях и на финансовых рынках. При этом на каждого человека по некоторому информационному поводу накатывает волна общественного мнения, которое он должен сопоставить со своей приватной информацией прежде, чем принять решение. Возможность изучения ИК в лабораторных условиях была продемонстрирована в работе [11]. Здесь мы представим некоторые новые результаты, полученные путем анализа данных десяти экспериментов, проведенных в ЛЭЭ в 2017 году.

Аукцион максимальной стоимости по второй цене (АМС) также широко исследовался в лабораторных условиях [12]. Содержательно, речь идет о тендере за право владения объектом неопределенной стоимости, о которой у каждого участника есть только некоторая приватная информация в форме гарантированного выигрыша от обладания данным объектом. При этом реальная стоимость объекта предполагается равной максимуму приватных оценок участников. Участники одновременно

* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

выставляют заявки на покупку, а побеждает тот, кто выставил максимальную заявку, но платит он за покупку цену второй по величине заявки. Интерес к этой лабораторной игре связан с тем, что хотя теоретическое равновесие Байеса-Нэша (РБН) [13] в этой статической игре с неполной информацией легко найти, однако, оно является весьма слабым. Если все остальные участники придерживаются данного РБН, то игрок всегда может отклониться в сторону завышения ставки без ущерба для своего ожидаемого выигрыша. Тенденция завышения ставки наблюдается в экспериментах постоянно. Задача состоит в том, чтобы попытаться формализовать и научиться предсказывать эти систематические отклонения. Здесь мы расскажем о результатах пробного эксперимента, проведенного в ЛЭЭ. В дальнейшем планируется проведение серии подобных экспериментов.

Математическая модель не вполне рациональных действий участников для ИК и АМС будет базироваться на концепции равновесия квантильного отклика (Quantal Response Equilibrium – QRE) [14-16]. В QRE принцип наилучшего ответа Нэша заменятся более мягким требованием: чем более выгодный ответ, тем с большей вероятностью его примет данный участник при фиксированном поведении остальных. Концепция QRE широко используется в работах на стыке теории игр и экспериментальной экономики тогда, когда традиционные варианты равновесия Нэша весьма слабо согласуются с результатами лабораторных экспериментов.

Информационные каскады

Исследования проводились на основе лабораторной игры «Угадай урну». В каждом раунде система тайно равновероятно выбирала одну из двух урн: А или В. В урне А было три красных шара и два белых, в урне В три белых шара и два красных. Участники не знали, какая урна в этом раунде выбрана. Они выстраивались случайным образом в некоторую очередь. В порядке данной очереди каждому участнику втайне от других показывается шар, случайно выбранный из урны данного раунда. Задача каждого участника состояла в том, чтобы угадать урну. Для этого участник, когда до него доходила очередь, должен был сделать прогноз: А или В. Как только прогноз был сделан, он становился известным всем. По завершению раунда все участники, которые угадали урну, получают приз (равный 1).

Игра была реализована в системе z-Tree [17] и проводилась в компьютерном классе ЛЭЭ, оснащенный стабиллографическими креслами, с помощью которых производилась запись функционального состояния участников в процессе эксперимента.

Ясно, что в этой игре интересы участников не противоположны: успех других никак не влияет на мой выигрыш. Однако информационная структура весьма причудлива: это динамическая игра с фиксированной последовательностью ходов и с неполной (приватной) информацией участников. В такой игре следует искать совершенное байесовское равновесие (СБР) – разновидность равновесия Нэша (РН) для динамических игр с неполной информацией [13]. Найти СБР в данном случае нетрудно. Первый в очереди участник должен следовать своему сигналу: если шар красный, то выбирать А, если белый, то В. В этом случае его ожидаемый выигрыш равен 0.6, а в противном случае – только 0.4. Второй в очереди участник понимает, что рациональный первый участник следует сигналу. Если второй получает такой же сигнал, что и первый, то он тем более будет ему следовать, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш. После первых двух одинаковых сигналов и соответствующих им прогнозов третий и все последующие участники должны дать прогнозы, совпадающие с первыми двумя. Это и будет каскад: три и более одинаковых прогноза подряд. Отметим, что прогнозы третьего и последующих участников добавляют только видимость правильности общественного мнения: все фактически базируется только на совпадении первых двух сигналов. Если первые два сигнала различны, то можно считать, что третий находится в положении первого. В любом СБР и РН после того, как каскад сформировался, он уже не разрушится.

В QRE постулируется, что участники лишь отчасти рациональны. Так уже первый участник может сделать иррациональный ход, правда, с меньшей вероятностью, чем рациональный ход. Логарифм отношения этих вероятностей пропорционален разности ожидаемых выигрышей ($0.6 - 0.4 = 0.2$), а коэффициент пропорциональности λ характеризует уровень рациональности участника. Если $\lambda = 0$, то участник может дать рациональный и иррациональный в силу своей приватной информации прогноз с равной вероятностью. В пределе при $\lambda \rightarrow \infty$ дается только рациональный прогноз.

Понимая, что первый в очереди участник лишь не вполне рационален, второй участник только частично может доверять адекватности прогноза первого и т.д. В QRE сформированный каскад может разрушаться, даже если сформировавшееся общественное мнение подтверждается очередным приватным сигналом.

В 2017 году в ЛЭЭ было проведено 10 экспериментов, в каждом из которых приняло участие по 10 добровольцев из числа студентов МФТИ. В восьми экспериментах было по 15 раундов, а еще в двух (по техническим причинам) было 10 и 12 раундов, соответственно. Итого, лабораторная игра «Угадай урну» была сыграна 142 раза.

Результаты экспериментов оказались весьма далеки от РН. Вместе с тем QRE по нескольким критериям вполне адекватно наблюдаемому поведению участников. По результатам экспериментов параметры рациональности λ вычисляются с помощью метода наибольшего правдоподобия. Если посчитать QRE по каждому из 10 экспериментов независимо, а также считать уровни рациональности λ одинаковыми для всех участников данного эксперимента, то получатся 10 значений λ в диапазоне [2.24, 6.49]. Такие уровни рациональности вполне соответствуют аналогичным экспериментам [11].

Вместе с тем, было замечено, что участники экспериментов существенно не однородны по рациональности. Так, лишь некоторые участники допускали иррациональный прогноз против сигнала на первом шаге. Мало было и тех, кто делал прогноз против сигнала, подтвержденного каскадом. Это подтолкнуло нас рассмотреть различные варианты гетерогенных аналогов QRE (HQRE), основанных на предположении о том, что уровни рациональности λ различны для разных групп участников.

Индивидуальные уровни рациональности λ семи участников из 100 оказались равными бесконечности, т.е. их поведение полностью рационально и согласуется с СБР. Напротив, поведение восьми участников – не отличимо от случайного выбора альтернатив с равной вероятностью ($\lambda = 0$).

Мужчины в семи экспериментах из 10 оказались более рациональными, чем женщины. Если следуя [18], использовать понятие психологического пола, то по рациональности значимо выделяется группа феминных мужчин: средний уровень рациональности которых равен 5.5, в то время как остальные три группы (маскулинные женщины, феминные женщины и маскулинные мужчины) имеют уровни рациональности меньше 3.9. Более того, оказалось, что, чем больше среди участников эксперимента феминных мужчин, тем больше суммарный выигрыш всей группы.

Аукцион максимальной стоимости по второй цене

Рассмотрим вариант игры АМС с двумя участниками, каждый из которых получает приватный сигнал о стоимости некоторого объекта в виде целого числа от 0 до 10. Стоимость объекта равна максимуму из двух приватных оценок участников, а потому точно не известна. Участники одновременно подают заявки на покупку в виде произвольного целого числа, не превосходящего 100. Побеждает тот, кто подал наибольшую заявку, но платит за объект цену второй заявки (при равенстве заявок бросается жребий).

Равновесие Байеса-Нэша (РБН) в этой статической игре с неполной информацией соответствует искренним стратегиям: подавать заявку, равную своему приватному

сигналу. Однако это РБН является слабым в том смысле, что если один из участников придерживается искренней стратегии, то другой участник может спокойно завышать заявку по сравнению с сигналом, не уменьшая своего выигрыша. Уменьшить выигрыш он может только своему искреннему партнеру. Правда, если оба будут завышать заявку, то кто-то может оказаться с отрицательным выигрышем.

Данная лабораторная игра АМС была реализована в системе oTree [19]. В пробном эксперименте участвовали 10 человек, каждый из которых в каждом из 6 раундов вводил заявки сразу для 11 возможных значений своего приватного сигнала. После этого в каждом раунде фактически проводился турнир из 11 игр для каждого участника: участники случайным образом разбивались на пары для каждого значения приватного сигнала. Таким образом, игра АМС была разыграна попарно 330 раз.

Результаты пробного эксперимента показали, что завышение ставок против сигнала является весьма распространенным явлением (60% всех ставок). Это привело к тому, что уровень рациональности λ для QRE, сосчитанному по всем раундам составляет 4.75. Если считать λ отдельно по периодам, то наблюдается некоторый, хотя и не особенно значимый, рост уровня рациональности: от 3.64 в периоде 1 до 5.49 в периоде 6. Массовое завышение ставок приводит к отрицательным выигрышам, что должно мотивировать участников к снижению ставок. Однако иррациональное желание завышать ставки пересиливает, и тенденции к снижению ставок по раундам не наблюдается.

При подсчете индивидуальных уровней рациональности в рамках HQRE оказалось, что один участник был полностью рационален (следовал искренней стратегии), в то время как один участник демонстрировал почти стохастическое поведение с $\lambda = 0.935$. У мужчин уровень рациональности несколько выше, чем у женщин: 5.335 против 4.07.

По экспериментально полученному распределению ставок можно заметить, что при маленьких сигналах присутствует стабильное завышение заявок по сравнению с сигналом, в то время как при увеличении сигнала завышение плавно сходит на нет. Для больших сигналов чаще всего используется искренняя стратегия.

Исследование эффекта завышения заявок в АМС предполагается продолжить.

Заключение

Игры с противоположными интересами, к детальному изучению всего многообразия которых призывал своих учеников Ю.Б. Гермейер, могут быть всесторонне исследованы в лабораторных условиях методами экспериментальной экономики. В рамках данной работы упомянуты только два примера такого исследования из целой библиотеки лабораторных игр, собранных в ЛЭЭ, которая в 2003 году по инициативе академика А.А. Петрова и декана ФУПМ МФТИ А.А. Шананина была создана как совместный проект МФТИ и ВЦ РАН.

Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
2. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. Игры с иерархическим вектором интересов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 3. С. 54–69.
3. McKelvey R., Palfrey T. An experimental study of the centipede game // *Econometrica*. 1992. V. 60, № 4. P. 803–836.
4. Nagel R., Tang, F.F. An experimental study on the centipede game in normal form: An investigation on learning // *Journal of Mathematical Psychology*. 1998. V. 42, № 2–3. P. 356–384.
5. Berkman ET, Lukinova E, Menshikov I, Myagkov M. Sociality as a Natural Mechanism of Public Goods Provision // *PLoS ONE*. 2015. V. 10, № 3: e0119685. doi:10.1371/journal.pone.0119685.
6. Menshikov IS, Shklover AV, Babkina TS, Myagkov MG From rationality to cooperativeness: The totally mixed Nash equilibrium in Markov strategies in the iterated

Prisoner's Dilemma // PLoS ONE. 2017. V. 12, № 11: e0180754, doi: 10.1371/ journal.pone.0180754 .

7. Лукьянов В.И., Максакова О.А., Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р., Чабан А.Н. Функциональное состояние и эффективность участников лабораторных рынков // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 202–219.

8. Бурнаев Е.В., Меньшиков И.С. Модель функционального состояния участников лабораторных рынков // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 159–176.

9. Меньшиков И.С. Анализ функционального состояния участников лабораторных рынков // Психология. Журнал Высшей школы экономики. 2009. Т. 6. С. 125–152.

10. Меньшиков И.С. Лабораторный анализ влияния контекста на процесс принятия решений // Труды МФТИ. 2014. Т. 6, №4. С. 67–77.

11. Goeree J.K., Palfrey T. R., Rogers B.W., McKelvey R.D. Self-correcting information cascades // California Institute of Technology, Division of the humanities and social sciences. 2004. Social working paper 1197.

12. Camerery C., Nunnariz S., Palfrey T.R. Quantal response and nonequilibrium beliefs explain overbidding in maximum-value auctions / California Institute of Technology, Division of the humanities and social sciences. 2014. Social working paper 1349.

13. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. М.: ООО «Контакт Плюс», 2010.

14. McKelvey R.D., Palfrey T.R. Quantal response equilibria for normal form games // Games and Economic Behavior. 1995. V. 10, №1. P. 6–38.

15. McKelvey R.D., Palfrey T.R. Quantal Response Equilibria for Extensive Form Games // Experimental Economics. 1998. V. 1, № 1. P. 9–41.

16. Rogers B.W., Palfrey T.R., Camerer C.F. Heterogeneous quantal response equilibrium and cognitive hierarchies // Journal of Economic Theory. 2009. V. 144, № 4. P. 1440–1467.

17. Fischbacher U. z-Tree: Zurich toolbox for ready-made economic experiments // Experimental Economics. 2007. V. 10, № 2. P. 171–178.

18. Bem S.L. The measurement of psychological androgyny // Journal of Consulting and Clinical Psychology. 1974. V. 42, № 2. P. 155-162.

19. Chena D.L., Schonger M., Wickens C. oTree –An open-source platform for laboratory, online, and field experiments // Journal of Behavioral and Experimental Finance. 2016. V. 9. P. 88–97.

Laboratory games with non-antagonistic interests

I.S. Menshikov^{1,2}, O.R. Menshikov^{2,3}, D.S. Polyudova², D.M. Starkov²

¹FRC «Computer Science and Control» RAS, Moscow, Russia

²MIPT, Dolgoprudny, Russia ³RANEPA, Moscow, Russia

Неантагонистическая дифференциальная игра с ограничением на время наблюдения

Е.З. Мохонько

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Данная работа является продолжением исследований по оптимизации получения информации в неантагонистическом конфликте. Они были начаты А. Ф. Кононенко в работе [1]. В ней одно отдельное наблюдение за ходом конфликта занимает какое-то время. В неантагонистической дифференциальной игре из [2] суммарное время

наблюдения ограничено. В общем случае оно меньше длительности игры. Правая часть уравнений, описывающих игру, зависит только от управлений игроков. Рассматриваемая в данной работе игра отличается от [2] тем, что правые части уравнений, описывающих игру, зависят не только от управлений игроков, но и от времени. Игроки используют особый вид стратегий, r -стратегии, позволяющие получать информацию о ходе конфликта тогда, когда считают это нужным. Найдены некоторые равновесные r -стратегии. Используя их игроки тратят на наблюдение не больше того запаса времени, который у них есть.

Итак, рассмотрим дифференциальную неантагонистическую игру двух лиц:

$$\begin{aligned} x_1' &= M_1(u, v, t), \quad x_2' = M_2(u, v, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 0, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad I_1(u, v) = x_1(1), \quad I_2(u, v) = x_2(1). \end{aligned}$$

Здесь P и Q – ограниченные, замкнутые множества, $x = (x_1, x_2)$, функции $M_i, i = 1, 2$, непрерывны и выполнено условие существования седловой точки в маленькой игре [3].

Множеством допустимых стратегий каждого игрока \bar{U}, \bar{V} является множество измеримых по всем своим аргументам позиционных $u(x, t), v(x, t)$ и программных $u(t), v(t)$ управлений, удовлетворяющих $u \in P, v \in Q$, а также r -стратегии \bar{u}, \bar{v} . Будем пользоваться формализмом ломаных Эйлера и движений [3].

Определение. r -стратегией \bar{u} игрока 1 называется пара $\bar{u} = (r, u(\cdot))$, ставящая в соответствие каждой точке (x, t) число $r \geq 0$ и измеримую функцию $u(\cdot)$. При этом если $r > 0$, то $u(\cdot) = \{u(\theta) = u(x, t; \theta) \in P \mid t \leq \theta < t + r(x, t)\}$, если $r = 0$, то управление в точке $(x, t): u(\cdot) = u(x, t)$.

Аналогично определяется r -стратегия \bar{v} игрока 2. Напомним определение ломаной Эйлера $x_\Delta(t) = x_\Delta(t; x^*, t_*, \bar{u}, v(\cdot))$, порожденной r -стратегией \bar{u} .

Пусть дана начальная позиция (x^*, t_*) и выбрана r -стратегия \bar{u} . Покроем $[t_*, 1]$ системой полуинтервалов $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$, $i \in I = \{0, 1, \dots, n\}$, $\tau_0 = t_*, \tau_n = 1$. Пусть $v(t) \in Q$, $(t \geq t_*)$ какая-то измеримая по Лебегу реализация управления игрока 2. Тогда ломаной Эйлера $x_\Delta(t) = x_\Delta(t; x^*, t_*, \bar{u}, v(\cdot))$ называется абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $x_\Delta(t_*) = x^*$ и являющаяся решением дифференциального уравнения

$$x_{1\Delta}'(t) = M_1(u(x_{1\Delta}(\tau_i), \tau_i), v(t)), \quad x_{2\Delta}'(t) = M_2(u(x_{2\Delta}(\tau_i), \tau_i), v(t))$$

при $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$, если $i \in I_1$ и

$$x_{1\Delta}'(t) = M_1(u(x_{1\Delta}(\tau_{j_0}), \tau_{j_0}; \tau_i), v(t)), \quad x_{2\Delta}'(t) = M_2(u(x_{2\Delta}(\tau_{j_0}), \tau_{j_0}; \tau_i), v(t))$$

при $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$, если $i \in I_2$.

Здесь $u(x_\Delta(\tau_{j_0}), \tau_{j_0}; \tau_i)$ – значение, которое принимает функция $u(x_\Delta(\tau_{j_0}), \tau_{j_0}; t)$ при $t = \tau_i$ (см. определение r -стратегии).

Множество индексов I_2 определяется так.

Если $i \in I_2$, то 1) $i \neq 0$; 2) найдется $j_0 < i$ такое, что j_0 не принадлежит I_2 и $\tau_{j_0} + r(x_\Delta(\tau_{j_0}), \tau_{j_0}) > \tau_i$ (для всякого $i \in I_2$ такое j_0 единственно).

Множество индексов $I_1 = I \setminus I_2$.

Определение. Момент времени τ_j , $j \in I_1, j \neq 0$, будем называть моментом получения информации для ломаной Эйлера.

Движением $x(t) = x(t; x^*, t_*, \bar{u})$, порожденным стратегией \bar{u} из позиции (x^*, t_*) , будем называть всякую абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, для которой на отрезке $[t_*, 1]$ найдется последовательность ломаных Эйлера $x_\Delta^{(k)}(t; x^k, t_k, \bar{u}, v^k(\cdot))$, равномерно сходящаяся к $x(t)$ на $t_* \leq t \leq 1$ при условии $\limsup_{k \rightarrow \infty} (\tau_{i+1}^k - \tau_i^k) = 0$.

Напомним, что расстояние между траекториями $x_\Delta^{(k)}(t)$ и $x(t)$ определяется равенством

$$\|x_\Delta^{(k)}(t) - x(t)\| = \max \left\{ \|x_\Delta^{(k)}(t) - x(t)\|_{C[t^k, 1]}, |t^k - t_*| \right\},$$

где

$$\|x_\Delta^{(k)}(t) - x(t)\|_{C[t^k, 1]} = \max_{t^k \leq t \leq 1} \|x_\Delta^{(k)}(t) - x(t)\|.$$

Определение. Пусть последовательность ломаных Эйлера $x_\Delta^{(k)}(t)$ сходится к движению $x(t)$. Пусть существует последовательность моментов получения информации для этих ломаных Эйлера, сходящаяся к некоторому моменту t . Тогда момент t будем называть моментом получения информации для движения $x(t)$ или просто моментом получения информации.

Другими словами, если $\tau_i^k, i \in I_1^k, i \neq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_i^k = t$, тогда t – момент получения информации для движения $x(t)$. Здесь $I_1^k = I \setminus I_2^k$ – подмножество индексов, соответствующих ломаной Эйлера $x_\Delta^{(k)}(t)$.

r -стратегия \bar{u} при фиксированной начальной позиции $\{t_*, x_*\}$ порождает множество движений $X[t_*, x_*, \bar{u}]$. Множество движений, порожденных \bar{u} и \bar{v} и исходящих из точки $\{t_*, x_*\}$ будем обозначать $X[t_*, x_*, \bar{u}, \bar{v}]$.

Определение. Пара r -стратегий \bar{u}^0, \bar{v}^0 образует ситуацию равновесия в игре (1) – (5), если

1) управления \bar{u}^0, \bar{v}^0 порождают единственное решение $x^0(t)$ задачи Коши (1) – (3), которое является и единственным движением, то есть при всех t имеет место соотношение $X[t, x^0(t), \bar{u}^0, \bar{v}^0] = \{x^0(\tau), t \leq \tau \leq 1\}$;

2) выполняются равенства

$$I_1(\bar{u}^0, \bar{v}^0) = \max_{X[0,0,\bar{v}^0]} x_1(1), \quad I_2(\bar{u}^0, \bar{v}^0) = \max_{X[0,0,\bar{u}^0]} x_2(1).$$

Обозначим $L_1(t) = \min_{v \in Q} \max_{u \in P} M_1(u, v, t)$ и пусть $v^{\min}(t)$ – управление второго игрока, на котором достигается этот минимум. Положим $L_2(t) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} M_2(u, v, t)$ и пусть $u^{\min}(t)$ – управление первого игрока, на котором достигается этот минимум.

Выберем некоторые кусочно-постоянные функции $u^0(t), v^0(t)$, порождающие траекторию $x^0(t) = (x_1^0(t), x_2^0(t))$, $x_i^0(t) = \int_0^t M_i(u^0(\tau), v^0(\tau)) d\tau, i = 1, 2$.

Обозначим

$$G_i = \{(x, t) \mid x_i + \int_t^1 L_i(\tau) d\tau \leq x_i^0(1)\}, \partial G_i = \{(x, t) \mid x_i + \int_t^1 L_i(\tau) d\tau = x_i^0(1)\}, i = 1, 2,$$

$$M_1^*(t) = \max_u M_1(u, \bar{v}^0, t), M_2^*(t) = \max_v M_2(\bar{u}^0, v, t), M_i^0(t) = M_i(u^0, v^0, t), i = 1, 2.$$

Предполагаем, что $M_i^*(t) \neq L_i(t), \forall t \in [0, 1], i = 1, 2$. Далее будем считать, что $u^0(t) = u^0 = Const, v^0(t) = v^0 = Const$ и они порождают траекторию

$$x^0(t) \in ((G_1 \setminus \partial G_1) \cap (G_2 \setminus \partial G_2)), t \in [0, 1].$$

Пусть число $\delta, 0 < \delta < 1$, так мало, что множество $G^\delta \in ((G_1 \setminus \partial G_1) \cap (G_2 \setminus \partial G_2))$,

$$G^\delta = \{(x, t) \mid x_i^0(t) - \delta(1-t) \leq x_i \leq x_i^0(t) + \delta(1-t), i = 1, 2, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Построим r -стратегии $\bar{u}^{0\delta} = (r, u(\cdot)), \bar{v}^{0\delta} = (r, v(\cdot))$,

$$\bar{u}^{0\delta} = \begin{cases} u((x, t), r) : u(\tau) = u^0, (x, t) \in G^\delta, t \leq \tau < t+r, r > 0; u(t) = u^0, r = 0; \\ r : x_2 + \int_t^{t+r} M_2^*(\tau) d\tau + \int_{t+r}^1 L_2(\tau) d\tau = x_2^0(1), (x, t) \in G^\delta, \\ u(t) = u^{\min}(t), r = 0, \\ r = 1-t, (x, t) \notin G^\delta. \end{cases}$$

$\bar{v}^{0\delta}$ строится аналогично. $\bar{u}^{0\delta}, \bar{v}^{0\delta}$ образуют ситуацию равновесия. Они порождают равновесную траекторию $x^0(t)$.

Моменты получения информации для $x^0(t), t \in [0, 1]$ для первого игрока таковы:

$$t_{k+1}(t_k) : \int_0^{t_k} M_2^0(\tau) d\tau + \int_{t_k}^{t_{k+1}} M_2^*(\tau) d\tau + \int_{k+1}^1 L_2(\tau) d\tau = x_2^0(1), k = 0, 1, \dots$$

Моменты получения информации для второго игрока строятся аналогично.

В дальнейшем рассматривается описанная выше игра при условии, что каждое дискретное наблюдение и начало непрерывного наблюдения для движения обходится наблюдателю i в $d_i, 0 < d_i \leq 0.1, i = 1, 2$, единиц. Так, для того, чтобы узнать о позиции игры в момент t_k требуется начинать наблюдение в момент $t_k - d_i$.

Если t_n такой момент дискретного наблюдения, что расстояние между ним и моментом t_{n+1} меньше либо равно d , то с момента t_n нет смысла получать информацию дискретным образом, а следует начинать непрерывную проверку.

$$\begin{cases} t_{n+1} - t_n \leq d \\ t_n - t_{n-1} > d \end{cases}.$$

Продолжать непрерывную проверку следует до такого момента \mathcal{G} , что $t_{k+1}(\mathcal{G}) - \mathcal{G} > d$ и далее проводить дискретную проверку до тех пор пока не возникнет необходимость в непрерывной проверке и т.д. Все затраченное на проверку время можно просуммировать и получить величину T_1 для первого игрока и T_2 для второго игрока. Суммарное время проверки состоит из времени, потраченного на все

дискретные наблюдения, на все непрерывные наблюдения и на начала непрерывных наблюдений.

Определение. Стратегии (\bar{u}, \bar{v}) образуют ситуацию равновесия с запасом времени наблюдения T_1 у первого игрока и T_2 у второго, если кроме условий 1,2 из определения ситуации равновесия в r -стратегиях, выполняется условие

3) для любого компоненты $x_2(t)$ ($x_1(t)$) движения $x(t) \in X(0, 0, \bar{u}, \bar{v})$ суммарное время проверки меньше T_1 (T_2).

Теорема. Пусть суммарное время проверки для движения $x_i^0(t)$ равно T_i , $i=1,2$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что r -стратегии $\bar{u}^{0\delta}$, $\bar{v}^{0\delta}$ образуют ситуацию равновесия с запасом времени наблюдения $T_1 + \varepsilon$ у первого игрока и $T_2 + \varepsilon$ у второго.

Теорему удалось доказать благодаря тому, что стратегии наказания $u^{\min}(t)$, $v^{\min}(t)$ являются программами и не требуют для своего осуществления поступления информации о ходе игры, кроме того момента, когда в их применении возникла необходимость.

Список литературы

1. Кононенко А.Ф. О задаче наблюдения в повторяющихся операциях / Современное состояние теории исследования операций: Сборник научных трудов. М: Наука, 1979. С. 179–182.
2. Мохонько Е.З. Ситуация равновесия в неантагонистической дифференциальной игре с ограниченным запасом времени наблюдения // Труды. Всероссийская научная конференция с международным участием «Моделирование коэволюции природы и общества: проблемы и опыт. К 100 -летию со дня рождения академика Н.Н.Моисеева» ФИЦ ИУ РАН, Москва, 7-10 ноября М.: ФИЦ ИУ РАН, 2017. С. 158-165.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.Н. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Non - antagonistic differential game with restriction on time of observation

E.Z. Mokhonko

Dorodnicyn Computing Centre FRC CSC of RAS, Moscow, Russia

Смешанные стратегии в векторной игре и свертка Гермейера

Н.М. Новикова¹, И.И. Поспелова²

¹ВЦ имени А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

²МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В [1] исследована многокритериальная (МК-) игра с нулевой суммой двух лиц **С** и **П**, где игрок **С** выбирает стратегию $x \in X = [0, 1]$, а игрок **П** – стратегию $y \in Y = \{1, 2\}$. Предполагается, что **С** максимизирует, а **П** минимизирует векторный критерий

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left(y \frac{\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \right).$$

Допускается применение игроком **П** смешанных стратегий.

Для решения МК-игр двух лиц с противоположными интересами известен подход [2], когда решением МК-игры, или МК-равновесием, считают множество R таких точек (x^*, y^*) , что $x^* \in X_S(y^*)$ и $y^* \in Y_S(x^*)$, где индекс S указывает на множество оптимальных по Слейтеру реализаций МК-максимума [2–4] вектор-функций $F(x, y^*)$ и $-F(x^*, y)$ по x

и y соответственно. В случае конечных X и Y Шепли [3] свел описание этого множества к семейству задач поиска решений скалярных игр с функциями выигрышей y каждого игрока, образованными *линейными свертками* (ЛС) частных критериев с весовыми коэффициентами (не обязательно одинаковыми у игроков). В примере из [1] решение игры по Шепли оказалось неизбирательным – состояло из всех пар (x, p) , где p – вероятность выбора $y = 2$ игроком **II**. Но при скаляризации задачи МК-оптимизации Ю.Б. Гермейер [4] предложил использовать (помимо ЛС) логическую свертку, когда вместо суммы частных критериев берется минимум из них. Причем оказалось удобней не умножать частные критерии, а делить их на весовые коэффициенты. Такая свертка называется *гермейеровской*, или *обратной логической* (ОЛС). При замене ЛС на ОЛС в [1] получили более узкое множество решений.

Основное отличие в постановке МК-игры из [1] от условий [3] – отсутствие конечности множества X стратегий **C**. При этом игроку **C** были не нужны смешанные стратегии. Понятно, что если аппроксимировать X конечным множеством и допустить смешанные стратегии, то получим все исходные стратегии **C**, но компоненты вектор-функции выигрышей станут кусочно-линейными. Вопрос о существенности указанного отличия был поставлен в [1], рассмотрим его далее. Перейдем к конечному числу стратегий **C**, т.е. положим $X = \{0; 1/T; 2/T; \dots, (T - 1)/T; 1\}$, где T – некоторое натуральное число. Разрешим **C** применять смешанную стратегию $q(\cdot) \geq 0$ с суммой компонент, равной 1. Пусть **C** рассчитывает на средний выигрыш по обоим критериям

$$F^T(q(\cdot), y) = \left(\frac{y}{2} \sum_{t=0}^T q(t) \sqrt{\frac{t}{T}}, \frac{1}{y} \sum_{t=0}^T q(t) \sqrt{1 - \frac{t}{T}} \right) \text{ для } y \in Y = \{1, 2\}.$$

Остановимся на предельном случае $T = 1$, обозначив через q вероятность выбора $x = 1$. Тогда у **C** вектор выигрышей $F^1(q, y) = (yq/2, (1-q)/y)$, и множества достижимости $W(y)$ в критериальном пространстве – это $W(1) = (q/2, (1-q))$, $W(2) = (q, (1-q)/2)$, которые для $q \in [0, 1]$ представляют собой два пересекающихся отрезка прямых из точки $(0, 1/2)$ в $(1, 0)$ и из точки $(0, 1)$ в $(1/2, 0)$. В полученной задаче для **C** при каждом y все достижимые точки оптимальны по Слейтеру, поэтому данные отрезки определяют значения МК-максимума по $q \in [0, 1]$ его среднего вектора критериев при $y = 1$ и 2 , соответственно, и служат линейной аппроксимацией множеств $F^*(1)$ и $F^*(2)$ из [1].

Построим для рассматриваемого примера множества $R = R_{\text{лс}}$ – решение и $Z = Z_{\text{лс}}$ – значение МК-игры согласно [2, 3] и их аналоги, $R_{\text{олс}}$ и $Z_{\text{олс}}$, получающиеся при использовании обоими игроками ОЛС вместо ЛС. Обозначим через λ вес 1-го критерия игрока **C** в ЛС.

При фиксированном выборе y игроком **II**, ЛС с параметром λ у **C** задается функцией $L(\lambda, q, y) = \lambda y q/2 + (1-\lambda)(1-q)/y$. Ее среднее значение по y равно $\{q(3\lambda+p-2) + (2-p)(1-\lambda)\}/2$, где p – вероятность $y = 2$ в смешанной стратегии **II**. Максимум его по q реализует

$$q^0 = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 2 - 3\lambda, \\ 1, & \text{если } p > 2 - 3\lambda, \\ \forall, & \text{если } p = 2 - 3\lambda. \end{cases}$$

Аналогично минимум среднего значения ЛС с параметром α для игрока **II** достигается в зависимости от q на его стратегии

$$p^0 = \begin{cases} 0, & \text{если } q > 1 - \alpha, \\ 1, & \text{если } q < 1 - \alpha, \\ \forall, & \text{если } q = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Ситуация $(q = 1 - \alpha, p = 2 - 3\lambda)$ является равновесной для скалярной игры, в которой **C** выбрал ЛС с параметром λ при $\lambda \in [1/3, 2/3]$, а **II** выбрал ЛС с параметром α . (При остальных значениях λ равновесия в чистых стратегиях.) Перебрав всевозможные пары весовых коэффициентов, получим все пары (q, p) , т.е. весь набор смешанных стратегий в качестве решения МК-игры в ЛС (по определению из [3]). Та же картина наблюдалась и до дискретизации множества X (см. рис. 7-а в [1]).

Посчитаем теперь $R_{\text{олс}}$ – равновесия в ОЛС.

Для игрока **С**, применяющего смешанные стратегии с параметром q и ОЛС с параметром μ , среднее значение ОЛС при выборе p игроком **П** равно

$$\overline{M}_C(q, p, \mu) = p \min \left\{ \frac{q}{\mu}, \frac{(1-q)}{2(1-\mu)} \right\} + (1-p) \min \left\{ \frac{q}{2\mu}, \frac{(1-q)}{(1-\mu)} \right\}. \quad (1)$$

Для игрока **П**, использующего $y = 2$ с вероятностью p и ОЛС с параметром v , ОЛС имеет вид

$$M_{\text{П}}(x, p, v) = \max \left\{ \frac{1}{v} \left(p\sqrt{x} + (1-p)\frac{\sqrt{x}}{2} \right), \frac{1}{1-v} \left(p\frac{\sqrt{1-x}}{2} + (1-p)\sqrt{1-x} \right) \right\},$$

а ее среднее дает формулу

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\text{П}}(q, p, v) &= q \max \left\{ \frac{1}{v} \left(p + \frac{1-p}{2} \right), 0 \right\} + (1-q) \max \left\{ 0, \frac{1}{1-v} \left(\frac{p}{2} + (1-p) \right) \right\} \\ &= q \frac{p+1}{2v} + (1-q) \frac{2-p}{2(1-v)} \end{aligned}$$

(в случае μ, v равно 0 или 1 соответствующие слагаемые в (1) и определениях ОЛС для **П** опускаем). При заданных q и v минимум по p последнего выражения достигается на

$$p(q, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } q > v, \\ 1, & \text{если } q < v, \\ \forall, & \text{если } q = v. \end{cases} \quad (2)$$

Оптимальная стратегия игрока **С** при $p = 1$ равна $q^1 = \mu/(2-\mu)$, и $\overline{M}_C(q^1, 1, \mu) = 1/(2-\mu)$. Для $p = 0$ оптимум достигается на $q^2 = 2\mu/(1+\mu)$, а $\overline{M}_C(q^2, 0, \mu) = 1/(1+\mu)$, что меньше предыдущего при $\mu > 1/2$. При этом всегда $q^1 \leq q^2$ (равенство выполнено только для $\mu = 0$ или 1). С учетом (2) получаем, что при $\mu \geq 1/2$ и $2v/(1+v) > \mu$ (если $v > 1/3$) пары $(q^1, 1)$ являются равновесными для игры между **С** и **П** в ОЛС. Симметричные равновесия образуют пары $(q^2, 0)$, когда $\mu \leq 1/2$ и $\mu > v/(2-v)$ (при $v < 2/3$). Для соответствующих μ и v компонента q^1 в своей паре пробегает все значения из отрезка $[1/3, 1]$, а q^2 – из $[0, 2/3]$.

Сложнее оказываются случаи при $\mu > 1/2$, если $2v/(1+v) < \mu$ (т.е. $q^1 > v$), и при $\mu < 1/2$, если $v/(2-v) > \mu$ (т.е. $q^2 < v$). С такими μ и v игроку **С** уже может оказаться выгодней вполне смешанная стратегия игрока **П**, которая способна быть равновесной лишь для последнего варианта в (2). Отметим, что при любом q (из-за $q^1 \neq q^2$) для одного из двух минимумов в (1) не выполняется равенство, обеспечивающее его максимум. Выбирая $q = q^1$, приходим к вдвое меньшему значению второго минимума в (1), и аналогично для $q = q^2$. Для $q = v$ при $\mu > 1/2$ и $q^1 > v$ будет еще ниже значение второго минимума в (1) – вдвое меньше, чем первого, и нет интереса для игрока **С** в значении $p > 0$ при условии $(v/\mu)(p+1)/2 < 1/(1+\mu)$, так как правая величина достижима при $q = q^2$. Тем не менее, для игры в нормальной форме у игрока нет возможности выбрать лучшую для себя точку равновесия. Поэтому построим для игрока **С** аналог формулы (2).

С учетом соотношений между минимумами в (1) приведем явный вид для значений функции выигрыша игрока **С**:

$$\overline{M}_C(q, p, \mu) = \begin{cases} \frac{q(p+1)}{2\mu}, & 0 \leq q \leq \frac{\mu}{2-\mu} = q^1, \\ \frac{q(1-p-\mu) + \mu p}{2\mu(1-\mu)}, & q^1 < q < q^2, \\ \frac{(1-q)(2-p)}{2(1-\mu)}, & q^2 = \frac{2\mu}{1+\mu} \leq q \leq 1. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна по q , найдем ее максимум

$$\bar{M}_C(q^*, p, \mu) = \begin{cases} \frac{p+1}{2(2-\mu)}, & p+\mu > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } p+\mu = 1, \\ \frac{(2-p)}{2(1+\mu)}, & p+\mu < 1, \end{cases}$$

и реализацию оптимума

$$q^* = q(p, \mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{2-\mu}, & p+\mu > 1, \\ \forall, & p+\mu = 1, \\ \frac{2\mu}{1+\mu}, & p+\mu < 1. \end{cases}$$

В итоге, на основании (2), для фиксированной пары параметров (μ, ν) равновесными будут все следующие пары стратегий $(q, p)[(\mu, \nu)]$:

$$(q^2, 0) \text{ при условии } \frac{2\mu}{1+\mu} > \nu,$$

$$(q^1, 1) \text{ при условии } \frac{\mu}{2-\mu} < \nu,$$

$$(q = \nu, p = 1 - \mu) \text{ для любых } (\mu, \nu).$$

Перебрав все значения параметров (μ, ν) , получим в пространстве стратегий квадрат $[0,1] \times [0,1]$. Отсюда выводим, что множество равновесных смешанных стратегий $R_{\text{олс}}$ совпадает с $R_{\text{лс}}$ и также оказывается неизбирательным. Заметим, что при $\mu = 1/2, \nu = 1/2$ вполне смешанная стратегия игрока **II** не выгодна **C**, так как выбором $q \neq \nu$ игрок **C** обеспечит $p = 0$ или 1 и выигрыш $2/3$, в отличие от значения $1/2$ для (1), которое дает ему выбор $q = 1/2$. Однако точка $(1/2, 1/2)$ входит в $R_{\text{олс}}$, и ни одному игроку по отдельности не выгодно от нее отклониться. (В игре Γ_1 с первым ходом игрока **C** она бы уже не была равновесием.)

В результате показали, что при выборе всевозможных пар весовых коэффициентов ОЛС получаются всевозможные пары (q, p) в качестве решения МК-игры в ОЛС, в отличие от того, что было до дискретизации X (см. рис. 7-б из [1]). Таким образом, для простейшего варианта конечной игры **C** и **II** свертки ЛС и ОЛС повели себя одинаково. Рассмотренный пример демонстрирует существенное отличие конечных и бесконечных МК-игр.

На основе найденных равновесий можно построить множества в критериальном пространстве, соответствующие $Z_{\text{лс}}$ и $Z_{\text{олс}}$ для данного примера. Распространим на него определения из [4, 1], которые для ЛС и ОЛС различаются:

$$Z_{\text{лс}} = \{w^* \in \mathbf{R}^2 \mid w^* = pF^1(q, 2) + (1-p)F^1(q, 1), (q, p) \in R_{\text{лс}}\}, \text{ а}$$

$$Z_{\text{олс}} = \{w^* \in \mathbf{R}^2 \mid w^* = \mu \bar{M}_C(q, p, \mu), (q, p) = (q, p)[(\mu, \nu)] \in R_{\text{олс}}, \nu \in [0,1], \mu \in [0,1]\}.$$

На рис. 1 построены оба варианта значения МК-игры. Так что, несмотря на совпадение равновесий, получаем несовпадение оценок выигрыша в МК-игре при использовании ЛС и ОЛС и приходим к разным значениям игры – множествам на рис. 1 слева и справа (на рис. 1 слева приведена аппроксимация $Z_{\text{лс}}$ – точки искомого множества заполняют фигуру целиком). При этом ни $Z_{\text{лс}}$ не содержит $Z_{\text{олс}}$, ни наоборот.

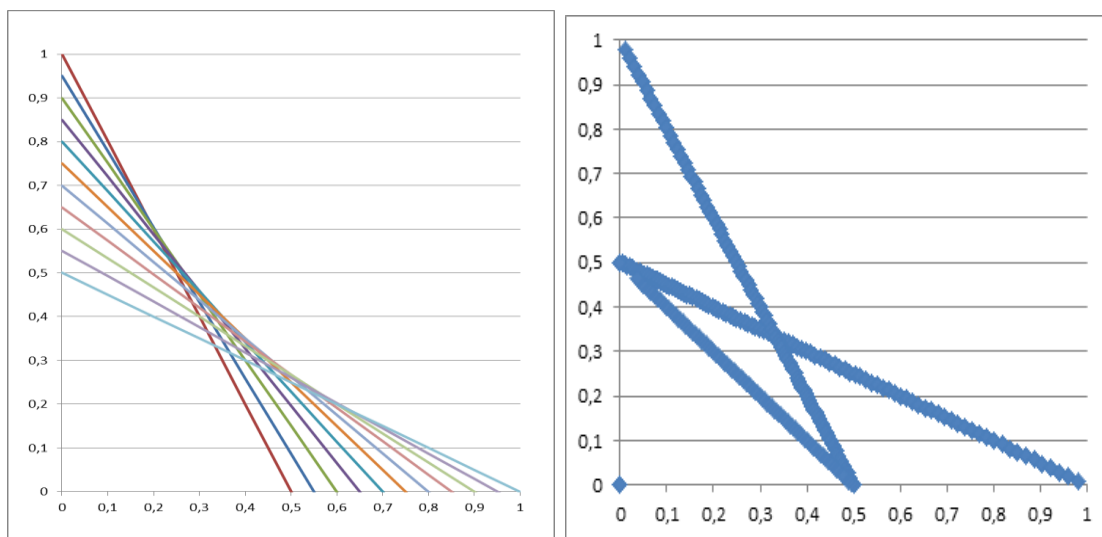


Рисунок 1. Аппроксимация $Z_{лс}$ (слева) и $Z_{олс}$ (справа) для рассматриваемого примера

Картина несовпадения значений имеется и для случая МК-игры в чистых стратегиях да и просто для оценки МК-выигрыша игрока C при $y = 1$. Действительно, пусть игрок C выбирает одну из двух стратегий $x \in \{0, 1\}$, максимизируя векторный критерий $F(x) = (\sqrt{x}, \sqrt{1-x})$. Тогда обе его стратегии образуют множество Слейтера (и Парето) X_S , а значение $F(X_S)$ МК-максимума состоит из двух точек $(0, 1)$ и $(1, 0)$ на координатных осях в пространстве критериев. Те же точки получаем и при использовании ЛС игроком C . Применение ОЛС приводит, кроме указанных точек, еще к точке $(0,0)$, возникающей при двух ненулевых компонентах вектора параметров μ .

Основной вывод, который можно сделать на базе рассмотренного примера, состоит в зависимости значения МК-выигрыша от вида используемой игроками скаляризации векторного критерия. Поэтому выбор свертки для получения оценок МК-выигрыша должен соотноситься с содержательным наполнением МК-игры.

Список литературы

1. Новикова Н.М., Пospelова И.И. Метод сверток в многокритериальных играх // ЖВМ и МФ. 2018. Т. 58. № 2.
2. Blackwell D. An analog of the minimax theorem for vector payoffs // Pac. J. of Math. 1956. № 6.
3. Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Res. Log. Quarterly. 1959. № 6.
4. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

Mixed Strategies in Vector Game and Germeyer's scalarization

N.M. Novikova¹, I.I. Pospelova²

¹*Dorodnicyn Computing Centre of FRC CSC RAS, Moscow, Russia*

²*Lomonosov MSU, Moscow, Russia*

Приближенное доминирование и приближенное равновесие

С.М. Гудков¹, Н.М. Новикова²

¹МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

В [1] приведено понятие ε -равновесия для антагонистических игр и показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ ситуация ε -равновесия совпадает с ситуацией равновесия.

Определение 1 [1, с. 59]. Ситуация $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ в антагонистической игре $\Gamma = (X, Y, H)$ называется ситуацией ε -равновесия, если для любых стратегий $x \in X$ и $y \in Y$ игроков 1 и 2 соответственно, выполняется неравенство $H(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \leq H(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq H(x_\varepsilon, y) + \varepsilon$.

Столкнувшись с тем, что при переходе от повторяющейся дилеммы заключенного к повторяющейся дилемме заключенного с дисконтированием игра переставала иметь сложное равновесие, в [2] ввели понятие сложного ε -равновесия на основе определения (ε, K) -доминирования, обобщающего стандартное определение доминирования [3].

Определение 2. Стратегия x_i игрока i в игре в нормальной форме $\Gamma = (X_i, u_i; i \in N)$ (ε, K) -доминирует стратегию y_i , если

$$\forall x_{-i} \in X_{-i}: u_i(y_i, x_{-i}) \leq u_i(x_i, x_{-i}) + \varepsilon \text{ и}$$

$$\exists x_{-i} \in X_{-i}: u_i(y_i, x_{-i}) + K\varepsilon < u_i(x_i, x_{-i}), \text{ где } K \geq 2.$$

Возможны дополнительные условия на K , в том числе, $K \geq |X_i|$ и/или $K \geq |X_{-i}|$ (здесь и далее через $|\cdot|$ обозначаем число элементов множества), в последующих примерах они будут выполнены. Условие $K \geq |X_{-i}|$, в частности, делает (ε, K) -доминирование полным порядком на множестве стратегий игрока в смысле его среднего выигрыша при равной вероятности выбора всех стратегий партнеров. Отметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и конечном K определение (ε, K) -доминирования совпадает с обычным определением доминирования. Кроме того, если стратегия x_i игрока i (ε, K) -доминирует y_i , то y_i не (ε, K) -доминирует x_i .

При $K \geq |X_i|$ невозможно построить цепочку, такую чтобы x_{i1} (ε, K) -доминировала x_{i2} , x_{i2} (ε, K) -доминировала x_{i3} , ..., $x_{i(n-1)}$ (ε, K) -доминировала x_{in} , а x_{in} (ε, K) -доминировала x_{i1} . Тем не менее, в отличие от обычного доминирования, отношение (ε, K) -доминирования не транзитивно, т.е. возможно, что x_i (ε, K) -доминирует y_i , y_i (ε, K) -доминирует z_i , а при этом x_i не (ε, K) -доминирует z_i . Однако, если x_i (ε, K) -доминирует y_i и y_i (ε, K) -доминирует z_i при $\varepsilon = \varepsilon_1$, $K = K_1$, то x_i (ε, K) -доминирует z_i при $\varepsilon = 2\varepsilon_1$ и $K = (K_1 - 1)/2$ при условии, что новое $K \geq 2$.

Введем теперь понятие недоминируемой стратегии в приближенном смысле.

Определение 3. Стратегию y_i игрока i в игре нормальной форме $(X_i, u_i; i \in N)$ будем называть (ε, K) -недоминируемой, если для любых стратегий этого игрока $x_i \in X_i$ верно, что x_i не (ε, K) -доминирует y_i , и обозначать $y_i \in D_i(u_i; X_j, j \in N)$.

На основе определения 3 сформулируем понятие сложного (ε, K) -равновесия. Для игры в нормальной форме $(X_i, u_i; i \in N)$ операция последовательного исключения (ε, K) -доминируемых стратегий означает построение последовательностей $X_i = X_i^0 \supset X_i^1 \supset \dots \supset X_i^t \supset X_i^{t+1} \supset \dots$ для любых $i \in N$, где $X_i^{t+1} = D_i(u_i; X_j^t, j \in N)$, а $D_i(u_i; X_j^t, j \in N)$ – множество всех (ε, K) -недоминируемых стратегий игрока i для игры $(X_i^t, u_i; i \in N)$, т.е. всех таких y_i , что $y_i \in D_i(u_i; X_j^t, j \in N) \Leftrightarrow \nexists x_i \in X_i^t: x_i$ (ε, K) -доминирует y_i .

Определение 4. Игру в нормальной форме $(X_i, u_i; i \in N)$ назовем разрешимой по (ε, K) -доминированию, если в ходе последовательного исключения (ε, K) -доминируемых стратегий найдется конечное T , что для всех i множества $X_i^T \neq \emptyset$ и функция выигрыша u_i не зависит от x_i на $X_N^T: \forall x_i, y_i \in X_i^T, \forall x_{-i} \in X_{-i}^T u_i(y_i, x_{-i}) = u_i(x_i, x_{-i})$. В этом случае X_N^T будем называть множеством сложных (ε, K) -равновесий игры.

Из [2] следует, что игра дилемма заключенного с дисконтированием разрешима по (ε, K) -доминированию и сложному (ε, K) -равновесию игры соответствуют стратегии игроков «как ты, так и я», приводящие к кооперативному исходу, при ε равном 5% от максимального по модулю значения из диапазона выигрышей игроков и $K = |X_i|$.

Дилемма заключенного с дисконтированием – не единственная задача, в которой применимо (ϵ, K) -доминирование. Одним из примеров игры, разрешимой по (ϵ, K) -доминированию, является игра «перекресток», в которой две машины движутся по пересекающимся дорогам и одновременно встречаются на перекрестке. Каждый из водителей может остановиться или продолжить движение. В случае если оба игрока продолжают движение, происходит авария и каждый терпит серьезные убытки. Если один проезжает перекресток, а другой останавливается, то проехавший получает небольшой выигрыш, а его противник оказывается в небольшом проигрыше. Если оба останавливаются, то оба не получают и не теряют ничего. Эта ситуация может быть описана следующей биматричной игрой:

| | |
|-------------|------|
| -1000,-1000 | 1,-1 |
| -1,1 | 0,0 |

При ϵ равном 0.5% от максимального по модулю значения из диапазона выигрыша игроков и $K = |X_i|$, стратегия остановиться (ϵ, K) -доминирует стратегию продолжить движение, и исходом игры, соответствующим сложному (ϵ, K) -равновесию, будет исход, когда обе машины остановились.

Кроме того, изучим вопрос, может ли появиться равновесие Нэша и сложное (ϵ, K) -равновесие в игре, не имеющей равновесия, если сделать ее бесконечно повторяющейся с дисконтированием. Примером такой игры, является игра с матрицей:

| | |
|------|------|
| 2, 2 | 1, 1 |
| 3, 0 | 0, 1 |

При достаточно большом коэффициенте дисконтирования игра имеет равновесие Нэша, когда оба игрока выбирают триггерную стратегию, т.е. выбирают первую строку (и столбец) до тех пор, пока соперник не сыграет второй столбец (или строку), и вторую после. Однако, при сравнении такой триггерной стратегии со стационарными одношаговыми, оказывается, что она доминируема. Приведем матрицу игры (1) при ее повторении и коэффициенте дисконтирования $q = 0.9$:

| | Всегда столбец 1 | Всегда столбец 2 | «Как ты так и я», начало – столбец 1 | «Как ты так и я», начало – столбец 2 | Триггерная |
|---|---------------------|---------------------|---|---|------------|
| Всегда строка 1 | 20, 20 | 10, 10 | 20, 20 | 19, 19 | 20, 20 |
| Всегда строка 2 | 30, 0 | 0, 10 | 3, 9 | 0, 10 | 3, 9 |
| «Как ты так и я», начало – строка 1 | 20, 20 | 1, 10 | 20, 20 | 19.47, 5.26 | 20, 20 |
| «Как ты так и я», начало – строка 2 | 21, 18 | 0, 10 | 20.53, 4.74 | 0, 10 | 3.9, 9 |
| Триггерная | 20, 20 | 1, 10 | 20, 20 | 3.7, 9.1 | 20, 20 |

При ϵ равном 5% от максимального по модулю значения из диапазона выигрыша игроков и $K = |X_i|$, данная игра также оказывается разрешима по (ϵ, K) -доминированию и сложное (ϵ, K) -равновесие достигается, когда первый игрок выбирает всегда первую строку, а второй выбирает триггерную стратегию.

Таким образом, можно надеяться, что понятия (ε, K) -доминирования и сложного (ε, K) -равновесия будут полезны при исследовании ряда задач с использованием теории игр.

Список литературы

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр: учебник. Спб.: БХВ-Петербург, 2012.
2. Новикова Н. М., Гудков С.М. Один вариант определения приближенного равновесия в играх // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов (23 октября - 27 октября 2017 г.). М.: МАКС Пресс, 2017. С. 70–70.
3. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
4. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.
5. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС-Пресс, 2005.

Approximate dominance and approximate equilibrium

S.M. Gudkov¹, N.M. Novikova²

¹*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

²*Dorodnicyn Computing Center of FRC CSC RAS, Moscow, Russia*

Centrality rewarding Shapley and Myerson values for undirected graph games

A. Khmel'nitskaya¹, G. van der Laan², D. Talman³

¹*Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia*

²*VU University Amsterdam, Amsterdam, the Netherlands*

³*Tilburg University, Tilburg, the Netherlands*

We introduce two values for cooperative games with communication graph structure. In cooperative games without restrictions on cooperation the classical Shapley value distributes the worth of the grand coalition among the players by taking into account the worths that can be obtained by any coalition of players, however it does not take into account the role of the players when communication between the players is restricted. Existing values for communication graph games such as the Myerson value and the average tree solution only consider the worths of connected coalitions and only in this way they respect the communication restrictions. They do not take into account the position of a player in the graph, which implies that in the unanimity game on the grand coalition all players are treated equally when the graph is connected, and so, the players with more central position in the graph get the same payoff, as players which are not central. The two new values take into account the position of a player in the graph in a sense that in unanimity games players that do not generate worth but are needed to connect worth generating players are treated similar to the latter players, and in the unanimity game on the grand coalition they assign larger shares to more central in the graph players. For both newly introduced values, we provide axiomatic characterization on the class of connected cycle-free graph games.

Grey Transportation games

Olgun M.O.¹, Palanci O.¹, Qasim E.¹, Weber G.W.² and Alparslan Gok S.Z.¹

¹*Suleyman Demirel University, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, 32260, Isparta, Turkey,* ²*Poznan University of Technology, Poznan, Poland*
and

Middle East Technical University, Institute of Applied Mathematics, Ankara, Turkey

A system on which the information is partly known and partly unknown is called the grey information. In this paper, we extend classical transportation games by using grey information. We introduce cooperative grey games and focus on sharing equal surplus Solutions. In transportation situations, it may affect the optimal amount of goods and consequently whether and with an amount of products transport producers to retailers. We prove, the nonemptiness of the grey core for the transportation grey games, and some results on the relationship between the grey core and the dual grey optimal solutions of the underlying transportation situations are also provided. Moreover, we characterize the grey core using the square operator and using two scenarios such as pessimistic and optimistic.

Keywords: Cooperative grey games, Transportation games, Uncertainty, Grey equal surplus sharing solutions

1. Introduction

In many situations, producers and retailers are aiming to minimize their costs or maximizing their profits. Producers and retailers can form coalitions in order to obtain/save as much as possible. Constitutively, a transportation situation consists of two sets of agents called producers and retailers which produce/demand goods. The transport of the goods from the producers to the retailers has to be profitable. Therefore, the main objective is to transport the goods from the producers to the retailers at maximum profit [1]. Such a cooperation can occur in transportation situations [2, 3]. However, when the agents involved agree on coalition, the question of distributing the obtained benefit or costs among the agents arises. The cooperative game theory is widely used on interesting sharing cost/profit problems in the areas Operations Research such as connection, routing, scheduling, production and inventory, transportation situations [4].

Transportation games are examined in [3]. Our paper surveys the core of the transportation games and proves the nonemptiness of the core of transportation games. Moreover, [3] provides some results about the relationship between the core and dual optimal solutions of the transportation problem. The paper [5] introduces an ad hoc solution concept for transportation games called the pairwise Egalitarian solution. In the sequel, the article [2] examines the relationship between the so-called pairwise solutions and the core of transportation games. Furthermore, [2] shows that every core element of a transportation game is contained in a pairwise solution with a specific weight system.

In the classical approach to the problem, the parameters are exactly known. In this case the problem is fully solved using the results of [3]. However, in real-life transportation situations, problem parameters are not known exactly. Agents considering cooperation can rather forecast the lower and upper bounds for the outcome of their cooperation. Thus, we have a transportation grey situation and to solve the related sharing benefit problems we need suitable sets of solutions.

This paper extends the analysis of two-sided transportation situations [2] and their related cooperative games to a setting with grey data, i.e., the profit b_{ij} of goods j by producer i , the production p_i of goods of producer i , and the demand q_j of goods retailer j , in the transportation model now lie in greys of real numbers obtained by forecasting their values from the aspect expert view.

Our paper is organized as follows. In Section 2, we recall basic grey notions and facts from the theory of cooperative grey games. In Section 3, we introduce grey situations and give basic definition of transportation grey. In Finally, in Section 4, we conclude with some remarks on further research.

2 Preliminaries

2.1 Grey Numbers and Their Operators

In this section, some preliminaries from grey calculus and grey calculus used for cooperative grey games are given [10].

A grey number is such a number whose exact value is unknown but a range within that the value lies is known. In applications, ranging from engineering, economics, finance, medicine to social sciences, a grey number in general is an grey or a general set of numbers.

In this paper, we consider the grey grey numbers.

A grey number with both a lower limit \underline{a} and a upper limit \bar{a} is called a *grey number*, denoted as $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$. For example, the weight of a car is between 1 and 1.5 tons. A specific person's height is between 1.8 and 1.9 meters. These two grey numbers can be respectively written as $\otimes_1 \in [1, 1.5]$ and $\otimes_2 \in [1.8, 1.9]$.

2.2. Grey Transportation Games

In this section some preliminaries from transportation games and some useful results from the theory of cooperative grey games are given [2, 6, 7].

we introduce the cooperaitve grey games. A cooperative grey game is an ordered pair $\langle N, w' \rangle$ where $N = \{1, \dots, n\}$ is the set of players, and $w' = \otimes: 2^N \rightarrow G(\mathbb{R})$ is the characterstic function such that $w'(\emptyset) = \otimes_0 \in [0, 0]$, grey payoff function $w'(S) = \otimes_S \in [\underline{A}_S, \bar{A}_S]$ refers to the value belongning to a coalition $S \in 2^N$, where \underline{A}_S and \bar{A}_S , represent the maximum and minumum possible profits of the coalition S . So a cooperaitve grey game can be considered as a classical cooperative game with grey profits \otimes . Grey solutions are useful to solve reward/cost sharing problems with grey data using cooperative grey games as a tool. Building blocks for grey solutions are grey payoff vectors, i.e., whose components belong to $G(\mathbb{R})$. We denote by $G(\mathbb{R})^N$ the set of all such grey payoff vectors. We denote by GG^N the family of all cooperative grey games.

Now, we introduce transportation situation [2]. In a *transportation situation* the set of players is partitioned into two disjoint subsets P and Q , containing n and m players, respectively. The members of P will be called origin players, whereas the members of Q will be the destination players. Each origin player $i \in P$ has a positive integer number of units of a certain indivisible good, p_i , and each destination player $j \in Q$ demands a positive integer number of units of this good, q_j . The shipping of one unit from origin player i to destination player j produces a nonnegative real profit b_{ij} . A *transportation situation* like this is characterized by a 5-tuple (P, Q, B, p, q) , where B is the $n \times m$ matrix of profits, p is the n -dimensional vector of available units at the origins, and q is the m -dimensional vector of demands.

For every transportation situation (P, Q, B, p, q) and every coalition $S \subset N := P \cup Q$, with origin players $S_P := S \cap P$ and destination players $S_Q := S \cap Q$, and assuming that these sets are both non-empty, we can define the maximization problem by:

$$\begin{aligned} T(S): \quad & \text{maximize} \quad \sum_{i \in S_P} \sum_{j \in S_Q} b_{ij} x_{ij} \\ & \text{such that} \quad \sum_{j \in S_Q} x_{ij} \leq p_i, \quad i \in S_P, \\ & \quad \quad \quad \sum_{i \in S_P} x_{ij} \leq q_j, \quad j \in S_Q, \\ & \quad \quad \quad x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in S_P \times S_Q. \end{aligned}$$

The optimization problem $T(S)$ is a typical transportation problem [8]. In Operations Research, transportation problems have been widely studied since they were first introduced in [8], and further theory, as well as an algorithm for the computation of optimal solutions, can be found in [9].

If we denote by $\vartheta(T(S))$ the optimal value of the problem $T(S)$, we can define a *TU-game* associated with every transportation situation (P, Q, B, p, q) in the following way:

- The set of players is $N = P \cup Q$;
- The characteristic function v is given by:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{if } S = \emptyset \text{ or } S \text{ is contained in } P \text{ or in } Q, \\ \vartheta(T(S)), & \text{in any other case.} \end{cases}$$

Now we give the definition of a transportation game.

Definition 2.1 [2] *A transportation game is any TU-game $v \in G^N$ arising from a transportation situation (P, Q, B, p, q) . Often, we identify a transportation situation (P, Q, B, p, q) with its associated transportation game v .*

3 Grey Transportation situations

In this section, we introduce the transportation grey situations inspired by [2]. In a transportation grey situation the set of players is partitioned into two disjoint subsets P and Q , containing n and m players respectively. The members of P will be called origin players, whereas the members of Q will be the destination players. Each origin player $i \in P$ has a positive integer grey number of units of a certain indivisible good, p'_i , and each destination player $j \in Q$ demands a positive integer grey number of units of this good, q'_j . The shipping of one unit from origin player i to destination player j produces a nonnegative grey real profit b'_{ij} . Here, $p'_i := [\underline{p}'_i, \overline{p}'_i]$, $q'_j := [\underline{q}'_j, \overline{q}'_j]$ and $b'_{ij} := [\underline{b}'_{ij}, \overline{b}'_{ij}] \in I(\mathbb{R})$.

A *transportation grey situation* like this is characterized by a 5-tuple (P, Q, B', p', q') , where B' is the $n \times m$ matrix of grey profits, p' is the n -dimensional vector of available grey units at the origins, and q' is the m -dimensional vector of grey demands.

For every transportation grey situation (P, Q, B', p', q') and every coalition $S \subset N := P \cup Q$, with origin players $S_P := S \cap P$ and destination players $S_Q := S \cap Q$, and assuming that these sets are both non-empty, we can define the maximization problem of the pessimistic scenario is expressed by:

$$\begin{aligned} T(S): \quad & \text{maximize} \quad \sum_{i \in S_P} \sum_{j \in S_Q} \underline{b}'_{ij} x_{ij} \\ & \text{suchthat} \quad \sum_{j \in S_Q} x_{ij} \leq \underline{p}'_i, \quad i \in S_P, \\ & \quad \quad \quad \sum_{j \in S_P} x_{ij} \leq \underline{q}'_j, \quad j \in S_Q, \\ & \quad \quad \quad x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in S_P \times S_Q, \end{aligned} \tag{1}$$

and the maximization problem of the optimistic scenario is stated as:

$$\begin{aligned} T(S): \quad & \text{maximize} \quad \sum_{i \in S_P} \sum_{j \in S_Q} \overline{b}'_{ij} x_{ij} \\ & \text{suchthat} \quad \sum_{j \in S_Q} x_{ij} \leq \overline{p}'_i, \quad i \in S_P, \\ & \quad \quad \quad \sum_{j \in S_P} x_{ij} \leq \overline{q}'_j, \quad j \in S_Q, \\ & \quad \quad \quad x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in S_P \times S_Q. \end{aligned} \tag{2}$$

4 Conclusion and Outlook

This paper studies two-sided transportation situations where the agents' unitary problem parameters (b_{ij}, p_i, q_j) in the transportation model are compact greys of real numbers. Firstly, we introduce the transportation grey situations. Secondly, we calculate the grey equal surplus sharing solution methods. transportation grey game and show that interesting results concerning the grey core of a transportation grey game. Moreover, we suggest a procedure that transforms an grey allocation into a payoff vector, under the assumption that only the uncertainty with regard to the value of the grand coalition has been resolved.

For future research we will study grey semi-infinite transportation problems where supplies and demands are grey numbers. The underlying idea is to consider infinitely divisible goods. One can think of using pipelines instead of containers for the transportation of petrol.

References

1. Aparicio J., Llorca N., Sanchez-Soriano J., Sancho J., Valero S. Cooperative logistics games. In book Game Theory. Qiming Huang (Ed.) P. 129–153 <https://mts.intechopen.com/books/game-theory/cooperative-logistic-games>.
2. Sánchez-Soriano J., López M.A., Garca-Jurado I. On the core of transportation games // *Mathematical Social Sciences*. 2001. V. 41. P. 215–225.
3. Sánchez-Soriano J. The pairwise solutions and the core of transportation situations // *European Journal of Operational Research*. 2006. V. 175, № 1. P. 101–110.
4. Borm P., Hamers H., Hendrickx R. Operations research games: A survey // *TOP*. 2001. V. 9. P. 139–216.
5. Sánchez-Soriano J. The pairwise-egalitarian solution // *European Journal of Operational Research*. 2003. V. 150, № 1. P. 220–231.
6. Alparslan Gök S.Z., Miquel S. and Tijs S. Cooperation under grey uncertainty // *Mathematical Methods of Operations Research*. 2009. V. 69, № 1. P. 99–109.
7. Branzei R., Branzei O., Alparslan Gök S.Z., Tijs S. Cooperative Interval Games: A Survey // *Central European Journal of Operations Research*. 2010. V. 18, № 3. P. 397–411.
8. Hitchcock F.L., The distribution of a product from several sources to numerous localities // *Journal of Mathematics Physics*. 1941. V. 20. P. 224–230.
9. Dantzig G.B. *Linear Programming and Extensions* (10th Edition), Princeton University Press, Princeton, 1963.
10. Liu S., Lin Y. *Grey Information: Theory and Practical Applications*. Germany: Springer, 2006.

Grey Baker-Thompson Rule

O. Palanci¹, M.O. Olgun¹ G.W. Weber² and S.Z. Alparslan Gök¹,

¹*Suleyman Demirel University, Isparta, Turkey*

²*Poznan University of Technology, Poznan, Poland and*

Middle East Technical University, Institute of Applied Mathematics, Ankara, Turkey

The grey systems theory, established by [1, 2] is a new methodology that focuses on the study of problems involving small samples and poor information. It deals with uncertain systems with partially known information through generating, excavating, and extracting useful information from what is available. So, systems' operational behaviors and their laws of evolution can be correctly described and effectively monitored. In the natural world, uncertain systems with small samples and poor information exist commonly. That fact determines the wide range of applicability of grey systems theory. Moreover, grey systems and information are a powerful theory capable of bringing forward practically beneficial impacts to the advancement of the human society.

Uncertainty is entering more and more in all areas of natural sciences, engineering, Operations Research (OR), economics and finance, as subject of consideration, of modeling, of control and optimization. As two recent examples, reverse engineering and supply chain management making use of grey numbers can be named here [6]. What in the past was regarded as a matter left alone to the soft human and social sciences, now enters core areas of hard research, of computation and calibration. This has been transforming the view on uncertainty, supported by approaches such as uncertainty quantization, interval uncertainty, grey uncertainty, ellipsoidal uncertainty, robust counterparts of optimization and of stochastic optimal control, e.g. The fast dynamics and growth has just really started.

On the other hand, airport situations have paid much attention in the literature ([3,4]). Each airplane needs an airstrip whose length can be different across airplanes. The larger an airplane, the longer the airstrip it needs. If an airplane is served by an airstrip, then all smaller airplanes can be served at no additional cost. To accommodate all airplanes, the airstrip should be long enough for the largest airplane. The rule, called the Baker-Thompson rule,

provides a fair and easy share for the costs of the landings. It coincides with the Shapley value of the corresponding airport game when the worth of a coalition is defined to be the largest cost of a member in the coalition.

This paper studies an airport problem which is concerned with the cost sharing of an airstrip between airplanes assuming that one airstrip is sufficient to serve all airplanes. The aim of the paper is to present and introduce the grey Baker-Thompson rule. Further, we give an axiomatic characterization of this value by using grey calculus. To do this, we need to study the major and minor axioms. It is shown that these major axioms together with other minor axioms characterizes the grey Baker-Thompson rule for the airport problem [5].

References

1. Deng J. Control problems of Grey Systems // Systems and Control Letters. 1982. V.1, № 5. P. 288–294.
2. Deng J. Grey System Fundamental Method. Wuhan, China: Huazhong University of Science and Technology, 1985.
3. Littlechild S. C., Owen G. A simple expression for the Shapley value in a special case // Management Science. 1973. V. 20, № 3. P. 370–372.
4. Littlechild S. C., Thompson G. F. Aircraft landing fees // The Bell Journal of Economics. 1977. V. 8, № 1. P. 186–204.
5. Palancı O., Alparslan Gök S. Z., Ergün S., Weber G.W. Cooperative grey games and grey Shapley value // Optimization. 2015. V. 64, № 8. P. 1657–1668.
6. Zhang J.J., Wu D.S., Olson D.L. The method of grey related analysis to multiple attribute decision making problems with interval numbers // Mathematical and Computer Modelling. 2005. V. 42, № 9–10. P. 991–998.

A Cooperative Game Theoretical Model on Emergency Logistics Planning after Natural Disasters

Serap Ergun¹, Pinar Usta¹, Sirma Zeynep Alparslan-Gok¹ and Gerhard-Wilhelm Weber²
¹*Suleyman Demirel University, Faculty of Technology, Department of Software Engineering, Isparta, Turkey*

²*Poznan University of Technology, Faculty of Engineering Management, Poznan, Poland and Middle East Technical University, Institute of Applied Mathematics, Ankara, Turkey*

A disaster is a social situation characterized by non-routine, life-threatening physical destruction attributed to the forces of nature, regardless of what other causal factors may seem to be involved. Disasters can be classified as man-made (technological) or natural. Natural disasters are those caused by geophysical, hydrological, meteorological, biological, extraterrestrial, or climatological hazards (Guha-Sapir et al. 2016; Guha-Sapir and Hoyois 2014). These include events caused by hazards such as earthquakes, tsunamis, hurricanes, and floods. Impacts of these events include loss of life, injury, destruction of property and disruption to infrastructure as well as social, economic and environmental damages. These disasters inflict significant human and financial losses every year. The number of natural disasters and people affected by these natural disasters has increased in recent years. Earthquakes are one of the most natural destructive events and they have repeatedly caused considerable losses and casualties in many parts around the world [1, 2, 3].

By contrast, even relatively moderate earthquakes in developing nations still lead to large losses of life. The lack of advance preparedness in emerging countries suggests the need for an appropriate, effective, and efficient response. Moreover, the unpredictability of disasters prevents authorities from determining an exact location for emergency facilities beforehand and given that permanent facilities alone may be insufficient, emergency temporary facilities become especially important in developing countries where disaster preparedness falls short [4].

Logistics plays a significant role in ensuring the success of emergency humanitarian relief operations in terms of particularly medicals, and shelters. Logistic includes the management and analysis of many different situations such as transportation, inventory, supply chain, distribution, location, routing, etc. Essentially, these situations are part of Operational Research (OR) and can be modeled by OR problems [5].

Disasters lead to large demands that exceed resources. Emergency logistics is the process of planning, managing, and controlling the flow of those resources to supply help to the affected people [6, 7, 8]. It is vital to respond promptly to emergency needs immediately after natural disasters by effectively dispersing emergency logistics to mitigate the catastrophic effects of the affected regions [7]. Food, shelter and medicines such as medicines, should be sent as soon as possible to the affected area of the supply chain to support the rescue operation and help with the injuries. In addition, the transshipment of important or perilous materials from the affected areas to safety areas should be handled, too [9].

A logistic network is consist of the facilities and distribution options that perform the functions of supply of materials, transformation of these materials into intermediate and finished products, and the distribution of these finished products to customers. Withal it is one of the subjects of Supply Chain Management (SCM) [10]. (Reyes, 2005). A supply chain can be defined as a system of suppliers, manufactures, distributors, retailers and customers where materials flow downstream from suppliers to customers and information flows in both directions [11].

A flow game is derived from a flow situation. It arises from the revenue distribution problem related to the maximum flow in a network, where arcs are owned by different individuals [12]. For this paper, the cooperative flow game for emergency logistic planning which we construct in the framework of logistic network is developed and investigated. The goal is to coordinate logistic supports for help operations. The scenario of the model is based on the logistic network consisting of one supplier that provides the aid materials after natural disasters, three countries as distributors and one retailer of the country affected by the earthquake. The model basically integrates basically two problems, namely, a logistic network problem and transportation problem. Thanks to the Cooperative Game Theory approach, the proposed model turns out to be efficient and demonstrating the importance is efficient for the importance of cooperation between countries after an earthquake.

If there is more than one player in a situation, Cooperative Game Theory can contribute to completing the analysis of OR problems. Hereby, the players start to collaborate to be able to achieve an optimal outcome after optimizing a particular system by means of OR techniques. That outcome shows how to distribute the extra benefits or how costs are saved by cooperation among those players seems reasonable and necessary. Therewith, cooperative games can play a role in the complete analysis of the situation [5, 13].

Earthquake rescue logistic planning is meticulously formed in the cause of cooperation of rescue organizations in many countries. It is hoped that the proposed emergency logistics distribution approach by using Cooperative Game Theory can make benefits existent, not only for improving the performance of emergency logistics management after natural disasters, but also for explaining the significance of the cooperation among the countries, in quick response to the real needs of the affected areas in a relief supply chain management.

References

1. Seaberg D., Devine L., Zhuang J. A review of game theory applications in natural disaster management research // *Natural Hazards*. 2017. V. 89, № 3. P. 1461–1483.
2. Nikoo N., Babaei M., Mohaymany A. S. Emergency transportation network design problem: Identification and evaluation of disaster response routes // *International Journal of Disaster Risk Reduction*. 2018. V. 27. P. 7–20.
3. Allali S.A., Abed M., Mebarki A. Post-earthquake assessment of buildings damage using fuzzy logic // *Engineering Structures*. 2018. V. 166. P. 117–127.

4. Rajali Maharjan, Shinya Hanaoka. A multi-actor multi-objective optimization approach for locating temporary logistics hubs during disaster response // *Journal of Humanitarian Logistics and Supply Chain Management*. 2018. V. 8, № 1. P. 2–21.
5. Aparicio J., Llorca N., Sanchez-Soriano J., Sancho J., Valero S. Cooperative logistics games. In book *Game Theory*. Qiming Huang (Ed.) P. 129–153 <https://mts.intechopen.com/books/game-theory/cooperative-logistic-games>.
6. Caunhye A.M., Nie X., Pokharel S. Optimization models in emergency logistics: A literature review // *Socio-Economic Planning Sciences*. 2012. V. 46, № 1. P. 4–13.
7. Sheu J.B. Challenges of emergency logistics management // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 2007. V. 43, № 6. P. 655–659.
8. Gunn S.W.A. The language of disasters: a brief terminology of disaster management and humanitarian action/ In book *Basics of International humanitarian missions*. Kevin M., Cahill M.D. (Eds.). New-York: Fordham University Press, 2003. P. 37–40.
9. Yuan Y., Wang D. Path selection model and algorithm for emergency logistics management // *Computers and Industrial Engineering*. 2009. V. 56, № 3. P. 1081–1094.
10. Reyes P.M. Logistics networks: A game theory application for solving the transshipment problem // *Applied Mathematics and Computation*. 2005. V. 168, № 2. P. 1419–1431.
11. Ganeshan R., Harrison T.P. An introduction to supply chain management. Department of Management Sciences and Information Systems. 1995.
12. Kalai E., Zemel E. Totally balanced games and games of flow // *Mathematics of Operations Research*. 1982. V.7, № 3. P. 476–478.
13. Tijs S.H. Introduction to game theory. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2003.

СЕКЦИЯ № 13

АНАЛИЗ ПОЛИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И КОРРУПЦИИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Алескеров Ф.Т., Демин С.С., Швыдун С.В. Анализ территориальных интересов стран в Баренцевом море | 443 |
| Алескеров Ф.Т., Иванов А.А., Карабекян Д.С., Якуба В.И. Манипулируемость мажоритарных правил выбора в модели Даунса формирования предпочтений | 447 |
| Бродский Ю.И. Об игровых аспектах межкультурных отношений | 449 |
| Васин А.А., Николаев П.В., Огнева М.С. Задача отбора кандидатов на работу в налоговую инспекцию | 454 |
| Васин А.А., Тюленева А.С., Шестаков И.Л. Оптимизация системы контроля соблюдения техники безопасности для разных типов нарушений на угледобывающем предприятии | 458 |
| Зенюк Д.А., Фаллер Д.С. Имитационная модель институциональной коррупции | 463 |
| Колесник Г.В. Моделирование эндогенного формирования функций полезности индивидуумов в социально-экономических системах | 464 |
| Мячин А.Л. Построение индексов оценки неоднородности систем | 473 |
| Чеботарев П.Ю., Цодикова Я.Ю., Логинов А.К., Лезина З.М. Об эффективности социальной поддержки в смешанных обществах | 477 |
| Черепанов В.М. Оптимизация границ малых форм предпринимательства | 480 |

Анализ территориальных интересов стран в Баренцевом море^{*}

Ф.Т. Алескеров, С.С. Демин, С.В. Швыдун

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Москва, Россия*

Институт проблем управления РАН им В.А.Трапезникова, Москва, Россия

Последние 20-30 лет доля нефти и газа в мировом топливно-энергетическом балансе потребления составляет более 70% от всех видов источников энергии. Разведка нефти и газа ведется на шельфе более чем в 70 странах мира. Между тем, глобальное потепление сделало территории, покрытые снегом и ледниками, более доступными для эксплуатации ресурсов, что привело к повышению интереса к этим районам.

Деление территории за пределами континентального побережья между странами подчиняется определенным правилам. Во-первых, существуют территориальные воды – участки моря или океана, находящиеся в пределах 12 морских миль от побережья. Эти участки находятся под суверенитетом прибрежного государства или относятся к

^{*} Работа выполнена в Международной Лаборатории Анализа и Выбора Решений в рамках реализации «Дорожной карты» Программы 5/100 Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

его внутренним водам [1]. Во-вторых, свою роль играют исключительные экономические зоны (ИЭЗ), которые были официально введены в 1982 году Конвенцией ООН по морскому праву [1]. ИЭЗ - это область за пределами территориальных вод, простирающаяся в сторону моря на расстояние не более 200 морских миль (370 км) от береговой линии. Эта территория может быть использована другими странами только для транспортировки грузов. В свою очередь, прибрежное государство обладает суверенными правами на разведку, разработку, сохранение и рациональное использование природных ресурсов в ИЭЗ. Исключение из этого правила возникает, когда исключительные экономические зоны нескольких государств перекрываются. В случаях такого перекрытия государства сами определяют фактическую морскую границу.

До 2010 года именно такая ситуация была в Баренцевом море, которое относится к России и Норвегии, и именно в 2010 г. был согласован договор между двумя государствами [2]. Однако, поскольку глобальное потепление изменяет условия добычи полезных ископаемых в данном регионе, ситуация может повториться и в будущем. Поэтому нашей задачей было построить модель, которая предложит несколько вариантов распределения территорий, исходя из предпочтений стран относительно различных участков Баренцева моря.

Для применения нашей модели нам потребовались данные, учитывающие размещение всех ресурсов, которые могут быть интересны странам данного региона. Мы рассматриваем два основных природных ресурса: ископаемые виды топлива, такие как нефть и газ, и рыбные ресурсы. Необходимо отметить, что, поскольку эти ресурсы требуют морского доступа в районы, мы не рассматривали судоходные маршруты как еще один дополнительный ресурс.

Поскольку уровень интереса к каждому участку моря разный, мы разделили весь регион на небольшие участки равной величины. В результате было получено 841 995 равных участков площадью около 210 000 квадратных метров.

Для вычисления уровня интереса конкретного участка моря для каждой страны мы вводим функции $f(OG, x)$, $f(F, x)$, определяющие объем нефти и газа (OG) и рыбы (F), который задаются в шкале от 0 до 4. Пусть $f(OG, x) = 0$, если область x не имеет никаких ископаемых видов топлива, $f(OG, x) = 1$, если в области x потенциально имеются газовые или нефтяные ресурсы, $f(OG, x) = 2$, если в регионе x потенциально имеются как газовые, так и нефтяные ресурсы, и $f(OG, x) = 4$, если это регион, в котором обнаружены запасы нефти или газа. Что касается рыбопромысловых ресурсов, то мы предполагаем $f(F, x) = m$, где m – общее количество кварталов, когда рыба имеется в регионе x .

Обозначим через $u_k^{OG}(x)$ и $u_k^F(x)$ полезность каждого ресурса в области x для страны k . Для построения модели мы будем считать, что среди двух районов с одинаковыми запасами природных ресурсов большую ценность для страны k имеет тот участок, который расположен ближе к её территории. Таким образом, мы предполагаем, что интерес страны к каждому ресурсу пропорционален расстоянию до исследуемого участка и равен нулю после некоторого расстояния d^* (для примера было взято $d^* = 1000$ км). Тогда интерес каждой страны к природным ресурсам, находящимся в той или иной местности, характеризуется следующими формулами:

$$u_k^{OG}(x) = \begin{cases} f(OG, x) \cdot \left(\frac{d^* - d_k(x)}{d^*} \right), & \text{if } d_k(x) < d^*, \\ 0, & \text{if } d_k(x) \geq d^*. \end{cases} \quad (1)$$

$$u_k^F(x) = \begin{cases} f(F, x) \cdot \left(\frac{d^* - d_k(x)}{d^*} \right), & \text{if } d_k(x) < d^*, \\ 0, & \text{if } d_k(x) \geq d^*. \end{cases} \quad (2)$$

где $d_k(x)$ – расстояние от ближайшей точки страны k до области x . Общая полезность каждой области x для страны k равна $u_k^T(x)$ рассчитывается как

$$u_k^T(x) = \alpha \cdot u_k^{OG}(x) + u_k^F(x), \quad (3)$$

где α – коэффициент, характеризующий относительную важность ископаемых видов топлива по сравнению к рыбными ресурсами. Здесь следует отметить, что в целом каждая страна может оценить природные ресурсы по-разному, на основе промышленной базы, потребностей граждан и других факторов. Однако для простоты мы предполагаем, что каждая страна оценивает каждый ресурс одинаково.

Используя данные формулы для оценки полезности территорий, мы можем оценить справедливость распределения участков Баренцева моря. В нашей модели для этого используются уровни удовлетворенности каждой страны $S_k(P)$, которые рассчитываются по следующей формуле:

$$S_k(P) = \sum_{x \in X: (x,k) \in P} (u_k^T(x)) - \sum_{x \in X: (x,k) \notin P} (u_k^T(x)), \quad (4)$$

где P – конечное распределение территорий. Другими словами, уровень удовлетворенности страны рассчитывается как разница между общей полезностью областей, которые были выделены этой стране, и общей полезностью участков, которые не были выделены стране.

Учитывая построенную модель уже сейчас можно построить справедливое распределение территорий в Баренцевом море. Однако для этого важно зафиксировать параметр α , отвечающий за относительную важность ресурсов. Тем не менее, поскольку природные ресурсы, которые мы рассматриваем, ограничены, их доступность может меняться с течением времени. Кроме того, на мировых энергетических рынках могут произойти некоторые изменения, что означает, что относительная важность природных ресурсов может поменяться, что приведет к возникновению потенциально спорной территории в Баренцевом море. Таким образом, было бы полезно рассмотреть различные сценарии того, как может измениться относительная важность природных ресурсов, с тем чтобы оценить устойчивость нынешнего распределения зон.

Далее мы предлагаем несколько моделей распределения территорий, которые в некотором смысле справедливы для каждой страны и оценивают уровень удовлетворенности каждой страны:

- 1) Все области распределяются согласно текущим границам.
- 2) Каждый участок отдаётся ближайшей стране.
- 3) Модель подстраивающегося победителя [3]

Алгоритм этой модели разрешения спорных территорий работает следующим образом. Имея некоторое начальное распределение областей, мы можем оценить уровень удовлетворенности каждой страны. Если уровни удовлетворенности стран равны, то процедура выделения площадей прекращается. В противном случае осуществляется процедура обмена участками между двумя странами. Обозначим через k_1 и k_2 наименее и наиболее удовлетворённые страны. Процедура передачи области x осуществляется так, что удовлетворяются следующие условия

$$\begin{aligned} u_{k_1}^T(x) &\neq 0 \\ \frac{u_{k_1}^T(x)}{u_{k_2}^T(x)} &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (5)$$

Данная процедура гарантирует пропорциональность окончательного распределения территорий. Однако, поскольку мы не допускаем совместного использования территорий, окончательное распределение участков Баренцева моря не гарантирует, что уровень удовлетворенности каждой страны будет равным. Таким образом, окончательное распределение зон не является

уникальным, и нам необходимо рассмотреть различные первоначальные распределения зон:

- a. Изначально все районы выделены Норвегии.
- b. Изначально все районы выделены России.

Применив все вышеописанные модели распределения территорий мы оценили удовлетворённость стран и получили следующие результаты.

Удовлетворённость стран при $\alpha = 1$.

| № алгоритма распределения | Норвегия | Россия | Всего |
|---------------------------|----------|--------|--------|
| 1 | 100625 | 46833 | 147458 |
| 2 | 126655 | 23833 | 150488 |
| 3a | 74461 | 74446 | 148907 |
| 3b | 74451 | 74455 | 148906 |

Удовлетворённость стран при $\alpha = 10$.

| № алгоритма распределения | Норвегия | Россия | Всего |
|---------------------------|----------|--------|--------|
| 1 | 105691 | 709309 | 815001 |
| 2 | 314519 | 520839 | 835358 |
| 3a | 416719 | 416713 | 833433 |
| 3b | 416703 | 416730 | 833433 |

Как мы видим из таблиц, при равной ценности рассмотренных ресурсов, практически во всех случаях более удовлетворённой оказывается Норвегия. Однако, при увеличении важности нефти и газа ситуация кардинально меняется. Из этого следует вывод, что правильная оценка параметра α имеет важную роль в применении нашей модели, поскольку от этого в значительной мере зависит итоговый результат.

Кроме того, поскольку в обоих случаях суммарная удовлетворённость стран максимальна при сценарии, когда каждый участок отдаётся ближайшей к нему стране, можно сделать предположение о том, что данный сценарий является оптимальным с точки зрения общей удовлетворённости.

Итак, рассмотрена проблема распределения потенциально спорных территорий в Баренцевом море. Используя введенную модель и оценки полезности основных ресурсов (нефти, газа и рыбных ресурсов), мы предложили различные сценарии распределения территорий в зависимости от важности каждого природного ресурса. В результате мы получили уровень удовлетворенности стран по каждому сценарию и предложили распределение с одинаковым уровнем удовлетворенности каждой страны.

Список литературы

1. Генеральная Ассамблея ООН. Конвенция по морскому праву. 1982.
2. Договор между Королевством Норвегия и Российской Федерацией о разграничении морских пространств и сотрудничестве в Баренцевом море и Северном Ледовитом океане. 2010.

3. Brams S.J., Taylor A.D. Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution. Cambridge University Press. 1996.

Analysis of the territorial interests of the countries in the Barents Sea

Aleskerov F.T., Demin S.S., Shvydun S.V.

*National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia
Institute for Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Манипулируемость мажоритарных правил выбора в модели Даунса формирования предпочтений*

Ф.Т. Алескеров

*Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики и
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

А.А. Иванов

*Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики и
Сколковский институт науки и технологий*

Д.С. Карабекян

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

В.И. Якуба

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН и

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

В модели Даунса [4], часто принято представлять позиции (идеальные точки) участников-агентов в одномерном пространстве, считая, что предпочтения по отношению к другим альтернативам определяются евклидовым расстоянием от этих альтернатив до идеальных точек агентов – чем ближе, тем более предпочтительна альтернатива. Известными результатами здесь являются, например, теорема о медианном избирателе, теорема о неманипулируемости правила относительного большинства, и др. Представляет особый интерес оценить в рамках этой модели степень манипулируемости не только правила относительного большинства, но и других мажоритарных правил.

В рамках предложенной модели оценки степени манипулируемости правил выбора произведен расчет индивидуальной манипулируемости для мажоритарных правил выбора для четного числа агентов.

Для каждого агента предпочтения строятся следующим образом. Все альтернативы упорядочиваются по расстоянию на оси от идеальной точки агента, от самой близкой до самой дальней. Профиль составляется по предпочтениям агентов. Для расчета индекса манипулируемости генерируются допустимые профили. Для каждого профиля проверяется, является ли профиль манипулируемым на наборе допустимых упорядочений для каждого из агентов индивидуально.

Допустимые профили генерируются следующим образом. На числовой оси случайным образом позиционируются альтернативы и агенты. Для каждого агента строится упорядочение альтернатив по близости к идеальной точке агента: ближайшая альтернатива помещается на первое место, следующая по расстоянию – на второе, и

* Работа выполнена в Международной Лаборатории Анализа и Выбора Решений в рамках реализации «Дорожной карты» Программы 5/100 Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (и частично поддержана грантом №18-01-00804а Российского Фонда Фундаментальных Исследований).

т.д. Профиль составляется из таким образом сформированных упорядочений альтернатив для всех агентов.

Рассматривается манипулируемость для следующих правил выбора. Минимальное доминирующее множество (Minimal dominant set, MDS) Минимальное недоминируемое множество (Minimal undominated set, MUS), Минимальное слабоустойчивое множество (Minimal weakly stable set, MWSS), Правило Фишберна (Fishburn's rule, F), Непокрытое множество I (Uncovered set I, UC1), Непокрытое множество II (Uncovered set II, UC2), Правило Ричелсона (Richelson' rule, R), Правило Копланда I (Copeland's rule I, C1), Правило Копланда II (Copeland's rule II, C2), Правило Копланда III (Copeland's rule III, C3), k-устойчивое множество (k-stable set, k=1, 2, 3, kSS), k-устойчивое множество II (k-stable set II, k=1, 2, 3, kSS2).

В условиях множественного выбора существует необходимость сравнения в соответствии с предпочтениями агентов не только единичных альтернатив, но и множеств альтернатив. В [1] введены расширенные предпочтения, согласно которым упорядочиваются множества альтернатив исходя из предпочтений агентов на единичных альтернативах. Варианты таких упорядочений заданы аксиоматически.

Манипулирование рассматривается со стороны агента (избирателя). Возможны два варианта манипулирования. В одном варианте агент может предъявлять в качестве неискренних предпочтений только те упорядочения альтернатив, которые допустимы текущим расположением альтернатив на оси. Во втором варианте манипулирования такое ограничение не принимается во внимание, т.е. агент может манипулировать всеми возможными упорядочениями. Однако, в этом случае факт манипулирования со стороны агента может быть распознан другими агентами. В расчетах использовался первый вариант манипулирования.

Рассматривается индивидуальное манипулирование. Для данного профиля для каждого агента в отдельности рассматриваются все возможные его перемещения (позиционирования) по оси. Для таких позиционирований строятся соответствующие профили (неискренних) предпочтений и рассчитывается коллективный выбор в соответствии с правилом выбора. Результат выбора по неискренним предпочтениям сравнивается с выбором по истинным предпочтениям данного агента с использованием расширенных предпочтений. Если результат коллективного выбора по профилю с неискренними предпочтениями лучше для манипулирующего агента, чем результат выбора с его истинными предпочтениями, то профиль считается манипулируемым.

Степень манипулируемости правил коллективного выбора оценивается с помощью индекса Ницана-Келли. (НК-индекс) [5,6].

В результате, выявлены три группы мажоритарных правил, имеющих совпадающие между собой значения степени манипулируемости. Первая группа содержит только правило Minimal dominant set, вторая группа – правила Uncovered set I, Richelson's, Copeland I и II, третья группа – правила Minimal undominated set, Minimal weakly stable set, Fishburn, Uncovered set II, Copeland III, k-stable set и k-stable set II. Показано, что для случая 3 альтернатив низкоманипулируемыми являются правила из группы MUS, MWS, F, US2, C3, k-SS, k-SS2 для некоторых типов расширенных предпочтений.

Список литературы

1. Алескеров Ф.Т., Карабекян Д.С., Санвер Р.М., Якуба В.И. Оценка степени манипулируемости известных схем агрегирования в условиях множественного выбора. // Журнал Новой Экономической Ассоциации, 2009, №1-2, с.37-61.

2. Aleskerov F., Ivanov A., Karabekyan, D.Yakuba V. Manipulability of majority relation-based collective decision rules. // Proceedings of the 9th KES International Conference on Intelligent Decision Technologies (KES-IDT 2017), 2018, p.82-91.
3. Aleskerov F., Kurbanov E. A Degree of Manipulability of Known Social Choice Procedures. // Current Trends in Economics: Theory and Applications / ed. by A. Alkan, Ch. Aliprantis, N. Yannelis. Springer, 1999. Berlin; Heidelberg; N.Y., p.13–27.
4. Downs, Anthony (1957). An Economic Theory of Democracy. New York: Harper.
5. Kelly J. Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't. // Social Choice and Welfare, 1993, vol.10, p.161–175.
6. Nitzan S. The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation. Public Choice, 1985, vol.47, p.349-370.

Degree of manipulability of majoritarian rules in Downsian model of preference formation

Aleskerov F.T.

*National Research University Higher School of Economics, Russian Federation, and
V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences*

Ivanov A.A.

*National Research University Higher School of Economics, Russian Federation, and
Skoltech*

Karabekyan D.S.

*National Research University Higher School of Economics, Russian Federation
Yakuba V.I.*

*V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences and
National Research University Higher School of Economics, Russian Federation*

Об игровых аспектах межкультурных отношений

Бродский Ю.И.

ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Под культурой в данном исследовании подразумевается ее этологический аспект – способ поведения, набор стандартных для данной культуры ответов на стандартные запросы среды. У разных культур такие наборы ответов разные. За основу математической модели берется известная из математической биологии модель конкуренции А. Лотки – В. Вольтерры, где две популяции конкурируют за ограниченный, жизненно важный, но не конкретизируемый в модели ресурс.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{N^*} - m \frac{M}{M^*}\right), \quad \frac{dM}{dt} = \beta M \left(1 - \frac{M}{M^*} - n \frac{N}{N^*}\right). \quad (1)$$

Отличие социальных процессов от биологических в том, что конкуренты откликаются на ситуацию на «быстрых» временах, превращая хорошо известную из математической биологии статическую систему дифференциальных уравнений в позиционную кооперативную дифференциальную игру, выигрышами которой можно считать предельные численности популяций, а управлениями – доступные игрокам внешние переменные модели – элементы конкурирующих культур.

Элементами изучаемых культур в этой модели можно считать мальтузианские коэффициенты α и β , определяющие скорость роста популяции в отсутствие конкуренции; емкости среды N^* и M^* , определяющие силу конкурентного давления в популяциях и коэффициенты двойных стандартов n и m (в работе [3] они были названы коэффициентами нетерпимости), определяющие во сколько раз конкурентное давление на «чужих» больше или меньше такого давления на «своих».

Анализ системы уравнений конкуренции А. Лотки – В. Вольтерры показывает, что качественно различные типы решений системы (1) зависят исключительно от коэффициентов двойных стандартов n и m – от принадлежности их к тем или иным допустимым диапазонам их изменения. В работе [3] показано, что имеет смысл различать следующие диапазоны изменения коэффициентов двойных стандартов.

| | | | |
|--------------------|---------------|--|---------------|
| $(-\infty, 0)$ | $[0, 1)$ | 1 | $(1, \infty)$ |
| сверхтолерантность | толерантность | отношение без предубеждений и предпочтений | Нетерпимость |

Выбор диапазона коэффициентов двойных стандартов можно в первом приближении считать стратегией в конкурентной игре. В работе [3] были приведены матрицы выигрышей сторон (они разные для сторон – игра биматричная).

| Выигрыш стороны N | | | | |
|-----------------------|--|---|---|----------------|
| Стратегии | N сверхтолерантна | N толерантна | N без предубеждений | N нетерпима |
| M сверхтолерантна | $\infty, nm \geq 1;$ $N^* \frac{1-m}{1-nm},$ $nm < 1$ $(> N^*)$ | $N^* \frac{1-m}{1-nm},$ $(> N^*)$ | N^* | N^* |
| M толерантна | $N^* \frac{1-m}{1-nm},$ $(\leq N^*)$ | $N^* \frac{1-m}{1-nm},$ $(\leq N^*)$ | N^* | N^* |
| M без предубеждений | 0 | 0 | $N(N_0, M_0, \alpha, \beta)$ $(< N^*)$ | N^* |
| M нетерпима | 0 | 0 | 0 | 0 или N^* |

Для противоположной стороны матрица выигрышей следующая.

| Выигрыш стороны M | | | | |
|---------------------|--|---|-----------------------|---------------|
| Стратегии | N сверхтолерантна | N толерантна | N без предубеждений | N нетерпима |
| M сверхтолерантна | $\infty, nm \geq 1;$ $M^* \frac{1-n}{1-nm},$ $nm < 1$ $(> M^*)$ | $M^* \frac{1-n}{1-nm},$ $(\leq M^*)$ | 0 | 0 |

| | | | | |
|-----------------------|---|--|---|-------------------|
| M толерантна | $M^* \frac{1-n}{1-nm}$, ($> M^*$) | $M^* \frac{1-n}{1-nm}$, ($\leq M^*$) | 0 | 0 |
| M без преудбеждений | M^* | M^* | $M(N_0, M_0, \alpha, \beta)$ ($< M^*$) | 0 |
| M нетерпима | M^* | M^* | M^* | 0 или M^* |

К приведенным матрицам выигрышей стоит сделать следующие комментарии. Стратегия нетерпимости доминирует все стратегии кроме сверхтолерантности и нетерпимости. При обоюдной нетерпимости выживает тот, кто более нетерпим [3].

Опишем рациональную стратегию поведения стороны N в позиционной дифференциальной игре при обоюдной нетерпимости, согласно работе [2].

1. Следует добиться выполнения неравенства $n \frac{N}{N^*} > 1$, используя n и N^* в качестве управлений.

2. Если при этом выполняется $m \frac{M}{M^*} < 1 - \frac{1}{n}$, больше ничего делать не надо – траектория системы и так придет в узел $N = N^*$, $M = 0$.

3. Если же неравенство предыдущего пункта не выполняется, нужно положить $\alpha = 0$, после чего ожидать выполнения неравенства пункта 2, и как только оно выполнится, положить $\alpha > 0$.

Понятно, что если оба соперника будут действовать рационально, неравенство пункта 2 никогда не выполнится, и никто из них не сможет привести траекторию системы в свой узел. Но зато никто из них и не исчезнет из системы, вопреки принципу конкурентного исключения Г.Ф. Гаузе. В результате рационального поведения обоих соперников, система может «зависнуть» в любой из точек области $N > \frac{N^*}{n}$, $M > \frac{M^*}{m}$.

Сделаем два «гуманитарных» комментария к приведенным правилам. Неравенство пункта 1, $n \frac{N}{N^*} > 1$ означает, что во 2-м уравнении системы (1) стороне N удалось каким-то образом освоить весь (не конкретизируемый в этой модели) ресурс стороны M , представленный в модели единицей. Интересно, что свой (из первого уравнения) ресурс при этом вовсе не обязательно полностью осваивать! В реальной жизни так стараются поступать «теневые парламенты» оппозиции или «смотрящие» преступного сообщества. Далее, в нашей модели ничего не стоит положить $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. На самом деле это означает, что находясь в области отрицательных производных системы (1), удалось остановить убывание численности. Возможно, в реальности это стоит какого-то ресурса, не отраженного в нашей простейшей модели. Возможно, этот ресурс зависит от численности популяции, которую мы желаем зафиксировать. Во всяком случае, экспериментально известно, что численность культуры, выживающей в условиях сильной нетерпимости к ней (например, преступного сообщества), обычно невелика.

Дифференциальная игра, описывающая взаимодействие культур, является гораздо более сложным математическим объектом, нежели система (1) уравнений конкуренции,

задающая ее дифференциальные ограничения [2]. В результате, то что было устойчивым в статической системе уравнений (например, устойчивый узел), теряет устойчивость. Приобрести же устойчивость (стать равновесием игры), может точка фазовой плоскости, без какого-либо намека на устойчивость в статической системе уравнений А. Лотки – В. Вольтерры.

Результатом таких отличий является то, что в социальных системах могут выживать культуры в условиях крайней нетерпимости к ним (например, криминальная культура), обреченные на вымирание при таком к ним отношении в биологических системах.

Одним из самых интересных выводов является то, что в межкультурном взаимодействии мы постоянно неверно оцениваем позицию игры, сравнивая чужую культуру со своей. Это зачастую приводит к одному из проявлений «мягкой силы»: культура, оказывающая в данный момент меньшее конкурентное давление, нежели своя, может быть принята за дружественную, а большее давление – за враждебную. Верная же оценка дружественности или враждебности чужой культуры – в сравнении ее коэффициента двойных стандартов с единицей [1].

Как во всякой игре, в данной позиционной дифференциальной игре важен вопрос информированности сторон. Особенностью данной игры является неверная оценка играющими игровой позиции, основанная на сравнении чужой культуры со своей [1]. В связи с этим фактом возникает возможность манипулировать соперником с помощью так называемой «мягкой силы». В основе мягкой силы лежат культурные ценности, способные побудить других «хотеть того, чего хотите вы». Мягкая сила позволяет добиваться от того, к кому она применяется желаемых результатов, при его добровольном вовлечении в предлагаемые действия, за счет их привлекательности для него. Считается, что в современный научный обиход это понятие было введено Джозефом Наем (J. Nye), однако близкие идеи встречались как в XX веке, например, у А. Грамши, так и гораздо ранее, даже на заре исторического периода – у Лао Цзы.

Взглянем на игровую ситуацию, например, глазами представителя культуры N . Во-первых, ему хорошо известна величина $\frac{N}{N^*}$ – это то, как принято в его культуре относиться к своим – то, чему всех учат с детства. Во-вторых, известна ему также величина $m\frac{M}{M^*}$ – это то, что наблюдается непосредственно, при столкновениях с представителями культуры M . Скорее всего, эти величины неодинаковы ($\frac{N}{N^*} \neq m\frac{M}{M^*}$) – на то и разные культуры.

Далее, вполне естественно предположить, что если $\frac{N}{N^*} > m\frac{M}{M^*}$, то это нравится представителю культуры N – всем обычно нравится, когда давление на них ослабевает. Возможно, он оценивает эту ситуацию примерно так: «Ах, какие милые, воспитанные люди эти M – не то, что мои грубые соплеменники!»

Наоборот, если $\frac{N}{N^*} < m\frac{M}{M^*}$, скорее всего представителю культуры N это не понравится – мало кому нравится давление большее привычного. Скорее всего он подумает: «Ну и дикари эти M ! С ними невозможно жить рядом! Они совсем не умеют себя вести!»

На самом деле и первая и вторая оценки могут быть глубоко ошибочными – в системе (1) от соотношения между величинами $\frac{N}{N^*}$ и $m\frac{M}{M^*}$, как впрочем и между $\frac{M}{M^*}$ и $n\frac{N}{N^*}$, вообще говоря, ничего не зависит. На самом деле все определяется исключительно коэффициентами двойных стандартов n и m [3].

Например, если $\frac{N}{N^*} > m \frac{M}{M^*}$, но при этом $m > 1$ (нетерпимость к N) – ситуация может оказаться опасной и даже губительной для культуры N , со временем она может полностью исчезнуть от соседства с «милыми и воспитанными» людьми, особенно если обольстившись меньшим конкурентным давлением «чужих» $\frac{N}{N^*} > m \frac{M}{M^*}$, выберет толерантное к ним отношение $n \leq 1$ [3].

Наоборот, при $\frac{N}{N^*} < m \frac{M}{M^*}$ и даже $\frac{N}{N^*} \ll m \frac{M}{M^*}$, если $m < 1$ – для культуры N нет опасности исчезнуть рядом с культурой M , наоборот, если при этом $n > 1$ – культура N со временем вытеснит конкурента.

Однако, в системе (1) коэффициенты n и m не наблюдаются непосредственно. Представителю культуры N для того чтобы определить m , необходимо сравнить данное ему в ощущениях $m \frac{M}{M^*}$ с $\frac{M}{M^*}$, а про последнюю величину ему, как правило,

ничего не известно – в детстве его учили совсем другому – $\frac{N}{N^*}$! Изучение чужих культур – удел достаточно узкого круга специалистов. Указанная систематическая ошибка в оценке игровой позиции иллюстрирует возможность применения «мягкой силы» в межкультурных отношениях – «мягкую нетерпимость» ($n, m > 1$ при $\frac{N}{N^*} > m \frac{M}{M^*}$ или $m \frac{N}{N^*} < \frac{M}{M^*}$) – способность «понравиться» сопернику меньшим конкурентным давлением на него, навязать ему свою культуру и заставить его добровольно действовать в чужих интересах, возможно, во вред ему самому [1].

Выводы

Поведение модели зависит в основном от соотношения между собой и с единицей коэффициентов двойных стандартов конкурирующих культур [3]. Видимо поэтому двойные стандарты прочно вошли в международную политику, как эффективный (при условии, что соперник не ведет себя так же) инструмент управления. Наличие ярко выраженных двойных стандартов – более сильная конкуренция с «чужими», чем со «своими», вообще говоря, опасна для этих «чужих» возможностью их исчезновения.

При взаимном толерантном отношении (более слабая конкуренция с «чужими», чем со «своими») культуры могут сосуществовать вместе. Собственно, это и происходит в биологии, при расхождении разных видов, существующих на одной территории, по разным экологическим нишам (принцип конкурентного исключения Г.Ф. Гаузе).

При столкновении толерантной культуры с нетерпимой, у толерантной нет шансов выжить (если она вовремя не сумеет верно оценить ситуацию). По-видимому, ростки такого понимания появляются сейчас в Европе.

При рассмотрении социальных сообществ – культур – важной становится возможность сторон реагировать на ситуацию на быстрых временах, меняя доступные параметры взаимодействия, в первую очередь – коэффициенты двойных стандартов. В этом случае модель из характерной для биологической конкуренции видов (1) превращается в позиционную дифференциальную игру – гораздо более сложный математический объект.

В дифференциальной игре некоторые устойчивые для системы (1) состояния (например, устойчивый узел обоюдной толерантности) становятся неустойчивыми [3], а некоторые точки фазового пространства без намека на устойчивость в (1) могут стать равновесиями игры (выживание «малых» культур в условиях нетерпимости к ним).

Один из самых интересных выводов из анализа модели – оказывается, мы практически всегда неверно оцениваем игровую позицию при взаимодействии с чужой культурой, пытаясь сравнить ее со своей и измерить своей. Так происходит из-за того,

что чужую культуру «в себе» мы не знаем, а наблюдаем лишь ее отношение к нам, с которым постоянно сталкиваемся.

Модель учит не подходить к чужой культуре с мерками своей. Такой подход информативен и потому неверен: прогноз динамики модели, вообще говоря, не определяется сравнением чужой культуры со своей. Единственно верной мерой «чужой» культуры оказывается сама эта культура.

Вывод – необходимость изучения чужих культур, но не с целью безусловного повышения толерантности к ним, как модно было писать в работах на тему взаимодействия культур 90-х гг., а с целью верного понимания складывающейся ситуации взаимодействия с этими культурами. Например, чтобы не стать объектом манипуляций с помощью «мягкой силы», и наоборот, не отказаться от полезного сотрудничества с какой-то культурой, испугавшись ее проявляющейся по отношению к нам «брутальности».

Список литературы

1. Бродский Ю.И. Мягкая сила и двойные стандарты в математической модели межкультурного взаимодействия // Социология и общество: социальное неравенство и социальная справедливость Материалы V Всероссийского социологического конгресса. М.: РОС 2016. С. 4251-4257.

2. Бродский Ю.И. Межкультурное взаимодействие как позиционная дифференциальная игра // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов, 2013. Т. 28, №1(28), С. 124-141.

3. Бродский Ю.И. Толерантность и нетерпимость с точки зрения системной динамики и исследования операций. М.: ВЦ РАН, 2008. 53 с.

On the game aspects of intercultural relations

Brodsky Yu.I.

Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS

Задача отбора кандидатов на работу в налоговую инспекцию

Васина А.А., Николаев П.В., Огнева М.С.
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассматривается модель работы налоговой инспекции и задача отбора в неё кандидатов с учетом их неоднородной профессиональной подготовки. Предполагается, что каждый инспектор характеризуется точностью проверки, которая определяет среднюю долю вскрываемого им дохода при проверке уклонившегося от уплаты налога налогоплательщика. Также инспектор характеризуется альтернативной зарплатой, которую может получать на другом месте работы при увольнении из инспекции. Организатор инспекции знает точности проверки всех кандидатов в инспекцию и их альтернативные зарплаты. Стратегия организатора включает вероятности проверок, зарплаты инспекторов и правило отбора кандидатов в инспекцию. В работе решается задача нахождения оптимальной стратегии, обеспечивающей честную уплату налога плательщиками при минимальных издержках на организацию инспекции.

Базовая модель налоговой инспекции с учетом коррупции рассмотрена в [1]. Дальнейшее развитие модель получила в работах [2] и [3], в которых решена задача построения оптимальной иерархической структуры, обеспечивающей честное поведение всех агентов. Предполагается, что в распоряжении организатора инспекции есть доверенные лица, которые всегда проверяют правильно, но затраты на проведение проверок ими очень высоки. Также организатор может привлекать для проверок

неограниченное количество рациональных инспекторов, готовых брать взятки, если им это выгодно. На верхнем уровне иерархии проверки осуществляют доверенные лица, на прочих – нанятые инспекторы. В первой рассмотренной модели затраты на проведение проверок и коэффициенты штрафов за уклонение и его невыявление фиксированы, стратегия организации инспекции включает количество уровней проверки и вероятности проведения проверки на каждом уровне. Во второй модели считается, что максимальным наказанием инспектора является увольнение, после которого он переходит на менее оплачиваемую работу. В стратегию включаются также зарплаты инспекторов. Для каждой модели найдены необходимые и достаточные условия на стратегию организацию инспекции, обеспечивающие честное поведение всех агентов. Указан метод расчёта оптимальной стратегии, минимизирующей издержки на проведение проверок.

Рассмотрим модификацию базовой модели многоуровневой инспекции с фиксированными издержками с отказом от предположения о безошибочности работы инспекторов. Вводятся следующие характеристики: функция распределения дохода $F(I)$, величина налога в зависимости от дохода $t^*(I)$, для каждого налогоплательщика $a \in A$ полученный доход - I^a , декларируемый доход - I_d^a . Каждый нанятый инспектор $b \in B$ характеризуется точностью проверки q_b (для верхнего уровня $q_n = 1$). Предполагается, что некоторые плательщики и инспекторы нижних уровней могут объединяться в коалицию C_l , включающую плательщика и всех проверяющих его инспекторов от уровня 1 до l . При этом коалиции выгодно скрывать уклонение плательщиков, если это увеличивает суммарный ожидаемый выигрыш коалиции с учетом неуплаченных налогов и ожидаемых штрафов входящих в неё плательщиков и инспекторов. Стратегия T такой коалиции задается функциями $t_0(I), t_1(I), \dots, t_l(I)$, определяющими действия плательщика и сообщения инспекторов уровней $i = 1, \dots, l$ в случае проверки. Будем считать, что доля обнаруженного сокрытого дохода ξ_i инспектором i является случайной величиной с функцией распределения F_i , заданной на отрезке $[0, 1]$. Тогда точность проверки q_i определяется как математическое

$$\text{ожидание } \xi_i : q_i = \int_0^1 \xi_i dF_i(\xi_i).$$

Стратегию P организации инспекции задают функции $p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot)$, определяющие вероятности проверок в зависимости от декларации плательщика, сообщений с предыдущих уровней и точностей проверок инспекторов, закрепленных за проверяемым плательщиком. Штрафные коэффициенты f_i и затраты c_i на проведение проверки на каждом уровне инспекции i являются экзогенными параметрами модели. Цель организатора - минимизировать затраты на организацию инспекции при условии обеспечения честного поведения всех агентов. Обозначим $y_1 = p_1, y_2 = p_1 \cdot p_2, \dots, y_n = p_1 \cdot \dots \cdot p_n$. Таким образом, y_i - безусловная вероятность проведения проверки плательщика инспектором i -го уровня.

Утверждение 1. Стратегия P устойчива к отклонению коалиции C_l тогда и только тогда, когда для любых $t_0, t_1, \dots, t_l, t^*$, таких, что $t(I_{\min}) \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_l \leq t^* \leq t(I_{\max})$, выполнена система неравенств:

$$\begin{cases} y_i \geq \frac{1}{f_0 + \dots + f_{i-1}}, & i = 1, \dots, n \\ y_i + \frac{1 - q_i}{q_i} (q_{i+1} y_{i+1} + \dots + (1 - q_{i+1}) \dots (1 - q_{n-2}) q_{n-1} y_{n-1} + (1 - q_{i+1}) \dots (1 - q_{n-1}) y_n) \geq \frac{1}{q_i (f_0 + \dots + f_{i-1})}, & i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (1)$$

Поставим задачу минимизации средних ожидаемых расходов на проверку произвольного плательщика при использовании стратегий, устойчивых к коалиционным отклонениям:

$$F(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i c_i + y_n \tilde{c} \rightarrow \min_{y_1, \dots, y_n} \quad (2)$$

при ограничении (1).

Пусть параметры модели удовлетворяют условиям:

$$\frac{c_{i+1}}{c_i} \geq \frac{1-q_i}{q_i} q_{i+1}, \quad i=1, \dots, n-2, \quad \frac{\tilde{c}}{c_{n-1}} \geq \frac{1-q_{n-1}}{q_{n-1}}. \quad (3)$$

Отметим, что они выполнены в естественных предположениях: точность проверки каждого инспектора b $q_b \geq 1/2$, затраты тем выше, чем выше уровень проверки.

Утверждение 2. В условиях (3) решением задачи (1)-(2) для n -уровневой системы контроля являются вероятности проверок

$$y_i^* = \frac{f_i + q_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} f_j \right)}{q_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} f_j \right) \left(\sum_{l=0}^i f_l \right)}, \quad i=1, \dots, n-1, \quad y_n^* = 1 / \left(\sum_{j=0}^n f_j \right).$$

Теперь перейдем к рассмотрению основной модели отбора кандидатов в трехуровневую инспекцию. Пусть N - численность плательщиков, полные затраты c^b на проведение проверки любым наемным инспектором b соответствуют его зарплате за время проверки: $c^b = s^b$, затраты на проверку доверенным лицом (уровень 3) составляют \tilde{c} . Налог уплачивается всеми плательщиками в начале налогового периода, и каждый проверяющий может провести k проверок за один период. Организатор набирает инспекторов на нижние 2 уровня из r однородных групп кандидатов на работу в инспекции, каждая численностью N_l , $l=1, \dots, r$. Кандидаты из группы l характеризуются одинаковой точностью проверки q_l и альтернативной зарплатой s_{al} .

Стратегия организации инспекции включает правила отбора инспекторов 2-го уровня и закрепления за ними проверяемых плательщиков и инспекторов 1-го уровня, назначение зарплат для отобранных инспекторов и назначение вероятностей проверок и ревизий.

Сочетанием ij назовем пару подмножеств инспекторов из групп i и j , таких, что инспекторы из группы i проводят проверки на первом уровне, а инспекторы из группы j на втором уровне проводят ревизии по этим проверкам. Обозначим N_{ij} численность плательщиков, контролируемых сочетанием ij , Δ_{1ij} и Δ_{2ij} - надбавки к альтернативным зарплатам в этом сочетании для инспекторов 1-го и 2-го уровней соответственно, $P_{ij} = (p_{1ij}, p_{2ij}, p_{3ij})$ - вектор условных вероятностей проверки 1, 2 и 3 уровней для данного сочетания. Стратегия организации инспекции задается совокупностью переменных $s = (N_{ij}, \Delta_{1ij}, \Delta_{2ij}, P_{ij}, i, j=1, \dots, r)$. Соответственно, необходимые количества инспекторов 1 и 2 уровня в каждом сочетании - $n_{1ij} = N_{ij} p_{1ij} / k$, $n_{2ij} = N_{ij} p_{1ij} p_{2ij} / k$. Введя безусловные вероятности проверок $y_{1ij} = p_{1ij}$, $y_{2ij} = p_{1ij} p_{2ij}$, $y_{3ij} = p_{1ij} p_{2ij} p_{3ij}$, запишем условия реализуемости стратегии S при данном составе кандидатов:

$$\sum_{j=1}^r [N_{ij} y_{1ij} + N_{jl} y_{2jl}] \leq k N_l, \quad l=1, \dots, r \quad (4)$$

Увольнение инспектора эквивалентно единовременному штрафу в размере $\bar{\alpha}(s^b - s_a^b)$, где $\bar{\alpha} = \frac{1-\delta}{\delta}$ - коэффициент приведения, δ - коэффициент дисконтирования, относящийся к периоду одной проверки. Соотношение для расчёта коэффициента штрафа f^b инспектора b примет вид: $f^b \Delta t = \bar{\alpha}(s^b - s_a^b)$, где $\Delta t = t(I_{\max}) - t(I_{\min})$ - максимальное уклонение плательщика. Пусть $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\Delta t}$. Отсюда $f^b = \alpha(s^b - s_a^b)$.

Для данной стратегии s затраты на проверки c_{1ij} , c_{2ij} и коэффициенты штрафов f_{1ij} , f_{2ij} принимают значения: $c_{1ij} = s_{ai} + \Delta_{1ij}$, $c_{2ij} = s_{aj} + \Delta_{2ij}$ и $f_{1ij} = \alpha \Delta_{1ij}$, $f_{2ij} = \alpha \Delta_{2ij}$ для $i, j = 1, \dots, r$.

Следствие 1. Стратегия s устойчива к коалиционным отклонениям, если и только если она удовлетворяет системам неравенств:

$$\begin{cases} y_{1ij} + \frac{1-q_i}{q_i}(q_j y_{2ij} + (1-q_j)y_{3ij}) \geq \frac{1}{q_i f}, \\ y_{2ij} + \frac{1-q_j}{q_j} y_{3ij} \geq \frac{1}{q_j(f + \alpha \Delta_{1ij})}, \\ y_{3ij} \geq \frac{1}{f + \alpha \Delta_{1ij} + \alpha \Delta_{2ij}} \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, r \quad (5)$$

Для произвольного сочетания ij обозначим $Y_{ij} = (y_{1ij}, y_{2ij}, y_{3ij})$ вектор безусловных вероятностей проверки, а F_{ij} - издержки на проверки плательщиков, контролируемых инспекторами из сочетания. Суммарные издержки на организацию инспекции F равны $F = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r F_{ij}$. Поставим задачу минимизации издержек F_{ij} по вероятностям проверок:

$$\bar{F}_{ij} = N_{ij}(y_{1ij}(\Delta_{1ij} + s_{ai}) + y_{2ij}(\Delta_{2ij} + s_{aj}) + y_{3ij}\tilde{c}) \rightarrow \min_{Y_{ij}} \quad (6)$$

при ограничении (5). Рассмотрим такой класс стратегий s , в котором для любого сочетания ij выполнено $\frac{s_{2ij}}{s_{1ij}} \geq \frac{1-q_i}{q_i} q_j$, $\frac{\tilde{c}}{s_{2ij}} \geq \frac{1-q_j}{q_j}$.

Утверждение 3. При условиях (7) решением задачи (5)-(6) для каждого сочетания ij являются вероятности проверок

$$y_{1ij}^* = \frac{\alpha \Delta_{1ij} + q_i f}{q_i f(f + \alpha \Delta_{1ij})}, \quad y_{2ij}^* = \frac{\alpha \Delta_{2ij} + q_j(f + \alpha \Delta_{1ij})}{q_j(f + \alpha \Delta_{1ij})(f + \alpha \Delta_{1ij} + \alpha \Delta_{2ij})}, \quad y_{3ij}^* = \frac{1}{f + \alpha \Delta_{1ij} + \alpha \Delta_{2ij}} \quad (8)$$

Таким образом, общая задача синтеза оптимальной инспекции свелась к решению следующей оптимизационной задачи:

$$F = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r N_{ij}(y_{1ij}^*(\Delta_{1ij}) \cdot (\Delta_{1ij} + s_{ai}) + y_{2ij}^*(\Delta_{1ij}, \Delta_{2ij}) \cdot (\Delta_{2ij} + s_{aj}) + y_{3ij}^*(\Delta_{1ij}, \Delta_{2ij}) \cdot \tilde{c}) \rightarrow \min_{N_{ij}, \Delta_{1ij}, \Delta_{2ij}}$$

при ограничениях

$$\sum_{ij} N_{ij} = N, \quad N_{ij} \geq 0, \quad \frac{1}{k} \sum_{j=1}^r [N_{lj} y_{1lj}^*(\Delta_{1ij}) + N_{jl} y_{2jl}^*(\Delta_{1ij}, \Delta_{2ij})] \leq N_l, \quad l = 1, \dots, r.$$

Список литературы

1. Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. М.: МАКС пресс, 2005.

2. Васин А.А., Николаев П.В., Уразов А.С. Механизмы подавления коррупции // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011. С. 10-30.

3. Васин А.А., Николаев П.В., Уразов А.С. Об оптимальной организации контролирующей структуры // Доклады Российской Академии наук. 2012. Т. 444, № 3. С. 262-265.

On the optimal choice of candidates for a tax inspection

Vasin A.A., Nikolaev P.V., Ogneva M.S.
Lomonosov MSU, Moscow, Russia

Оптимизация системы контроля соблюдения техники безопасности для разных типов нарушений на угледобывающем предприятии*

Васин А.А., Тюленева А.С., Шестаков И.Л.
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Угольная промышленность в большинстве развитых стран является одной из самых неблагоприятных по уровню травматизма и смертности на производстве [1]. На горных предприятиях эксплуатируются опасные производственные объекты [2], характеризующиеся высоким риском возникновения аварийных ситуаций и травмирования людей. Аварии на шахтах приводят к тяжелым социальным последствиям и нарушают производственный ритм работы. Данная работа посвящена проблеме соблюдения техники безопасности на угледобывающем предприятии. Регулярные аварии на угольных шахтах подтверждают актуальность работы.

По производительности труда на угледобывающих предприятиях лидирующую позицию занимают США. В сравнении с Россией и Китаем их показатели больше в 6-8 раз [3]. При этом по статистическим данным в 1991-2012 гг. в США гибли в среднем от 25 до 47 человек в год [4], в то время как в России за тот же период эти цифры составляли от 148 до 210 человек в год. При нормально функционирующей службе безопасности на шахтах, в случае обнаружения специфических начальных признаков аварии, обычно оперативно проводятся профилактические мероприятия, которые позволяют либо предотвратить аварию, либо существенно понизить тяжесть ее последствий, а главное – исключить травматизм и гибель людей. Однако, основными причинами аварийности и травматизма на угольных шахтах являются именно нарушения правил и норм безопасности персоналом, отступления от установленных регламентов и технологий, принятие ошибочных решений в конкретных ситуациях, сокрытие фактов обнаружения начальных признаков возникновения предаварийной ситуации и, соответственно, непринятие профилактических мер по предотвращению и локализации возможной аварии. Это указывает на то, что интересы государства, руководства горнодобывающей компании и работников не согласованы, откуда следует необходимость более жесткого контроля соблюдения техники безопасности. Подобный вывод содержится и в работе [5], где обсуждаются вопросы, касающиеся соблюдения техники безопасности в горнодобывающей промышленности Австралии.

Рассмотрим причины, которые толкают работников на нарушение техники безопасности. Повсеместная схема производственного контроля на горнодобывающих предприятиях следующая: если работник обнаруживает нарушение требований безопасности, он должен по возможности остановить производственный процесс и сообщить ответственному лицу. Зарплата внутри бригады определяется как сумма тарифной ставки и премии от вклада каждого члена бригады. Положения о

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00353\16).

премировании составлены так, что премия идет за выполнение плана, а депремирование – за обнаруженные нарушения. Основные показатели участка – объем добычи, длина проходки, дополнительные показатели – качество угля, нарушения техники безопасности, травматизм, соблюдение проектных параметров (сечение выработки, паспорта крепления выработок и др.). Случаи простоя оплачиваются согласно ст. 157 ТК РФ [6]: «Время простоя по вине работодателя оплачивается в размере не менее двух третей средней заработной платы работника. Время простоя по причинам, не зависящим от работодателя и работника, оплачивается в размере не менее двух третей тарифной ставки оклада (должностного оклада), рассчитанных пропорционально времени простоя». Отношение величины оклада к премии на угольных шахтах составляет примерно 70/30. Таким образом, во время работы зарплата у проходчика почти в 2 раза больше, чем при простое. Вероятность травмирования проходчика при нарушении правил безопасности от 100 до 1000 раз ниже, чем вероятность не получения премии при невыполнении плана по объему проходческих работ [7]. Поэтому работники часто идут на осознанный риск, подвергая себя опасности, и между соблюдением правил и выполнением плана чаще всего выбирают второе. Поскольку аварии являются достаточно редкими событиями, то многие работники игнорируют их возможность, считают, что соблюдение требований безопасности препятствует повышению эффективности. Большая разница в оплате в случае простоя провоцирует сговор между работниками и лицами, ответственными за контроль на шахтах, с целью сокрытия реальных показаний датчиков. Руководство предприятия заинтересовано в соблюдении норм техники безопасности, потому что аварии приводят к большим средним затратам, чем издержки, связанные с их предотвращением.

Актуальна задача создания эффективной контролирующей структуры, которая обеспечивает соблюдение техники безопасности в условиях коррупции. Изучению этой проблемы посвящен ряд статей. В [8] показано, как организовать эффективную проверяющую иерархическую структуру с наименьшими затратами, чтобы подавить коррупцию в государственной инспекции и исключить возможность сговора сотрудников с внешними агентами (гражданами, подлежащими проверке, клиентами компании). В [9] более подробно рассмотрена возможность применения иерархической модели организации контролирующей структуры, учитывая специфику работы на горнодобывающем предприятии. Теоретико-игровой подход используется в работе [10], где строится модель выбора оптимальной нормы порогового содержания метана с целью снижения аварийности и увеличения прибыли. В работе [11] задача проектирования эффективной управляющей структуры, позволяющей исключить возможность коррупционного сговора, рассмотрена для одного типа нарушений: игнорирования либо искажения показаний датчиков уровня метана. Описаны модель контроля при фиксированных штрафах за нарушения техники безопасности и модель, где в качестве наказания за нарушение применяется увольнение.

В настоящей работе исследуется возможность организации эффективной инспекции в условиях, когда шахтовый инспектор обязан проверять соблюдение техники безопасности для различных типов аварийных ситуаций.

Для контроля соблюдения норм в условиях, когда персонал может договариваться между собой о сокрытии нарушений, необходима возможность эффективной внешней проверки. Такая проверка может осуществляться двумя способами – дистанционным, с помощью различных датчиков и оборудования для видеонаблюдения, либо личным контролем на месте доверенным сотрудником компании. Первый способ контроля имеет много недостатков, так как датчики можно повредить или установить так, что они не будут отражать реальное положение дел. Во втором случае проблемой является обеспечение внезапной проверки.

Рассмотрим двухуровневую модель инспекции работы шахты, для которой возможна внезапная проверка со стороны компании. В модели три агента: шахта (бригада), шахтовый инспектор по технике безопасности и внешний инспектор.

В общем случае на шахте одновременно ведут работы несколько бригад. Есть типы аварийных ситуаций, устранение которых ведет к остановке работы на всей шахте, а есть те, на которые реагирует только конкретная бригада. Ситуации могут возникать параллельно, так же, как и бригады могут устранять сразу несколько аварийных ситуаций. Работу бригад на шахте можно рассматривать как стохастический процесс со случайным образом возникающими аварийными ситуациями.

Инспекция функционирует следующим образом. Шахтовый инспектор находится непосредственно около места проведения работ, поэтому он в любой момент может проверить соблюдение техники безопасности и прекратить нарушения. Его зарплата фиксирована, простои на нее не влияют.

Внешний инспектор является доверенным лицом руководства и никогда не вступает в сговор с руководством шахты и шахтовым инспектором, которые могут договориться между собой. Также предположим, что внешний инспектор не обладает предварительной информацией о происходящем на шахте. Его стратегия задается константой p , которая характеризует интенсивность проверок. Таким образом, за время t среднее число проверок составляет pt . При проверке выявляются все нарушения техники безопасности. Если было выявлено нарушение i , на соответствующую бригаду и шахтового инспектора накладывают штрафы в размерах f_{br_i} и f_{ins_i} соответственно.

Далее рассмотрим простейший случай, в котором контролируется работа одной бригады. Эта бригада может последовательно выполнять различные виды работ, а тип возможной аварийной ситуации определяется видом выполняемой работы. При этом стратегия поведения бригады S_R характеризуется множеством $R \subseteq I$ возможных аварийных ситуаций. S_R – стратегия, при которой бригада выполняет правила техники безопасности, если возникает ситуация $i \in R$ и игнорирует ситуацию $i \in I \setminus R$. В таком случае стратегия S_i соответствует полностью честному поведению бригады. Характеристики ситуаций: параметры d_i^1 – средняя доля времени, которое занимает устранение аварийной ситуации типа i , d_i^2 – средняя доля времени, которое приходится работать в условиях аварийной ситуации типа i , если ее не устранять.

Доход бригады зависит от возникновения аварийных ситуаций. Бригада получает высокий доход V_H при отсутствии опасных факторов, иначе (при остановке работ для устранения ситуации) $-V_L$. Для каждого типа аварийных ситуаций $i \in I$ математическое ожидание материально ущерба в случае устранения составляет $d_i^1(V_H - V_L)$, в то время как при игнорировании ситуации $-d_i^2 p f_{br_i}$. Если рассматривать коалицию бригады и шахтового инспектора, то математическое ожидание потери коалиции оценивается как $d_i^2 p (f_{br_i} + f_{ins_i})$.

Назовем стратегию проверок устойчивой к отклонению коалиции, если суммарный выигрыш ее членов достигает максимума при честном поведении.

Утверждение 1. Стратегия устойчива к отклонениям коалиции тогда и только тогда, когда

$$p \geq p^* \stackrel{\text{def}}{=} (V_H - V_L) \max_i \left(\frac{d_i^1}{d_i^2 (f_{br_i} + f_{ins_i})} \right).$$

Оптимальная стратегия проверок, устойчивая к коалиционным отклонениям, задается вероятностью p^* .

Выше размеры штрафов рассматривались как экзогенно заданные параметры. С прикладной точки зрения важно разобраться в том, как они определяются и какова их взаимосвязь. Размер штрафа ограничен законодательно. Взыскание причиненного работодателю ущерба должно производиться с учетом соответствующих ограничений, установленных ст. 138 ТК РФ [12]. Согласно указанной статье общий размер всех

удержаний при каждой выплате заработной платы не может превышать 20 %, а в случаях, предусмотренных федеральными законами, – 50 % заработной платы, причитающейся работнику. Согласно ст. 192 ТК РФ [12] за совершение дисциплинарного проступка, в частности неисполнение или ненадлежащее исполнение по вине работника возложенных на него трудовых обязанностей, работодатель имеет право применить дисциплинарное взыскание. К дисциплинарным взысканиям относится увольнение в случае нарушения требований охраны труда, если это нарушение повлекло за собой тяжкие последствия (несчастный случай на производстве, авария, катастрофа), либо заведомо создавало реальную угрозу наступления таких последствий (81 ТК РФ [12]). Таким образом, можно рассматривать увольнение в качестве эффективного способа наказания.

В дальнейших рассуждениях в качестве дохода бригады рассматривается доход бригадира S_{br} , так как он имеет наибольшее влияние на решение о прекращении или возобновлении работ. Обозначим S_{ins} зарплату инспектора за данный период времени. Допустим, что в случае увольнения бригадир может претендовать на зарплату $S_{alt} < S_{br}$. Бригадир осознает, что в случае увольнения он будет получать меньшую зарплату и оценивает размер своего ущерба, учитывая будущие недополученные доходы. Тогда разовый штраф, эквивалентный увольнению, составляет величину $\alpha_{br}(S_{br} - S_{alt})$, где $\alpha_{br} = (1 - \delta)/\delta$ – коэффициент приведения бригадира; δ – коэффициент дисконтирования, относящийся к периоду одной проверки, который используется для пересчета будущих потоков доходов в единую величину текущей стоимости [13]. Соответственно для инспектора разовый штраф равен $\alpha_{ins}(S_{ins} - S_{alt_I})$, где S_{alt_I} – ожидаемая зарплата инспектора после увольнения по указанной статье.

В реальности размеры штрафов за различные нарушения зависят от возможных ущербов. Выразим штрафы, которые накладываются в случае нарушения i , как $f_{br_i} = l_{br_i}\alpha_{br}(S_{br} - S_{alt})$ и $f_{ins_i} = l_{ins_i}\alpha_{ins}(S_{ins} - S_{alt_I})$, где $l_{br_i} \leq 1, l_{ins_i} \leq 1$. Обозначим $\min_i(l_{br_i}) = l_{br}$, $\min_i(l_{ins_i}) = l_{ins}$, $\min_i(f_{br_i}) = f_{br}$, $\min_i(f_{ins_i}) = f_{ins}$. Поскольку штрафы прямо связаны с размерами ущерба, то минимум достигается на одном и том же значении i , тогда $\min_i(f_{br_i} + f_{ins_i}) = f_{br} + f_{ins}$.

Отметим, что существует возможность одноуровневой инспекции, где бригада напрямую проверяется внешним инспектором.

Утверждение 2. Для одноуровневой инспекции оптимальная стратегия проверок, обеспечивающая невыгодность нарушений, задается вероятностью

$$\hat{p} = (V_H - V_L) \max_i \left(\frac{d_i^1}{d_i^2 f_{br_i}} \right).$$

Обозначим $\Delta = S_{br} - S_{alt}$ и $k = \max_i \left(\frac{d_i^1}{d_i^2} \right)$. Минимальные затраты на организацию одноуровневой инспекции принимают вид $C_1 = c_{ex}k(V_H - V_L)/(\alpha_{br}l_{br}\Delta)$, где c_{ex} – расходы на одну проверку внешним инспектором. Отметим, что c_{ex} соответствует зарплате топ-менеджера угольной компании за время, необходимое для одной проверки, включая время подготовки и проезд до шахты.

Вернемся к анализу модели двухуровневой инспекции. Согласно утверждению 1, оптимальная вероятность проверки внешним инспектором составляет

$$\begin{aligned} p^* &= (V_H - V_L) \max_i \left(\frac{d_i^1}{d_i^2 (f_{br_i} + f_{ins_i})} \right) = k \frac{V_H - V_L}{f_{br} + f_{ins}} = \\ &= k \frac{V_H - V_L}{\alpha_{br}l_{br}(S_{br} - S_{alt}) + \alpha_{ins}l_{ins}(S_{ins} - S_{alt_I})}. \end{aligned}$$

Будем считать, что затраты на контроль шахтовым инспектором равны его заработной плате S_{ins} за период одной проверки. Таким образом, затраты на организацию инспекции при оптимальной вероятности проверки составляют

$$C(S_{ins}) = S_{ins} + \frac{c_{ex}k(V_H - V_L)}{f_{br} + f_{ins}} = S_{ins} + \frac{c_{ex}k(V_H - V_L)}{\alpha_{br}l_{br}(S_{br} - S_{alt}) + \alpha_{ins}l_{ins}(S_{ins} - S_{alt_I})}.$$

Рассмотрим задачу минимизации функции затрат за счет выбора зарплаты шахтового инспектора: $C(S_{ins}) \rightarrow \min$ при $S_{ins} \geq S_{alt_I}$.

Обозначим $\sqrt{c_{ex}k(V_H - V_L)}$ через γ , $\alpha_{ins}l_{ins}$ через φ_{ins} , $\alpha_{br}l_{br}$ через φ_{br} .

Утверждение 3. Оптимальная заработная плата шахтового инспектора составляет:

$$\begin{cases} S_{ins}^* = S_{alt_I} + \frac{\gamma}{\sqrt{\varphi_{ins}}} - \frac{\varphi_{br}}{\varphi_{ins}} \Delta \text{ при } \frac{\gamma}{\sqrt{\varphi_{ins}}} - \frac{\varphi_{br}}{\varphi_{ins}} \Delta \geq 0, \\ S_{ins}^* = S_{alt_I} \text{ иначе.} \end{cases}$$

Соответствующие минимальные затраты на двухуровневую инспекцию равны:

$$\begin{cases} C_2 = S_{alt_I} + \frac{2\gamma}{\sqrt{\varphi_{ins}}} - \frac{\varphi_{br}}{\varphi_{ins}} \Delta \text{ при } \frac{\gamma}{\sqrt{\varphi_{ins}}} - \frac{\varphi_{br}}{\varphi_{ins}} \Delta \geq 0, \\ C_2 = S_{alt_I} + \gamma^2 / \varphi_{br} \Delta \text{ иначе.} \end{cases}$$

Найдем условия, при которых участие в контроле техники безопасности шахтового инспектора выгоднее, чем прямая проверка бригады внешним инспектором.

Утверждение 4. Двухуровневая система контроля техники безопасности выгоднее, чем прямая проверка бригады внешним инспектором, тогда и только тогда, когда затраты на одну внешнюю проверку превосходят

$$c_{ex_min} = \left(\sqrt{S_{alt_I} \varphi_{br} \Delta / k(V_H - V_L)} + \varphi_{br} \Delta / \sqrt{d_m \varphi_{ins}(V_H - V_L)} \right)^2.$$

Список литературы

1. Global Energy Statistical: <https://yearbook.enerdata.net>.
2. Федеральный закон от 21.07.1997 №116 в редакции 02.07.2013.
3. Гражданкин А.И., Печеркин А.С., Иофис М.А. Промышленная безопасность отечественной и мировой угледобычи // Безопасность труда в промышленности. 2010. №9. С. 36-43.
4. World Coal Association, Mining Safety // <http://www.worldcoal.org/coal/coal-mining/mining-safety>.
5. Coal Mine Safety Audit Report // Mine Safety Operations Branch, 2010. <http://www.resourcesandenergy.nsw.gov.au>.
6. Трудовой кодекс Российской Федерации от 30.12.2001 №197-ФЗ.
7. Артемьев В.Б., Галкин В.А., Кравчук И.Л. Безопасность производства. 2015.
8. Васин А.А., Николаев П.В., Уразов А.С. Механизмы подавления коррупции // Журн. Новой экономической ассоциации. 2011. №10. С. 10-30.
9. Васин А. А., Захаров В. Н., Вартанов С. А. О возможности применения теоретико-игровых принципов для построения модели управления технико-экономическими процессами горного предприятия // Матер. Междунар. конф. "Развитие идей Д.М.Бронникова в области разработки рудных месторождений на больших глубинах." М.: ИПКОН РАН, 2013. С. 104–108.
10. Васин А. А., Захаров В. Н., Вартанов С. А. Разработка технологии непрерывного индивидуального мониторинга условий, интенсивности труда и технологической дисциплины выполнения горных работ шахтерами // 2-я Междунар. научная школа акад. К.Н. Трубецкого "Проблемы и перспективы комплексного освоения и сохранения земных недр". М.: ИПКОН РАН, 2016. С. 296–298.
11. Васин А.А., Козырева Е.А., Тюленева А.С. Оптимизация системы контроля соблюдения техники безопасности на угледобывающем предприятии, 2017.
12. Трудовой кодекс Российской Федерации от 30.12.2001 №197-ФЗ.
13. Четыркин Е.М. Финансовая математика. М.: Дело, 2000. 400 с.

Optimization of the safety compliance control at the coal mine under various types of violations

Vasin Alexander, TyulenevaAnna, ShestakovIvan
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Имитационная модель институциональной коррупции*

Зенюк Д.А., Фаллер Д.С.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Институциональная коррупция представляет собой сложнейший феномен, порожденный нетривиальным взаимодействием множества экономических и социокультурных механизмов (см., например, [1-3]). Несмотря на то, что изучение коррупционного поведения считается весьма актуальной задачей, понимание управляющих этим поведением закономерностей, без которого едва ли возможно построение эффективной антикоррупционной стратегии, остается во многом поверхностным и схематичным. Лишь в последние десятилетия были начаты исследования по экспериментальному наблюдению коррупции (в рамках более общих экспериментов по поведенческой экономике) [4], однако полученные результаты, хотя и представляют большой интерес, все же не могут пока объяснить наблюдаемые особенности коррупционного поведения на должном уровне строгости.

В [5] была предложена имитационная модель коррупционного поведения, в основе которой лежит последовательное моделирование случайного блуждания на нагруженном графе, причем характеристики последнего меняются на каждой итерации в зависимости от траектории блуждания. Коррупция в этой модели является следствием конкуренции оппортунистического (направленного на извлечение максимальной прибыли) и конформного (связанного со стремлением согласовать свою стратегию с локальным окружением) поведений акторов. Правила эволюции системы в целом похожи на позиционную игру с частичным арбитражем, в которой акторам противодействует принципал, стремящийся сохранить минимально возможный уровень коррупции в системе и обладающий исключительным правом удалять акторов из иерархии. Применение санкций (т.е. удаление из иерархии) основывается на результатах аудита определенного количества акторов, выбранных с помощью некоторой рандомизированной процедуры, на каждой итерации. Рассматриваемая модель позволяет в явном виде учесть возможность сговора между коррупционерами и аудиторами. При этом возникает проблема определения оптимального вознаграждения аудиторов при ограниченном бюджете: если оно слишком мало по сравнению с доходами коррупционеров, то у аудиторов не будет стимулов выполнять свои обязанности; если же это вознаграждение велико, то сговор станет маловероятным, но из-за возросших издержек сам аудит будет проводиться реже, что приведет к ослаблению контроля.

Важной особенностью представляемой модели является возможность формирования «кластеров» коррупционеров, т.е. акторов, которые склонны вовлекать друг друга в одни и те же коррупционные сделки. Проведенные вычисления показали, что в рассматриваемых системах возможны два основных сценария эволюции кластеров: либо в системе по прошествии переходного периода остается несколько небольших кластеров, конкурирующих друг с другом, либо возникает «гигантский» кластер, захватывающий большую часть всей системы.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 16-01-00342.

Имитационная модель изначально создавалась для описания коррупционного поведения, однако предложенные подходы, могут быть полезны и при изучении других процессов коллективного поведения в социальных системах со сложной структурой.

Список литературы

1. С. Роуз-Аккерман Коррупция и государство. Причины, последствия, реформы. М.: Логос, 2003.
2. Political corruption: concepts and contexts / ed. by A.J. Heidenheimer. New Brunswick: Transaction Publishers, 2007.
3. Pellegrini L. Corruption, development and the environment. Dordrecht: Springer, 2011.
4. International handbook on the economics of corruption / ed. by S. Rose-Ackerman. Cheltenham: Edward Elgar Publishing, 2006.
5. Зенюк Д.А., Малинецкий Г.Г., Фаллер Д.С. Имитационная модель коррупции в иерархических системах // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т 6. № 10. С. 321-329.

Numerical simulation of institutional corruption

ZenykD.A. , FallerD.S.

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

Моделирование эндогенного формирования функций полезности индивидуумов в социально-экономических системах

КолесникГ.В.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

Особенностью социально-экономических систем, предопределяющей активное использование методов теории игр для их анализа, является зависимость полезности входящих в них субъектов от действий других сторон. Соответственно, у каждого субъекта имеются стимулы заставить других участников системы действовать таким образом, чтобы максимизировать свою функцию полезности.

Механизмы для достижения этого реализуются, например, на основе иерархического взаимодействия, при котором часть агентов имеет возможность стимулировать нужное им поведение других игроков. В работе [4] выделяется два возможных механизма такого стимулирования:

- административный, проявляющийся в воздействии на множество допустимых стратегий сторон;
- экономический, с использованием побочных платежей, изменяющих предпочтительность отдельных альтернатив для агентов.

Данные механизмы в значительной мере исследованы современными разделами теории игр: теорией контрактов, теорией дизайна механизмов, теорией иерархических систем.

Намного менее исследованным представляется прямой механизм стимулирования желательного поведения агентов - непосредственное воздействие на их функции полезности [1]. В традиционных экономических моделях функции полезности субъектов предполагаются экзогенно заданными, а попытки ввести возможность их эндогенной модификации рассматриваются как некое мошенничество, с помощью которого можно получить любой интересующий исследователя результат.

Однако нельзя отрицать, что данный механизм широко используется в современном человеческом обществе. Непосредственная модификация функций полезности субъектов осуществляется такими инструментами, как реклама, государственная

идеология, нормы корпоративного поведения и многими другими. С ним также связано объяснение многих случаев нерационального (с точки зрения традиционной экономической теории) поведения, в частности экстремальных его форм – наркомании, деятельности религиозных сект.

Фундаментальный характер этого механизма подтверждается тем, что основанные на нём взаимоотношения встречаются в живой природе вне человеческого общества. К ним относятся способы, используемые организмами-паразитами для желательного изменения поведения хозяев. Примерами являются паразитирующие на муравьях насекомое ламехуза [2] и гриб кордицепс [7]; простейшее токсоплазма, воздействующая на мозг грызунов [8].

Классическим результатом в области анализа поведения индивидуумов с модифицированными интересами является модель Гермейера-Вателя [3]. В ней исследуется взаимодействие агентов с функциями полезности, включающими общественные интересы, и формулируются условия существования равновесия для определённых классов функций полезности. Однако, кто и каким образом модифицирует эти функции полезности, в данной модели не исследуется.

В работах английского эволюционного биолога Р. Докинза [5, 6], посвящённых обобщённому описанию эволюции в биологических и социальных системах, в качестве модификаторов поведения индивидуумов рассматриваются *мемы*, определяемые автором как гипотетические единицы культурного наследования. Аналогично генам в биологической эволюции, мемы конкурируют за ресурсы окружающей среды, в качестве которой в данном случае выступает сознание индивидуумов. Использование такого подхода даёт возможность применять для анализа механизма модификации функций полезности индивидуумов теоретико-игровые методы.

В работе [2] данные идеи получают дальнейшее развитие в плане формулировки целей конкуренции мемов. В ней формулируется понятие *супериндивидуумов*, как самовоспроизводящихся структур, включающих в качестве компонентов или использующих в качестве ресурсов индивидуумов базовой популяции. Выдвигается гипотеза, что индивидуальные функции полезности агентов в значительной степени формируются супериндивидуумами с целью обеспечения своего роста и воспроизводства. В результате этого «наиндивидуальная» компонента функции полезности в модели Гермейера-Вателя превращается в набор функций полезности различных супериндивидуумов, которые могут оказывать влияние на агента.

В то же время, супериндивидуум не является самостоятельным субъектом принятия решений. «Мозгом» любого супериндивидуума является его «топ-менеджмент», понимаемый здесь в широком смысле как индивидуум или группа индивидуумов, имеющих заинтересованность в деятельности супериндивидуума и возможность принимать решения, определяющие режим его функционирования. В частности, топ-менеджментом принимается решение о выделении ресурсов на модификацию функции полезности других индивидуумов, а также на собственное потребление.

В процессе выработки решений топ-менеджмент супериндивидуума может руководствоваться частными интересами, в связи с чем реализуемая на практике стратегия будет отличаться от оптимальной для супериндивидуума. Кроме того, принятие решений происходит в условиях конкуренции за ресурсы со стороны других супериндивидуумов. В результате этого в системе возникает иерархия принятия решений, на нижнем уровне которой находятся индивидуумы, принимающие решения о распределении имеющихся у них ресурсов, на верхнем – супериндивидуумы (в лице топ-менеджмента), принимающие решения о выделении ресурсов на модификацию функций полезности.

В настоящей работе проводится формальное описание данной иерархической системы и исследуются эффекты, связанные с воздействием супериндивидуумов на функции полезности агентов.

Рассмотрим систему, состоящую из множеств I супериндивидуумов и J индивидуумов. Каждый индивидуум располагает некоторым ресурсом в объёме r_j , который распределяется на личное потребление и поддержку супериндивидуумов. Данный ресурс может иметь нефинансовую природу, например, это может быть личное время субъекта, которое он уделяет деятельности по поддержке супериндивидуума, его голос в случае выборов и т.д.

Суммарные ресурсы, выделяемые всеми субъектами в рассматриваемой системе на поддержку i -го супериндивидуума, составляют

$$C_i = \sum_{j \in J} c_{ij}.$$

Из этих ресурсов топ-менеджментом i -го супериндивидуума выделяется величина w_i , расходуемая на модификацию функций полезности индивидуумов с целью расширения влияния супериндивидуума. Оставшаяся часть ресурсов расходуется на личное потребление топ-менеджмента:

$$f_i(C_i, w_i) = C_i - w_i.$$

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда топ-менеджмент каждого супериндивидуума состоит из одного агента. Множество топ-менеджеров обозначим через J^* ; множество супериндивидуумов, топ-менеджмент которых состоит из индивидуума $j \in J$, обозначим через I_j (если $j \notin J^*$ то $I_j = \emptyset$). Тогда суммарный объём ресурсов, которым будет распоряжаться индивидуум j , составит

$$R_j = r_j + \sum_{i \in I_j} C_i.$$

Совокупная полезность любого индивидуума $j \in J$ складывается из полезности от личного потребления и от участия в различных супериндивидуумах:

$$g_j(\mathbf{c}_j, \mathbf{w}) = u_j(R_j - \sum_{i \in I_j} w_i - \sum_{i \in I} c_{ij}) + \sum_{i \in I} \lambda_{ij}(\mathbf{w}) v_{ij}(c_{ij}),$$

где u_i – полезность от личного потребления; $\mathbf{c}_j = (c_{ij})_{i \in I}$ – объём ресурсов, выделяемых на поддержку супериндивидуумов j -м субъектом; λ_{ij} – коэффициент значимости i -го супериндивидуума в функции полезности j -го субъекта; $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ – вектор объёмов ресурсов, выделяемых супериндивидуумами с целью расширения влияния; v_{ij} – полезность j -го субъекта от поддержки i -го супериндивидуума.

В частности, для $j \notin J^*$ эта функция будет иметь вид

$$g_j(\mathbf{c}_j, \mathbf{w}) = u_j(r_j - \sum_{i \in I} c_{ij}) + \sum_{i \in I} \lambda_{ij}(\mathbf{w}) v_{ij}(c_{ij}).$$

Коэффициент значимости i -го супериндивидуума для j -го субъекта $\lambda_{ij}(\mathbf{w})$ характеризует полезность, получаемую индивидуумом от участия в поддержке супериндивидуума. Параметры этой функции определяются как внешними факторами (традициями, культурными нормами общества, конкуренцией супериндивидуумов за влияние), так и индивидуальными особенностями каждого субъекта (например, восприимчивостью к используемым супериндивидуумами инструментам расширения влияния). Чем выше коэффициент значимости, тем больше степень удовлетворённости субъекта от понесённых им затрат ресурсов на поддержку соответствующего супериндивидуума.

Выбор стратегий агентами в этой системе осуществляется в несколько этапов.

1. «Топ-менеджеры» $j \in J^*$ выбирают значения величин w_i для управляемых ими супериндивидуумов $i \in I_j$.

Выбор $w_i > \sum_{l \in J \setminus \{j\}} c_{il}$ соответствует затратам собственных ресурсов менеджера для поддержки супериндивидуума i , обратное неравенство – использованию средств, выделенных другими субъектами на поддержку супериндивидуума i , для увеличения личного потребления менеджера.

2. Все субъекты $j \in J$ выбирают величину ресурсов c_{ij} , которые они готовы потратить на поддержку супериндивидуумов, которыми они не управляют.

На обоих этапах принятия решений субъекты максимизируют функции $g_j(\mathbf{c}_j, \mathbf{w})$; на первом – по переменным w_i , на втором – по переменным c_{ij} .

Определим свойства равновесия в такой системе.

Условия оптимальности первого порядка для задачи максимизации функции g_j приводят к системе уравнений, описывающих распределение субъектами имеющихся ресурсов:

$$\frac{\partial g_j}{\partial c_{ij}} = -u'_j(r_j - \sum_{i \in I} c_{ij}) + \lambda_{ij}(\mathbf{w})v'_{ij}(c_{ij}) = 0, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k.$$

Решение этой системы $\mathbf{c}_j^*(\mathbf{w}) = (c_{ij}^*(\mathbf{w}))_{i \in I}$ представляет собой оптимальное с точки зрения j -го субъекта распределение имеющихся у него ресурсов r_j на личное потребление и на поддержку различных супериндивидуумов при заданных стратегиях супериндивидуумов \mathbf{w} .

Подставляя это решение в функции полезности топ-менеджеров, получим

$$g_j^*(\mathbf{w}) = g_j(\mathbf{c}_j^*(\mathbf{w}), \mathbf{w}) = u_j(R_j - \sum_{i \in I_j} w_i - \sum_{i \in I} c_{ij}^*(\mathbf{w})) + \sum_{i \in I} \lambda_{ij}(\mathbf{w})v_{ij}(c_{ij}^*(\mathbf{w})).$$

Максимизация $g_j^*(\mathbf{w})$ по переменным w_i , $i \in I_j$ приводит к оптимальному с точки зрения топ-менеджера распределению полученных ресурсов между расширением влияния управляемых им супериндивидуумов и личным потреблением.

В простейшем случае, когда топ-менеджер заинтересован только в личном потреблении, его функция полезности принимает вид

$$g_j^*(\mathbf{w}) = u_j(r_j + \sum_{i \in I_j} f_i(C_i^*(\mathbf{w}), \mathbf{w})).$$

Так как функция u_j является возрастающей, задача топ-менеджера превращается в максимизацию функций $f_i(C_i, w_i)$, $i \in I_j$, условие оптимальности первого порядка для которых имеет вид:

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_i} = \sum_{j \in J} \frac{\partial c_{ij}^*}{\partial w_i} - 1 = 0.$$

В качестве примера рассмотрим систему с одним супериндивидуумом и n индивидуумами, которые имеют одинаковое начальное благосостояние $r_j = 1$. Один из индивидуумов ($j = 0$) – топ-менеджер, распоряжающийся ресурсами супериндивидуума. Предположим, что топ-менеджер заинтересован в максимизации личного благосостояния, его функция полезности:

$$g_0(\mathbf{c}, w) = \ln(1 + f).$$

Исследуем симметричный случай, когда остальные $(n - 1)$ индивидуумов в системе одинаковы. Положим коэффициент значимости супериндивидуума λ в их функциях полезности равным

$$\lambda(w) = \frac{w}{1 + w}.$$

Эта величина является нулевой при $w = 0$ (значимость отсутствует), и приближается к 1 при $w \rightarrow \infty$, т.е. значимость участия субъекта в супериндивидууме приближается к таковой для индивидуального потребления.

Функцию полезности субъекта от участия в супериндивидууме запишем в виде

$$v_j(\mathbf{c}) = \ln C + \ln c_j.$$

Данная функция учитывает два фактора: «авторитет» супериндивидуума, определяемый общей величиной собранных им ресурсов C и «вовлечённость» индивидуума j , определяемую количеством ресурсов c_j , затраченных им лично. Чем

более авторитетен супериндивидуум и более вовлечён в него субъект – тем выше его полезность от участия.

При этих предположениях функции полезности индивидуумов будут иметь вид:

$$g_j(\mathbf{c}, w) = \ln(1 - c_j) + \frac{w}{1 + w} (\ln \sum_{s \in J} c_s + \ln c_j).$$

Пользуясь полученными выше условиями оптимальности, получим, что при заданной величине w оптимальный объём ресурсов, выделяемых каждым субъектом для поддержки супериндивидуума, составит

$$c_j^*(w) = \frac{nw}{w(2n-1) + n - 1}.$$

Далее, решая задачу топ-менеджера, получим величину ресурсов, выделяемых на расширение влияния супериндивидуума:

$$w^* = \frac{(n-1)(\sqrt{n}-1)}{2n-1}.$$

Величина w^* оказывается меньше суммы собранных ресурсов, т.е. их часть будет расходоваться топ-менеджером на своё индивидуальное потребление.

Сравним полученное решение с децентрализованным финансированием супериндивидуума. В классических моделях социально-экономических систем децентрализованные схемы финансирования общего блага, как правило, менее эффективны, нежели централизованные из-за наличия «проблемы безбилетника».

В рассматриваемой системе децентрализованная схема реализуется, если топ-менеджер отсутствует и все затраченные n субъектами ресурсы полностью расходуются на финансирование супериндивидуума. В этом случае каждый субъект $j \in J$ решает задачу максимизации своей функции полезности $g_j(\mathbf{c}, w)$ при условии

$$w = \sum_{s \in J} c_s.$$

Найти решение данной задачи в аналитической форме даже для такой простейшей постановки не удаётся. Результаты численного моделирования показывают, что при децентрализованном финансировании как равновесный размер взносов индивидуумов c_j^* , так и суммарное их благосостояние оказываются выше.

Полученный результат показывает, что оппортунистическое поведение топ-менеджера в системах с эндогенной модификацией функций полезности может приводить к появлению чрезвычайно неэффективных равновесий, общественные потери в которых превышают издержки, связанные с «проблемой безбилетника» при децентрализованном финансировании.

Список литературы

1. Васин А.А. Эволюционная теория игр и экономика. Часть 1. Принципы оптимальности и модели динамики поведения // Журнал Новой экономической ассоциации. 2009. № 3-4. С. 10-27.
2. Васин А.А. Эволюционная теория игр и экономика. Часть 2. Устойчивость равновесий. Особенности эволюции социального поведения // Журнал Новой экономической ассоциации. 2010. № 5. С. 10-27.
3. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. Игры с иерархическим вектором интересов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974. № 3. С. 54–69.
4. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7. № 1. С. 50-73.
5. Докинз Р. Расширенный фенотип: Длинная рука гена. – М.: АСТ, 2010.

6. Докинз Р. Эгоистичный ген. – М.: АСТ, 2010.
7. Andersen S.B. et al. The Life of a Dead Ant: The Expression of an Adaptive Extended Phenotype // *The American Naturalist*, 2009. Vol. 174. No. 3. P. 424-433.
8. Ingram W.M. et al. Mice infected with low-virulence strains of *Toxoplasma gondii* lose their innate aversion to cat urine, even after extensive parasite clearance // *PLoS One*. 2013 Sep 18;8(9):e75246. doi: 10.1371/journal.pone.0075246.

Modeling of endogenous formation of utility functions of individuals in socio-economic systems

Kolesnik G.V.

Moscow Institute of Economics and Finance, Moscow, Russia

Построение индексов оценки неоднородности систем*

Мячина А.Л.

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Москва, Россия,*

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

В настоящее время весьма актуальной становится задача оценки степени близости объектов и рассмотрения возможности их объединения в группы согласно некоторой мере близости, выбранной исходя из конкретных условий задачи и ожидаемых конечных результатов. Одним из наиболее популярных методов разбиения изучаемой выборки на подмножества является кластерный анализ, различные методы и меры близости которого описаны во множестве учебников (например, [1,2]). Другим активно развивающимся в настоящее время методом является анализ паттернов, позволяющий выявлять закономерности в исследуемых данных, разбивать исходную выборку на непересекающиеся подмножества, а также, при наличии данных за определенный период времени, изучать динамические траектории исходных объектов. Подробный обзор методов описан в [3,4].

Отметим, что, хотя методы анализа паттернов активно развиваются, само понятие «паттерн» может быть определено по-разному в зависимости от изучаемой области. Для однозначности в работе использованы определения из [5]: «паттерн – любые отношения, закономерности или структура, присущая некоторому набору данных». Соответственно, под анализом паттернов будем понимать «процесс нахождения общих соотношений в наборе данных».

В общем случае, рассматривается некоторая выборка объектов $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$. Каждый объект a_i характеризуется значениями (как правило, числовыми) $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$. Используя определенную меру близости, необходимо объединить качественно схожие объекты. Для пояснения используем следующий пример: исследуются три объекта по трем показателям, значения которых приведены в таблице ниже.

Таблица 1. Пример анализа данных с использованием методов анализа паттернов

| | Показатель 1 | Показатель 2 | Показатель 3 |
|----------|--------------|--------------|--------------|
| Объект 1 | 30 | 50 | 30 |
| Объект 2 | 50 | 30 | 50 |
| Объект 3 | 3 | 5 | 3 |

*Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) и с использованием средств субсидии в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

Воспользуемся 2 видами визуализации данных объектов (см. рисунок ниже). Слева использована 3-мерная система координат, где Ox отражает показатель 1, Oy – показатель 2, и Oz – показатель 3. Справа использована система параллельных координат [6], традиционно применяемая для визуализации данных при анализе паттернов. На данном примере наглядно видно, что при необходимости разбиения изучаемого множества объектов на два подмножества и использовании ряда классических методов кластерного анализа, мы можем получить следующие разбиения: {Объект 1, Объект 2}, {Объект 3}, {Объект 1}, {Объект 2}, {Объект 3}, либо {Объект 1, Объект 2, Объект 3}. Объединение объектов 1 и 3 в единый кластер и выделение объекта 2 представляется затруднительным. Однако, если рассмотреть показатели объекта 3, очевидно, что это показатели объекта 1, деленные на 10. Таким образом, объекты 1 и 3 структурно схожи. Анализ паттернов позволяет подобные схожести выявлять.

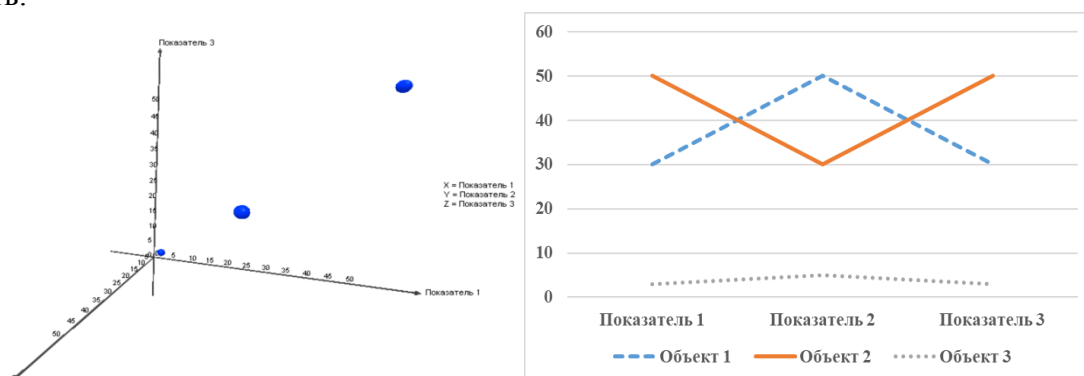


Рис.1. Примеры визуализации данных

Одним из возможных подходов является использование методов анализа паттернов, основанных на парном сравнении показателей [7,8]. В данных методах формируются кодировки объектов в зависимости от парного сравнения показателей на каждом этапе. Мерой близости служит расстояние Хемминга между кодировками объектов (объединение происходит только в случае нулевого расстояния).

Использование данных методов, названных порядково-фиксированной, порядково-инвариантной и диффузионно-инвариантной паттерн-кластеризациями для построения индексов неоднородности систем, обусловлено следующими важными особенностями:

1. невысокая вычислительная сложность позволяет обрабатывать относительно крупные массивы данных с минимальными временными затратами;
2. алгоритмы, лежащие в основе данных методов, позволяют объединять не только количественно, но и качественно схожие объекты;
3. количество и состав групп в конечном разбиении определяются без необходимости участия дополнительных экспертов;
4. конечный результат не изменится при использовании альтернативных последовательностей показателей.

Для построения единой агрегированной оценки всей исследуемой системы предлагается использование индекса, вычисленного согласно следующему принципу: если все изучаемые объекты качественно похожи согласно используемой мере близости (в данном случае, поскольку используется порядково-фиксированная, порядково-инвариантная и диффузионно-инвариантная паттерн-кластеризация, мерой близости является расстояние Хемминга), т.е. можно однозначно сказать, что они описываются единым паттерном и их можно объединить в единое подмножество, то изучаемая система абсолютно однородна. Для случая, когда никакие два объекта не описываются схожими паттернами, т.е. конечное разбиение состоит из подмножеств,

каждое из которых содержит единственный объект, то систему будем считать абсолютно неоднородной. Для других случаев используется следующий индекс:

$$(1) I_t^{mp} = 1 - \frac{|A| - v_t^{mp}}{|A|},$$

где I_t^{mp} – индекс неоднородности за момент времени t , полученный на основе одного из трёх рассматриваемых методов анализа паттернов;

$|A|$ – мощность изучаемого множества объектов;

v_t^{mp} – количество паттернов, полученных с использованием данных за момент времени t на основе одного из трёх рассматриваемых методов анализа паттернов.

На базе данных [9] и с использованием порядково-инвариантной паттерн-кластеризации проведено исследование неоднородности инновационного развития в РФ. В [9] анализировались данные науки образования и инновационной активности регионов РФ за 2007-2010 гг. (83 региона). В основе базовой системы показателей лежит российский региональный инновационный индекс [10] с определенными модификациями. В качестве базовой системы показателей (на основе исследования [10]) выбраны следующие агрегированные блоки: социально-экономические условия, образовательный потенциал, потенциал научно-технической деятельности, результативность исследований и разработок, потенциал инновационной деятельности, результативность инновационной деятельности. Конечное значение каждого блока формируется как среднеарифметическое из входящих в него заранее нормированных показателей. Нормировка производится согласно формуле

$$(2) \tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{\min j}}{a_{\max j} - a_{\min j}},$$

где \tilde{a}_{ij} – нормированное значение j -ого показателя объекта a_i ;

$a_{\min j}$ – минимальное значение j -ого показателя среди всех исследуемых объектов;

$a_{\max j}$ – максимальное значение j -ого показателя среди всех исследуемых объектов.

Далее, проведен корреляционный анализ, показавший значимую корреляцию блоков «результативность научной деятельности» и «потенциал научно-технической деятельности», в результате чего последний исключен из анализа. Таким образом, дальнейший анализ регионов РФ по уровню образования, науки и инновационной деятельности проведен на базе пяти агрегированных блоков показателей. На рис. 2 приведены кусочно-линейные функции 83 регионов РФ за 4 года.

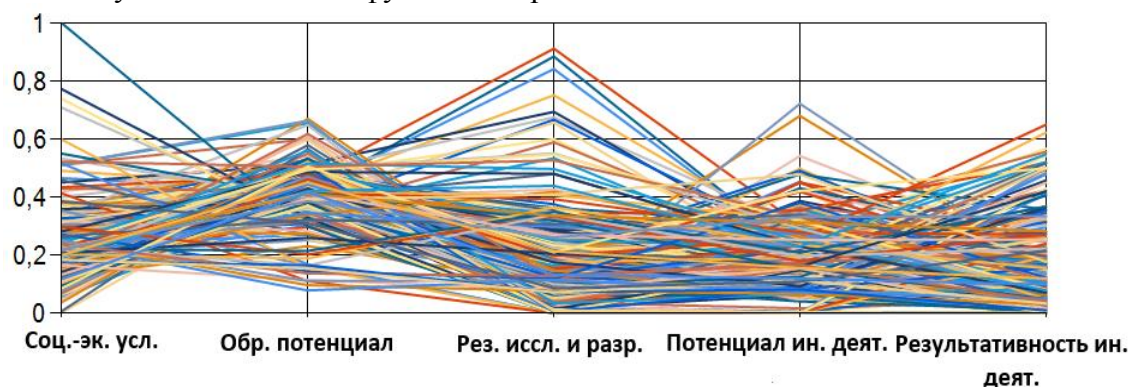


Рис. 2. Кусочно-линейные функции регионов РФ за 2007-2010 гг.

Далее, проведено разбиение исследуемых регионов с использованием методов анализа паттернов, описанных в [7,8]. Напомним, что исследуется $84 \times 4 = 332$ объекта (под «объектом», в данном случае, понимается один регион за определенный исследуемый период времени). Результатом использования порядково-инвариантной паттерн-кластеризации является 22 «крупных» паттерна (содержащих более 5 объектов), 12 «средних» паттернов (от 3 до 5 объектов) и также один паттерн, в

который были объединены «уникальные» объекты. Пример «крупных» паттернов приведен на рис. 3.

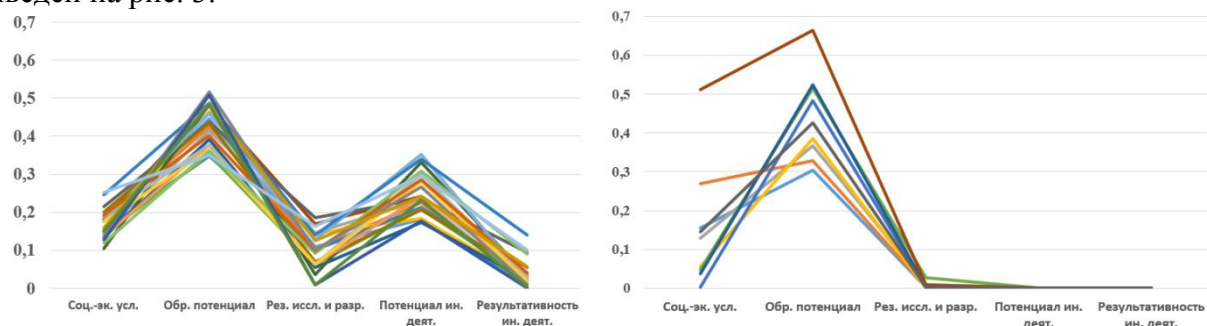


Рис. 3. Примеры «крупных» паттернов

Паттерн представленный на рис.3 слева представляет Архангельскую область 2007-2009, Волгоградскую область в 2007 и 2010, Забайкальский край в 2010, Иркутскую область 2009-2010, Кабардино-Балкарскую Республику в 2007, Камчатский край 2009-2010, Мурманскую область 2007-2010, Республику Саха (Якутия) в 2007, Тамбовскую область в 2010, Тульскую область 2009-2010, Удмуртскую Республику в 2007, 2008 и 2010, а также Хабаровский край в 2007.

Для наглядности, представим агрегированные результаты за один год (для примера взят 2010-ый) на рис. 4. Одинаковый цвет означает попадание регионов в один паттерн.



Рис. 4. Карта, демонстрирующая неоднородность инновационного развития в РФ

Таким образом, предложенная методология позволяет исследовать неоднородность инновационного развития различных территориальных образований, выявлять качественно схожие (по выбранным показателям) объекты, а также, при необходимости, строить динамические траектория развития.

Список литературы

1. Мандель И.Д. Кластерный анализ. Финансы и статистика, 1988.
2. Миркин Б.Г. Методы кластер-анализа для поддержки принятия решений: обзор, 2011.
3. Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Егорова Л.Г., Миркин Б.Г. Анализ паттернов в статике и динамике, часть 1: обзор литературы и уточнение понятия // Бизнес-информатика. 2013. №3 (25). С. 3–18.
4. Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Егорова Л.Г., Миркин Б.Г. Анализ паттернов в статике и динамике, часть 2: примеры применения к анализу социально-экономических процессов // Бизнес-информатика. 2013. №4 (26). С. 3–20.
5. Shawe-Taylor J., Cristianini N. Kernel methods for pattern analysis. Cambridge university press, 2004.

6. Inselberg A. *Parallel Coordinates: Visual Multidimensional Geometry and Its Applications*. Springer. 2009. 554p.
7. Мячин А.Л. Анализ паттернов: порядково-инвариантная паттерн-кластеризация // *Управление большими системами (сборник трудов)*. 2016. №61. С.41-59.
8. Мячин А.Л. Анализ паттернов: диффузионно-инвариантная паттерн-кластеризация // *Проблемы управления*. 2016. №4. С. 2-9.
9. [Aleskerov F., Gokhberg L., Egorova L., Myachin A., Sagieva G. Pattern Analysis in the Study of Science, Education and Innovative Activity in Russian Regions](#) // *Procedia Computer Science*. 2013. Vol. 17. P. 687-694.
10. Рейтинг инновационного развития субъектов Российской Федерации: аналитический доклад / под ред. Л.М. Гохберга. М.: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 2012.

Construction of indices of estimation of inhomogeneity of systems

Myachin A.L.

National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia,
Institute of Control Sciences. V.A. Trapeznikova RAS, Moscow, Russia

Эконометрический анализ коррупции в России

Трегуб И.В.

*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва,
Россия*

Согласно закону Российской Федерации «О противодействии коррупции» современному российскому законодательству [1], *«коррупция — это злоупотребление служебным положением, дача взятки, получение взятки, злоупотребление полномочиями, коммерческий подкуп либо иное незаконное использование физическим лицом своего должностного положения вопреки законным интересам общества и государства в целях получения выгоды в виде денег, ценностей, иного имущества или услуг имущественного характера, иных имущественных прав для себя или для третьих лиц либо незаконное предоставление такой выгоды указанному лицу другими физическими лицами»* а также совершение указанных деяний от имени или в интересах юридического лица.

Наиболее частыми случаями проявления коррупции являются взятки, особенно в сфере государственного управления, представляющей собой профессиональную служебную деятельность граждан на должностях государственной гражданской службы Российской Федерации по обеспечению исполнения полномочий федеральных государственных органов, государственных органов субъектов Российской Федерации

В связи с важностью целей и задач противодействию коррупции в органах государственной гражданской службы становится ясна необходимость анализа количества экономических преступлений в данной сфере.

На данный момент институт государственно-административного управления в нашей стране работает неэффективно. К числу основных проблем, на наш взгляд, можно отнести бюрократию. Слабый коррупционный контроль с одной стороны и большая численность чиновников, доходящая в отдельных регионах России до одного на семь человек населения (Орловская область) [2] с другой, наряду с их неэффективной работой вследствие отсутствия необходимой квалификации многократно увеличивает общий документооборот, что зачастую приводит к коррупции.

Целью данной работы является анализ коррупции в России, а именно, выявление факторов, оказывающих влияние на число зарегистрированных взяток. В качестве регрессоров будут исследованы: число государственных гражданских служащих, уровень их должностных окладов, уровень образования чиновников, эффективности государственного управления, противодействие коррупции со стороны Правительства.

Задача – построение эконометрической модели, способной дать количественный прогноз изменения уровня коррупции в России. В качестве математического инструментария в работе будет применено эконометрическое моделирование.

Данные о числе взяток, численности работников государственных органов и органов местного самоуправления по ветвям власти и уровням управления, величина их должностных окладов собираются Федеральной службой государственной статистики Российской Федерации и публикуются на официальном сайте gks.ru. Одновременно с этим информация о числе экономических и иных преступлений, а также о числе лиц, совершивших разные виды преступлений размещается портале Генеральной прокуратуры Российской Федерации в разделе Портал правовой статистики.

Показатели эффективности государственного управления представляют собой исследовательский набор данных, в котором обобщаются мнения о качестве управления, предоставляемые большим числом респондентов из числа предприятий, граждан и экспертов в промышленных и развивающихся странах. Эти данные собираются из ряда исследовательских институтов, аналитических центров, неправительственных организаций, международных организаций и фирм частного сектора Всемирным Банком и публикуются на его официальном сайте <http://info.worldbank.org>. Значения индекса варьируются от примерно -2,5 (слабая) до 2,5 (сильной) эффективности государственного управления.

Индекс контроля коррупции отражает экспертную оценку о том, в какой степени государственная власть осуществляется в частных интересах и на частные средства, включая различные формы коррупции, а также вмешательство в управление государством со стороны элит и лиц, представляющих частные интересы. Индекс оценивает, насколько часто фирмам и обычным людям приходится давать взятки для различных целей и на различных уровнях, распространённость коррупции в правительстве, налоговых, учебных, медицинских учреждениях и другие, как репрезентативные, так и не репрезентативные показатели.

В данной работе индекс контроля коррупции используется как совокупная оценка действий антикоррупционного законодательства и эффективность осуществления антикоррупционных мер представителями исполнительной власти. Как и индекс противодействия коррупции индекс контроля коррупции рассчитывается Всемирным Банком.

На рисунке 1 представлена динамика численности государственных гражданских служащих, в тысячах человек (левая ось) и число взяток, в тысячах случаев (правая ось).

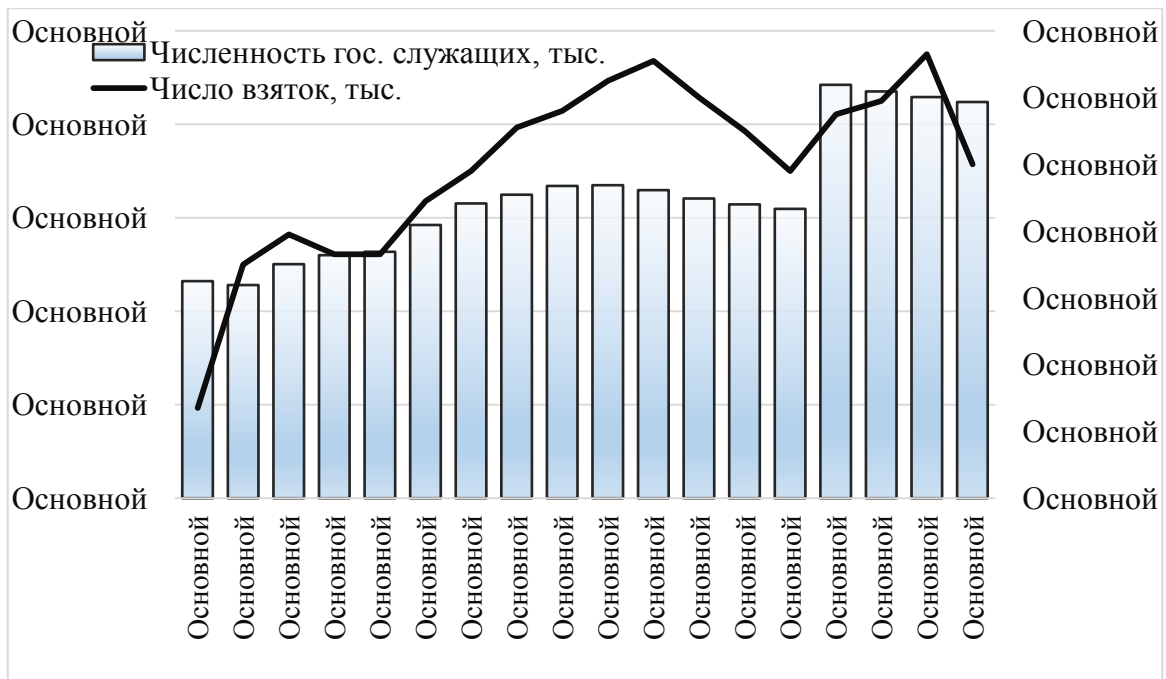


Рисунок 1. Численность государственных служащих, в тысячах человек (левая ось), число взяток, в тысячах случаев (правая ось)

Источник: www.gks.ru, <http://crimestat.ru>; Графическое представление – автор.

В рамках данного исследования будем считать, что число взяток линейно зависит от числа чиновников, индекса контроля коррупции, средней заработной платы государственных служащих и уровня их образования. Общем виде уравнение эконометрической модели имеет вид

$$V = a_0 + a_1 \cdot N + a_2 \cdot ICC + a_3 \cdot X + a_4 \cdot Edu + u \quad (1)$$

Где V – число взяток в тысячах случаев,

N – число государственных гражданских служащих федеральных государственных органов в тысячах человек,

ICC – индекс контроля коррупции, изменяющийся от -2.5 до 2.5,

X – оплата труда гражданских служащих федеральных государственных органов, тыс.руб.

Edu – уровень образования, количество человек из числа гражданских служащих федеральных государственных органов, получивших дополнительное образование.

u – случайный остаток, отражающая совокупность влияния неучтённых факторов.

Построение эконометрической модели, оценку ее коэффициентов осуществим методом наименьший квадратов с использование годовых данных об экзогенных и эндогенной переменной с 2010 по 2016 год. Данные за 2017 год будут использоваться для проверки адекватности эконометрической модели. Процедура оценивания проведена в среде MSOfficeExcel. Выходная статистика представлена в таблице 1.

Таблица 1. Результаты оценивания

SUMMARY OUTPUT

| <i>Regression Statistics</i> | | | | | |
|------------------------------|--|--|--|--|------|
| Multiple R | | | | | 0,99 |
| R Square | | | | | 0,98 |
| Adjusted R Square | | | | | 0,94 |
| Standard Error | | | | | 0,30 |
| Observations | | | | | 7 |

| <i>ANOVA</i> | | | | | |
|--------------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------------------|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Significance F</i> |
| Regression | 4 | 8,72 | 2,8 | 24,47 | 0,04 |
| Residual | 2 | 0,18 | 0,09 | | |
| Total | 6 | 8,90 | | | |

| | <i>Coefficients</i> | <i>Standard Error</i> | <i>t Stat</i> | <i>P-value</i> |
|------------------|---------------------|-----------------------|---------------|----------------|
| <i>Intercept</i> | -47,55 | 6,36 | -7,47 | 0,02 |
| <i>N</i> | 0,01 | 0,001 | 6,24 | 0,02 |
| <i>ICC</i> | -46,23 | 5,12 | -9,03 | 0,01 |
| <i>X</i> | 0,10 | 0,01 | 6,71 | 0,02 |
| <i>Edu</i> | -0,04 | 0,02 | -2,10 | 0,17 |

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что 94 % вариации зависимой переменной (числа взяток) объясняется выбранными факторами в рамках линейной эконометрической модели. Качество спецификации модели по результатам F-теста высокое. Все коэффициента, кроме уровня образования, значимы с вероятностью ошибки не более пяти процентов.

Результаты оценивания коэффициентов модели позволяют сделать вывод, что увеличение числа чиновников на 1 тысячу человек приводит к увеличению числа взяток на 10 зарегистрированных случаев в год. Вместе с тем интересен тот факт ,что увеличение уровня доходов чиновников не приводит уменьшению случаев коррупции, наоборот, увеличение оплаты труда на 1 тысячу рублей в месяц приводит к увеличению взяток на 100 случаев в год, что эквивалентно 8,3 в месяц. Наиболее сильное влияние на уровень коррупции оказывает контроль коррупции со стороны Правительства. Так изменение индекса контроля коррупции на один пункт сокращает величину взяток на 426 взятки в год.

При высокой коррумпированности верхних эшелонов власти сокращение числа чиновников не будет давать желаемого эффекта. В нашей стране борьба с коррупцией находится на крайне низком уровне, и только применение комплексных мер всеми тремя ветвями власти на всех уровнях смогут дать положительный долговременный эффект. На мой взгляд, наиболее эффективны были бы развитие антикоррупционного

законодательства и формирование в обществе отторжения, презрения к самой культуре взяточничества.

Список литературы

1. Федеральный закон Российской Федерации от 25 декабря 2008 г. N 273-ФЗ «О противодействии коррупции»
2. Новые Известия <https://newizv.ru/news/society/22-06-2017/odin-k-semi-rossiya-pobila-istoricheskie-rekordy-po-chislu-gossluzhaschih>
3. Трегуб И.В. Модель индекса восприятия коррупции // Труды VIII Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2016). Том II Изд-во ФИЦ ИУ РАН. 2016 С.201-202
4. Tregub I.V. Mathematical Models of Development the World Information Society // В сборнике: Forum for Reseach in Empirical Internation Trade Сан Рафаэль, 2015.
5. Tregub I.V. Econometrics. Model of real system // Москва, 2016.

Econometric analysis of corruption in Russia

Tregub I.V.

Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

Об эффективности социальной поддержки в смешанных обществах

Чеботарев П.Ю., Цодикова Я.Ю., Логинов А.К., Лезина З.М.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

Эффективность эгоистической и альтруистических стратегий в стохастической среде в случае однородных обществ была изучена в [1]. Первые результаты, относящиеся к неоднородным обществам, были представлены в [2]. Исследование ведется в рамках модели ViSE (VotinginaStochasticEnvironment), предложенной авторским коллективом в 2003 г.

Основные положения этой модели сводятся к следующему. Рассматривается общество, состоящее из n участников (агентов), каждый из которых характеризуется действительным скаляром, меняющимся в дискретном времени и интерпретируемым как капитал (его отрицательное значение – долг) либо индивидуальная полезность (более абстрактный аналог капитала). Задается вектор начальных значений капитала участников. Предложение среды есть вектор приращений индивидуальных капиталов всех участников. Предполагается, что эти приращения есть случайные величины, в простейшем случае – независимые и одинаково распределенные, с математическим ожиданием μ и среднеквадратичным отклонением σ .

Среда последовательно генерирует предложения, которые ставятся на голосование; голосуют все участники; каждый наделен одним голосом. Посредством выбранной процедуры голосования принимается коллективное решение: предложение либо одобряется, либо отвергается. Одобренные предложения реализуются: капиталы участников получают предусмотренные этими предложениями приращения. Один из вариантов модели предполагает выбывание разорившихся участников, т.е. участников, чей капитал стал отрицательным (вариант «с вымиранием»).

Эгоист голосует за предложение среды тогда и только тогда, когда оно увеличивает его капитал. Решения принимаются простым большинством. Способ голосования *альтруистов* может быть различным. Рассмотрим альтруистов со следующей стратегией. Упорядочим всех членов общества по возрастанию текущего значения капитала. Поскольку приращения капиталов есть реализации случайных величин с непрерывным распределением, в состоянии, отличном от начального, текущие значения капитала почти всегда различны. Фиксируется натуральное число $n_0 \leq n$, и для текущего предложения среды находится сумма приращений капиталов n_0 беднейших

участников. Альтруист поддерживает предложение тогда и только тогда, когда эта сумма положительна – независимо от того, как меняются капиталы оставшихся $n - n_0$ участников (среди которых может быть и он сам). В случае $n_0 = n$ он поддерживает предложения, обогащающие общество в целом, а при меньших n_0 – предложения, обогащающие беднейший слой численностью n_0 . Если в начальном состоянии капиталы у всех одинаковы, то для реализации альтруистической стратегии участники упорядочиваются по порядковому номеру.

Исследование статистических закономерностей изменения вектора капиталов в разных средах, при различных социальных установках участников и процедурах голосования позволяет находить наилучшие стратегии участников и оптимальные механизмы принятия коллективных решений.

Модель исследуется аналитическими методами и методами имитационного моделирования. Результаты опубликованы в более чем 20 работах.

В [1] установлено, что в случае генерации предложений с помощью нормального распределения среднее приращение капитала общества, состоящего из эгоистов, примерно такое же, как для общества, все участник которого – альтруисты с порогом поддержки 65% (см. рис. 1). Поэтому для анализа сравнительной эффективности эгоизма и альтруизма в смешанных обществах имеет смысл рассмотреть альтруистов с порогом беднейших 65%. Некоторые результаты такого анализа кратко изложены ниже.

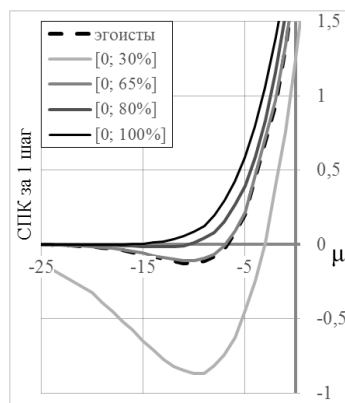


Рис. 1. Среднее приращение капитала за один шаг без вымирания; число участников $n = 201$; $\sigma = 80$. Однородные общества, состоящие из эгоистов и альтруистов с разными окнами поддержки. Предложения генерируются нормальным распределением.

Пусть по-прежнему распределение предложений – нормальное, и нет вымирания. При этом приращения капитала двухкомпонентных обществ выше приращений для общества из эгоистов. Появление всего 2,5% альтруистов в 2,5 раза уменьшает глубину «ямы ущерба»! Наилучший результат достигается при 5% альтруистов. После этого рост их числа приводит уже к углублению ямы ущерба, и при 20% альтруистов она почти так же глубока, как в случае общества, состоящего из эгоистов. При дальнейшем росте доли альтруистов глубина «ямы» почти не меняется. Ее углубление при росте числа альтруистов с окном поддержки [0; 65%] объясняется тем, что при некоторой их доле интересы 65% беднейших участников оказываются уже в определенной мере защищены: редко принимаются предложения в среднем невыгодные для них. Поэтому дальнейший рост доли альтруистов почти не влияет на положение этой категории, но заметно снижает учет интересов остальных, что негативно сказывается на среднем приращении капитала общества.

В случае общества с вымиранием общая закономерность та же: наилучшие результаты – при 5% альтруистов. Но стабилизация (на довольно низком уровне) наступает примерно при 30% альтруистов. Следует отметить, что этот уровень заметно

ниже уровня общества, состоящего из эгоистов, и немного ниже уровня общества, состоящего из альтруистов (с тем же окном поддержки [0; 65%]).

В случае с вымиранием естественно использовать еще один показатель эффективности альтруистической стратегии – долю участников, не разорившихся до конца игры. Если сравнивать эту долю для разных обществ «на дне» ямы ущерба, то минимальна она в обществе, состоящем из эгоистов. На левом склоне «ямы ущерба» наилучшие результаты по этому показателю имеет общество, где 5% альтруистов, однако, на правом склоне оно уступает обществам, где альтруисты составляют 20% и более, оказывая очень сильное влияние на принимаемые решения. На левом склоне из этих обществ лучше сохраняет численность то, что состоит из альтруистов наполовину.

Обратимся теперь к обществам того же типа, для которых предложения генерируются симметризованным распределением Парето [1]. Если нет вымирания, то наибольший капитал, как и в предыдущем случае, накапливается обществом с 5% альтруистов. Рост доли альтруистов приводит к снижению капитала, и он стабилизируется на довольно низких значениях при 20% альтруистов.

При окне поддержки [0; 50%] в случае с вымиранием наилучший результат в проведенных экспериментах – при 10% альтруистов. С ростом доли альтруистов результаты ухудшаются, и самые низкие наблюдаются при 100% альтруистов. Общество из эгоистов не имеет ямы ущерба, и в этом его преимущество перед обществами с альтруистами. В то же время чем среда благоприятнее, тем сильнее проявляется преимущество обществ с альтруистами.

Анализ численности участников для этого случая показывает, что наиболее успешно общество с довольно низким (5%) числом альтруистов, а наименее успешны общества с долей альтруистов 30% и выше. Этот результат связан с более узким (по сравнению с рассмотренным ранее) окном поддержки: [0; 50%]. Его объяснение в целом такое же, как в случае окна поддержки [0; 65%], но теперь эффект проявляется резче.

В докладе рассматриваются также общества других типов, в частности, общества, где участники имеют комбинированную стратегию голосования. Соответствующее условие поддержки предложений сводится к следующему. Оценивая предложение среды, участник вычисляет взвешенную сумму предлагаемого приращения его собственного капитала и среднего приращения капитала беднейшего слоя, выделяемого окном поддержки. Он голосует «за» тогда и только тогда, когда эта сумма положительна. Такой участник не является ни альтруистом, ни эгоистом – он стремится поддержать баланс своей выгоды и интересов беднейшего слоя. Результаты, получающиеся в серии имитационных экспериментов, указывают на то, что при использовании такого баланса общество может добиться большего, чем общества «чистого» типа, а также общества, состоящие из эгоистов и альтруистов.

Наилучший результат при использовании комбинированной стратегии достигается, если «смешать» 40-50% эгоизма и 60-50% альтруизма. При комбинировании 10% эгоизма и 90% альтруизма или 90% эгоизма и 10% альтруизма получаются примерно одинаковые, причем значительно худшие результаты.

Рассматриваются и так называемые «общества с ответственной элитой». Установлено, что наличие сравнительно небольшой доли альтруистов с окном поддержки [0; 100%] заметно увеличивает средние приращения капитала всего общества и во многих случаях устраняет «яму ущерба». Однако при этом альтруисты, если их мало, сильно уступают эгоистам по среднему приращению капитала. Возникает вопрос: «Как стимулировать участников выбрать альтруистическую стратегию?»

Один из подходов к этому состоит в следующем. Сравнительно небольшая группа участников, которую будем называть «ответственной элитой», комбинирует групповую эгоистическую стратегию с альтруистической при окне поддержки [0; 100%].

Здесь приращение капитала общества ниже, чем в случае, когда группа состоит из

альтруистов с окном поддержки [0; 100%], но если члены группы сменяют свою стратегию на эгоистическую или групповой эгоизм, то оно снизится еще примерно настолько же.

Является ли указанная комбинированная стратегия выгодной для «ответственной элиты»? Каково среднее приращение капитала этой группы в сравнении со средним приращением капитала остальных участников? Установлено, что став на 50% альтруистической, группа мало теряет в приращении капитала по сравнению с группой такого же размера, придерживающейся группового эгоизма. Как отличаются в этих двух случаях доходы эгоистов? При полу-альтруистической (50% альтруизма) группе они существенно выше (и это позитивно сказывается на доходах всего общества), но, разумеется, ниже, чем при группе, альтруистической на 100%. Интересно отметить, что доходы эгоистов при полу-альтруистической группе практически такие же, как доходы членов чисто альтруистической группы. Таким образом, «ответственная элита» помогает обществу чуть меньше, чем альтруистическая группа с окном поддержки [0; 100%].

Список литературы

1. Чеботарев П.Ю., Цодикова Я.Ю., Логинов А.К., Лезина З.М., Афонькин В.А., Малышев В.А. О сравнительной выгодности альтруизма и эгоизма при голосовании в стохастической среде / Статья подана в журнал. 2017. С. 1–22.
2. Чеботарев П.Ю., Цодикова Я.Ю., Логинов А.К., Лезина З.М. Какой процент альтруистов нужен в обществе и на что им следует направлять свои усилия? // Второй Российский экономический конгресс, Суздаль, 18-22 февраля 2013 г., М.: НЭА, 2013. С. 1–3. <http://skachate.ru/download/filosofiya-31943/31943.doc>

About the effectiveness of social support in mixed societies

Chebotarev P.Yu., Tsodikova Y.Yu., Loginov A.K., Lezina Z.M.
Institute of Control Sciences. V.A. Trapeznikova RAS, Moscow

Оптимизация границ малых форм предпринимательства

В.М.Черепанов
ИМЭИ, Москва, Россия

Работа основана на информации [1, 2] и результатах оценки тенденции параметров границ субъектов хозяйствования в России между микро, малым, средним, крупным и большим бизнесом и прогнозировании последствий этих тенденций предпринимательства. Она является дальнейшим развитием построений [3 - 7] и предполагает формирование комплексной сбалансированной статистической информации о межотраслевых хозяйственных связях и структурных пропорциях экономики России, а также повышение качества статистических и прогнозных расчетов микро-, мезо-, макро- экономических показателей различных приложений исследования операций.

Во исполнение распоряжения Правительства РФ от 14.02.2009 № 201-р «Об информации о межотраслевых связях и структурных пропорциях экономики Российской Федерации» предусмотрено: а) осуществлять разработку базовых таблиц "затраты-выпуск" на регулярной основе не реже одного раза в пять лет; б) в целях информационного обеспечения для отслеживания затрат производственной деятельности резидентов национальной экономики в свою очередь предусматривается:

- сплошное федеральное статистическое наблюдение за деятельностью субъектов малого и среднего предпринимательства (далее - сплошное наблюдение МСП) (раз 5 лет);

- выборочное федеральное статистическое наблюдение за затратами на производство и/или реализацию товаров (работ, услуг) и результатами деятельности хозяйствующих субъектов (далее выборочное наблюдение за затратами) (1 раз в 5 лет).

Значимость и сложность данной задачи состоит в необходимости создания множества взаимосвязанных (взаимоувязанных) документов, качественно повышающих уровень понимания, принятия и исполнения Закона на всех уровнях управления. Решение этой задачи осложнено отсутствием «сквозной» методологии, фрагментарностью методического инструментария, объективной сложностью состава критериев и информации о предпринимательстве, необходимой для отдельных видов расходов на производство и продажу товаров, работ, услуг малых, средних предприятий и других форм, в т.ч. для построения базовых таблиц "затраты - выпуск". К настоящему времени (март 2018 г.) Росстат (www.gks.ru) подвел итоги сплошного статистического наблюдения за деятельностью малого и среднего бизнеса за 2010 год, а также итоги сплошного наблюдения за деятельностью субъектов МСП за 2015 год (обновлено 06.07.2017). Создан Единый реестр субъектов МСП. Ведение единого реестра субъектов малого и среднего предпринимательства осуществляется Федеральной налоговой службой.; причем с августа 2016 г. в части количества юридических лиц и индивидуальных предпринимателей, а с января 2017 г. реестр дополнен в части среднесписочной численности работников, занятых у субъектов малого и среднего предпринимательства (юридических лиц и индивидуальных предпринимателей, привлекавших в году, предшествующем году формирования реестра, наемных работников, включая внешних совместителей и работающих по договорам гражданско - правового характера), за исключением упомянутых в части 3 статьи 4 Федерального закона № 209-ФЗ (актуальная ред. 31 декабря 2017 г., с изм. и доп.) вновь созданных юридических лиц (вновь зарегистрированных индивидуальных предпринимателей). Количество юридических лиц и индивидуальных предпринимателей МСП, среднесписочная численность работников обновляются ежемесячно.

МСП = ЮЛ+ИП - субъекты малого и среднего предпринимательства; где ЮЛ - Юридические лица; ИП - Индивидуальные предприниматели. Категории МСП (ЮЛ+ИП) - средние предприятия, малые предприятия, микро предприятия, включая крестьянские (фермерские) хозяйства, являющиеся малыми предприятиями.

Сплошное наблюдение за МСП (1 раз в 5 лет) представляет более содержательную информацию. В частности, приведена группировка ЮЛ + ИП по числу участников бизнеса у одного субъекта МСП (включая индивидуального предпринимателя, работающих членов семьи, партнеров и наемных работников). Рассматриваем меру эффективности (успешности, оптимальности) коммерческих операций с точки зрения тенденций интересов участвующей в них МСП и границ малых форм предпринимательства. Группировку субъектов МСП России используем по 10 кластерам среднесписочной численности работников от 0 чел. до 250 чел. (Рисунок 1).

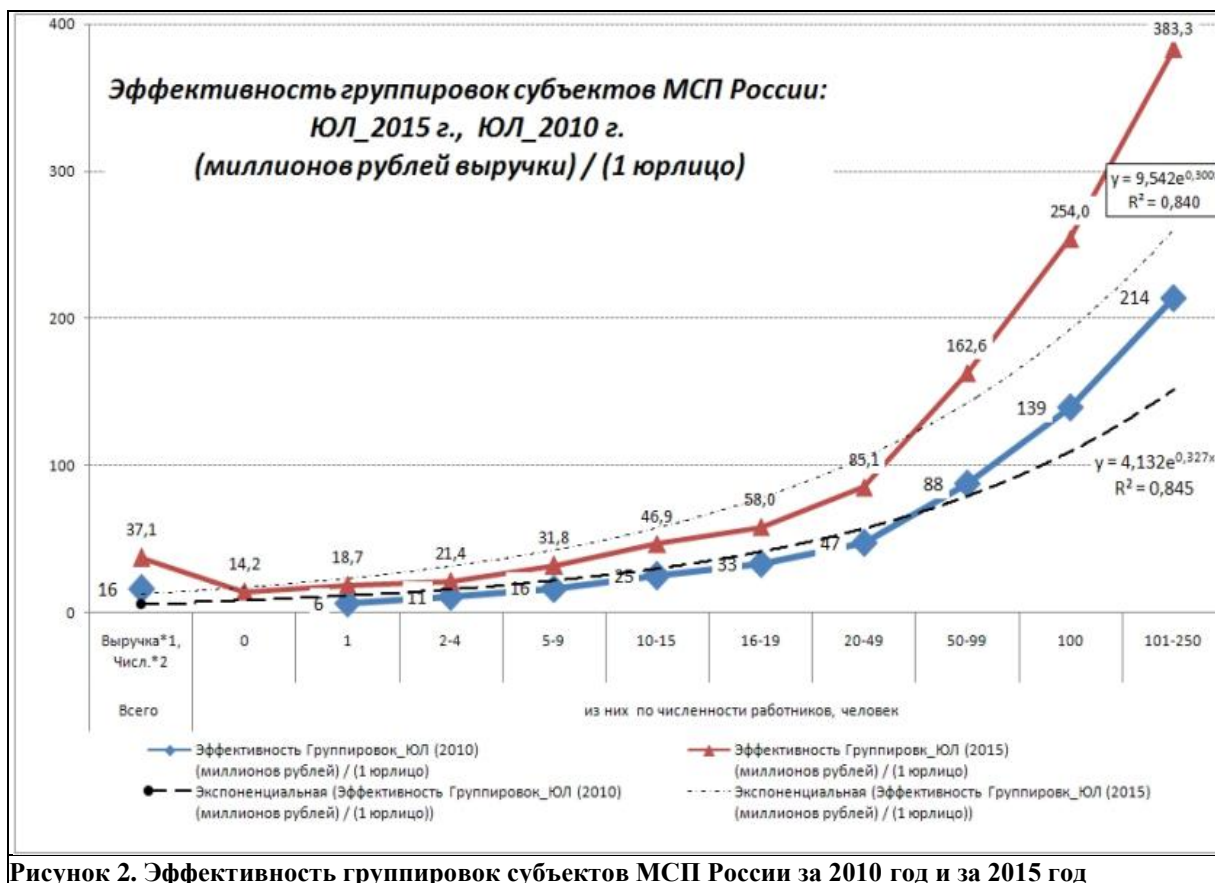


Рисунок 2. Эффективность группировок субъектов МСП России за 2010 год и за 2015 год

Примечания, легенда (Рисунок 1):

Выручка*1 - Выручка ЮЛ от реализации товаров, работ, услуг (без НДС и акцизов) - (трлн. рублей);

Юрлица*2 - Число юридических лиц, (млн. ЮЛ);

Эффективность*3 эффективность группировок ЮЛ = (миллионов рублей) / (1 юрлицо), в частности:

(Всего 2015 г.) эффективность = $37,1 = 54,49$ (трлн. рублей выручки) / 1,47 (млн. юрлиц)

(Всего 2010 г.) эффективность = $15,78 = 26,35$ (трлн. рублей) выручки / 1,67(млн. юрлиц)

Причем в итоговую графу (Всего) включены данные предприятий, которые по предельным значениям не могут быть отнесены к субъектам малого и среднего предпринимательства (имеют среднюю численность работников свыше 250 человек), но в соответствии с законом №209-ФЗ (ст.4, п.4) категория субъекта малого и среднего предпринимательства изменяется только в случае, если предельные значения выше или ниже предельных значений в течение трех календарных лет, следующих один за другим (тем самым Федеральным законом предусмотрен и предопределён риск неопределённости).

Сравним субъекты МСП и субъекты ИК (с участием иностранного капитала).

За период 2009 - 2016 гг. число малых предприятий (включая микропредприятия) , увеличилось с 1,6 до 2,8 млн.ед. Средняя численность работников (включая внешних совместителей и работающих по договорам гражданско-правового характера) малых предприятий (включая микропредприятия) , колебалась около 11,3 млн. чел. За 2010 г. и 2015 г. выручка от реализации товаров, работ, услуг (без НДС и акцизов) или оборот малых предприятий (включая микропредприятия) росли с 16,4 до 38,9 трлн. руб. Таким образом, выработка одного работника МСП увеличилась с 1,5 млн.руб. до 3,5 млн.руб.

Для организаций с участием иностранного капитала (без микропредприятий) картина несколько другая. Оборот ИК 0,6 - 1,8 (млн.руб./1 ИК) значительно меньше чем у МСП. Однако выработка одного работника ИК увеличилась с 3,6 млн.руб. до 12,6 млн.руб. (Рисунок 2). Следует обратить внимание, что за пять лет (2010-2015 гг.) средняя эффективность группировок юридических лиц увеличилась почти в $2\frac{1}{2}$ раза (=2,4= $37,1/16$) за счет увеличения общей суммы выручки от реализации продукции

(выполнения работ, оказания услуг) на 100% (54,49 трлн. рублей /26,35 трлн. рублей) и соответствующего уменьшения на 14% числа юридических лиц (с 1,67 до 1,47 млн.).

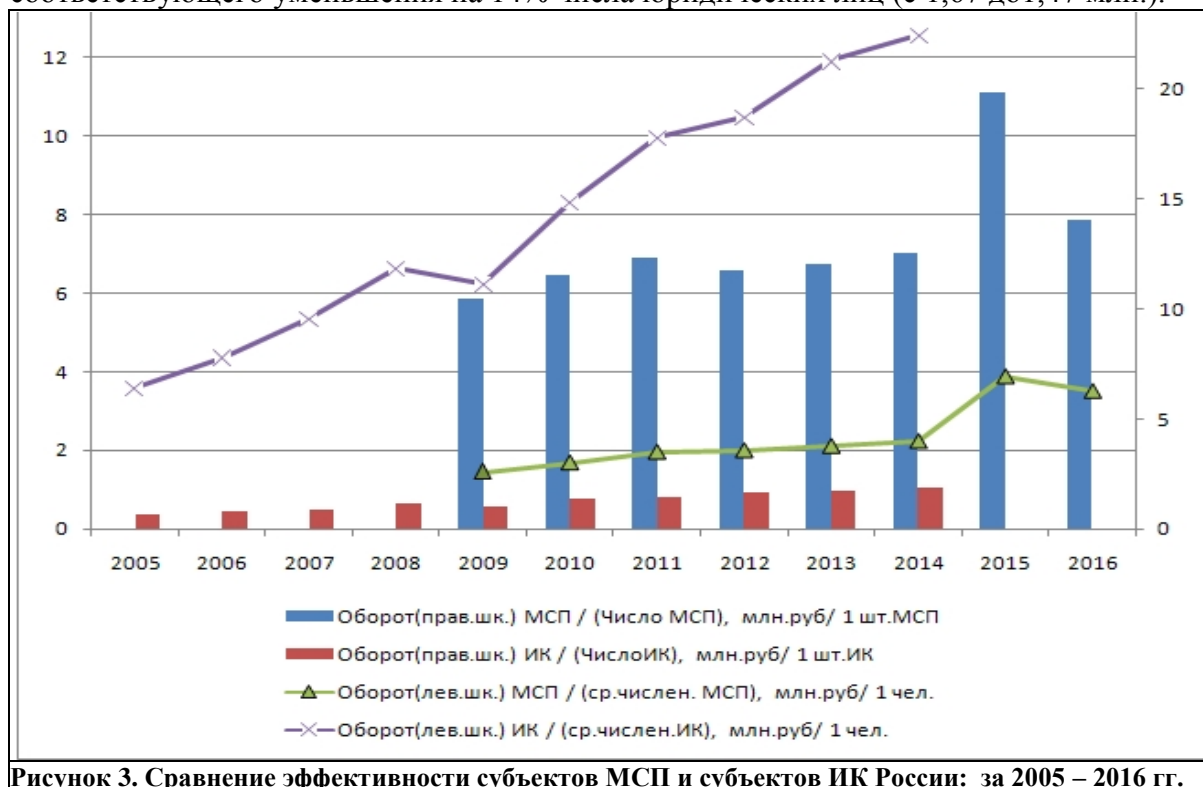


Рисунок 3. Сравнение эффективности субъектов МСП и субъектов ИК России: за 2005 – 2016 гг.

Примечания, легенда (Рисунок 2):

МСП - Малое и среднее предпринимательство; за 2009 и 2011 гг. - по данным выборочных обследований с учетом пересчета; за 2010 г. по данным сплошного наблюдения за деятельностью МСП.

ИК - Деятельность организаций с участием иностранного капитала; данные за 2015 г. по сопоставимому кругу предприятий не формируются в связи с проведением сплошного наблюдения МСП и отменой выборочного обследования микропредприятий. С 2016 г. данные не разрабатываются.

Обратим внимание, при сравнении за те же пять лет (2010-2015 гг.) валовой внутренний продукт (в текущих ценах) увеличился только в $1\frac{4}{5}$ раза (1,8 = 83,4 трлн. руб./46,3 трлн. руб.), при том, что базовые таблицы «затраты-выпуск» впервые построены на принципиально новой методологии системы национальных счетов, соответствующей рыночной экономике, однако номенклатуры отраслей и продукции в этих таблицах базировались на действующем в тот момент Общероссийском классификаторе отраслей народного хозяйства (ОКОНХ). Базовые таблицы «затраты-выпуск» за 2011 год содержат изменения, связанные с СНС 2008 г. (см. Рисунок 3, Рисунок 4).

Большие трудности вызывает оценка доли малого бизнеса в ВВП страны.

Этот показатель отражался Росстатом фрагментарно, а с 2006 года вовсе исчез. В дальнейшем он прогнозировался Минэкономразвития России. Ответ - доля малого бизнеса в ВВП РФ остается на уровне примерно 20% (цифра озвучена на Восточном экономическом форуме во Владивостоке 6-7 сентября 2017, <http://ria.ru>) - «Уже 15 лет остается как заколдованная» - добавил Греф - глава крупнейшего российского банка, ранее возглавлявший министерство экономики.

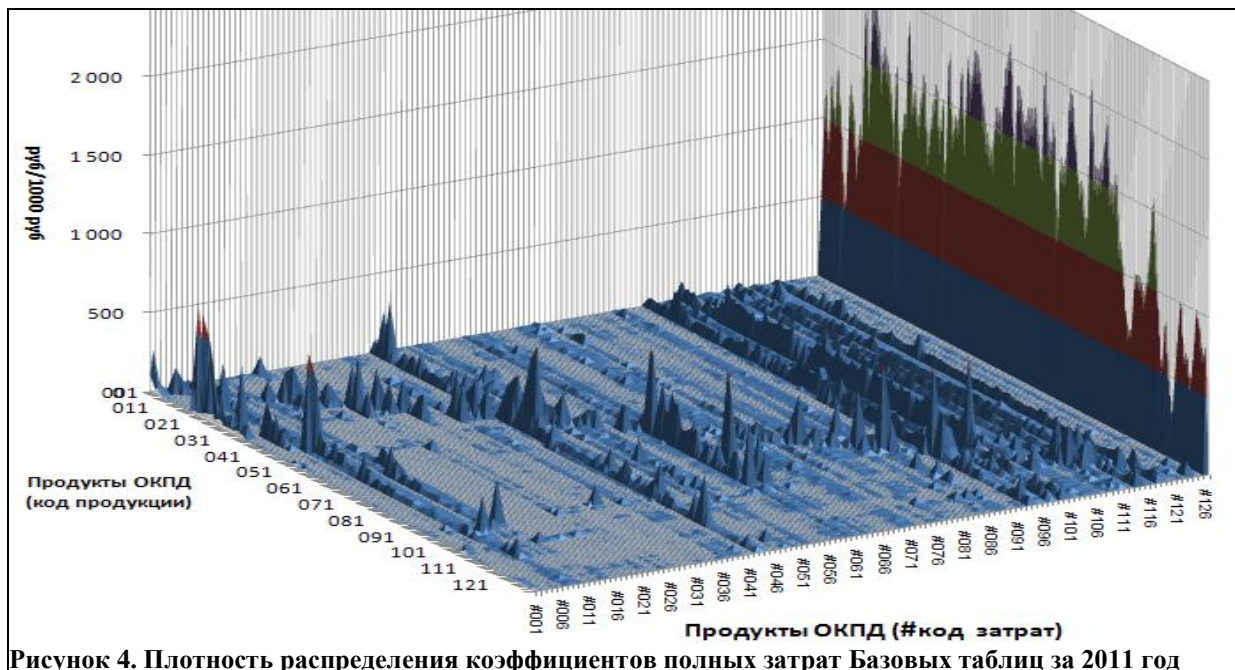


Рисунок 4. Плотность распределения коэффициентов полных затрат Базовых таблиц за 2011 год

Примечание, легенда (Рисунок 3):

Коэффициенты (затраты в рублях на 1000 рублей продукции): где
 продукты (код ОКПД продукции, $j = 001 \dots 126$), затраты (код #затрат) базовых таблиц;
 Правая стенка на диаграмме соответствует векторной сумме Σi , где $i = \#001 \dots \#126$
 (т.е. вектор $\{(\#127) j\}$ = сумме всех затрат на производство вектора продукции j).

Напомним о поставленной в 2008 г. Президентом России Дмитрием Медведевым задаче довести долю населения в РФ, занятую в малом бизнесе, к 2020 году до 60-70%, а долю МСП в ВВП - до 60%. Оценить реальность достижения к 2030 году доли МСП в ВВП на уровне 40-60-процентной (т.е. соответствовать уровню развитых стран; см. задание Стратегии 2030) не представляется возможным (без очевидной "лукавости").

С учетом итогов сплошного наблюдения за деятельностью субъектов МСП за 2015 год (ред. 06.07.2017) наша оценка ещё скромнее - порядка $\approx 13\%$. Валовая добавленная стоимость, исчисленная на уровне МСП производственным методом, даёт нашу оценку в уточняемом диапазоне $\approx 12,8\% - 13,4\%$ (\approx ВДС субъектов МСП / ВВП России) по уточняемым критериям (Рисунок 4), соответствующим стадиям воспроизводства.

Что касается базовых таблиц "затраты - выпуск" России по состоянию за 2011 г. (по итогам 2011 года), они стали доступны только в прошлом году [6, 7], что позволило дать оценку эффективности отрасли [6, Формула 4] на основе «alpha» межотраслевых сопряженных затрат. Это позволит [3, 4, 5] учесть (Рисунок 4) для МСП оптимизированный баланс макроэкономического и налогового окружения.

Заключение. По итогам сплошного статистического наблюдения за деятельностью малого и среднего бизнеса можно утверждать, что оптимизация перехода предпринимательства в России (между микро, малым, средним, крупным и большим бизнесом) имеет тенденции роста во времени 2010-2015 гг. как по субъектам с участием иностранного капитала, так и по группировкам выручки от реализации товаров работ, услуг субъектов МСП России по числу участников бизнеса у одного субъекта МСП (среднесписочной численности работников от 1 чел. до 250 чел.) России.



Рисунок 5. Валовая добавленная стоимость и ее компоненты за 2011 год (Продукты 001...126)

Примечание, легенда:

| №№ | Коды | Продукты ОКПД |
|------------|------------|---|
| 001 | 01.1 | Культуры сельскохозяйственные, продукция овощеводства и садоводства |
| ... | ... | ... |
| 126 | 95 | Услуги домашних хозяйств с наемными работниками |
| 137 | V1g | Валовая добавленная стоимость (сумма строк 132, 134, 135, 136) |
| 132 | D1 | Оплата труда |
| 133 | D11 | в том числе заработная плата |
| 134 | D29-D39 | Другие налоги за вычетом других субсидий на производство |
| 135 | P51c | Потребление основного капитала |
| 136 | B2n+ B3n | Чистая прибыль (чистый смешанный доход) |

Список литературы и источников информации

1. URL: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/business/prom/small_business/per_Mal-i-Sr.htm
2. URL: <http://zatraty-vypusk.gks.ru>
3. Черепанов В.М. Сравнительная оценка тенденции изменения налоговых поступлений “до” и “после” вывода из хозяйственного оборота бездействующих фондов. // журнал “Финансы” №1, 1998. - с.50-52, №2, 1998- с.55-57.
4. Черепанов В. М. Дискуссия.// Пленарные доклады и материалы Круглого стола Пятнадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 15-16 апреля 2014 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. - М.: ЦЭМИ РАН, 2015. - с.131-138 .
5. Черепанов В.М. "Анализ процедуры (метода) балансировки корректировок, когда ожидаемые крайние общие количества известны". Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing : OmniScriptum GmbH & Co.KG, 2016. - 61с. (ISBN: 978-3-659-90241-3), Немецкая Национальная Библиотека (2016-06-27).
6. В.М.Черепанов "Инструмент прогнозирования межотраслевых сопряженных затрат" // Материалы Восемнадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 11-12 апреля 2017 г. / Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. - М.: ЦЭМИ РАН, 2017 - с.1014-1020. (ISBN 978-5-8211-0746-6) .
7. Черепанов В.М. О границах возможностей балансировки матричной информации. "Экономика и управление: проблемы, решения", № 6, том 3 (66) – 2017 июнь. - М.: ИД "Научная библиотека", 2017.- с.53-57. (ISSN 2308-927X, ISSN 2227-3891).

Optimization of small business boundaries

Cherepanov V.M.

Institute of World Economy and Informatization, Moscow, Russia

СЕКЦИЯ № 14

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Багров Н.С., Денисов Д.В. Математическая модель сервиса динамического назначения автомобилей попутчикам | 486 |
| Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К. К вопросу о существовании квази решений типа бегущей волны в моделях организации грузоперевозок | 487 |
| Бобрик П.П. Особенности ж/д транспортного потока на Великом Шелковом пути | 489 |
| Валуев А.М. Моделирование выбора управления для автомобиля в транспортном потоке | 494 |
| Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Горбунов Э.А., Воронцова Е.А. Ускоренные спуски по случайному направлению и безградиентные методы с неевклидовой прокс-структурой | 497 |
| Гринько П.С., Давидсон М.Р. Модель рынка грузовых перевозок на железнодорожном транспорте | 498 |
| Крылатов А.Ю., Широколобова А.П. Оценка спроса на перемещение в виде задачи непрерывной оптимизации | 500 |
| Пройдакова Е.В. Моделирование адаптивной системы управления транспортом с алгоритмом поиском разрыва в потоке | 502 |
| Andrianova D.A., Kamenev I.G. The method of metric data analysis in big data in transport streams research | 506 |
| Burlov V.G., Grachev M.I. Model of making managerial decisions in the modeling of traffic flow taking into account Web technologies | 510 |
| Ivanova A., Gasnikov A. Distributed price adjustment for the resource allocation problem | 512 |
| Kholodov Y.A., Alekseenko A.E., Chehovich Y.V., Karachev A.N. Optimizing urban highway through on-ramp traffic light control | 513 |

Математическая модель сервиса динамического назначения автомобилей попутчикам

Багров Н.С., Денисов Д.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Сервисы динамического поиска попутчиков на короткие расстояния (Ride-sharing) позволяют жителям города предоставлять свой личный автотранспорт для совместного использования с целью минимизации затрат на топливо. Ключевым отличием данного сервиса от такси является наличие заранее предусмотренного водителем автомобиля маршрута, относительно которого могут быть подобраны попутчики. Ride-sharing

сервисы позволяют использовать свободные места частных легковых автомобилей, что в перспективе имеет огромный потенциал для улучшения ситуации на дорогах и экологической обстановки в городе.

Большинство существующих на сегодняшний день математических моделей не полностью раскрывают все преимущества данного сервиса. Был изучен ряд исследований с ограничениями на число попутчиков (не более двух) [1,2]. В данной работе мы представляем более общую математическую модель поиска попутчиков в реальном времени, которую можно масштабировать для 1) большего количества попутчиков, 2) высоконагруженной дорожно-транспортной сети мегаполиса. Представленная в работе математическая модель динамически строит оптимальные маршруты в зависимости от спроса и местонахождения машин в городе. Описанный в статье алгоритм начинает работу с жадного назначения, затем итеративно улучшает его, используя методы оптимизации с ограничениями. Качественные решения со временем сходятся к оптимальным. В работе экспериментально оценивается компромиссный вариант между количеством используемых транспортных средств, их вместимостью, временем ожидания посадки, задержками в пути и эксплуатационными расходами. Рассматриваются автомобили малой и средней размерности, а также микроавтобусы с вместимостью до 10 мест. Алгоритм проверяется на 2 миллионах записей о поездках в Нью-Йоркском публичном архиве такси, 800 тысячах записей из архива такси города Шанхай, а также на 300 тысячах записей по городу Москва. Представленный в работе алгоритм также включает перебалансировку простаивающих автомобилей в районы с более высоким спросом. Данный подход является общим и может быть применен для многих задач назначения автомобилей в реальном времени.

Список литературы

1. Niels A.H. Agatz, Alan L. Erera, Martin W.P. Savelsbergh, Xing Wang, Dynamic ride-sharing: A simulation study in metro Atlanta // *Transportation Research Part B: Methodological*, Volume 45, Issue 9, 2011, С. 1450-1464,
2. S. Ma, Y. Zheng and O. Wolfson, "T-share: A large-scale dynamic taxi ridesharing service," //2013 IEEE 29th International Conference on Data Engineering (ICDE), Brisbane, QLD, 2013, С. 410-421
3. Alonso-Mora, Javier et al. "On-Demand High-Capacity Ride-Sharing via Dynamic Trip-Vehicle Assignment." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 114.3 (2017), С. 462–467.

Dynamic high capacity ride-sharing service model

N.S. Bagrov, D.V. Denisov
Lomonosov's MSU, Moscow, Russia

К вопросу о существовании квази-решений типа бегущей волны в моделях организации грузоперевозок*

Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К.
ЦЭМИ РАН, Москва, Россия

Рассматривается модель организации грузоперевозок между двумя узловыми железнодорожными станциями, связанными определенным количеством

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 16-01-00110)

промежуточных станций и перегонных путей для временного хранения части грузов. Движение грузопотока осуществляется в одном направлении. Для обеспечения бесперебойного движения грузопотока используются две технологии единые для всех станций. Первая технология основана на процедуре взаимодействия соседних станций. Вторая технология использует технические возможности самой станции и основана на взаимодействии станции с соседними перегонными путями. Для грузоперевозок используется простая система контроля. Она заключается в том, что объемы грузов на соседних станциях должны совпадать с единым лагом времени. Такая модель задается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \quad (1)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \quad (2)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty) \quad (3)$$

с нелокальными линейными ограничениями

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad t \in [0, +\infty). \quad (4)$$

Здесь $z_i(t)$ - число задействованных узлов на станции с номером i в момент времени t . Функции $\psi_1(\cdot) \geq 0$ и $\psi_2(\cdot) \geq 0$ определяют, соответственно, интенсивность подачи грузов на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станцией. Функции $\varphi_0(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ определяют, соответственно, скорость изменения числа задействованных узлов на начальной станции и скорость изменения числа задействованных узлов на остальных станциях в рамках второй технологии. Параметр $\tau > 0$ является характеристикой системы контроля.

Определение 1. Семейство абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_{i \in Z}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется решением типа бегущей волны с характеристикой τ (солитонным решением), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (1)-(3) и нелокальным ограничениям (4).

Класс солитонных решений, в силу неоднородности системы функционирования задействованных узлов, является чрезвычайно узким. Однородность системы функционирования задействованных узлов достигается в случае бесконечного числа станций в обе стороны. Это приводит к необходимости правильного расширения класса солитонных решений до класса солитонных квазирешений. Рассматривается два типа такого расширения. Один тип расширения предполагает допущения разрывных солитонных решений, второй тип допускает нарушения в малом системы контроля.

Определение 2. Семейство кусочно абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_0^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется солитонным квазирешением первого типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (1)-(3) и нелокальным ограничениям (4) с возможными разрывами в точках $k\tau$ $k = 1, 2, \dots$.

Доказана теорема существования и единственности солитонного квазирешения первого типа [1, 2]. С помощью метода Рунге–Кутта удалось численно построить указанные квазирешения и определить скорость их роста по времени. Кроме того, исследована зависимость солитонных квазирешений и, в частности, величин разрывов (скачков) решений от ряда параметров модели, характеризующих правило контроля, технологии перевозки грузов и интенсивность подачи грузов на узловую станцию [3].

Определение 3.

Солитонное квазирешение первого типа с характеристикой τ называется ε -солитонным квазирешением первого типа с характеристикой τ если выполняются неравенства

$$|z_0(k\tau - 0) - z_0(k\tau + 0)| < \varepsilon, \text{ для всех } k = 1, 2, \dots$$

Доказано существование $\bar{\tau} > 0$ такого, что для всякого $\tau \in (0, \bar{\tau})$ существует ε -солитонное квазирешение первого типа с характеристикой τ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$ [1, 2].

Определение 4. Семейство абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_0^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется δ -солитонным квазирешением второго типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (1)-(3) и выполняется условие

$$|z_i(t) - z_{i+1}(t + \tau)| < \delta, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty).$$

Доказана теорема об ограниченности решений системы дифференциальных уравнений (1)-(3) [4]. С помощью численных экспериментов исследована зависимость решений системы дифференциальных уравнений (1)-(3) от параметров модели, в частности, от параметра α . Для произвольной характеристики $\tau > 0$ и сколь угодно малого $\delta > 0$, найдутся достаточно большие значения параметра α , что δ -солитонное квазирешение второго типа существует.

Список литературы

1. L.A. Beklaryan, N.K. Khachatryan. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional differential equations. 2006. V. 13, №12. P. 125-155.
2. Л.А. Бекларян, Н.К. Хачатрян. Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т.53, № 10. С. 1649–1667.
3. Khachatryan N.K, Akopov A.S. Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution // Business Informatics. 2017. No.1. P. 25-35.
4. Khachatryan N.K, Akopov A.S., Belousov F.A. About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation // Business Informatics. 2018. №1, печати.

On the question of the existence of quasi-solutions of the traveling wave type in models of the organization of cargo transportation

Beklaryan LA, Khachatryan NK
Central Economics and Mathematics Institute, RAS, Moscow, Russia

Особенности ж/д транспортного потока на Великом Шелковом пути

Бобрик П.П.

ФГБУН Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН, Москва, Россия.

Введение. Статья продолжает исследования в области организации транспортных коридоров в Евразии [1, 2, 3, 4] и является дальнейшим развитием количественных оценок эффективности перемещений [5, 6, 7].

Активно развиваемая в настоящее время теория транспортного потока (ТПП) [8, 9] в качестве основного объекта своих приложений использует преимущественно автомобильный транспорт и, соответственно, на автомобильных дорогах. Тем самым из рассмотрения исключаются прочие магистральные виды транспортов, в том числе и такой важный как железнодорожный. А ведь именно он должен использоваться при создании в Евразии сухопутной сети коридоров.

Отчасти такая ситуация сложилась из-за высокой степени регулируемости любых действий на ж/д. Само понятие расписания движения не предполагает

самостоятельности участников потока, а следовательно не позволяет проявиться многим эффектам свободного движения, что неявно предполагается обязательным в классической теории транспортного потока. Но сам транспортный поток на ж/д, тем не менее присутствует, и он регулируем, хотя и другими методами. Откуда возникает общая задача получения наиболее эффективных его транспортных характеристик.

В статье будут рассматриваться проблемы организации ж/д транспортных коридоров на территории Евразии, в том числе и по направлениям Великого Шелкового Пути. Среди них частота проследования составов, вопросы безопасности, экономической эффективности перевозок, конкуренции с морскими видами транспорта.

Постановка задачи. За последние годы по направлению Великого шелкового пути (ВШП, Шанхай - Западная Европа) проходит транспортный поток интенсивностью около 12-14 млн. контейнеров в год.

Существует две принципиально различные возможности перевозки по этому направлению - морским путем и сухопутным. В зависимости от трассировки длина наиболее короткие сухопутных маршрутов составляет 10 - 11 тыс. км., а морских 21-23 тыс. км. Однако, несмотря на более короткие сухопутные маршруты, почти весь транспортный поток в настоящее время идет морским путем. По суше ежегодно перевозится всего около нескольких сотен тыс. контейнеров в год, или чуть более процента от общего трафика, включая местные перевозки.

Такой перекося в сторону морского транспорта обуславливается более низкими расходами на перевозку. Морские тарифы в среднем за последние годы они составляли около \$1500. В то время как доставка железной дорогой по этому же направлению стоила \$4500-6000, т.е. приблизительно в три-четыре раза дороже. Приведенные соображения однозначно показывают, что в существующей экономической реальности сухопутные коридоры экономически нерентабельны и неконкурентоспособны по сравнению с морскими. Отчасти это обусловлено техническими характеристиками. Вес ж/д состава составляет около 2000 тонн, а вес контейнеровоза может достигать сотен тысяч тонн, откуда происходит экономия на эффекте масштаба.

Нерентабельность сухопутных перевозок была одной из причин того, что в последние годы, так и не начавшись, были практически свернуты так все крупные инфраструктурные проекты по созданию новых железнодорожных транспортных коридоров через Среднюю Азию. Вместо этого акцент китайской программы "Один пояс - один путь" (ОПОП) [10] стал делаться на политические меры по согласованию различных вопросов со странами транзитерами.

Для решения вопроса о создании ж/д коридоров по направлению ВШП необходимо, чтобы стоимость сухопутных перевозок сравнялась с морской, т.е. не превышала бы около \$1500 за весь маршрут. В этом случае можно претендовать на половину общего трафика по направлению ВШП. В настоящее время это предполагает около 6-7 млн. контейнеров в год. В дальнейших расчетах будем с запасом полагать, что трафик составляет около 5 млн. контейнеров в год.

Поскольку маршрут проходит по нескольким странам с различным рельефом местности, то более удобно привести тариф к тыс. км. Поскольку при ж/д перевозках нет необходимости везти грузы точно до портов, то это сокращает протяженности сухопутного пути приблизительно на 1000 км. Поэтому в первом приближении можно оценить верхнюю границу сухопутного тарифа тариф около \$150 за тысячу километров, при котором будет иметь место паритет цен с морскими конкурентами.

Энергетические затраты Цифра \$150 отражает уровень конкуренции между различными видами транспорта, и поэтому является к внешней к задаче конструирования сухопутного коридора по направлению ВШП. Она не может варьироваться при выборе режимов эксплуатации коридора. И она является входящим

параметром для модели который определяет многие прочие характеристики транспортного железнодорожного потока.

В существующей мировой экономике сухопутный тариф на ВШП получается около \$500 за тыс. км., т.е. более чем в три раза выше конкурентного уровня в \$150. Возникает вопрос - возможен ли хотя бы в теории конкурентный сухопутный коридор. Многие исследования отвечают положительно на этот вопрос, поскольку такая ситуация сложилась во многом искусственно, и ее можно исправить. Еще в 19 веке Х. Маккиндер [11] утверждал о наступлении новой эры, когда именно ж/д транспорт станет основным в мире. Подобные выводы делали многие другие исследователи. Так Н.Н. Колосовский показал [12], что при достаточном трафике себестоимость ж/д перевозок может вполне сравняться морскими. Б.В. Дроздов [13] сравнил затраты энергии при перевозке на обоих направлениях в физических единицах. В работе использовалось предположение, что удельные энергозатраты на тонно-километр морского транспорта приблизительно в два-три раза меньше, чем для железнодорожного. Но за счет того, что длина сухопутного коридора короче морского, то оказалось, что затраты приблизительно равны.

В работе [14] эти затраты были оценены в текущих ценах и они составили около \$500 за всю перевозку. В пересчете на тыс. км это составляет около \$50 на тыс. км., что составляет всего около трети стоимости совокупного тарифа. Что и является главной предпосылкой для возможности конструирования конкурентного с экономической точки зрения сухопутного ж/д коридора.

В статье не ставится задача рассмотрения структуры всех остальных затрат при перевозках грузов. Поэтому ограничимся без доказательств утверждением, что в теории можно пустить как минимум половину морского трафика по суше. И приведем только некоторые качественные соображения в пользу этого утверждения.

Такие направления расходов, которое условно назовем путевым сопровождением и администрированием, а также налогообложением присутствуют в обоих видах транспорта. И потому в первом приближении должны давать соизмеримые величины затрат. Это управление движением, заработная плата, навигация, вычислительные центры, содержание вспомогательных служб, руководящий состав и т.д. Именно в текущих различиях затрат на эти статьи расходов заключаются возможности для выравнивая тарифов для морского и сухопутного маршрутов.

Очень сильно различаются налогообложение для обоих видов транспорта. Морской транспорт обычно приписан в странах-офшорах типа Либерии, и поэтому у него крайне низкая налоговая нагрузка. Напротив, РЖД является крупнейшим работодателем страны и одним из крупнейших налогоплательщиков. Но эти различия не обусловлены физикой процесса перевозки, а являются следствием существующей экономической парадигмы. Они вполне могут быть изменены при наличии политической воли.

Единственным значимым отличием между двумя видами транспорта является наличие ж/д пути. содержание и эксплуатация которого отсутствует у морского транспорта. Однако, как будет показано далее, путем выбора эффективных характеристик ж/д потока можно сделать расходы по этому направлению незначительными в общем тарифе. Далее будет выбираться допустимые характеристики ж/д потоки для коридора на маршруте ВШП.

Расходы на содержания ж/д пути. Особенностью ЖД транспорта является очень высокие расходы на путевую инфраструктуру. Стоимость прокладки километра железной дороги может существенно различаться от зависимости рельефа, стоимости выкупа земель, класса дороги, сооружений, и прочих параметрах. Как показывает практика последних десятилетий, стоимость строительства километра пути может изменяться в диапазоне от 1 до 10 млрд. за 1000 км., если не брать какие-то аномальные нетипичные случаи.

На урбанизированной территории особенно значительны расходы на выкуп земли у хозяйствующих субъектов, которые могут превышать половину стоимости ж\д. Однако, это одноразовые затраты, которые далее не будут влиять на себестоимость перевозок. Поэтому их надо исключить из дальнейших расчетов.

Для международных коридоров надо выбирать максимально наиболее простые и дешевые дороги с минимальным числом сооружений и проходящим по территории с умеренной человеческой деятельностью. Грубо говоря, две пары рельсов с минимальным числом станций (т.е. остановок) и максимальной длиной перегонов. В такой конфигурации с учетом эффекта масштаба строительства можно предположить умеренную стоимость строительства в 1 млрд. долларов за 1000 км.

Норма амортизации большинства сооружений различаются в разных странах. Поскольку это преимущественно капитальные сооружения, со сроком амортизации до 50 лет (для рельсов наиболее частой нормой амортизации является 2,5%), то не будет сильной ошибкой положить ее равной 25 года. Или в среднем около 4% в год. Для дороги длиной с 1000 км и стоимостью в 1 млрд. (без учета выкупа земель) это означает амортизационные расходы около 40 млн. на 1000 км. в год.

Это постоянные расходы, не зависящие (слабо зависящие) от трафика. Поэтому для снижения себестоимости перевозок требуется обеспечить как можно больший трафик. При отправлении всего одного состава в сутки (малодеятельные ж/д) число контейнеров в год составит 43800, что дает добавку к себестоимости на перевозку одного контейнера почти в 1000 долларов на тыс. км. только за счет амортизационных расходов, делая весь коридор не только неконкурентоспособным с морским маршрутом, но и с автомобильным транспортом.

Это приводит к жизненно важному требованию для ж/д коридора - наличие устойчивого интенсивного трафика. Именно по этой причине международных коридоров не может быть много.

Как говорилось ранее, на маршруте ВШП при тарифе \$150 можно ожидать поток в 5 млн. контейнеров. в год. Тогда расходы на амортизацию путей в пересчета на один контейнер составят всего около 8 долларов, что не будет значимой величиной в общем тарифе. Похожие рассуждения показывают допустимость для коридоров ж/д потоков с интенсивностями от 1 млн. контейнеров в год.

Ж/д поток. В отличие от автомобильных дорог, на Ж/Д транспорте нельзя самостоятельно выбирать график движения, что делает многие законы ТТП неуместными. Хотя формально можно задавать расписание для каждого состава, но поскольку ввиду физики процессов нельзя делать обгон, то фактически из доступных средств управления потоком присутствует только частота прохождения поездов.

С точки зрения себестоимости предельная скорость состава не должна превышать 100-120 км/ч. Выход за эту границу предъявляет принципиально иные требования к качеству ж/д полотна, тяги, управлению. Что сильно удорожает процесс перевозки. Также это позволяет использовать традиционную дешевую ж/д без всяких дорогостоящих элементов высокоскоростного движения.

В идеале состав должен постоянно держать такую скорость. Любая остановка или снижение скорости означает повышения расходов энергии. Потому надо предусмотреть участки движения в несколько часов непрерывного безостановочного хода, что делает уместным сравнение такого потока с движением несжимаемой жидкости по трубе. Средний перегон в пять часов будет означать прохождение около 500 км, а за сутки с учетом неизбежных остановок около 2000 км. Это соизмеримо в участками коридора в пределах Китая, Казахстана и России. Т.е каждая страна будет проходиться в среднем за день, что позволяет решить многие организационные проблемы. Например, смены бригад, прохождения пограничного контроля и т.д.

Ж/д поток в 5млн. контейнеров предполагает прохождение около 5 составов в час, или каждый поезд в 12 минут. Это достаточно напряженный график движения,

требующий жесткой маршрутной дисциплины. Длина тормозного пути может сильно варьироваться в зависимости от рельефа и типасостава, но при такой скорости он в среднем составляет около километра. А в некоторых случаях может превышать два километра. Но с точки зрения безопасности надо учитывать наиболее длинные тормозные пути.

Поскольку при интервале движения 12 минут расстояние между составами на скорости 100 км/ч составляет 20 км., то при увеличении плотности потока, начнет срабатывать ограничения по безопасности. По этой причине трафик более 10 - 12 млн. контейнеров в год надо считать предельным для стандартной двух путной дороги сточки зрения безопасности. Увеличение трафика на них может достигаться либо путем технологических улучшений или увеличением путности. В частности, перспективным видится использование новых типов тормозных систем с рекуперацией энергии.

Выводы

В статье рассмотрены вопросы организации ж/д коридора по кратчайшему сухопутному маршруту ВШП через Казахстан. Рассчитан максимально возможный тариф для конкуренции с водными перевозками. Указана принципиальная возможность достижения этого тарифа. В том числе за счет выбора рациональной плотности ж/д потока и характеристик потока.

Список литературы

1. Байсеркеев О.Н., Бугроменко В.Н. Региональная пространственно-временная среда. Алматы, 1993 г, 243 с.
2. Безруков Л.А. Транссиб и Шелковый путь: глобальная инфраструктура и региональное развитие . // «ЭКО» (Экономика и организация промышленного производства). 2016. №7. с. 21-36.
3. Бобрик П.П. Проблемы и задачи центральноазиатского транзита. // Государственное управление. Электронный вестник МГУ. Выпуск № 62. Июнь 2017. стр. 25-39.
4. Бобрик П.П. Обеспечение транспортных коридоров Центральной Азии водными Ресурсами / Сборник VI международной научно-практической конференции Стратегическое антикризисное управление: глобальные вызовы и роль государства.— М.: Издательство Перо, 2016. — 637 с. ISBN 978-5-906927-81-1. - Стр. 521-528.
5. Бобрик П.П. Волновые свойства алгоритмов поиска транспортного равновесия Вардроба с локальным информированием. / Труды ORM2016, Москва, 17-22 октября 2016. – М.: Изд. ФИЦ ИУ РАН. 2016. С. 231-232.
6. Бобрик П.П. Моделирование распределение потоков в транспортных сетях по нескольким альтернативным маршрутам // Транспорт: Наука, техника, управление, 1995, №9.
7. Бобрик П.П. «Об одном методе управления транспортными потоками». / Труды 4 международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO-07., М: ИПУ, 2007, докл. 4204.
8. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2013. 430 стр., изд. 2.
9. Швецов В.И. Алгоритмы распределения транспортных потоков. // 2009. Автоматика и Телемеханика, № 10, с.148-157.
10. Один пояс и один путь. - https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B4%D0%B8%D0%BD_%D0%BF%D0%BE%D1%8F%D1%81_%D0%B8_%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BD_%D0%BF%D1%83%D1%82%D1%8C (06.21.2017).
11. Маккиндер Х.Дж. Географическая ось истории. // Классики геополитики, 20 век, сб. сост. К.Королев, Изд-во АСТ, М.: 2003. С.7-32.

12. Колосовский Н. Н. Экономическое районирование и перспективы развития народного хозяйства // Колосовский Н. Н. Основы экономического районирования. – М.: Госполитиздат, 1958. –С. 86–132.

13. Дроздов Б.В. Направления разработки физической экономики (применительно к транспортному комплексу). // Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление», том 10 № 2 (23), 2014, ст. 8 - 94. URL: www.gypravlenie.ru/?p=2022&lang=en (дата обращения 22/03/2017)

14. Бобрик П.П. Энергетическая составляющая железнодорожного тарифа на коридорах шелкового пути. / Транспорт России: проблемы и перспективы - 2017. Материалы Международной научно-практической конференции, 14-15 ноября 2017 г. СПб.: ИПТ РАН. – Санкт-Петербург. 2017. 475 с. ISBN 978-5-9908209-6-8. - Стр. 391-394.

Features of the railway transport flow on the Great Silk Road.

P.P. Bobrik.

*N. S. Solomenko Institute of problems of transport of the Russian Academy of Sciences of,
bobrikpp@mail.ru*

Моделирование выбора управления для автомобиля в транспортном потоке

Валуев А.М.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

В современных условиях городской дорожной сети (ГДС) основным побудительным мотивом для большинства водителей следует считать цель добраться до места назначения в кратчайшее время, не подвергая при этом свою жизнь и здоровье опасности. Именно это стремление приводит к уплотнению транспортных потоков, попыткам выбрать полосу, по которой возможно в ближайшие минуты двигаться несколько быстрее. В реальности типичный водитель не нарушает сознательно правила дорожного движения, но в отношении оценки условий безопасности действует интуитивно, основываясь на неточной и поступающей с некоторым запозданием информации (усредненные результаты такого поведения водителей, а также некоторые теоретические модели выбора управления представлены в обзорной монографии [1]). Цель настоящей работы состоит в постановке и решении задачи о выборе водителем (или заменяющим его автопилотом) автотранспортного средства (АТС) управления по ускорению, обеспечивающего максимально быстрое движение при гарантированном отсутствии столкновения с предшествующим АТС (лидером) и нарушения скоростного режима. При этом предполагается точное знание водителем (автопилотом) текущих значений координат и скоростей собственного АТС и лидера; что касается ускорения, предполагается знание диапазона возможных и приемлемых значений ускорений для собственного АТС, тогда как для лидера известно только максимальное ускорение торможения.

Рассматривается движение цепочки АТС по прямолинейной горизонтальной полосе дороги в течение интервала времени $[T_0, T_1]$ в соответствии с уравнениями

$$\ddot{x}_i = a_i(t) \tag{1}$$

с ограничениями на выбор управления по ускорению и на скорость

$$-b_{\max i} \leq a_i(t) \leq a_{\max i}, \tag{2}$$

$$0 \leq \dot{x}_i(t) \leq v_{\max} \tag{3}$$

и отсутствием столкновений для любого момента $t \in [T_0, T_1]$

$$x_{i+1}(t) \leq x_i(t) - L_i, \tag{4}$$

причем приемлемым для выбора считается более узкий диапазон ускорений $[-b_{\text{norm max } i}, a_{\text{norm max } i}]$.

Назовем четверку $\{x_i(T_0), x_{i+1}(T_0), \dot{x}_i(T_0), \dot{x}_{i+1}(T_0)\}$ безопасной конфигурацией в фазовом пространстве для пары «лидер i – преследователь $i+1$ », если при любом выборе $a_i(t), t \in [T_0, T_1]$ в соответствии с (2) и (3) существует $a_{i+1}(t), t \in [T_0, T_1]$, удовлетворяющее

$$-b_{\text{norm max } i+1} \leq a_i(t) \leq a_{\text{norm max } i+1}, \quad (5)$$

так что для $(i+1)$ -го АТС на $[T_0, T_1]$ выполнены условия (3) и (4). Назовем зависимость $A_{i+1}(x_i(t), x_{i+1}(t), \dot{x}_i(t), \dot{x}_{i+1}(t))$ безопасным позиционным управлением (БПУ), если при любой безопасной конфигурации в качестве начального состояния и при любом выборе $a_i(t), t \in [T_0, T_1]$ в соответствии с (2) и (3) траектория $(i+1)$ -го АТС, порождаемая управлением $a_{i+1}(t) = A_{i+1}(x_i(t), x_{i+1}(t), \dot{x}_i(t), \dot{x}_{i+1}(t))$, и само это управление удовлетворяют (3), (4), (5) при всех $t \in [T_0, T_1]$.

Решается задача определения оптимального по быстродействию БПУ, т.е. такого, для которого при любой безопасной конфигурации в качестве начального состояния и при любом выборе $a_i(t), t \in [T_0, T_1]$ в соответствии с (2) и (3) для соответствующей траектории $x_{\text{ОПТ } i+1}(t) \geq x_{i+1}(t)$, где $x_{i+1}(t)$ — положение $(i+1)$ -го АТС для траектории, порождаемой произвольным БПУ.

Теорема 1. Четверка $\{x_i(T_0), x_{i+1}(T_0), \dot{x}_i(T_0), \dot{x}_{i+1}(T_0)\}$ является безопасной конфигурацией тогда и только тогда, когда при $b_1 = b_{\text{norm max } i+1}$, $b_0 = b_{\text{max } i}$ выполнено условие

$$F\{x_i(T_0) - x_{i+1}(T_0) - L_i, \dot{x}_i(T_0), \dot{x}_{i+1}(T_0)\} \leq 0, \quad (6)$$

где $F(\Delta x, v_0, v_1)$ определяется формулами: при $b_1 < b_0$

$$F(\Delta x, v_0, v_1) = \frac{(v_1)^2}{2b_1} - v_0 \cdot \min\left\{\frac{v_0}{2b_0}, \frac{v_1}{2b_1}\right\} - \Delta x, \quad (7)$$

в противном случае

$$F(\Delta x, v_0, v_1) = \begin{cases} \frac{(v_1)^2}{2b_1} - \frac{(v_0)^2}{2b_0} - \Delta x, & \text{если } t_{10} > \frac{v_0}{2b_0}, \\ (v_1 - v_0) \cdot t_{10}/2 - \Delta x, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (8)$$

где $t_{10} = \frac{(v_1 - v_0)}{2 \cdot (b_1 - b_0)}$.

Для того чтобы указать на наличие параметров, далее будем использовать обозначение $F_i(\Delta x, v_0, v_1)$. На основании теоремы 1 и условий (3)–(4) приходим к выводу, что оптимальное по быстродействию БПУ может быть определено формулами:

$$f_i(t) = F_i\{x_i(t) - x_{i+1}(t) - L_i, \dot{x}_i(t), \dot{x}_{i+1}(t)\} \leq 0, \quad (9)$$

$$A_{i+1}(x_i(t), x_{i+1}(t), \dot{x}_i(t), \dot{x}_{i+1}(t)) = \begin{cases} a_{\text{norm max } i+1}, & \text{если } f_i(t) < 0 \text{ и } \dot{x}_{i+1}(t) < v_{\text{max}}, \\ 0, & \text{если } f_i(t) < 0 \text{ и } \dot{x}_{i+1}(t) = v_{\text{max}}, \\ -b_{\text{norm max } i+1}, & \text{если } f_i(t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Существует, однако, практическое затруднение для точного применения формулы (10). В подавляющем большинстве реализаций она приводит к скользящим режимам [2] с бесконечно частыми переключениями. Дело в том, что условие для формулы в нижней строке (10) может выполняться на некотором интервале лишь, если при $f_i(t) = 0$

$$\frac{df_i(t)}{dt} = 0, \quad (11)$$

чего нельзя обеспечить при фиксированном значении ускорения преследователя $-b_{\text{norm max } i+1}$. Между тем траекторию, на которой на некотором временном интервале будет выполнено (11), теоретически реализовать можно, но это требует выбора $a_{i+1}(t)$ в зависимости от $a_i(t)$, чего не предполагалось и что трудно обеспечить точными

измерениями. Однако приближенную реализацию закона управления (10) с требуемой точностью нетрудно обеспечить и без измерения $a_i(t)$. Для этого переключение между крайними значениями ускорения нужно производить при достижении $f_i(t)$ нулевого значения при росте этой величины, так и заданного значения $-\Delta f$ при ее падении.

Все сказанное относилось фактически к неограниченному во времени движению пары «лидер–преследователь» по полосе, что не соответствует условиям реального трафика на ГДС. Изменение управления для лидера цепочки из-за прерывания движения светофором определяется на основе того же подхода и притом более просто. Здесь можно рассмотреть различные предположения в отношении информированности водителя о моментах смены фаз светофорного цикла. Влияние возможности перестроения между полосами на управление АТС, включая принятие решения о смене полосы, также может быть рассмотрено с тех же позиций, но лишь локально во времени из-за непредсказуемости смены лидера. Закон управления АТС, построенный на основе решения частных задач синтеза оптимального по быстродействию управления, может быть использован при проектировании автопилотов.

Модель транспортного потока, в котором управление АТС определяется сформулированными зависимостями, может использоваться для оценки наибольшей возможной пропускной транспортных магистралей на основе модели транспортного потока в формализме гибридных систем [3, 4]. Ввиду наличия аналитических формул такие оценки при упрощающих предположениях о составе потока могут быть получены численно и даже аналитически, а не только с помощью имитационного моделирования. Однако для большей их реалистичности целесообразно уточнить модель динамики АТС, а также, возможно, учесть «преимущество» управления [5, с. 340].

Список литературы

1. Treiber M., Kesting A. Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
2. Гамкрелидзе Р.В. О скользящих оптимальных режимах. // ДАН. 1962. Т. 143, №6. С. 1243–1245.
3. Валуев А.М. Моделирование транспортных процессов в формализме гибридных систем // XII Всероссийское Собрание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16–19 июня 2014 г.: Труды [Электронный ресурс]. М.: ИПУ РАН, 2012. С. 5033–5043.
4. Валуев А.М., Соловьев А.А. Моделирование зависимостей, характеризующих динамику автотранспортных потоков // Информатизация и связь. 2018. №2. С. 93–100.
5. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.

Modeling of control selection for the vehicle in a traffic flow

Valuev A.M.

*Mechanical Engineering Research Institute named after A. Blagonravov of the RAS,
Moscow, Russia*

Ускоренные спуски по случайному направлению и безградиентные методы с неевклидовой прокс-структурой*

Гасников А.В.^{1,2}, Двуреченский П.Е.^{2,3}, Горбунов Э.А.⁴, Воронцова Е.А.⁵

^{1,4}*МФТИ, Москва, Россия*

²*ИППИ РАН, Москва, Россия*

³*Институт прикладного анализа и стохастики им. К. Вейерштрасса, Берлин,
Германия*

⁵*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия*

Работа является частичным продолжением [1]. Результаты указанной работы перенесены на класс безградиентных методов [2] решения гладких задач (стохастической) выпуклой оптимизации с неточным оракулом.

Получены принципиально новые результаты сходимости быстрых безградиентных методов за счет игры на способе рандомизации (выбор случайного направления на евклидовой сфере) (см. также [3], [4]) и рассогласованного выбора прокс-структуры (вместо евклидовой прокс-структуры выбирается, например, прокс-структура, порождённая дивергенцией Кульбака-Лейблера), улучшающие нижние оценки в корень из размерности пространства раз, в случае, когда решение задачи имеет компоненты существенно разного масштаба (в частности, разреженное решение).

Список литературы

1. Воронцова Е.А., Гасников А.В., Горбунов Э.А. Ускоренные спуски по случайному направлению с неевклидовой прокс-структурой // arXiv preprint arXiv:1710.00162. 2017.

2. Nesterov Yu. Random gradient-free minimization of convex functions // CORE Discussion Paper 2011/1. 2011.

3. Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Нестеров Ю.Е. Стохастические градиентные методы с неточным оракулом // Труды МФТИ. 2016. Т. 8. № 1. С. 41–91. arXiv preprint arXiv:1411.4218

4. Гасников А.В., Лагуновская А.А., Усманова И.Н., Федоренко Ф.А. Безградиентные прокс-методы с неточным оракулом для негладких задач выпуклой стохастической оптимизации на симплексе // АиТ. 2016. № 10. С. 57–77.

Accelerated Directional Search and Derivative-Free Methods with non-Euclidean prox-structure

Gasnikov A.V.^{1,2}, Dvurechensky P.E.^{2,3}, Gorbunov E.A.⁴, Vorontsova E.A.⁵

^{1,4}*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia*

²*Institute for Information Transmission Problems RAS, Moscow, Russia*

³*Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastic, Berlin, Germany*

⁵*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

* Работа А.В. Гасникова и Е.А. Воронцовой выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 18-29-03071 мк, работа Э.А. Горбунова выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ (грант МД-1320.2018.1).

Модель рынка грузовых перевозок на железнодорожном транспорте

Гринько П.С., Давидсон М.Р.
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе исследуется модель рынка грузовых перевозок на железнодорожном транспорте. Основным объектом исследования является задача оптимизации передвижения груженых и порожних вагонов по транспортной сети, в которой под оптимальностью подразумевается наименьшее значение функции суммарной себестоимости перевозки всех операторов - владельцев вагонов. В Российской Федерации отрасль услуг железнодорожных перевозок имеет сложную организационную структуру, недостатки которой влекут за собой различные экономические проблемы - например, такие, как снижение спроса со стороны грузоотправителей и снижение конкурентоспособности средних и мелких операторов по отношению к крупным [2]. В результате была разработана модель конкурентного ценообразования на услуги грузовых перевозок, а на её основе были произведены тестовые расчеты для железнодорожной сети РФ.

Сформулируем задачу оптимального передвижения вагонов по железнодорожной сети как задачу минимизации суммарных себестоимости грузовых перевозок и затрат на порожний пробег каждого из M операторов:

$$\sum_{K=1}^M \sum_{(i,j) \in E} (C_{ij}^K y_{ij}^K + P_{ij} x_{ij}^K) \rightarrow \min \quad (1)$$

В обозначениях:

y_{ij}^K - количество грузовых вагонов, перевозимых по направлению (i, j) оператором с индексом K

x_{ij}^K - количество порожних вагонов, перевозимых оператором с индексом K

C_{ij}^K - себестоимость перевозки одного грузового вагона по направлению (i, j) оператором с индексом K

P_{ij} - фиксированная, не зависящая от оператора, цена на порожний ход одного вагона по направлению (i, j)

В совокупности операторы должны выполнить заявки на транспортировку груза по направлению (i, j) , измеряемые в количестве, необходимого для этого вагонов (d_{ij}):

$$\sum_{K=1}^M y_{ij}^K = d_{ij}, (i, j) \in E, d_{ij} \geq 0 \quad (2)$$

При наличии ограничений баланса передвигающихся вагонов в каждом узле сети для каждого оператора:

$$NI_i^K + \sum_{j \in V_i} (x_{ji}^K + y_{ji}^K) = \sum_{j \in V_i} (x_{ij}^K + y_{ij}^K) + NF_i^K, K = \underline{1, M}, i \in V, NI_i^K \geq 0 \quad (3)$$

Где NI_i^K - число доступных у оператора с индексом K вагонов в узле i в начальный момент времени, а NF_i^K - число вагонов оператора с индексом K , находящихся в узле i после выполнения всех необходимых в задаче перевозок.

Последними ограничениями являются естественные предположения о неотрицательности рассматриваемых неизвестных:

$$x_{ij}^K \geq 0, y_{ij}^K \geq 0, NF_i^K \geq 0, K = \underline{1, M}, (i, j) \in E \quad (4)$$

Поставленная задача является задачей ЛП. Известно, что в задачах оптимизации в случае дифференцируемости функции оптимального значения по правой части ограничений вектор оптимальных множителей Лагранжа является градиентом функции оптимального значения по правой части [3].

В рамках рассматриваемой задачи это означает то, что множители Лагранжа к ограничениям (2) могут быть интерпретированы как цена грузоперевозки в условиях ограничений (2)-(4).

Имеется прямая взаимосвязь между оптимизационной задачей (1) и совершенным конкурентным равновесием: модель минимизации затрат является моделью

конкурентного рынка на основе аукциона индивидуальных функций себестоимости железнодорожных операторов с неэластичным спросом. Аукцион предполагает следующие действия:

- 1) Объявляется спрос на поставку груза из пункта i в пункт j в размере d_{ij} вагонов
- 2) Каждый оператор подает ценовую заявку на перевозку заявленного груза по направлению (i, j)
- 3) Системный оператор с помощью решения задачи (1) назначает операторам их оптимальные перетоки, которые в сумме полностью обеспечат перевозку всех d_{ij} вагонов
- 4) Потребители или же пользователи услуг грузовых железнодорожных перевозок оплачивают стоимость перевозки с единой ценой $Price_{ij}^*$, а операторы получают доход в размере $Price_{ij}^* y_{ij}^{K*}$, где данная единая цена для всех операторов, участвующих в перевозке груза d_{ij} вычисляется как множитель Лагранжа к ограничению (2) задачи (1)

В работе показано, что в рассматриваемой задаче минимизация себестоимости влечет за собой максимизацию индивидуальных функций прибыли при фиксированной цене. Более того, условия Каруша-Куна-Таккера, обеспечивающие оптимальность решения задачи (1), в точности повторяют условия совершенного конкурентного равновесия Вальраса [4, 5], что влечет за собой Парето-оптимальность [6] полученного распределения (расписания) грузоперевозок среди операторов сети при ценах, сформированных на основе множителей Лагранжа как указано выше.

Дальнейшим шагом явился анализ модели, который включает в себя два направления:

- Влияние механизма аукциона на равновесные цены и индивидуальные прибыли;
- Адекватность решения задачи (1) с точки зрения транспортного функционирования.

Механизм аукциона предполагает одностороннюю информацию - регулятор рынка (например, Федеральная Антимонопольная Служба) может только оценивать реальную себестоимость грузоперевозки отдельного оператора. В таком случае рынок должен быть спроектирован таким образом, чтобы ни одному оператору не было выгодно заявлять данные о затратах выше реальных: такой аукцион является аукционом, выявляющим предпочтения [7]. Чтобы обосновать выбор стратегии формирования реальной себестоимости в задаче (1), были сформулированы и доказаны следующие утверждения:

Пусть (y^*, x^*, F^*) - решение задачи (1), тогда:

- 1) Если $y_{ij}^{K*} > 0$, то $Price_{ij}^* \geq C_{ij}^K$.
- 2) Если $y_{ij}^{K*} = 0$, то $Price_{ij}^* < C_{ij}^K$.

Условия выше являются условиями Нэша-Вардропа [8] - это говорит о том, что каждому оператору по отдельности не выгодно завышать свою ценовую заявку.

С технологической точки зрения задача (1) есть задача планирования на заданный интервал времени. Оптимальное решение представляет собой схему маршрутизации, обеспечивающую минимальное значение стоимости перевозок. Однако, в виде (1) модель является упрощенной и не учитывает суммарное время и пропускную способность по направлению (i, j) . Исходя из этого, может быть введено следующее дополнительное ограничение:

$$x_{ij}^K \leq \alpha_{ij}^K V^K \quad (5)$$

Где V^K - размер вагонного парка оператора с индексом K , а $\alpha_{ij}^K \in [0, 1]$ - коэффициент, рассчитанный на основе исторических данных таким образом, чтобы общее затраченное совокупными перевозками время не превышало заранее определенную величину.

Согласно сформулированной модели при дополнительных ограничениях (5), используя имеющиеся данные за год о железнодорожной сети Российской Федерации, были произведены расчеты, определяющие оптимальные грузовые перевозки, распределенные между операторами сети с различными ценовыми заявками и размерами вагонных парков, а также цены, идентифицирующие равновесие на указанном рынке.

Список литературы

1. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС-Пресс, 2005.
2. Бутов А.М. Рынок перевозок грузов железнодорожным транспортом // Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Центр развития, 2016. С. 2–55.
3. Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.
4. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и. экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
5. Varian Hal R. Microeconomic Analysis. 3rd Edition. W. W. Norton & Company, 1992.
6. Ehrgott M. Multicriteria optimization. Springer, 2005.
7. Мулен. Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
8. Wardrop J. G. Some theoretical aspects of road traffic research // Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II, 1952. С. 325–378.

Model of the market for freight transport in rail transport

Grinko P.S., Davidson M.R.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Оценка спроса на перемещение в виде задачи непрерывной оптимизации*

Крылатов А.Ю., Широколобова А.П.

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Текст тезисов. Проблема сетевого равновесия направлена на оценку загрузки дуг и/или маршрутов транспортной сети при заданных значениях спроса на перемещения между районами отправления-прибытия. Наиболее распространенный подход к такой оценке основан на первом принципе Вардропа. Этот принцип пользуется популярностью, поскольку дает достаточно адекватное отображение поведения водителей по выбору маршрутов на транспортной сети. На данный момент существуют эффективные инструменты для оценки загрузки транспортной сети при известных значениях спроса на перемещения между районами отправления-прибытия. Данные о спросе на перемещения между парами районов отправления-прибытия представляются в виде матрицы корреспонденций. Инструменты для оценки распределения транспортных потоков крайне полезны для прогнозирования загрузки при планировании инфраструктурных изменений. Однако зачастую возникает необходимость в решении обратной задачи – восстановлении набора пар районов

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-31-00178

отправления-прибытия и оценки спроса на перемещение между ними. Другими словами, задача оценки матрицы корреспонденций.

Задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций получила свое развитие еще в начале 60-х годов XX века и особенно актуальна сейчас. Рост уровня автомобилизации приводит к необходимости оперативного управления дорожной ситуацией. Особенно сильно эта необходимость проявляется в крупных и сверхкрупных городах. В последние десятилетия мы все чаще сталкиваемся с негативными последствиями роста количества личных автомобилей: пробки, большое количество дорожно-транспортных происшествий, нехватка мест для парковки, загрязнение воздуха. Решение этих проблем требует реорганизации дорожного движения и модернизации улично-дорожной сети города, в то время как эффективная реорганизация и инфраструктурные изменения транспортной сети невозможны без достоверной информации о трафике. Задача распределения транспортных потоков, оценки и восстановления матрицы корреспонденций рассматривается учеными всего мира. Среди работ наших соотечественников, следует отметить [1, 2], занимающихся математическим моделированием транспортных потоков и [3], в работах которого проводится оценка матриц корреспонденций по замерам интенсивности движения. В зарубежной литературе методам оценки и восстановления матриц корреспонденций посвящено множество статей. Одна из наиболее ярких математических моделей оценки матрицы корреспонденций является модель, предложенная в [4]. На ее базе были разработаны различные методы, в частности модель из [5], которая основана на данных, полученных с датчиков фиксации номерных знаков. В работах [6, 7] задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций решается как обратная к задаче поиска конкурентного равновесия Вардропа.

Во многих математических моделях, в том числе в двухуровневой модели, представленной в [4] и в моделях, опирающихся на нее, используется понятие априорной матрицы корреспонденций. Априорная матрица – матрица корреспонденций, заранее найденная каким-либо альтернативным путем (при помощи математической модели, экспертного сообщества, натуральных замеров, др.). Использование априорных матриц сводит задачу оценки матрицы корреспонденций к поиску стандартного отклонения. Кроме того, при подходе с использованием априорных матриц, задан набор пар районов отправления-прибытия, что является существенным упрощением задачи. В данной работе предложено решение задачи поиска матрицы корреспонденций без применения априорных матриц. В качестве входных данных используется информация о загрузке элементов улично-дорожной сети. Такую информацию можно получить при помощи счетчиков, датчиков фиксации номерных знаков или онлайн-сервисов (например, отображающих скорость движения по участку дорожной сети). Набор пар, являющихся источниками и стоками, и объем спроса на перемещение между такими парами предстоит найти. В результате такой постановки получена двухуровневая оптимизационная программа, являющаяся задачей непрерывной оптимизации, и предложено решение такой задачи для тестового примера транспортной сети.

Список литературы

1. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003. № 11. С. 3-46.
2. Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. Гасникова А. В. М Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та. 2010. 362 с.
3. Лагерева Р. Ю. Методика оценки матриц корреспонденций транспортных потоков по данным интенсивности движения. Диссертация. Волгоград. 2007.

4. Yang H., Sasaki T., Iida Y., Asakura Y. Estimation of origin-destination matrices from link traffic counts on congested networks // *Transportation Research Part B*. 1992. No 26 (6). P. 417-434.

5. Castillo E., Menedez J. M., Jimenez P. Trip matrix and path flow reconstruction and estimation based on plate scanning and link observations // *Transportation Research Part B*. 2008. No 42. P. 455-481.

6. Крылатов А. Ю., Раевская А. П. Восстановление матрицы корреспонденций как задача обратная к равновесному распределению потоков // *Процессы управления и устойчивость*. 2016.

7. Krylatov A.Yu., Shirokolobova A.P., Zakharov V.V. OD-matrix estimation based on a dual formulation of traffic assignment problem // *Informatika (Slovenia)*. 2016. Vol. 40, No 4. P. 393-398.

OD-matrix estimation as a problem of continuous optimization

Shirokolobova A.P., Krylatov A.Yu.
SPbSU, Saint-Petersburg, Russia

Моделирование адаптивной системы управления транспортом с алгоритмом поиском разрыва в потоке*

Пройдакова Е.В.
ННГУ имени Н.И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия

Работа посвящена аналитическому и численному исследованию адаптивной управляющей системы с алгоритмом поиска разрыва в транспортном потоке и обобщает результаты, приведенные в [1]. Изучается система управления двумя простейшими независимыми и конфликтными транспортными потоками Π_1 , Π_2 на пересечении магистралей. Конфликтность означает, что обслуживание потоков (проезд через перекресток) может происходить только в непересекающиеся промежутки времени. Обслуживающее устройство (светофор) имеет два различных состояния $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$, где $\Gamma^{(1)}$ – состояние, при котором пропускается только поток Π_1 ; $\Gamma^{(2)}$ – состояние, при котором пропускается только поток Π_2 . Переключение состояний $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ осуществляется согласно адаптивному алгоритму [1]. Данный алгоритм базируется на учете времени между прибывающими к перекрестку автомобилями, для этой цели используется регистрирующий детектор. Работа алгоритма по потоку Π_j , $j = 1, 2$ осуществляется по шагам, согласно блок-схеме, представленной на рис. 1.

*Работа выполнена в рамках госбюджетной темы Н-005-0 «Математическое моделирование и анализ стохастических эволюционных систем и процессов принятия решений»

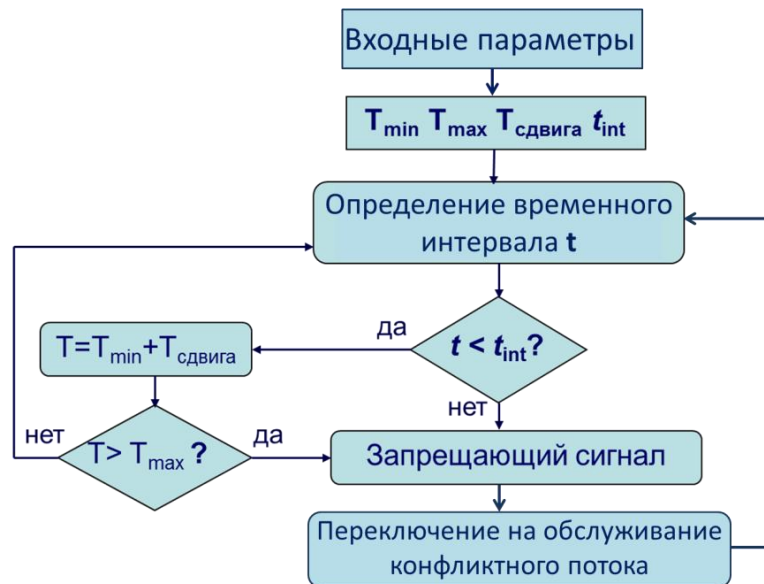


Рис.1. Блок-схема работы адаптивного алгоритма

Шаг 1: задаются максимальный ($T_{\max j}$) и минимальный ($T_{\min j}$) периоды цикла работы светофора и время сдвига фазы ($T_{\text{сдвига}}$).

Шаг 2: задается максимальный интервал времени между автомобилями $t_{\text{int } j}$.

Шаг 3: с помощью регистрирующего детектора определяется реальный интервал времени между прибывающими автомобилями.

Шаг 4: проверяется условие на переключение сигнала светофора: если реальный интервал времени между поступающими автомобилями меньше максимально допустимого интервала $t_{\text{int } j}$, то время работы светофора, изначально равное $T_{\min j}$, увеличивается на время сдвига $T_{\text{сдвига}}$, но не становится больше максимального времени работы $T_{\max j}$. Если же интервал между поступающими автомобилями больше чем $t_{\text{int } j}$, то происходит переключение на красный сигнал светофора для данного потока и переход к обслуживанию конфликтного потока.

Данный адаптивный алгоритм обеспечивает эффективную работу светофора для ситуаций, когда в потоке транспорта есть разрывы. Если же поток лишен явных разрывов, то алгоритм переходит в режим, при котором длительности разрешающих сигналов светофора будут одинаковыми и равными максимальному установленному для данного потока времени $T_{\max j}$. То есть адаптивный алгоритм вырождается в циклический, с фиксированным ритмом. При таком режиме работе обслуживающего устройства, рассматриваемый алгоритм управления, фактически, может быть заменен простейшим светофором с циклическим ритмом.

Аналитическое исследование адаптивной управляющей системы было проведено для случая, когда времена обслуживания каждого из потоков постоянны и равны заданному максимально возможному значению T_{\max} . При построении математической модели системы применялся «кибернетический» подход [2, 3]. Согласно основным положениям кибернетического подхода, система наблюдалась в дискретные моменты времени τ_i , $i = 0, 1, \dots$. Здесь моменты τ_i совпадали с переключением состояний обслуживающего устройства.

Введем на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ при $i = 0, 1, \dots$ следующие случайные величины и элементы:

- 1) случайный элемент Γ_i – состояние обслуживающего устройства $\Gamma_i \in \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}\}$;
- 2) дискретные случайные величины $\eta_{1,i}$, $\eta_{2,i}$ – количество заявок потока Π_1 , Π_2 соответственно, поступивших за интервал времени $[\tau_i; \tau_{i+1})$, где $\eta_{1,i}$, $\eta_{2,i} \in \{0, 1, \dots\}$;

3) дискретные случайные величины $\xi_{1,i}, \xi_{2,i}$ – максимально возможное число требований, которое может быть обслужено из очереди потоков Π_1, Π_2 соответственно за промежуток времени $[\tau_i; \tau_{i+1})$ (потоки насыщения [3]);

4) дискретные случайные величины $\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}$ – длины очередей по потокам Π_1, Π_2 соответственно в момент времени τ_i , причем $\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i} \in \{0, 1, \dots\}$;

5) дискретные случайные величины $\zeta_{1,i}, \zeta_{2,i}$ – число реально обслуженных заявок потоков Π_1, Π_2 соответственно за промежуток времени $[\tau_i; \tau_{i+1})$.

Входные потоки считаем простейшими, поэтому для $\eta_{1,i}$ и $\eta_{2,i}$ можно записать следующие условные вероятности:

$$P(\eta_{j,i} = u | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = (\lambda_j \Gamma_r)^u (u!)^{-1} \exp(-\lambda_j \Gamma_r), \text{ где } u \in X, j = 1, 2, r = 1, 2.$$

Для описания алгоритма переключения состояний обслуживающего устройства зададим функцию $U(\Gamma^{(r)}, w_1, w_2)$:

$$U(\Gamma^{(r)}, w_1, w_2) = \begin{cases} \Gamma^{(1)}, & \text{при } r = 2, w_2 > 0; \\ \Gamma^{(r+1)}, & \text{при } r = 1, w_1 > 0. \end{cases}$$

Тогда состояние обслуживающего устройства в следующий момент времени будет определяться по формуле: $\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i, \alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}), i = 0, 1, \dots$

Для числа реально обслуженных требований по потокам выполняется:

$$\zeta_{j,i} = \min\{\alpha_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, j = 1, 2 \text{ и } i = 0, 1, \dots$$

Для очередей по потокам справедливо следующее соотношение:

$$\alpha_{j,i+1} = \max\{0, \alpha_{j,i} + \eta_{j,i} - \zeta_{j,i}\}, j = 1, 2 \text{ и } i = 0, 1, \dots$$

Состояние исследуемой адаптивной управляющей системы в момент времени τ_i характеризуется трехкомпонентным случайным вектором $(\Gamma_i, \alpha_{1,i}, \alpha_{2,i})$, куда входят состояние обслуживающего устройства и очереди по потокам Π_1, Π_2 . Математическая модель адаптивной управляющей системы представляет собой случайную векторную последовательность $\{(\Gamma_i, \alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}); i = 0, 1, \dots\}$. Для полученной последовательности доказаны некоторые утверждения.

Утверждение 1. При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0, \alpha_{1,0}, \alpha_{2,0})$ случайная последовательность $\{(\Gamma_i, \alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}); i = 0, 1, \dots\}$ является марковской.

Утверждение 2. Для случайной векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}); i = 0, 1, \dots\}$ справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$(\Gamma_{i+1}, \alpha_{1,i+1}, \alpha_{2,i+1}) = (U(\Gamma_i, \alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}), \max\{0, \alpha_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, \max\{0, \alpha_{2,i} + \eta_{2,i} - \xi_{2,i}\}).$$

Нашей дальнейшей задачей является выявление таких параметров системы, при которых рассматриваемый адаптивный алгоритм вырождается в циклический с фиксированным ритмом [2]. С этой целью была создана программа, являющаяся имитационной моделью изучаемой управляющей системы.

В начале работы имитационной модели задавались следующие входные параметры:

- 1) λ_1, λ_2 (требований в секунду) – интенсивности входных потоков;
- 2) $t_{\text{int } 1}, t_{\text{int } 2}$ (секунд) – максимальный интервал времени между подъезжающими машинами по первому, второму потоку соответственно;
- 3) $T_{\text{min } 1}, T_{\text{min } 2}$ (секунд) – минимальные длительности разрешающих сигналов по первому, второму направлению соответственно;
- 4) $T_{\text{max } 1}, T_{\text{max } 2}$ (секунд) – максимальные длительности разрешающих сигналов по первому, второму направлению соответственно;
- 5) $T_{\text{сдвига}}$ (секунд) – изменение длительности разрешающего сигнала обслуживающего устройства.

По окончании работы программы вычислялся, в том числе, коэффициент $k_{\text{отн}} = \frac{N_{\text{max}}}{N}$, где N_{max} – количество циклов обслуживающего устройства, в течении которых длительность зеленого света по первому и второму потокам были равны $T_{\text{max}1}$ и $T_{\text{max}2}$ соответственно, а N – общее количество циклов. Коэффициент $k_{\text{отн}}$ может характеризовать эффективность работы исследуемого адаптивного алгоритма. Считаем, что при значении $k_{\text{отн}} > 0,8$ алгоритм теряет свою адаптивную функцию, поскольку основное время работает как простейший циклический алгоритм с фиксированным ритмом.

При получении численных результатов, имитационная модель предварительно приводилась к квазистационарному (близкому к стационарному) режиму функционирования [4].

По результатам имитационного моделирования выявлялись области, в которых адаптивный алгоритм вырождался в циклический с фиксированным ритмом. Данные области существенно зависят от входных параметров имитационной модели, в том числе от интенсивностей входных потоков. Например, при $T_{\text{min}1} = 10$, $T_{\text{max}1} = 90$, $T_{\text{min}2} = 10$, $T_{\text{max}2} = 110$, $t_{\text{int}1} = 10$, $t_{\text{int}2} = 10$, $T_{\text{сдвига}} = 2$ адаптивный алгоритм сохраняет свою функцию ($k_{\text{отн}} < 0,8$) в области, где значения λ_1 меняются в диапазоне от 0,05 до 0,5 и λ_2 от 0,05 до 0,5.

При $T_{\text{min}1} = 10$, $T_{\text{max}1} = 50$, $T_{\text{min}2} = 10$, $T_{\text{max}2} = 60$, $t_{\text{int}1} = 15$, $t_{\text{int}2} = 10$, $T_{\text{сдвига}} = 2$ $k_{\text{отн}} < 0,8$ уже в более узкой области, а именно там, где значения λ_1 меняются в диапазоне от 0,05 до 0,35 и λ_2 от 0,05 до 0,4. В оставшейся части области (λ_1 от 0,36 до 0,5 и λ_2 от 0,41 до 0,5) алгоритм переходит в простейший циклический.

В случае, когда $T_{\text{min}1} = 10$, $T_{\text{max}1} = 35$, $T_{\text{min}2} = 10$, $T_{\text{max}2} = 45$, $t_{\text{int}1} = 20$, $t_{\text{int}2} = 20$, $T_{\text{сдвига}} = 2$, алгоритм сохраняет свою адаптивную функцию только при λ_1 от 0,05 до 0,15 и λ_2 от 0,05 до 0,2. Таким образом, в преобладающем числе случаев при указанных входных параметрах алгоритм теряет свою адаптивную функцию и вырождается в простейший циклический с фиксированным ритмом.

Список литературы

1. Пройдакова Е.В., Решетова А.А. Исследование системы массового обслуживания с адаптивным алгоритмом поиска разрыва в потоке // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2017, № 53. С. 36–41.
2. Пройдакова Е.В. Система с фиксированным ритмом и непостоянной интенсивностью обслуживания // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2017, № 50. С. 73–78.
3. Пройдакова Е.В. Исследование приоритетной системы обслуживания и ее выходных потоков с помощью кибернетического подхода. // Материалы XIII Международной научно-практической конференции имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014)», 20–22 ноября 2014 г. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014, Ч. 2. С. 202–207.
4. Пройдакова Е.В. Численное исследование циклической и приоритетной систем управления конфликтными потоками требований // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013, № 3(1). С. 199–205.

Modeling of an adaptive transport control system with an algorithm of searching for a rupture in the flow

Proidakova E.V.

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (UNN), N. Novgorod, Russia

The method of metric data analysis in bigdatain transport streams research*

Andrianova D.A.

Limited liability company «Yandex»

Kamenev I.G.

Federal Research Center of Informatics and Management of the RAS

Role of big data in transport streams research

Nowadays transport streams research is often associated with big data. Unfortunately, this term remains rather vague in the scientific literature. There are several approaches to the definition of big data. Some sources define it only on the criterion of information amount (number of records), other on volume and complexity of the structure (data that does not fit the logic of the standard data bases), others refer to large arrays of data such that analysts are not able to handle it in traditional ways.

Structure of the big data represent a sequence of records (rows), each of them contains a row identifier and the information provided in the form of a hard-coded set of characteristics. Big data may be provided in two forms: the stream (refreshable, supplemented and modified, also called "log") or array (actually, any array is a sample of the log, for example, log on a specific date).

In this study, big data is considered as arrays that can not be processed and presented by standard visualization methods due to the large volumes (more than 1 mill. records) and has multidimensional (at least four characteristics) structure. Another necessary criterion is natural origin of data - array should be formed from a stream that accompanies the activities of different social systems.

As an example of big data in the traffic flows study, we use information about the taxi trips. The standard way to explore big data is usually machine learning in this case, ie, model building using computer algorithms that automatically adjusts the correlation coefficients. An alternative to this method is a multidimensional data analysis, which may be applied using metric data analysis (Metric data analysis method, MMDA, developed by G.K. Kamenev and I.G. Kamenev).

Metric Data Analysis method

MMDA is based on a mathematical theory and provides the set of applied mathematical tools, complex software and software designed to analyze the data in a multidimensional space of (social) characteristics.

Multidimensional characteristics space [1] is a set of indexes, ascribed to a subject (the actor, the agent: the consumer, the voter worker enterprise and community al.). In transport streams study, we can use vehicle, trip or passenger as the subject. MMDA allows to evaluate the completeness and representation reliability of the existing social array total population and to identify some topology features and its distribution.

Array elements are considered as a multidimensional Euclidean space R^d , i.e. as records containing d numerical components $x = (x_1, \dots, x_d)$ from R^d . There can be considered different distance types (metrics).

The method mathematical basis consists of construction [3] of (ε, δ) -nets and (ε, δ) -coverings of data set with metric accuracy ε and completeness in measure δ , providing topological and metric analysis of its structure. The value of (ε, δ) -entropy [2] characterizes the complexity of the approximate description (metric coding) and the approximation of the set within accuracy ε , where the probability of the point to get outside the (ε, δ) -covering is δ .

* This research is supported by RFBR (project 18-01-00465 a: «Development of social data multidimensional metric analysis methods»).

To estimate the completeness and reliability of the approximation [3, 4] for small volume data, dividing it into a database and a test sample and different methods of statistical bootstrapping are used [1].

The array has a large data size, which eliminates its study by traditional methods, so it is necessary to approximate it using MMDA. As a rule, in study process is often needed to build several approximations: search ones (with the net volume up to 10,000 records), which produces working hypotheses, and the main (with the net volume up to 100,000 records), in which hypotheses are tested, substantiated, and research results are visualized.

GeoLink's company dataset preprocessing

For testing and demonstration possibilities of MMDA with big data was selected data set provided by the company GeoLink in 2015 [5]. It describes taxi orders made in one year and was intended for the data analysis competition (with neural networks, in general). The proposed set contains 1,710,671 records with the following characteristics:

- Unique trip number;
- Order method (phone the dispatcher, in a special stand taxi stand, stopped on the street);
- Unique customer number based on his telephone number, if order was over the phone;
- Stand number for orders in special booth at the taxi park;
- A unique number of the taxi;
- Start trip time;
- Order date type (holiday, pre holiday, normal);
- Lack of data (true, if the gps-coordinates of the trip is not fully assembled);
- Gps-coordinates recorded with 15 seconds intervals during the trip.

Proposed data analysis preparation has two stages:

1. Preparation of a big data set, leading it to the required format: only numeric values in csv format - separated by a comma in the specified order, using a line break to separate one entry from the other.
2. Selecting characteristics for analysis, based on the study purpose.

As it often happens, the GeoLink's data array was not optimized as needed. So preprocessing was done using simple programs that replace all text and numeric entries in the records an unify structure (primarily it concerned gps-coordinates as it could be any number of them in the string).

At first, all data were lead to a numeric format. Letter designations have been replaced by digital. Blank elements replaced by "-1". Gps coordinates list has been replaced by three fields: number of coordinate records (Nodes_Num), start coordinate (XStart, YStart), finish coordinate (XFin, YFin). Furthermore, additional indicators calculated on available data basis were added:

- Trip length (Trip_Len) - distance between start and finish gps-coordinate;
- Road length (Road_len) - sum of distances between successively recorded coordinates;
- Speed (Speed) - path length divided by the number of entries of coordinates.

GeoLink's dataset analysis

Analysis of the array itself also includes two steps:

1. Preparation of needed elements sample from a common big data set via Deep Holes Method (DHM). This method allows you to specify the required parameters of approximation: the studied field, reliability, accuracy, sample size, number of experiments, and others.
2. Visualization of the obtained sample and following visual analysis using various data representation methods: biaxially, in the form of adjustable bands, a color map.

Often you have to repeat these two stages (sampling and examination) in the visualizer several times to build desired space part as much as possible in detail.

Our array can be considered in three different spaces: the geographical space - based information on the whereabouts of a taxi, the physical characteristics - based on the movement speed, covered distance and the length of the trip - based on order types, date types and others. Spaces also can be combined, but it will increase required size of the sample. Therefore, it is more correct to perform approximation on each of the spaces separately when you search for some details, but combine all needed parameters in the main sample for the final look. Research of the obtained sample models revealed significant different features and characteristics in big data set. For example, let us consider the features of the geographical area (Fig.1.).

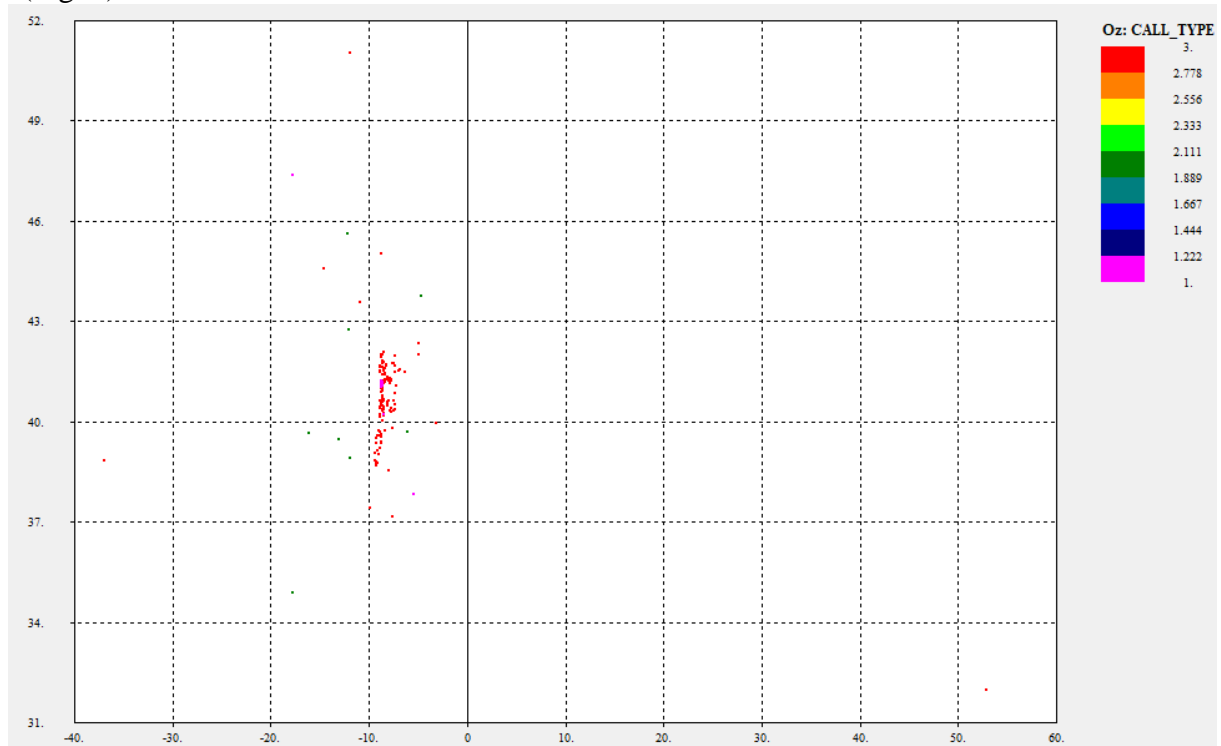


Fig. 1. Trip starting points geography

Oxaxis – X Start trip coordinate. Oy axis – Y Start trip coordinate. Color – different order types. Source: authors' calculations.

Visual analysis shows that most visits in sample occur in a compact area (conventional "city"), but there are several trips from other areas. In this case, we advise to examine separately the "majority" and "minority" of sample.

Performing special approximations for the "majority" (Fig. 2) reveals its complex topology (in fact, the network of streets). Visualization also helps to determine structure of various trips types around the map (for example, fixed points for taxi ordering naturally located in the city center).

It should be noted that these structures cannot be detected on all range approximation parameters (at this scale dots become indistinguishable close to each other). Thus, focus on the "majority" or some of its parts reveals its topology if all right parts were considered. As a result, it becomes important to remove obviously incorrect values from approximation obtained by the log data errors. Such records will inevitably exist in any natural origin data sets, so this task is problematic for neural networks research as well.

In considered case, approximation automatically identifies these false records due to the fact that they shift the zoom bar. Thus, during the physical characteristics analysis we identified examples where taxi have traveled with an average speed of over 300 km./hr. Long time can be necessary to analyze reasons for such deviations (after they are identified): for example, the gps-tracker could be not switched off prior to loading taxis on the aircraft.

Reasons of error can be a separate area of study, but approximation can be corrected by just establishing indicators of the border, excluding such false cases from consideration.

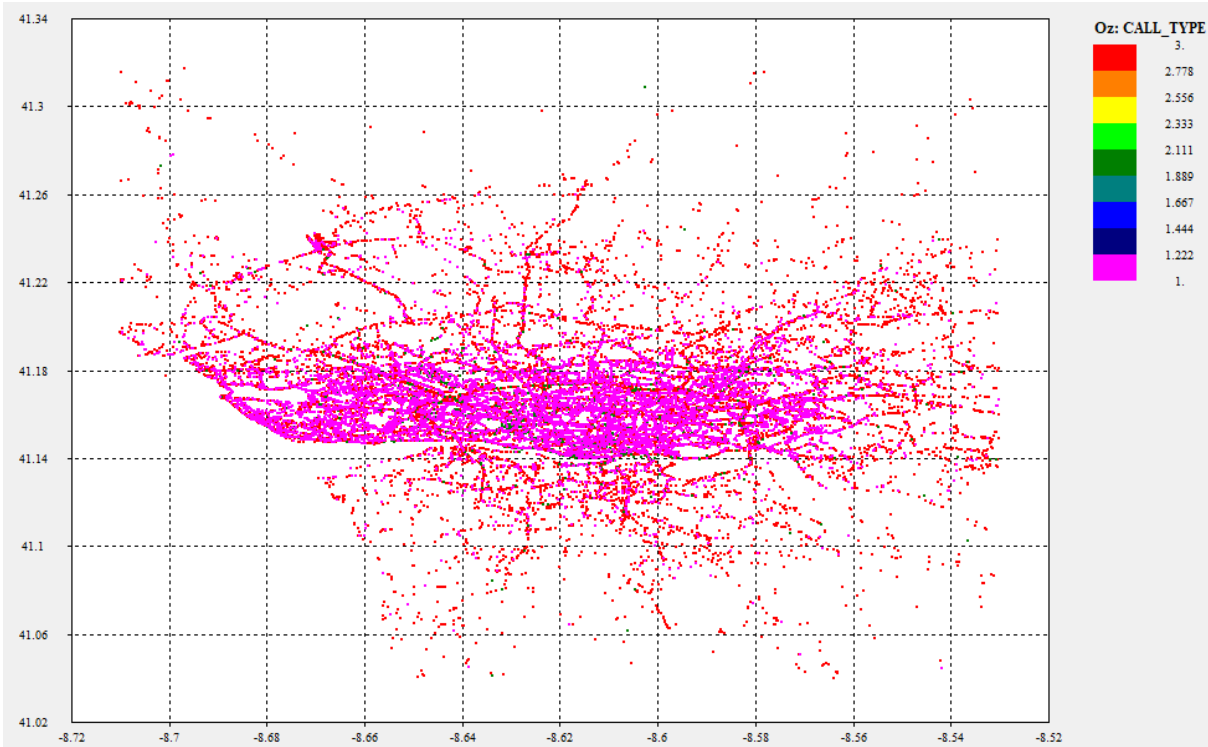


Fig. 2. Starting points geography of a trip to the "city"
 Oxaxis – X Start trip coordinate. Oy axis – Y Start trip coordinate. Color – differentordertypes. Source: authors' calculations.

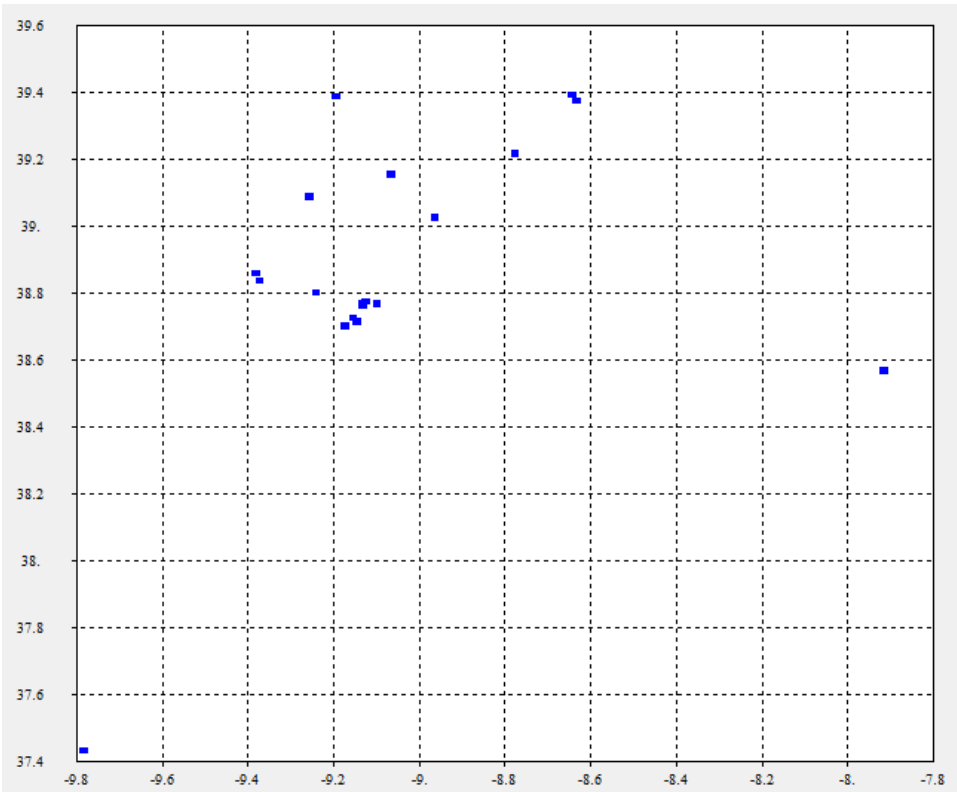


Fig. 3. Starting points geography of a trip to the "southern suburbs"
 Oxaxis – X Start trip coordinate. Oy axis – YStarttrip coordinate(in geographic and physical characteristics space.)Source: authors' calculations.

Analysis of the minority has completely different specificity. The main problem in this case is related to the accuracy of approximation and reliability of conclusions. Approximation by a large number of indicators with a small number of measurements leads to incorrect generalizations, evidenced by a selective covering radius (which should be close to 0 and not exceed unity).

As an example, we consider one of the geographical minority "southern suburb" (with constraints: $X_{Start} \in [-10; -7.5]$ and $Y_{Start} \in [37; 39.5]$). Approximation by two start coordinates point leads to construction of a net having a bad, but meaningful sample covering radius (0.65) - it allows to localize the position of the suburb.

However, any judgments about of these trips characteristics will be unreliable because inclusion other parameters in approximation (travel characteristics) makes it impossible to build a net with acceptable coatings radius. Those this set is not suitable for estimation trip speed, duration, etc. originating from the "southern suburbs." This example highlights importance of multidimensional space and the risk of projections constructing.

References

1. G.K. Kamenev, I.G. Kamenev. Application of methods of multidimensional analysis for the study of sociological populations // Proceedings of the Department of Mathematical Modeling of Economic Systems of the Center of FIC IU RAS, 2018. pp. 58-93
2. K. Shannon. Mathematical connection theory (1948), appendix 7. // Shannon K. Works on the theory of information and cybernetics. In: Moscow: Izd. Foreign Literature, 1963.
3. G.K. Kamenev Multicriterial method of identification sets // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016. Vol. 56. №11. pp. 1872-1888.
4. G.K. Kamenev Approximation of completely bounded sets by the method of deep wells // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2001. Vol. 41. № 11. pp. 1751-1760.
5. Taxi Service Trajectory // Taxi-link Company, 2015. – URL: [http://geolink.pt/ecmlpkdd2015-challenge/dataset.html\(01.01.2018\)](http://geolink.pt/ecmlpkdd2015-challenge/dataset.html(01.01.2018))

Model of making managerial decisions in the modeling of traffic flow taking into account Web technologies

Burlov V.G., Grachev M.I.

St. Petersburg University of the Ministry of Internal Affairs of Russia, St. Petersburg, Russia

Managing traffic flows is a complex process, including a whole, the system of its components, one of which is the adoption of management decisions, on which many factors will depend, one of which is the provision of road safety [1]. The decision maker (LPR) forms the processes of ensuring the security and continuity of the traffic flow, in the form of a model of his decision, which he forms and accepts in the current situation. The use of Web technologies, widely used at the present time, facilitates the accomplishment of this task (shortening the time to develop the right management decision). In this article, we consider the development of a model for making managerial decisions in the modeling of the transport stream taking into account Web technologies. At the heart of this model is the law of preservation of the integrity of the object (ZSTSO) [1]. This model allows you to make decisions in a shorter time, thereby increasing the efficiency of traffic flow management. With the introduction of Web technologies, many human activities are optimized, allowing them to redirect the time that is freed from it to other tasks, for example, by observing traffic rules in traffic not in a narrow section, but on a larger territory. Based on a model that improves the management of traffic flow, taking into account and using Web technologies, there is a

constant monitoring of the traffic flow and monitoring compliance with the rules of the road. Modeling the transport stream is the process of managing the uninterrupted traffic of its participants in a given direction and to a specified goal. The decision of a person is the basis of activity, both a participant in the movement and a person forming a transport stream. A person carries out his activity on the basis of a model. Therefore, in order to carry out activities adequate to the traffic situation, it is necessary to have an adequate mathematical model of human decision [1]. With the increase in the number of road users and with the increasingly difficult formation of uninterrupted operation of the traffic flow, the urgency of this work is determined. movement, taking into account the capabilities of Web technologies [2]. A natural-scientific approach is needed to form a model for managing transport flows [3]. In the process of organizing a traffic flow, very often a situation arises where the results of activities can not guarantee the achievement of the management goal, accordingly, unsatisfactory results of the management lead to contradictory conclusions, which is undesirable and, to avoid contradictory conclusions, an axiomatic method should be used that will exclude Disagreements in these arguments [4]. To form the conditions guaranteeing the achievement of the goal of activity, a natural scientific approach to the management of transport flows is used. It is determined by the integration of the properties of the Mind of man, the surrounding World and Cognition [5] and is realized by the scientific and pedagogical school "System Integration of Public Administration Processes" [6]. 3-Three-component is reflected in the three principles is the very principle of the 3-component of cognition, then the principle of the integrity of the world, which is realized by the ZSTSO-stable, objective, repetitive connection of the properties of the object and their actions for a fixed destination [7], the following principle of the cognizance of the World realizing in turn methods: decomposition, abstraction and aggregation [1]. In this paper, a method based on the synthesis based on the identification of the main regularities was used to solve the problem. The model of the object will be called the description or representation of the object corresponding to the object and allowing to obtain the necessary characteristics about this object. A solution is a model of the process that a person works with. And the process itself is an object in operation for a fixed purpose. Applying the natural-science approach based on the FSMC for the synthesis of our management decision model in the modeling of the transport stream taking into account Web technologies. Such an approach will ultimately provide a guarantee of achievement of the goal. The structural scheme of the synthesis of our model is shown in Figure 1.

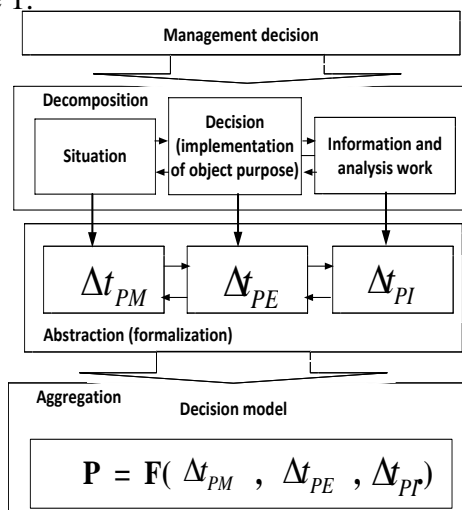


Fig.1. Structural scheme of synthesis

As a result of application of decomposition, abstraction and aggregation methods, we have obtained the management model $P = F(t_{np}, t_i, t_n)$, where P is the probability that the problem arising before the decision maker is recognized and resolved. t_{pp} is the average time of the problem, t_i is the average time for identifying the problem, t_n is the average time for

neutralizing the problem. This approach allows us to synthesize an adequate transport flow management model and take into account the capabilities of Web-technologies.

References

1. Burlov V.G., Grachev M. I., Development of a Mathematical Model of Traffic Safety Management with Account for Opportunities of Web Technologies Peer-review under responsibility of the organizing committee of the 12th International Conference “Organization and Traffic Safety Management in large cities” Elsevier B.V. 2017
2. Burlov, V.G., Grachev, M.I., Shlygina, N.S., 2017. Adoption of management decisions in the context of the uncertainty of the emergence of threats . Proceedings of 2017 20th IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2017.No. 1. Pp. 310-313
3. Burlov V.G., Grobitski A.M., Grobitskaya A.M. Construction management in terms of indicator of the successfully fulfilled production task. Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 3. Pp. 77–91
4. Burlov V.G., Volkov V.F. (1994). Method of consecutive expert estimates in control problems for the development of large-scale potentially dangerous systems // Engineering Simulation. Vol. 12. No. 1. Pp. 110-115
5. Burlov V.G., Grobitski A.M. Development of a Model for Social System Management in the Construction Process Taking into Account Manager’s Qualification. Humanities & Science University Journal. №15 (2015), Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia.2015, pp.25-36
6. Burlov, V., Lepeshkin, O. Modeling the Process for Controlling a Road Traffic Safety System Based on Potentially Active Elements of Space and Time//“Organization and Traffic Safety Management in large cities” Elsevier B.V. 2017
7. Istomin, E.P., Abramov, V.M., Fokicheva, A.A., Sokolov, A.G., Burlov, V.G. New approach to the assessment of geohazard in the management of the territories // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM . 2017

Distributed price adjustment for the resource allocation problem

Ivanova A., Gasnikov A.

Moscow Institute of Physics and Technology, Russian Federation

Using dual splitting technique [1] we propose interpretive centralized distributed algorithms for the resource allocation problem. In the case when the number of the resource constraints is large we developed a primal-dual technique from [2]. We also propose a new conception of master-slave communication based on the notion of controller for each of the resource constraints [3]. In the case when the number of the resource constraints is small we solve dual problem with center of gravity type method that generate some additional difficulties (we have to bound dual multipliers we have to obtain the solution of the primal problem from the dual one with the desired precision e.t.c.). We concentrate on this difficulties.

References

1. Nedic A., Ozdaglar A. Cooperative distributed multi-agent optimization. In Convex Optimization in Signal Processing and Communications. – Camb. Univ. Press, 2009. P. 340–386.
2. Nesterov Yu., Shikhman V. Distributed price adjustment based on convex analysis // Journal Optimization Theory and Applications. – 2017. – V. 172(2). – P. 594–622.

3. Bayandina A., Dvurechensky P., Gasnikov A., Stonyakin F., Titov A. Mirror descent and convex optimization problems with non-smooth inequality constraints. – LCCC Focus Period on Large-Scale and Distributed Optimization. Sweden, Lund: Springer, 2018.

Optimizing urban highway through on-ramp traffic light control

Kholodov Y.A.^{1,2}, Alekseenko A.E.^{1,2}, Chehovich Y.V.³ and Karachev A.N.¹

¹. *Innopolis University, Innopolis, Russia*

². *Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

³. *Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

In this work, we study the problem of optimal traffic signal control of automotive flow on urban multilane road. We employ macroscopic approach, describing traffic flow with non-linear second-order hyperbolic system on PDEs (for traffic density and speed). We close this system with the equation for dependency of traffic flow intensity on its density obtained empirically for each segment of the road based on traffic detector data and GPS tracks. We verify the effectiveness of proposed methodology using numerical modelling of Moscow Automotive Ring Road, a 10-lane, 108 km long highway encircling the city of Moscow, Russia.

СЕКЦИЯ № 15

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Апраушева Н.Н., Сорокин С.В. Распознавание унимодальности и бимодальности двухкомпонентной гауссовой смеси с различными дисперсиями | 514 |
| Горбунова А.В., Наумов В.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Модели ресурсных систем массового обслуживания и перспективы их развития | 518 |
| Рытова А.И. Условия вырождения ветвящегося случайного блуждания с тяжелыми хвостами | 521 |
| Назаров А.А., Худяшова Е.Е. Асимптотическое значение дисперсии числа занятых приборов в системе $GI GI _\infty$ с бесконечным значением среднего времени обслуживания | 524 |

Распознавание унимодальности и бимодальности двухкомпонентной гауссовой смеси с различными дисперсиями

Н. Н. Апраушева, С. В. Сорокин

*Федеральный исследовательский центр Информатика и управление
Москва, Россия*

1. Введение

Широкий спектр применения гауссовых смесей вызывает необходимость решения задачи определения (или оценивания) числа их мод. В настоящее время вопрос об унимодальности и мультимодальности гауссовых смесей в общем случае остаётся открытым. Для двухкомпонентной смеси с равными дисперсиями σ^2 получено уравнение границы её унимодальности и бимодальности, для $k > 2$ сформулированы лишь достаточные условия унимодальности [1]. Для смеси с различными дисперсиями σ_i^2 и различными математическими ожиданиями μ_i , $i = 1, 2$, при $k = 2$ известно несколько достаточных условий унимодальности [2,1]:

$$(\mu_2 - \mu_1)^2 < 27\sigma_1^2\sigma_2^2(4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))^{-1}, \quad (1.1)$$

$$(\mu_2 - \mu_1)^2\sigma_{min}^{-2} < 4, \quad \sigma_{min} = \min(\sigma_1, \sigma_2), \quad (1.2)$$

$$(\mu_2 - \mu_1)^2\sigma_{min}^{-2} < 2 + \beta^{-1}e^{-\frac{\rho_1^2}{2}} + \beta e^{-\frac{\rho_2^2}{2}}, \quad (1.3)$$

$$\beta = \pi_1\pi_2^{-1}\sigma_2^3\sigma_1^{-3}, \quad \rho_i^2 = (\mu_2 - \mu_1)^2\sigma_i^{-2}, \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

Кроме того, получены достаточные условия унимодальности и бимодальности такой смеси при существовании области неопределённости [1], в которой смесь может быть унимодальной или бимодальной. Если ни одно из имеющихся условий (1.1)—(1.4) не выполняется, то смесь может быть унимодальной или бимодальной.

Представленный в этой статье алгоритм позволяет определить, унимодальна или бимодальна смесь с любыми параметрами: $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1, \sigma_1, \sigma_2, \pi_2$.

2. Математическое обоснование алгоритма

Плотность вероятности исследуемой смеси имеет вид:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi_1}{\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{\pi_2}{\sigma_2} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right), \quad (2.1)$$

$$|x|, |\mu_i| < \infty, \quad 0 < \sigma_i < \infty,$$

$$0 < \pi_i < 1, \quad \pi_1 + \pi_2 = 1, \quad i = 1, 2.$$

Известно, что границы областей унимодальности и бимодальности гладкой функции $f(x)$ проходит по её вырожденным критическим точкам (ВКТ). По определению ВКТ — это любое решения системы уравнений [1]:

$$f'_x(x) = 0, \quad f''_{xx}(x) = 0. \quad (2.2)$$

Продифференцировав функцию $f(x)$ дважды приведём систему уравнений (2.2) к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi_1}{\sigma_1^3} (x - \mu_1) e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{\pi_2}{\sigma_2^3} (x - \mu_2) e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} = 0, \end{array} \right. \quad (2.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi_1}{\sigma_1^3} \left(1 - \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right) e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{\pi_2}{\sigma_2^3} \left(1 - \frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right) e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} = 0. \end{array} \right. \quad (2.3b)$$

Применяя элементарные алгебраические операции, систему уравнений (2.3a) (2.3b) приведём к одному уравнению:

$$x^3 + a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0, \quad (2.4)$$

$$a_1 = -(\mu_2 - \mu_1) + (\sigma_1^2 \mu_2 - \sigma_2^2 \mu_1)(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^{-1}, \quad (2.5a)$$

$$b_1 = 2\mu_1 \mu_2 - (\sigma_1^2 \mu_2 - \sigma_2^2 \mu_1)(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^{-1}, \quad (2.5b)$$

$$c_1 = [\sigma_1^2 \sigma_2^2 (\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \mu_2 (\sigma_1^2 \mu_2 - \sigma_2^2 \mu_1)](\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^{-1}. \quad (2.5c)$$

Для определения действительных корней кубического уравнения (2.4) используем известную теорию [3]. Подстановкой

$$x = y - \frac{a_1}{3}, \quad (2.6)$$

уравнение (2.4) приводится к виду:

$$y^3 + py + q = 0, \quad (2.7)$$

$$p = b_1 - \frac{a_1^2}{3}, \quad q = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 b_1}{3} + c_1. \quad (2.8)$$

Выражение

$$D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$$

называется **дискриминантом** уравнения (2.7). Знак дискриминанта определяет число действительных корней этого уравнения [3].

Теорема 1. Уравнение (2.7) имеет одно действительное решение, если $D > 0$ (или $p = q = 0$); два действительных решения, если $D = 0$ и $p \neq 0$; три действительных решения, если $D < 0$.

Если $D \geq 0$, то действительные решения уравнения (2.7) даёт известная формула Кардана-Тарталья [3]. Если дискриминант $D < 0$, то три действительных решения уравнения (2.7) даёт формула:

$$y = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \sin\left(\frac{1}{3}\alpha + 2k\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.9)$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{9q}{4p^2} \sqrt{-\frac{4p}{3}}\right).$$

Затем в обоих случаях корни уравнения (2.4) вычисляются по формуле (2.6).

Не все корни уравнения (2.4) являются корнями исходной системы уравнений (2.2), т. к. уравнение (2.4) не содержит параметров π_i , $i = 1, 2$, при различных значениях которых смесь может быть унимодальной или бимодальной.

3. Описание алгоритма

Разработанный алгоритм распознавания унимодальности и бимодальности смеси состоит из 2-х частей.

1. Вывод уравнения границы УБ для семейства смесей с постоянными и переменными параметрами: $\mu_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$, μ_2 — переменная величина, $\mu_2 > \mu_1$, $\sigma_2 = \text{const}_s$, σ_2 — постоянная величина в одном s -м семействе, $s=1, 2, \dots, 30$.

Для таких смесей в силу формул (2.5a)–(2.5c) коэффициенты уравнения (2.4) принимают вид:

$$a_1 = -\mu_2 + \mu_2(\sigma_2^2 - 1)^{-1}, \quad (3.1a)$$

$$b_1 = -\mu_2(\sigma_2^2 - 1)^{-1}, \quad (3.1b)$$

$$c_1 = \mu_2\sigma_2^2(\sigma_2^2 - 1)^{-1}. \quad (3.1c)$$

Теорема 2. В уравнении (2.7) коэффициент $p < 0$, если переменные a_1 , b_1 выражаются формулами (3.1a), (3.1b).

Доказательство. Из первой формулы в (2.8) и формулы (3.1b) следует, что $p < 0$, если $\sigma_2 > 1$. Остаётся показать, что $p < 0$, если $\sigma_2 < 1$ ($\sigma_2 \neq \sigma_1$, $\sigma_1 = 1$).

При подстановке выражений (3.1a), (3.1b) в первую формулу в (2.8) имеем:

$$p = -\mu_2(\sigma_2^2 - 1)^{-1} - 3^{-1}(\mu_2(\sigma_2^2 - 1)^{-1} - \mu_2)^2 = \\ = -\mu_2[(\sigma_2^2 - 1)^{-1} + 3^{-1}\mu_2((\sigma_2^2 - 1)^{-1} - 1)^2]. \quad (3.2)$$

Так как $\mu_2 > 0$, $\sigma_2^2 - 1 < 0$, то $p < 0$, если выражение в квадратных скобках формулы (3.2) > 0 , т. е.

$$3^{-1}\mu_2((\sigma_2^2 - 1)^{-1} - 1)^2 > (\sigma_2^2 - 1)^{-1}. \quad (3.3)$$

Так как выражение в правой части неравенства (3.3) > 0 при $\mu_2 > 0$, а выражение в его левой части < 0 при $\sigma_2 < 1$, то в силу формулы (3.2) $p < 0$, что и требовалось доказать.

В этом случае корни y_1 , y_2 , y_3 уравнения (2.7) вычисляются по формуле (2.9) а не по формуле Кардана-Тарталья [3], затем из выражения (2.6) определяются корни x_1 , x_2 , x_3 уравнения (2.4).

Подставив в уравнение (2.3a) значения x_1 , x_2 , x_3 , $\mu_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \text{const}_s$, $s \in \{1, 2, \dots, 30\}$, и выражение $\pi_1 = 1 - \pi_2$, получаем уравнение границы унимодальности и бимодальности смеси в виде:

$$\pi_{2i} = \left[1 - (x_i - \mu_2)\sigma_2^{-3}x_i^{-1}e^{\frac{x_i^{-2}}{2} - \frac{(x_i - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right]^{-1}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.4)$$

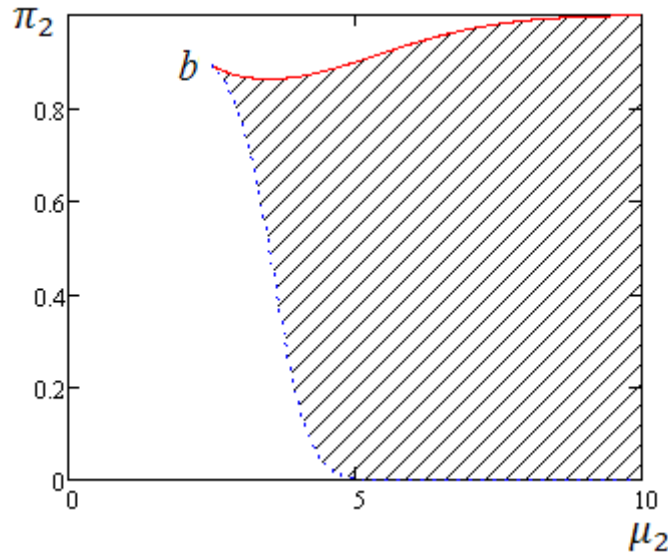
$$\pi_{2i} \in [0, 1].$$

Выражения (3.4) определяет π_{2i} , $i = 1, 2, 3$, как функцию переменной величины μ_2 .

Многочисленные эксперименты показали, что существует только один корень x_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, при котором $\pi_{2i} \notin [0, 1]$. Такой корень отбрасывается, и в выражениях

(3.4) остаются только два уравнения, в которых $\pi_{2i} \in [0, 1]$, для удобства обозначим эти значения через π_{21}, π_{22} , а породившие их корни — через x_1 и x_2 соответственно.

Точки с координатами $(\mu_2, \pi_{21}), (\mu_2, \pi_{22})$ при $\mu_1 = 0, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = const$ являются вырожденными критическими точками плотности вероятности $f(x)$, точками её вырожденных перегибов, т.е. лежат на границе унимодальности и бимодальности смеси. На рисунке представлен график этой границы для $\sigma_2 = 2.5$, на котором область бимодальности смеси обозначена штриховкой. Точка b — точка возврата, в которой плотность вероятности имеет вырожденную моду. При изменении значений σ_2 имеем другие границы унимодальности и бимодальности.



Рисунок

Введём обозначения

$$\pi_{max} = (\pi_{21}, \pi_{22}), \quad \pi_{min} = (\pi_{21}, \pi_{22}). \quad (3.5)$$

Если исследуемая смесь имеет параметры: $\mu_1 = 0, \sigma_1 = 1, \mu_2 (\mu_2 > \mu_1), \sigma_2, \pi_2$, то для установления её унимодальности или бимодальности выполняется последовательность следующих операций. Вычисляются корни уравнения (2.7) по формуле (2.9) и корни уравнения (2.4) по формуле (2.6). Из уравнений (3.4) определяются 3 значения $\pi_{21}, \pi_{22} \in [0, 1]$. Если для заданного значения π_2 исследуемой смеси выполняются неравенства $\pi_{min} < \pi_2 < \pi_{max}$, то смесь бимодальна. Если имеет место одно из неравенств $\pi_2 \leq \pi_{min}$ или $\pi_2 \geq \pi_{max}$, то смесь унимодальна.

Если исследуемая смесь имеет параметры $\mu_1 \neq 0, \sigma_1 \neq 1$, то этот случай сводится к уже рассмотренному путём преобразований плотности вероятности $f(x)$, не изменяющих число её критических точек. Используемые преобразования — сдвиг и сжатие или растяжение.

Список литературы

1. Апраушева Н. Н., Сорокин С. В. Заметки о гауссовых смесях. М.: Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 2015.
2. Джонсон Н. Л., Коц С., Балакришнан Н. Одномерные непрерывные распределения. Часть 1. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017.
3. Табачников С. Л. Фукс Д. В. Математический дивертисмент. М.: Изд-во МЦНМО, 2016.

Recognition of the unimodality and bimodality of a two-component Gaussian mixture with different dispersions

N. N. Aprausheva, S. V. Sorokin
Federal research centre «Computer science and control»
Moscow, Russia

Модели ресурсных систем массового обслуживания и перспективы их развития*

А.В. Горбунова

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

В.А. Наумов

Исследовательский центр процессов обслуживания, Хельсинки, Финляндия

Ю.В. Гайдамака, К.Е. Самуйлов

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Результаты последних лет показали востребованность теории ресурсных систем массового обслуживания (СМО) при исследовании современных телекоммуникаций [1-4]. Практический интерес к этим моделям связан с их применением к анализу беспроводной сетей, в которых ресурсом является, например, спектр радиочастот, а требования к объему ресурса зависят от местоположения мобильного пользователя и, следовательно, случайны. Также при моделировании беспроводных сетей активно используются модели движения, например, модели случайных блужданий [5-7].

Ресурсные СМО известны примерно с 1970-х годов, например, по работе [8]. Это классические модели, в которых заявка при обслуживании занимает некоторый объем ресурсов системы. В таких системах поступающей заявке для обслуживания, помимо приборов, требуется еще некоторая величина объема ресурса, дополнительно определенного в модели. Потери в таких системах могут происходить, если все приборы заняты или объем свободного ресурса системы меньше объема, требуемого для обслуживания поступающей в систему заявки. Если же заявка в систему принята, то объем свободного ресурса системы уменьшается на величину требуемого ей объема ресурса, а в момент окончания обслуживания заявки объем свободного ресурса увеличивается на ту же величину. Заметим, что при анализе ресурсных СМО применяется также теория запасов (см., например, [9-11]).

К настоящему моменту исследованы различные варианты описанной выше модели. Известны работы, в которых ресурс, требуемый заявке для обслуживания наряду с приборами, является детерминированным [12-14]. Однако в этих статьях основной акцент делается на анализ различных схем распределения ресурсов. В [1, 3, 15-19] рассматривались случаи моделей систем со случайными требованиями к объему ресурса. При этом случайная величина требуемого объема ресурса могла иметь не только дискретное [1, 3, 15], но и непрерывное [16-18] распределение. Такие модели усложнялись наличием в системе ресурсов нескольких типов [3, 18]. Помимо анализа моделей с ресурсами нескольких типов, были рассмотрены случаи мультисервисных СМО, когда в систему поступают заявки нескольких классов [3, 19].

Отдельно стоит упомянуть, что в [15] был предложен новый метод анализа ресурсных СМО, позволяющий значительно упростить вычисление ее характеристик. Это принципиально важно, поскольку для построения случайного процесса, описывающего поведение системы, необходимо учитывать объем ресурсов для каждой заявки, находящейся в системе. Это отличает системы со случайным требованием к объему ресурса от классических систем, используемых при анализе систем управления запасами [11], и значительно усложняет случайные процессы, описывающие их поведение. Идея метода заключается в переходе от рассмотрения исходной модели ресурсной СМО к ее упрощенному варианту. Предлагается считать, что в момент ухода заявки из системы суммарный объем занятых ресурсов уменьшается на случайную

* Работа выполнена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №18-07-00156, № 18-07-00576.

величину, не зависящую от поведения системы до указанного момента времени. В результате, поведение системы можно описать полумарковским процессом, компонентами которого являются общее число заявок в системе и суммарный объем выделенных им ресурсов. Имитационное моделирование показало, что полученные результаты для исходной и упрощенной моделей оказались близки [15-16], а в [17] было доказано, что в случае пуассоновского входящего потока и экспоненциального времени обслуживания стационарное распределение вероятностей для обеих моделей совпадает.

Стоит отметить, что в большинстве упомянутых работ анализировались ресурсные СМО, представленные в виде многолинейных систем без очереди. Однако известны работы, посвященные исследованию таких систем с накопителем как ограниченной, так и неограниченной емкости [20-25]. Так, в [20-23] представлены результаты для ресурсных СМО с разделением процессора. Причем класс исследуемых здесь моделей расширяется в силу наличия зависимостей между выделяемым для обслуживания объемом ресурса и временем обслуживания, а в некоторых статьях и зависимостью с третьей случайной характеристикой – количеством приборов, необходимых заявке для обслуживания. В качестве частных случаев в этих работах рассмотрены различные комбинации независимостей указанных величин. В [24-25] исследуются несколько моделей ресурсных СМО, отличительной особенностью которых является инверсионный порядок обслуживания, т.е. рассмотрена дисциплина LIFO. При такой дисциплине становится возможным получить эффективные алгоритмы для вычисления стационарных характеристик системы.

Численные методы представляют отдельное направление исследований ресурсных СМО, поскольку выражений для различных стационарных характеристик в замкнутой форме получено не было. Как было отмечено ранее, для корректного описания функционирования системы необходимо учитывать объемы ресурсов всех заявок, находящихся в системе, следствием чего являются громоздкие аналитические решения, содержащие большое число сверток. По этой причине вычисления довольно сложны и объемны, а в случае большого числа приборов и объемов ресурсов затруднительны. В [26] с целью снижения вычислительной сложности были предложены рекуррентные алгоритмы для расчета нормировочной константы, участвующей в соответствующих формулах стационарных вероятностей, а также рекуррентные формулы для расчета других вероятностных характеристик системы, например математического ожидания объема занятых ресурсов.

Вернувшись к теме практического интереса к анализу ресурсных СМО и реальных систем, поведение которых моделируется с их помощью, стоит отметить, что помимо уже упомянутых в [1-7], отдельного внимания и дальнейших исследований заслуживают системы, где присутствует так называемый многоадресный трафик (multicast, точка-много точек). Применение принципа многоадресной доставки информации при установлении соединений позволяет более эффективно использовать ресурс сети за счет исключения дублирования информации несколько пользователей совместно использующих пропускную способность общих звеньев сети. С точки зрения математических моделей это соответствует СМО с так называемыми «прозрачными» заявками [27, 28], в которых заявка, принятая на обслуживание в пустую систему, открывает период занятости системы, и все заявки, поступающие в систему на периоде занятости, обслуживаются вместе с ней на выделенном для её обслуживания ресурсе. Поэтому СМО с комбинацией многоадресных соединений и требований случайного объема является новым, не менее важным и актуальным, направлением развития моделей ресурсных СМО.

Список литературы

1. Вихрова О.Г., Самуйлов К.Е, Сопин Э.С., Шоргин С.Я. К анализу показателей качества обслуживания в современных беспроводных сетях // Информатика и ее применения. 2015. Т. 7, №4. С. 48 – 55.
2. Sopin E., Vikhrova O., Samouylov K. LTE network model with signals and random resource requirements // 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2017. P. 101-106.
3. Sopin E., Samouylov K., Vikhrova O., Kovalchukov R., Moltchanov D., Samuylov A. Evaluating a case of downlink uplink decoupling using queuing system with random requirements // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9870. P. 440 – 450.
4. Наумов В.А., Мокров Е.В., Шоргин С.Я. Анализ временных характеристик процесса передачи данных подвижным пользователям в соте сети LTE // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11, №4. С. 79 – 84.
5. Яровая Е.Б. Применение спектральных методов в изучении ветвящихся процессов с диффузией в некомпактном фазовом пространстве // ТМФ. 1991 88:1. С. 25–30.
6. Яровая Е.Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. 2007.
7. Молчанов С.А., Яровая Е.Б. Структура популяции внутри распространяющегося фронта ветвящегося случайного блуждания с конечным числом центров генерации частиц // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447, № 3. С. 265-268.
8. Ромм Э.Л., Скитович В.В. Об одном обобщении задачи Эрланга // Автоматика и телемеханика. 1971. № 6. С. 164-168.
9. Булинская Е.В. Некоторые задачи оптимального управления запасами. // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 3. С. 431-447.
10. Булинская Е.В. Стационарное решение в задачах оптимального управления запасами // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 3. С. 556-560.
11. Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. М.: МГУ. 1980.
12. Gimpelson L.A. Analysis of Mixtures of Wide- and Narrow-Band Traffic // IEEE Trans. Commun. Technol. 1965. Vol. 13, No. 3. P. 258–266.
13. Kelly F.P. Loss Networks // Annals of Applied Probability. 1991. No.1. P. 319–378.
14. Ross K.W. Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks. Springer-Verlag. 1995.
15. Samouylov K., Sopin E., Vikhrova O. Analyzing blocking probability in LTE wireless network via queuing system with finite amount of resources // Communications in Computer and Information Science. 2015. Vol. 564. P. 393 – 403.
16. Наумов В.А., Самуйлов К.Е. О моделировании систем массового обслуживания с множественными ресурсами // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2014. № 3. С. 60–64.
17. Naumov V., Samouylov K., Sopin E., Andreev S. Two approaches to analyzing dynamic cellular networks with limited resources // Proc. of 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT-2014). 2014. P. 585 – 588.
18. Наумов В. А., Самуйлов К. Е., Самуйлов А. К. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика, 2016. № 8. С. 105–110.
19. Naumov V., Samouylov K., Yarkina N., Sopin E., Andreev S., and Samuylov A. LTE performance analysis using queuing systems with finite resources and random

- requirements // 7th Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT-2015. 2015. P. 100–103.
20. Тихоненко О.М., Климович К.Г. Анализ систем обслуживания требований случайной длины при ограниченном суммарном объеме // Проблемы передачи информации. 2001. Т.37, Вып.4. С. 78–88.
 21. Тихоненко О.М. Обобщенная задача Эрланга для систем обслуживания с ограниченным суммарным объемом // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41. С. 64–75.
 22. Тихоненко О.М. Система обслуживания с разделением процессора и ограниченными ресурсами // Автоматика и телемеханика. 2010. № 5. С. 84–98.
 23. Тихоненко О.М., Кемпа В.М. Система обслуживания с разделением процессора и ограниченным объемом памяти, управляемая механизмом AQM // Автоматика и телемеханика. 2015. № 10. С. 90–105.
 24. Печинкин А. В. Система $M|G|1|n$ с дисциплиной LIFO и ограничением на суммарный объем требований // Автоматика и телемеханика. 1998. № 4. С. 106–116.
 25. Касконе А., Манзо Р., Печинкин А.В., Шоргин С.Я. Система $Geom|G|1|n$ с дисциплиной LIFO без прерывания обслуживания и ограничением на суммарный объем заявок // Автоматика и телемеханика. 2011. № 1. С. 107–120.
 26. Samouylov K., Sopin E., Vikhrova O., Shorgin S. Convolution algorithm for normalization constant evaluation in queuing system with random requirements // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1863, No. 090004.
 27. Рыков В.В., Самуйлов К.Е. К анализу вероятностей блокировок ресурсов сети с динамическими многоадресными соединениями // Электросвязь. 2000. № 10. С. 27-30.
 28. Рыков В.В. Сети обслуживания «прозрачных» требований // Автоматика и телемеханика. 2001. № 5. С. 147–158.

Models of Queuing Systems with Resources and Prospects for their Development

A.V. Gorbunova

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

V.A. Naumov

Service Innovation Research Institute, Helsinki, Finland

Yu.V. Gaidamaka, K.E. Samouylov

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

Условия вырождения ветвящегося случайного блуждания с тяжелыми хвостами*

А.И. Рытова

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассмотрим симметричное ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) по многомерной решетке \mathbf{Z}^d , $d \geq 1$, с непрерывным временем [1]. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ на решетке имеется только одна частица в некоторой точке $x \in \mathbf{Z}^d$. Частица блуждает по решетке до тех пор, пока не попадет в единственный источник ветвления,

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-01-00468-а).

расположенный в начале координат. Проведя в нём случайное время, она погибает, произведя случайное количество потомков $n \geq 0$. Далее они осуществляют блуждание и ветвление независимо и согласно тем же законам. Интересует количество частиц в каждой точке решетки $\mu_i(y)$, $y \in \mathbf{Z}^d$, и общее количество частиц $\mu_t := \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} \mu_t(y)$ в каждый момент времени.

Предполагается, что случайное блуждание представляет марковскую цепь с непрерывным временем и инфинитезимальной матрицей $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbf{Z}^d}$ со свойствами: $a(x, y) \geq 0$ при $x \neq y$, $-\infty < a(x, x) < 0$, симметричность и однородность по пространству $a(x, y) = a(y, x) = a(0, y - x)$, что позволяет рассматривать $a(y - x) := a(x, y)$, неприводимость, т.е. для каждого $z \in \mathbf{Z}^d$ найдется такой набор $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbf{Z}^d$, $z = \sum_{i=1}^k z_i$, что $a(z_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, k$.

Ветвление представляет марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем и инфинитезимальной производящей функцией $f(u) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$, $0 \leq u \leq 1$, $b_n \geq 0$, $n \neq 1$, $-\infty < b_1 < 0$, $\sum_n b_n = 0$. Важным параметром процесса является $\beta := f'(1) = \sum_n n b_n$.

Тогда, если частица находится в точке $x \neq 0$, то через время $h \downarrow 0$ она может совершить прыжок в точку $y \neq x$ с вероятностью $a(y - x)h + o(h)$, или остаться в x с вероятностью $1 + a(0)h + o(h)$; если частица находится в $x = 0$, то она исчезнет, оставив $n \neq 1$ потомков с вероятностью $b_n h + o(h)$, либо исчезнет, оставив одного потомка с вероятностью $1 + a(0)h + b_1 h + o(h)$. Таким образом, в источнике ветвления частица находится случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром $-(a(0) + b_1)$, через которое она порождает случайное количество $n \neq 1$ потомков, либо ее единственный потомок совершает скачок в другую точку решетки.

Как правило, в моделях ВСБ на интенсивности блуждания $a(x, y)$, $x, y \in \mathbf{Z}^d$, накладывается условие конечности дисперсии скачков $\sigma^2 := \sum_{z \neq 0} |z|^2 \frac{a(z)}{-a(0)} < \infty$. В данной работе исследуется модель ВСБ с тяжелыми хвостами случайного блуждания,

введенная в [2]. Именно, предполагается $a(z) \sim \frac{H\left(\frac{z}{|z|}\right)}{|z|^{d+\alpha}}$, $|z| \rightarrow \infty$ $\alpha \in (0, 1)$, $a(0) := -\sum_{z \neq 0} a(z)$, где $|\cdot|$ - евклидова норма в \square^d , $H(\cdot)$ - положительная симметричная

непрерывная на единичной сфере S^d функция. В таком предположении дисперсия скачков становится бесконечной $\sigma^2 = \infty$. При этом вывод дифференциальных уравнений для производящих функций $F(z; t, x, y) := E_x e^{-z\mu_t(y)}$, $F(z; t, x) := E_x e^{-z\mu_t}$ не зависит от условия на дисперсию скачков. Уравнения имеют вид

$$\partial_t F(z; t, x) = (AF(z; t, \cdot))(x) + \delta_0(x) f(F(z; t, x))$$

с начальным условием $F(z; 0, x) = e^{-z}$,

$$\partial_t F(z; t, x, y) = (AF(z; t, \cdot, y))(x) + \delta_0(x) f(F(z; t, x, y))$$

с начальным условием $F(z; 0, x, y) = e^{-z\delta_y(x)}$.

Определим эволюционный оператор процесса $H_\beta := A + \beta\delta_0(\cdot)$, действующий как и оператор A , в каждом из пространств $l^q(\mathbf{Z}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$.

Также сохраняются дифференциальные уравнения для моментов численностей частиц $m_n(t, x, y) := E_x \mu_t^n(y)$, $m_n(t, x) := E_x \mu_t^n$:

$$\partial_t m_1 = H_\beta m_1,$$

$$\partial_t m_n = H_\beta m_n + \delta_0(x) g_n(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$$

с начальными условиями $m_n(0, \cdot, y) = \delta_y(\cdot)$, $m_n(0, \cdot) \equiv 1$, в обозначениях $H_\beta m_k$ для $(H_\beta m_k(t, \cdot, y))(x)$, $(H_\beta m_k(t, \cdot))(x)$ и

$$g_n(m_1, m_2, \dots, m_{n-1}) := \sum_{r=2}^n \frac{\beta^r}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r > 0, \\ i_1 + \dots + i_r = k}} \frac{k!}{i_1! \dots i_r!} m_{i_1} \dots m_{i_r}.$$

В случае тяжелых хвостов меняется асимптотика переходных вероятностей [3] и, как следствие, свойства возвратности блуждания. Если в случае конечной дисперсии блуждание становится невозвратным, начиная с размерности 3 [1], то случае тяжелых хвостов при некоторых значениях α - с размерности 1 [2]. Несмотря на это, исследование моментов в терминах функции Грина, являющейся преобразованием Лапласа переходных вероятностей, позволяет выражать решения уравнений в общем виде, независимо от конечности дисперсии скачков, и с использованием тауберовых теорем получать асимптотики моментов для конкретных случаев.

В [1] для операторов H_β рассматриваемых моделей ВСБ с конечной дисперсией скачков была введена величина β_c такая, что при $\beta > \beta_c$ в спектре H_β существует изолированное положительное собственное значение. Было установлено, что тогда локальные и общие численности частиц растут экспоненциально, но при $\beta \leq \beta_c$ такого роста нет. В этом смысле значение $\beta = \beta_c$ можно назвать критическим. На решетках высоких размерностей интенсивность ветвящегося процесса в источнике ветвления не предопределяет критичность ВСБ. Например, надкритический ветвящийся процесс в источнике в условиях невозвратности случайного блуждания по \mathbf{Z}^d , $d \geq 3$, может привести как к надкритическому, так и критическому или докритическому ВСБ. Если ветвящийся процесс в источнике докритический или критический, то на решетках $d \geq 3$ возможно только докритическое ВСБ. В отличие от случая конечной дисперсии, ВСБ с тяжелыми хвостами может быть докритическим даже при отсутствии гибели частиц в источнике ветвления уже в размерности $d = 1$.

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения вероятности выживания популяции частиц $Q(t, x) = P_x\{\mu_t > 0\}$ и условий, приводящих к вырождению ВСБ с тяжелыми хвостами.

Список литературы

1. Яровая Е.Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
2. Yarovaia E.V. Branching random walks with heavy tails // Communications in Statistics - Theory and Methods. 2013. Т. 42, № 16. С. 2301–2310.
3. Рытова А.И., Яровая Е.Б. Многомерная лемма Ватсона и ее применение // Математические заметки. 2016. Т. 99, № 3. С. 395–403.

Extinction conditions for Branching Random Walks with heavy tails

A.I. Rytova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Асимптотическое значение дисперсии числа занятых приборов в системе $GI|GI|_\infty$ с бесконечным значением среднего времени обслуживания

А.А. Назаров, Е.Е. Худяшова

НИТГУ, Томск, Россия

В работе рассматривается система массового обслуживания $GI|GI|_\infty$ с неограниченным числом приборов и бесконечным значением среднего времени обслуживания, то есть для функции распределения времени обслуживания $B(x)$ выполняется равенство:

$$\int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx = \infty. \quad (1)$$

Данная система является частным случаем системы, рассмотренной в [1].

В нестационарном режиме найдены среднее значение $m(T)$ и дисперсия $D(T)$ числа приборов, занятых в системе в момент времени $T > 0$ при условии, что в начальный момент система свободна.

Математическое ожидание числа занятых приборов имеет вид:

$$m(T) = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(y)) dy, \quad (2)$$

где a – среднее значение длин интервалов входящего рекуррентного потока, а дисперсию числа занятых приборов можно представить в виде:

$$D(T) = m(T) + \frac{2}{a} \int_0^T \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvx} \frac{A^*(v) - R^*(v)}{1 - A^*(v)} dv \left[\int_0^{T-x} (1 - B(z))(1 - B(z+x)) dz \right] dx, \quad (3)$$

где $A^*(v)$ – характеристическая функция распределения длин интервалов между моментами наступления событий входящего рекуррентного потока, а $R^*(v)$ – его величины перескока. Здесь

$$R^*(v) = \frac{A^*(v) - 1}{jva}.$$

Значение (3) дисперсии числа занятых приборов определяется двухкратным интегралом, для которого не удалось выполнить аналитическое интегрирование, а численная реализация, на доступной авторам компьютерной технике, приводит к недопустимой погрешности, вследствие необходимости вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvx} \frac{A^*(v) - R^*(v)}{1 - A^*(v)} dv.$$

В книгах Бочарова с Печенкиным [2] и Климова [3] получено интегральное уравнение для производящей функции числа занятых приборов системы $GI|GI|_\infty$, что

позволяет с помощью рекуррентных формул найти начальные моменты числа заявок в системе в момент времени t . Однако применение этих формул вызывает затруднение.

При произвольном рекуррентном входящем потоке для достаточно больших значений момента времени T можно получить простое выражение, аппроксимирующее значение (3) дисперсии числа приборов, занятых в системе $GI|GI|_{\infty}$.

Теорема. При $T \rightarrow \infty$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T) - m(T)}{\frac{a_2 - 2a^2}{a^3} \int_0^T (1 - B(x))^2 dx} = 1, \quad (4)$$

где a и a_2 – первый и второй начальные моменты длин интервалов входящего рекуррентного потока.

Доказательство.

Обозначим числитель (4) как $\varphi(T)$:

$$\varphi(T) = \frac{2}{a} \int_0^T \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\nu x} \frac{A^*(\nu) - R^*(\nu)}{1 - A^*(\nu)} d\nu \left[\int_0^{T-x} (1 - B(z))(1 - B(z+x)) dz \right] dx,$$

в котором, выполнив замену $x = Ty$, получим

$$\varphi(T) = \frac{2}{a} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\nu Ty} \frac{R^*(\nu) - A^*(\nu)}{A^*(\nu) - 1} d\nu \right\} \left[\int_0^{T-Ty} (1 - B(z))(1 - B(z+Ty)) dz \right] T dy$$

В этом интеграле выполним замену $\nu T = w$, запишем

$$\varphi(T) = \frac{2}{a} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwy} \frac{R^*(\frac{w}{T}) - A^*(\frac{w}{T})}{A^*(\frac{w}{T}) - 1} dw \right\} \left[\int_0^{T-Ty} (1 - B(z))(1 - B(z+Ty)) dz \right] dy.$$

Тогда левую часть предельного равенства (4) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varphi(T)}{\frac{a_2 - 2a^2}{a^3} \int_0^T (1 - B(x))^2 dx} &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{a} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwy} \frac{R^*(\frac{w}{T}) - A^*(\frac{w}{T})}{A^*(\frac{w}{T}) - 1} dw \right\} \left[\int_0^{T-Ty} (1 - B(z))(1 - B(z+Ty)) dz \right] dy}{\frac{a_2 - 2a^2}{a^3} \int_0^T (1 - B(x))^2 dx}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь, применяя правило Лопиталья, получим выражение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \frac{R^*(\frac{w}{T}) - A^*(\frac{w}{T})}{A^*(\frac{w}{T}) - 1} = \frac{R^*(0) - A^*(0)}{A^*(0)} = \frac{\frac{a_2}{2a} - a}{a^2} = \frac{a_2 - 2a^2}{2a^3},$$

поэтому (5) перепишем в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varphi(T)}{\frac{a_2 - 2a^2}{a^3} \int_0^T (1 - B(x))^2 dx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwy} dw \right\} \left[\int_0^{T-Ty} (1 - B(z))(1 - B(z+Ty)) dz \right] dy}{\int_0^T (1 - B(x))^2 dx}$$

Так как выполняется равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwy} dw = \delta(y),$$

где $\delta(y)$ – дельта функция Дирака, то для (5) можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varphi(T)}{\frac{a_2 - 2a^2 T}{a^3} \int_0^T (1 - B(x))^2 dx} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \delta(y) \left[\int_0^{T-Ty} (1 - B(z))(1 - B(z + Ty)) dz \right] dy}{\int_0^T (1 - B(x))^2 dx} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T (1 - B(z))(1 - B(z)) dz}{\int_0^T (1 - B(x))^2 dx} = 1, \end{aligned}$$

которое совпадает с (4).

Теорема доказана.

Используя результат доказанной теоремы, можно утверждать, что при достаточно больших значениях времени T дисперсию (3) можно аппроксимировать выражением:

$$D(T) = m(T) + \frac{a_2 - 2a^2 T}{a^3} \int_0^T (1 - B(x))^2 dx. \quad (6)$$

Выражение (6) позволяет выполнить численную реализацию, что является, несомненно, преимуществом по сравнению с формулой для дисперсии (3) данной работы и результатов, полученных в [2,3], для модели массового обслуживания вида $GI|GI|_{\infty}$.

В дальнейших исследованиях планируется рассмотреть системы с неограниченным числом приборов и коррелированным входящим потоком, таким как ММРР-поток, выполнить асимптотический анализ, в предельном условии $T \rightarrow \infty$, этих систем, что позволит найти не только моменты числа занятых приборов, но также и их предельное распределение вероятностей.

Список литературы

1. Bashtova E.E., Chernavskaya E.A. Limit theorems for infinite-channel queueing systems with heavy-tailed service times // Analytical and Computational methods in Probability theory and its Applications. 2017. P.110-112.
2. Бочаров П. П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.
3. Климов Г.П. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во Московского университета, 2011.

Asymptotic value of the dispersion of the number of occupied devices in the system $GI|GI|_{\infty}$ with an infinite value of the average service time

A. A. Nazarov, E. E. Hudjashova
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia

СЕКЦИЯ № 16

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ВОЕННОМ ДЕЛЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Reshetov V.Y, Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E Multi-level Gross' model with non-opposing interests: regularization and computational aspects | 527 |
| Shonia O.B., Kartvelishvili I.SH., Shonia L.O., Beridze Z.R.The overview and analysis concerning the wireless network using safety | 530 |
| Блюмин С.Л. Мультиагентно-мультикомандные системы в планировании военных операций | 534 |
| Гайдаш К.А. Принципы исследования операций в управлении цифровыми технологиями | 537 |
| Гайдаш К.А., Турко Н.И., Ерешко Ф.И. Исследование операций организации партнёрства Государства и бизнеса. Ч.1,2 | 541 |
| Люман В.Ю., Соломаха Г.М. Инвариантность фрактальных свойств в задачах распознавания образов при изменении характеристик исходного изображения | 547 |
| Назмутдинов И.С., Дьяченко Ю.В.Исследование возможностей восстановления вооружения и военной техники с использованием теории нечетких множеств | 552 |
| Рожнов А.В. Проблематика управления развитием и ограничений новых технологий в сфере создания автономных систем оружия летального действия | 554 |
| Слугин В.Г., Зубарев А.А., Шевцов О.Ю., Мехтиев А.Я., Ковешников В.А. Оптимизация распределения литерных частот радиолокационных станций боевых машин батареи | 557 |
| Шевченко В.В. Опыт использования операционного игрового сценарного моделирования в ОПК | 563 |
| Шеремет И.А., Михайлов Д.М. Имитационное моделирование раскрытия информации в мобильных сетях сотовой связи, используемых в зонах локальных конфликтов | 565 |
| A.V. Rozhnov, G.E. Slepko, V.I. Goncharenko Legal and ethical issues of dewateronization of advanced technologies in the area of lethal autonomous weapons systems | 571 |
| В.В. Шумов Расширение моделей боя с учетом морального фактора | 573 |

Multi-level Gross' model with non-opposing interests: regularization and computational aspects

Reshetov V.Y

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E

"NGO RusBITekh", Moscow, Russia

The paper is based on the results of [3] and is a further development of the constructions in [5-7]. The classical Germeyer's "attack-defense" model was defined and studied in [2]. It is a modification of Gross' model [1]. Ogaryshev [4] studied a game model that generalizes Gross' and Germeyer's models. Molodtsov [3] studied the Gross' model with the opposite

interests of the parties, in the paper [8] is its communication, and in [9] - regularization. In military models points $i=1, \dots, n$ are usually interpreted as directions and characterize the spatial distribution of protection resources across the width. However, in reality, there is also a spatial distribution of protection resources in depth, characterized by the number T of protection levels in a given direction. The simplest model, taking into account the boundary, consists in modifying of Molodtsov's model [3], in which the function of winning the attack takes the form:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \max[q_i^T x_i; x_i - p_i y_i]$$

$$G(x, y) = -\sum_{i=1}^n \mu_i \max[q_i^T x_i; x_i - p_i y_i]$$

where λ_i, μ_i are interpreted as the importance of the points of the parties, and the vectors x, y belong to the sets

$$X = \left\{ x \in E_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = M \right\}, Y = \left\{ y \in E_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq N \right\}.$$

The solution is understood in the sense of a hierarchical game Γ_1 [2] finding the best guaranteed result of defense

$$v = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X_0(y)} G(x, y), \bar{X}_0(y) = \text{Arg max}_{x \in X} F(x, y).$$

Let's introduce the sets

$$B_k = \left\{ y \in Y \mid \lambda_k \max[q_k^T M; M - p_k y_k] > \right. \\ \left. > \lambda_i \max[q_i^T M; M - p_i y_i] \right\}$$

and

$$D_k = \left\{ y \in Y \mid \lambda_k \max[q_k^T M; M - p_k y_k] \geq \right. \\ \left. \geq \lambda_i \max[q_i^T M; M - p_i y_i] \right\}.$$

By analogy with the construction proposed in [3], we can hope that the following formula is valid

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X_0(y)} G(x, y) = \\ = \max_{i: B_i \neq \emptyset} \sup_{y \in B_i} (-\mu_i \max[q_i^T M; M - p_i y_i]) \quad (1)$$

We note that $B_i \neq \emptyset$ bring $\bar{B}_i = D_i$ according to the results of [3] and the inner supremum $y \in B_i$ in (4.1) we can replace by a maximum $y \in D_i$. Let's denote

$$Y^1 = \bigcup_{i: B_i \neq \emptyset} B_i. \quad (2)$$

According to Theorem 1 in [8] for the proving of (1) it is sufficient that Y^1 to be everywhere dense in Y .

Definition 1 [8]. The functions $f(y)$ and $g(y)$ are called locally coinciding at a point y_0 if there exists a neighborhood of point y_0 at which these functions are identically equal.

Definition 2 [8]. The functions $f(y)$ and $g(y)$ are called locally non-coincident at a point y_0 if they are not locally coincident at this point.

Assertion 1 [8]. Let's the functions $f(y)$ and $g(y)$ are differentiable at a point y_0 , then if

$$\nabla f(y_0) \neq \nabla g(y_0),$$

then $f(y)$ and $g(y)$ are locally non-coincident at a point y_0

Remark 1. An analogous assertion is true for directional derivatives if they do not coincide for at least one direction (see [8]).

Since $Y = \overline{\text{int } Y}$ then according to Theorem 2 in [8] Y^1 defined in (2) is everywhere dense in Y if and only if when for any $y \in \text{int } Y | Y^1$ are exist such

$$(3) \quad i, j \in I(y) = \text{Arg max}_k \left(\lambda_k \max \left[q_k^{T_k} M; M - p_k y_k \right] \right)$$

that functions (4) $F_k(y) = \lambda_k \max \left[q_k^{T_k} M; M - p_k y_k \right], k = i, j$, are locally non-coinciding at the point y .

Theorem. For the validity of (1), it is sufficient that the numbers in each of the sets $\lambda_k q_k^{T_k}$ and $\lambda_k p_k$ are distinct.

In fact, in this case it follows from (3) that for no more than one number $i \in I(y), |I(y)| \geq 2$,

$$F_i(y) = \lambda_i q_i^{T_i} M, F_j(y) = \lambda_j (M - p_j y_j),$$

and for others (which not less than one) $j \in I(y), j \neq i$,

$$F_j(y) = \lambda_j (M - p_j y_j),$$

and all these functions are pairwise locally non-coincident for any $y \in \text{int } Y | Y^1$, because the gradients do not coincide in accordance with Assertion 1 or at least their derivatives with respect to the direction $l = -(1, \dots, 1) \in E^n$, which implies (4).

Let's consider the computational aspects of the proposed computing scheme. Let's introduce the sets

$$B_{k1} = \left\{ y \in Y \mid y_k > M \frac{1 - q_k^T}{p_k}, \lambda_k q_k^T M >$$

$$> \lambda_i \max \left[q_i^T M; M - p_i y_i \right], i \neq k \right\},$$

and

$$B_{k2} = \left\{ y \in Y \mid y_k < M \frac{1 - q_k^T}{p_k}, \lambda_k (M - p_k y_k) >$$

$$> \lambda_i \max \left[q_i^T M; M - p_i y_i \right], i \neq k \right\},$$

which are the interiority of polyhedra. Then $\overline{B_k} = \overline{B_{k1} \cup B_{k2}}$ and supremum in $B_i^{\epsilon, \alpha}$ in the proposed regularization scheme can be replaced by a maximum in $\overline{B_{k1}} \cup \overline{B_{k2}}$, that is, to replace by two problems of concave programming that reduce to problems of linear programming. Finally, we note that the verification of the non-emptiness conditions for sets $\overline{B_{k1}}, \overline{B_{k2}}$ is built into the simplex method at the stage of obtaining the original basic solution.

References

1. Karlin S. Mathematical methods in the theory of games, programming and economics. Moscow: Mir, 1964.

2. Germeyer Y.B. Introduction to the theory of operations research. Moscow: Nauka, 1971.
3. Molodtsov D.A. Gross' Model in the Case of non-opposite Interests // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1972. Vol.12, No. 2. Pp.309-320.
4. Ogaryshev V.F. Mixed strategies in a generalization of the Gross's problem // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1973. Vol. 13, No. 1. Pp.59-70.
5. Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. Model of overcoming the multilevel defense system by attack // Applied Mathematics and Computer Science: Proceedings of the Faculty of Computational Mathematics and cybernetics of Lomonosov Moscow State University / Ed. by V.I. Dmitriev. Moscow: MAKS Press, 2015. No. 49. Pp.80-96.
6. Perevozchikov A.G., Lesik I.A., Yanochkin I.E. Distributed protection systems: analysis and design // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Moscow, October 17-22, 2016: Proceedings. Volume II. Ed. by E.Z. Mokhonko. - Moscow: Publishing house of FIC IU RAS, 2016, Pp.115-116
7. Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. The model of overcoming a multi-level defense system by attack with several phase constraints. Bulletin of the Moscow State University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics, No. 1, 2017, Pp. 26-32.
8. Molodtsov D.A. One class of games with opposite interests // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1973. Vol. 15, No. 3, Pp.789-795.
9. Molodtsov D.A, Fedorov V.V. Approximation of two-person games with information transfer // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1973. Vol. 13, No. 6, Pp.1469-1484.

The overview and analysis concerning the wireless network using safety

O.B. Shonia, I.SH. Kartvelishvili, L.O. Shonia, Z.R. Beridze
Georgian Technical University, Tbilisi, Georgia

In recent times, the safety of wireless network and the service quality become the important and active subject of research, because of the increased need of the support of data packages. Without the adequate support the organizations will avoid using wireless network. The security issues in the wireless network are the obstacle for its wide use. That is why the security issues in wireless network is very important direction, which requires reaction, if such network will be widely used. The researchers have to identify the open problems and make appropriate decisions.

The security issues in the wireless network is very important, because, the communications signals spread in the environment are available for catching. Accordingly, the organizations and the individual users will have to identify the problems and take appropriate measures.

Any system, which needs security, has the weaknesses and errors, which will be chosen by the attacker partly or fully. Accordingly, the creation of security mechanism of the system based on the analyses of the threats and the alleged attacks, which are facing the system, because of the errors of the system. The security mechanism will be the guarantee of the security of the system, against the weaknesses, errors and attacks. Here is the list of the most common forms of the threats concerning the wireless network (Picture 1).

For example, the hackers can after the attack, make unauthorized access to the system of network, or break the networking work or take the company's information. This is the type of attack, which is possible for hackers to be made, because of the weak computer security mechanism. The result of this kind of attack can be change or lose of the data. There are other examples of attacks, data stolen, obtaining illegal privileges, invalid data entry, modification of information, network flow analysis etc.

For example, the qualified hacker or snooper, with the use of programs, find unsecured packages for wireless networks and open in it the whole data. For example, the snooper which

is several hundred meters away from the building, where the wireless network is functioning, can find all the transactions, which is ending in Wireless network. The main danger is the personal information, names, passwords, credit cards etc. which can be stolen.

The way of solving this problem, is to encrypt the information, which is transferring between the wireless network and the base stations. While encrypting, the bits of the data are changing, with a secret key. As the key is secret, the hacker cannot encrypt the data. Accordingly, using the affective mechanism, the encryption is the way for data security.

In the same way, anyone who is nearby the building, can without any effort, make the monitoring of the systems in the wireless network, if there are no measures used for its security. For example, if anybody which is in the car nearby the building, can connect to any basis station located in the building. If there are used no measures of security, such person can reach the server's any systems, which are ending in computers.

Unfortunately, most of the companies are using the configuration of the basis stations, while making the wireless network, by default, which cannot maintain the needed security measures, which is the way to the connection of systems and the servers without any obstacles.

Operation system Windows, gives the opportunity to make the easy connection with the wireless network, mainly with the network which has common connection. When the notebook connects to the local wireless network, its user can access to any other notebook, which is connected to the same wireless network. If not using the personal Brandmauer, anyone can have the access to the information on hard disc of such computer, which is very dangerous.

In the situation, when in the access point is activated the security mechanisms, the threat is the ability to switch rogue access point. This kind of Access point is considered as unauthorised which is connected to the network. For example, one of the perssonel can buy Access point, do not taking into considetation the security norms of the network, and instaall it in his office, same can be made by hacker in the same building, and intentionally connect not defended Acces point to the corporate network.

In the rogue access point , as usual, is not activated the Encryption system, that is wy it is the open door for everyone, who will intend to enter the corporate system. The companies have to check the rogue access point existance. This problem is actual. Despite, wireless network is installed or not, because somebody can connect rogue access point to the network.

Against the Unauthorized Access is used Interactive authentication which is made between the Network devices and rogue access points. Authentication – is checked the identyty of customer or equipment. In the wireless network there must be used methods, by which the basic station is insured that the network devices are identical and vice versa. This is necessary for the connection of legitimate basic stations and devices. At the same time, access points have to undertake the authentic procedures on the switcher, which except the appearance of rogue access points.

According the use of mecanizms of authentication and Encryption, the security of network is increasing, but the traines hackers are finding the ways, as they are aquinted with the working system of protocol.

The most dangerous attack is the type of attack which is called “man-in-the-middle”. The hacker is putting the fictitious device between the legal user and the wireless network. For example, the standart case of “man-in-the-middle” attack, is used the address resolution protocol, AR, which is used in all typesof TCP/IP (Transmission Control Protocol/Internet Protocol). The hacker which has nessesary program support, can control the wireless network by ARP.

ARP allow to maintain the main function, for this purpose, the demand is send to the wire or wireless Newark interface, to identify the physical address as in the case of MAC (Media Access Control Access Management common protocol). The address given to board from the manufacturar and is different from all the other nrtwark components adresses, is unic.

Accordingly, the transmitter network interface board have to know MAC adress of the receiver. This kind of plata indicats and responce to the physical MAC addresses.

Ampliad programs, which are used for transferring the information, must have IP (Internet Protocol) address. The interface board of transfer network is using the ARP protocole for the identification of physical address. It takes the address, sends the ARP packages, where the IP address of receiver network interface. All the stations have the ability to see the request, so the station using the iP address have to return the package of answer by ARP protocole, which contains ARP and IP addresses. After that the transmitter station wil connect to the frame of MAC address transmitter, as the address of the receiver, at the same for some time, it stores as a table relevant MAC and IP address (till the station willl not receive the other ARP answer from the station, which have the information about this IP address.)

The problems concerning the ARP protocole are connected to the snoofing (imitation of connection) possibility which is dangerous for the security system. Hacker can send to the station by the use of intermediate divice ficticios ARP answer, which contains the Legitimate networking arrangement IP address and intermédiaire MAC address so the hacker can mislead the station. At the end of this process, all the legitimate networking stations will authomatically update the ARP tables, where incorrect data is entered. Finally, the stations will begin transferring the information by the intermédiaire divice addresses, not to the legitimate points. This is the classic type of attack called, “man-in-the-middle attacks” which gives the opportunity to the hacker to manage consumer-related sessions. He will receive the passwords, important data, and can interact with server as if there is the legitimate user.

For the purpose of avoiding the attacks, ARP devices has secure ARP (secure ARP, SARP), which provides special secured tunnel for all the customers, Access points and among the route creators, which are ignoring all the ARP answeres, which are connected to customers, who are on the other end of the tunnel. Accordingly, onle legitimate ARP answeres, will serve the update of ARP tables. The stations which are using the SARP protocole, are not inclined to snoofing.

Fort he use of SARP protocule, it is necessary to install the special program on all the consumer devices. That is why the SARP is not used for networks with common connection, but the companies can install it on the consumer’s devices, for the purpose of avoiding the man-in-the-middle attacks.

The attack called “Denial of service, DoS” is the attach after which the network is unusable or is blocked. This kind of attack must be taken into consideration by all the customers who will use the wireless network. Everybody must think what will happen in the case of the network out of order.

The seriousness of Dos attack depends, on what will be the result of the network out of order. For example the hacker can mannage the local wireless network unavailable, which is installed at home, the result will be the discomfort of the owner of the house, but if it is concerning the Enterprise for exsamle, the network out of order when the company is making an enterprise inventory is more serious probleb which will cause financial loss.

The Dos attack has the method “brute-force attack” , when wile sendig the informational packages, all resources of the network are activated, and as a result the network terminates work . This is the versión of DOD attack.

There is another way of stopping Wireless network work is (carrier sense access), where a powerful radio signal is used, Which is suppresses the others and makes the acsess points and network interface of Radio Plates unusable.

In some cases, Dos attack is supported by some mechanisms, for example, WPA (secure access to the Wi- Fi, Wi-Fi Protected Access). Mechanism can cause denial of service; DOS, the users of the WPA network, for the autentificasion are using Mathematical algorithms. If the user will try to Access it and during the one second send unauthorized data, WPA will think that it is the attack object and will stop the working of the network.

Distributed Denial-of-Service (DDoS) is the spacious Dos attack, when the attacker is using one or more, in many cases thousand of IP addresses. This kind of attacks are manahed on the web sites.

It is important to maintain the security measures against the Dos attacks. For example as the installation of branbouer system and the update, the aupdate of antivirus system, using the passwords, swiching of the not used network and all the other measures wich will be taken into consideration by the user.

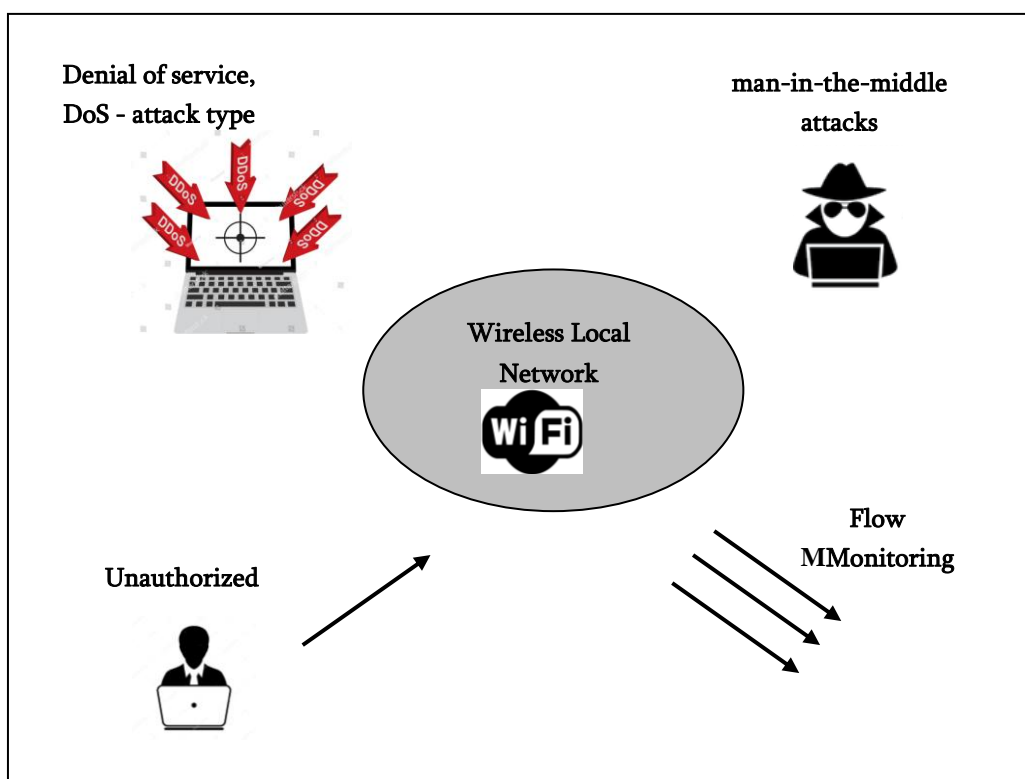
Wireless networking is posible to be protected by providing the ability to resist the building from the from radio signals. There are some recommendations.

If the The inner walls of the building have a metal-resistant surface it is desireble to be buried

it is desirebleto Install the thermosolation Windows with metal surface.

The inner and outer walls of the building should be used in the mineral paint of the metal

The transmission signal will be adjusted in such way, completely eliminate the signal leakage, or level lowering. This is the way to identify the hacker.



Picture1. The list of the most common forms of the threats concerning the wireless network

References

1. Shonia O.B, Kartvelishvili I.SH., Beridze Z.R. Journal article. Software Complex of Automated System, Supporting Security of Wireless Networks. Nova Science Publishers, Volume 4, Issues 1,2 (2012), in press. https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=34525.
2. Shonia O.B, Nareshelashvili G.G., Kartvelishvili I.SH. Book. The security of wireless network. Georgian Technical University, Tbilisi 2009.
3. Chogovadze G.G., Prangishvili A.I., Surguladze G.G. Book Hybrid Technologies and Data Management for Management Information Systems Programming. Georgian Technical University, Tbilisi, 2017.

Мультиагентно-мультикомандные системы в планировании военных операций*

С.Л. Блюмин

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

В [1], с позиций прикладной теории управления организационными системами, представлены математические модели формирования и функционирования команд как коллективов, способных достигать цели автономно и согласованно при минимальных управляющих воздействиях; основное внимание уделено взаимодействиям между собой членов команд – агентов, что позволяет рассматривать команды как мультиагентные системы (МАС) [2].

Команды, как подразделения военнослужащих, являются одним из основных объектов исследования в планировании военных операций. При этом (как, впрочем, и в других областях) существенны:

- иерархическая структура военных подразделений (отделение, взвод, рота, батальон и т.д.);

- исследование взаимодействий не только военнослужащих внутри подразделений, но и подразделений между собой.

Развитием теории МАС является теория мультикомандных систем (МКС) [3], исследующая взаимодействие команд. В работе [4], выполненной сотрудником U.S. Army Research Institute for the Behavioral and Social Sciences, результаты теории МКС интерпретируются в планировании военных операций применительно к взаимодействию отделений – компонент взводов, рассматриваемых как МКС.

Цель данной работы – формирование моделей взаимодействия агентов и команд с использованием методов графоструктурного моделирования, включающего:

графы G , оргграфы OG , гиперграфы HG [5-7];

оргиперграфы OHG [8,9];

метаграфы MG , орметаграфы OMG [10,11], – описываемые своими матричными характеристиками.

При этом основной матричной характеристикой некоторой графовой структуры GS целесообразно считать ее матрицу инцидентности $I(GS)$, так как через нее могут быть выражены лапласовские матрицы (лапласианы) $L(GS)$, которые раскладываются на матрицы валентности $D(GS)$ и смежности $A(GS)$, что в простейшем и наиболее известном случае оргграфа имеет вид

$$L(OG) = I(OG) \cdot I(OG)^T = D(OG) - A(OG),$$

а в цитированных выше работах обобщается на гиперграфы и метаграфы.

Напомним, что оргграф состоит из вершин и дуг – ориентированных двухэлементных множеств вершин; оргиперграф – из вершин и гипердуг – тем или иным способом ориентированных произвольных множеств вершин; орметаграф – из метавершин – множеств вершин (гиперребер соответствующего гиперграфа) – и метадуг – ориентированных пар метавершин, так что в метаграфе сочетаются гиперграф и оргграф; орметагиперграф – из метавершин и метагипердуг – тем или иным способом ориентированных произвольных множеств метавершин; и т.д. Наиболее простыми являются такие способы ориентации дуг, гипердуг, метадуг, метагипердуг, при которых матрицы инцидентности состоят только из чисел -1 , $+1$ (квадратных корней из единицы) и 0 [8] (в отличие от этого в [9] предложено использовать в

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта 17-47-480305-р_а.

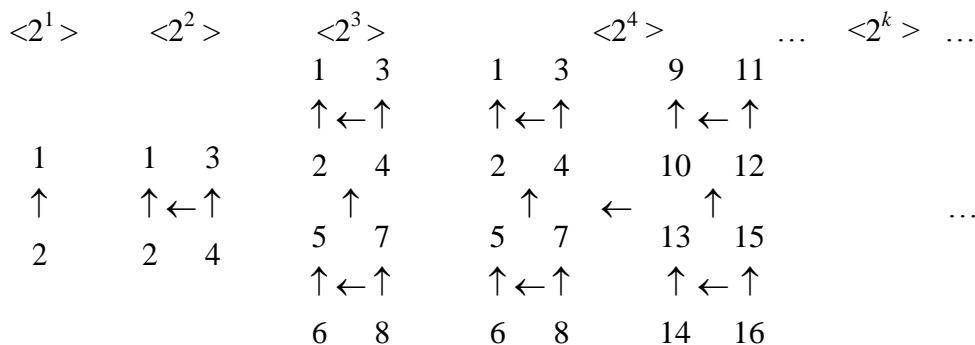
матрицах инцидентности комплексные корни надлежащих степеней из единицы, что обеспечивает определенные преимущества при решении некоторых прикладных задач).

Если агенты в МАС взаимодействуют парами, то с МАС ассоциируется коммуникационный орграф *COG* (*C* – от communication – коммуникация) [2], а если агенты взаимодействуют группами, то с МАС ассоциируется коммуникационный оргиперграф *COHG* [12].

Если команды в МКС взаимодействуют парами, то с МКС ассоциируется [13] командный орметаграф *TOMG* (*T* – от team - команда), а если команды взаимодействуют группами, то с МКС ассоциируется командный орметагиперграф *TOMHG*.

Мультиагентно-мультикомандные системы (МАКС) определяются как состоящие из взаимодействующих команд, сформированных из агентов, взаимодействующих внутри команд, с которыми в общем случае ассоциируются командно-коммуникационные орметаоргиперграфы *TCOMOHG*, матрицы инцидентности $I(TCOMOHG)$ которых в явном виде формируются из матриц $I(TOMHG)$ и $I(COHG)$.

Формирование матриц инцидентности МАКС может быть проиллюстрировано на примере простейшей гипотетической иерархической цепочки команд военнослужащих, в которой команда 1-го уровня – отделение, условно обозначенное $\langle 2^1 \rangle$, состоит из двух взаимодействующих военнослужащих, команда 2-го уровня – взвод $\langle 2^2 \rangle$ – состоит из двух взаимодействующих отделений, команда 3-го уровня – рота $\langle 2^3 \rangle$ – состоит из двух взаимодействующих взводов, команда 4-го уровня – батальон $\langle 2^4 \rangle$ – состоит из двух взаимодействующих рот, и т. д. Это может быть представлено в виде следующей иерархии графовых структур:



Матрицы инцидентности для $\langle 2^k \rangle$, обозначаемые через $I(\langle k \rangle)$, так что $I(\langle 1 \rangle) = I = [1 \quad -1]^T$, в общем случае формируются в виде $I(\langle k \rangle) = I^{\otimes k}$ (тензорная степень). С их использованием формируются лапласианы

$$L(\langle k \rangle) = I(\langle k \rangle) \cdot I(\langle k \rangle)^T = J(2^k - 1) \otimes (I \cdot I^T),$$

где J – матрица, состоящая из единиц. Лапласиан раскладывается на матрицы валентности и смежности.

Дальнейшее их использование для анализа МАКС, исследования операций в них, управления ими и планирования военных операций на их основе может выполняться на основе схем, представленных в [1-4, 12,13] для случаев МАС и МКС.

Так, одной из ключевых задач в классе МАС является достижение консенсуса агентов – согласование их характеристик; при этом важную роль играют спектры лапласианов МАС – лапласианов ассоциированных с МАС коммуникационных орграфов *COG* [2]. Предложенная в [13] модель МКС позволяет решить подобную задачу достижения консенсуса команд – согласования их характеристик; при этом важную роль играют спектры лапласианов МКС – лапласианов ассоциированных с ними командных орметагиперграфов *TOMHG*. Следующим шагом является распространение этого подхода на МАКС.

В качестве простого примера графоструктурного моделирования МКС можно рассмотреть систему, в которой команды, состоящие из одинакового числа агентов,

взаимодействуют парами. Пусть множество из M агентов разбито на m взаимодействующих непересекающихся команд, каждая из которых состоит из c агентов, так что $M=m \cdot c$, а веса $w_{ij} > 0$, $i, j=1, \dots, m$, характеризуют взаимодействие команд. С этой ситуацией, вместо используемого в случае МАС орграфа, ассоциируется орметаграф, определяемый [10,11] как графовая структура с носителем из M вершин, отождествляемых с агентами, состоящая из m метавершин – c -элементных подмножеств множества вершин – отождествляемых с командами; взвешенная метадуга от метавершины j к метавершине i проводится тогда и только тогда, когда вес $w_{ij} \neq 0$. Присутствие в метаграфе этой метадуго означает активность канала информации от команды j к команде i . Эту информацию команда i использует для коррекции своего состояния – суммарного состояния входящих в эту команду агентов. Образно говоря, метаграф – это орграф, вершинами которого являются команды. В соответствии с определением матриц метаграфа в рассматриваемом здесь случае они могут быть представлены в виде

$$MI = I \otimes J_{c \times 1}, WMI = WI \otimes J_{c \times 1}, WML = WMI \cdot MI^T = WL \otimes J_{c \times c},$$

где I, WI, WL – матрицы орграфа, $J_{c \times 1}, J_{c \times c}$ – столбец и матрица из единиц.

Дифференциальная модель МКС, подобная модели МАС [2], может быть записана в виде

$$\dot{\hat{x}} = -WML \cdot \hat{x},$$

где \hat{x} – «длинный» столбец, составленный из последовательно записанных состояний агентов команд.

Интерпретация графоструктурных моделей МАКС в планировании военных операций поддается результатам работы [4], где исследуется влияние именно согласованности взаимодействий отделений взводов на действия взводов в целом.

Список литературы

1. Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. М.: Физматлит, 2008.
2. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. 2009. № 3. С. 136-151.
3. Zaccaro S.J., Marks M.A., DeChurch L.A. (Eds.) Multiteam systems: An organizational form for dynamic and complex environments. NY: TF, 2012.
4. DiRosa G.A. Emergent Phenomena in Multiteam Systems: An Examination of Between-Team Cohesion. George Mason Univ.: Diss. PhD, 2013.
5. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Р.И. Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
6. Voloshin V. Introduction to Graph and Hypergraph Theory. NY: NSP, 2009.
7. Bretto A. Hypergraph Theory. An Introduction. NY: Springer, 2013.
8. Gallo G., Longo G., Nguyen S., Pallottino S. Directed Hypergraphs and Applications // Discrete Applied Mathematics. 1993. № 42. P. 177-201.
9. Блюмин С.Л. Оргиперграфы: матричные представления // Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 «Сетевые модели в управлении». М.: ИПУ РАН, 2010. С. 22-39.
10. Basu A., Blanning R. Metagraphs and Their Applications. NY: Springer, 2007.
11. Блюмин С.Л. Графоструктурное моделирование. Метаграфы и их матрицы // Вестник ЛГТУ. 2015. № 1(23). С. 7-13.
12. Блюмин С.Л. Мультиагентные системы: групповые взаимодействия агентов, взвешенные ориентированные гиперграфы // Системы управления и информационные технологии. 2011. № 2(44). С. 49-53.
13. Блюмин С.Л. Мультикомандные системы // Материалы Междунар. науч.-прак. конф. «Теория активных систем» (ТАС-2014). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 198-200.

Multiagentny and multicommand systems in planning of the military operations

S.L. Blumin

Принципы исследования операций в управлении цифровыми технологиями

К.А. Гайдаш

НПО «Микроген» МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Введение. Принципы исследования операций составляют базовые методические посылки в принятии решений в современных условиях экономики, что отражено, как в научных публикациях в стране и за рубежом, так и в национальных и международных стандартах ведения управленческой деятельности. Настоящий этап развития экономики определяется взрывным характером проникновения в жизнь цифровых технологий. Цифровые технологии, основанные на аппаратном и программном обеспечении и сетях, не являются новшеством, но с каждым годом уходя все дальше от третьей промышленной революции, становятся все более усовершенствованными и интегрированными, вызывая трансформацию общества и глобальной экономики [1]. В Российской Федерации этим вопросам уделено значительное внимание. Разработана и утверждена Программа «...для развития цифровой экономики Российской Федерации, в которой данные в цифровой форме являются ключевым фактором производства во всех сферах социально-экономической деятельности,...». Обратим внимание на термин – качество, он проявится далее в посылках к проведению исследовательской работы в производственной деятельности НПО «МикроГен» [2]. Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 28 сентября 2015 г. № 1391-ст утвержден и введен в действие национальный стандарт РФ ГОСТ Р ИСО 9001-2015 «Системы менеджмента качества. Требования» (международный стандарт ISO 9001:2015 «Quality Management Systems — Requirements, IDT» [3]. В настоящем стандарте применен процессный подход, который включает цикл "Планируй - Делай - Проверь - Действуй" (PDCA), и риск-ориентированное мышление.

Процессный подход позволяет организации планировать свои процессы и их взаимодействие. Реализация цикла PDCA позволяет организации обеспечить ее процессы необходимыми ресурсами, осуществлять их менеджмент, определять и реализовывать возможности для улучшения.

Цикл PDCA можно кратко описать так:

- планируй - разработка целей системы и ее процессов, а также определение ресурсов, необходимых для достижения результатов в соответствии с требованиями потребителей и политикой организации, определение и рассмотрение рисков и возможностей;
- делай - выполнение того, что было запланировано;
- проверяй - мониторинг и (там где это применимо) измерение процессов, продукции и услуг в сравнении с политикой, целями, требованиями и запланированными действиями и сообщение о результатах;

- дейстуй - принятие мер по улучшению результатов деятельности в той степени, насколько это необходимо.

Перечислим требования в новом стандарте РФ ГОСТ Р ИСО 9001-2015 «Системы менеджмента качества. Требования» и соотнесём с принципами принятия решений в теории исследования операций:

Понятие «соответствующие заинтересованные стороны»;

Концепция принятия решений с учётом риска;

Требования к тому, что цели должны определять «кто», «что» и «когда»;

Требования по планированию изменений;

Концепция «знания организации»;

Требование планирования операций с учётом рисков;

Требования к внутренним аудитам рассматривать связанные риски;

Анализ со стороны руководства должен учитывать стратегическое развитие организации.

Несложно видеть полное соответствие данных положений с отечественной теорией исследования операций как совокупности целенаправленных действий. Точно так же присутствует оперирующая сторона (предприятие, организация, руководство), исследователь операции (аналитик, эксперт), цели, информированность, стратегии, риски.

Оцифровка технологий. Стимулирующим посылом к проведению работ по оцифровке явились новые правила оценки качества управления организациями. Оцифровка технологий осуществляется путём извлечения знаний из разработанной базы данных. В рамках НИОКР «Описание производственно-технологических процессов производства наукоёмкой микробиологической продукции» была поставлена задача построения «Диаграмм хода процесса» для отражения всех составляющих технологических операций, включая производственные помещения, оборудование, технологические операции и их параметры и осуществлено создание информационной модели [2].

Модели производства и управления. Проведенные работы и полученные результаты описания позволили перейти к следующему этапу повышения эффективности: использованию методов математического моделирования для улучшения процедур планирования и управления. В работах [2,4] отмечается, что для составления карт знаний промышленных предприятий можно использовать хорошо зарекомендовавшую себя методологию формирования нормализованных референтных моделей (НРМ). Спецификация по параметрам и характеристикам единицы действия состоит из описания следующих компонентов (параметров) и позволяет перейти к алгоритмической обработке:

сырье (вход) — то, что преобразуется в выход (продукт или отходы) ;**продукт** (основной выход) — то, что получается в результате операции;

отходы (дополнительный выход) — то, что не является основным результатом выполнения операции;

оборудование — то, с помощью чего совершается операция;

помещение (внутренняя среда действия) то, что составляет внутреннюю инфраструктуру операции;

территория (внешняя среда действия) то, что извне влияет на операцию;

документация (управление) — то, что описывает порядок выполнения операции;

персонал (оператор) — тот, кто выполняет операцию.

Кроме параметров, у стандартной единицы действия есть дополнительные характеристики:

владелец — лицо, несущее ответственность за ход и результаты операции;

контролируемые параметры — спецификации и характеристики операции, по которым владелец операции и руководитель более высокого уровня могут судить о правильности выполнения операции и ее эффективности;

длительность — время выполнения операции.

Для аккумуляции «рабочих» знаний и опыта по технологиям производства продукции необходимо сформировать банк референтных моделей производственных процессов, который способствует систематизации существующих и созданию новых знаний.

Модель, построенная с помощью методологии нормативных референтных моделей (НРМ), позволяет:

получить полную, достоверную и однозначную информацию о процессе;

применить математические методы для анализа и оптимизации процесса;

полностью воспроизвести процесс.

Разработка в этом проекте модельных описаний проводится с учётом того, что фармацевтическое производство обладает рядом особенностей. Главнейшее состоит в том, что в ряду организационных и технических процессов находятся живые процессы. Поэтому нужно говорить о природно-технических технологиях или биолого-технических, имеющих смешанный природноподобный характер

Описание технологических и управленческих возможностей. Рассмотрим случай, когда в Научно-производственное объединение (наряду с головным управляющим Центром) включено n предприятий [5-8], i – номер предприятия, $i = 1, 2, \dots, n$. Введём обозначения: x_i – уровни интенсивностей заданных технологий, i – номер предприятия, $i = 1, 2, \dots, n$; a_{ij} – нормативные технологические коэффициенты потребления ресурсов при единичной интенсивности технологического процесса предприятия номера i , $i = 1, 2, \dots, n$. j – номер ресурса, $j = 1, 2, \dots, m$; b_j – нормативный запрос при интенсивности x_i технологического процесса номера i на ресурс номера j ,

$b_{ij} = a_{ij}x_i$; q_j – цена на ресурс номера j ; $\sum_{j=1}^m q_j b_{ij} \leq U_i$, где U_i – инвестиции, выделенные

холдингом предприятию номера i на организацию производства; $\sum_{j=1}^m U_i \leq U$, здесь U –

общий объём инвестиций, имеющихся в распоряжении холдинга, $u = (U_1, U_2, \dots, U_m)$; b_j –

наличный ресурс номера j , имеющийся в распоряжении предприятий холдинга; y_{si} –

норматив выпуска продукции номера s , $s = 1, \dots, S$, при единичной интенсивности в технологическом процессе номера i ; p_s – цена на продукцию предприятий номера s (

либо рыночная, либо назначаемая Центром); $c_i = \left(\sum_{s=1}^S p_s y_{si} \right)$ – норматив дохода при

единичной интенсивности технологического процесса номера i ; k_s – цена на продукцию

предприятий номера s , реализуемая холдингом во внешнем рынке; задача предприятий: $c_i x_i \rightarrow \max$.

Возможные механизмы управления Головной организацией НПО:

директивное распределение ресурсов b_{ij} между предприятиями; директивное распределение инвестиций U_i между предприятиями; директивное назначение цен на продукцию предприятий p_s ; рыночные цены на продукцию предприятий p_s ; директивное назначение цен на ресурсы для предприятий q_j ; рыночные цены на ресурсы для предприятий q_j ; директивное назначение плановых заданий y_{si}^0 на выпуск продукции для предприятия номера i : $y_{si}^0 \leq y_{si} x_i$.

Критерии Центра: Пример одной из возможных постановок задач выбора управления Центра при директивном финансовом регулировании деятельности предприятий:

$$\max_{u \in D} \min_{y \in T(u)} (k, y)$$

$$D = \left\{ u \mid u \geq 0, \sum_{i=1}^n U_i \leq U \right\}, \quad c_i = \left(\sum_{s=1}^s p_s y_{si} \right)$$

$$T(u) = \left\{ y \mid x_i \geq 0, a_{ij} x_i \leq b_{ij}, \sum_{j=1}^m q_j b_{ij} \leq U_i, y_s = \sum_{i=1}^n y_{si} x_i, c_i x_i \rightarrow \max \right\},$$

здесь Центр распределяет инвестиции между предприятиями U_i , цены на продукцию p_s, k_s и на ресурсы q_j в этой постановке считаются заданными либо рыночными, либо директивными (прямой контроль цен).

Риски. Риск-ориентированное мышление позволяет организации определять факторы, которые могут привести к отклонению от запланированных результатов процессов и системы менеджмента организации. Для проведения риск-менеджмента требуется завершение цикла: Мониторинг \rightarrow математическое моделирование систем и процессов \rightarrow прогноз \rightarrow синтез управляющих воздействий \rightarrow прогноз результатов управляющих воздействий и оптимизация \rightarrow принятие мер \rightarrow анализ результатов \rightarrow планирование \rightarrow мониторинг. В соответствии с общей теорией исследования операций, и это так же отмечается в методических установках ГОСТ, риск, т.е. возможность наступления нежелательных событий, связано с наличием, и это всегда неизбежно, неопределённых факторов в описании реальных процессов. Реализация риска приводит к ущербу, и задача состоит в том, чтобы минимизировать величины возможных ущербов. Далее всё, в формальном отношении, будет зависеть того, как будут в модели описаны неопределённые факторы. Возможны подходы, использующие вероятностные методы, возможно интервальное или функциональное описание неопределённости, возможна оценка на базе наибольшего гарантированного результата.

Конкретные исследования в рамках данного проекта проводились при неопределённости интервального характера относительно нормативных параметров и при использовании «мягкого» и «жёсткого» управления.

Это позволяет провести необходимые вычислительные эксперименты на этапе планирования при сочетании рыночных условий и регуляторных ограничений.

Список литературы

1. Шваб К. Четвертая промышленная революция/ Пер. с англ. Предисловие Грэф Г.О. – М.: «Эксмо», 2016 – с.138.

2. Кольшкин В.М., Маковский Е.В., Богатиков С.А., Марченков С.Н., Мизюк В.Д. Практический опыт формирования базы знаний организации в соответствии с требованиями стандартов серии ISO 9000 // Биотехнология. — 2016. — №1 — С.76 — 89.
3. ГОСТ Р ИСО 9001-2015 «Системы менеджмента качества. Требования». GOST R ISO 9001-15 «Systems for quality management. Requirements».
4. Кольшкин В.М. Референтные модели производственно-технологических процессов при создании системы менеджмента качества на основе стандартов семейства ГОСТ Р ИСО 9000-2001 / В.М. Кольшкин, П.К. Бергизияров, С.А. Богатиков, И.Г. Сухомлин // Технология чистоты. — 2005. — № 1. — С.18—22.
5. Ерешко Ф.И., Турко Н.И. Процедуры организации государственно-частного партнёрства в отраслях промышленности. Бизнес в законе. Экономико-юридический журнал, 2016, № 6, С. 49-56.
6. Ерешко Ф.И., Куликов С.А., Насенков И.Г., Турко Н.И. Государственно-частное партнёрство в сфере разработки и производства высокотехнологичной продукции: методические проблемы и возможности их решения. //Журнал Вестник Академии военных наук, №4(45) 2013, 140-149 с.
7. Насенков И.Г., Турко Н.И. Особенности формирования управления холдинговой компанией высокотехнологичной отрасли промышленности в условиях олигополистической конкуренции. //Вестник Академии военных наук, № 4(37), 2011.
8. Ерешко Ф.И. Принятие решений о диверсификации систем. Труды Института системного анализа РАН “Динамика неоднородных систем”, М.: ЛЕНАНД, 2010. Т. 53(4), С. 107-114.

Operation research and the control at the digital technologies

К.А. Gaidash

NPH “Microgen”, Lomonosov MSU, Moscow, Russia

Исследование операций организации партнёрства Государства и бизнеса. Ч.1

К.А. Гайдаш, Н.И. Турко

ГК «Ростехнологии»

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Ф.И.Ерешко

ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Работа посвящена использованию теоретических конструкций теории принятия решений для анализа перспектив развития партнерства государства и бизнеса в условиях широкого использования цифровых технологий в управлении. Авторы рассматривают возможности формального описания концептуальных положений хозяйственного партнерства государства и бизнеса, соответствующих правовым основам ГЧП/ЧГП. Основное внимание уделяется механизмам согласования интересов государства и бизнеса.

Государственно-частное партнерство (Public-Private Partnership, PPP, ГЧП) – это соглашения между публичной и частной сторонами по поводу производства и оказания инфраструктурных услуг, заключаемые с целью привлечения дополнительных инвестиций и, что еще более важно, как средство повышения эффективности бюджетного финансирования (определение Всемирного банка).

Далее и государственные предприятия, и частные предприятия мы будем рассматривать как равноправных экономических агентов, имеющих собственные цели, технологические и ресурсные возможности и собственные формы управления. В то же

время между ними имеются различия, что проявляется, прежде всего, в целях, вследствие различных бизнес установок и прав собственности. В работе рассматриваются также ситуации, когда правовая симметрия нарушается, тогда возможно говорить или о государственно-частном предприятии или о частно-государственном предприятии. Возможны также случаи, когда предприятия разной формы собственности принимают на себя разные роли во взаимных отношениях, точно так же как на рынке во взаимоотношениях между производителем и потребителем, могут возникнуть неравноправные отношения, кто-то из них проявляет диктат (инициативу) и получает право первого хода (модели Курно, Штакельберга, Гермейера, теория иерархических игр, теория активных систем, теория контрактов). Наконец, возможны ситуации, когда и государственные предприятия и частные предприятия функционируют в среде законов и положений, которые устанавливает государство, как власть и законодатель. Тогда на государственные предприятия и частные предприятия могут распространяться различные юридические нормы, например, различные схемы налогообложения. В этих постановках мы будем наряду с предприятиями разной формы собственности рассматривать и участие координатора и использовать для краткости описания его деятельности термин Центр. В качестве инструментов государственного воздействия на субъекты промышленной деятельности могут быть как меры экономического стимулирования, так и меры государственного регулирования (императивные предписания и запреты). При этом государство может воздействовать на промышленную деятельность как непосредственно через государственные органы, так и опосредованно через организации инфраструктуры поддержки промышленной деятельности. Меры стимулирования промышленной деятельности представляют собой различные инструменты. В законе о ГЧП прописаны особенности применения мер финансовой поддержки через фонды развития отраслей промышленности, поддержки в области научно-технической и инновационной деятельности, информационной и консультационной поддержки, поддержки в области кадрового потенциала .

Правовые аспекты. Со вступлением в силу в 2015 г. федеральных законов №488-ФЗ «О промышленной политике в Российской Федерации» и №224-ФЗ «О государственно-частном партнерстве, муниципально-частном партнерстве в Российской Федерации и внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации» в стране создана правовая основа для масштабного развития крупных промышленно-инфраструктурных систем на основе партнерства государства и бизнеса. [3,4]. Федеральный закон о ГЧП ввел в правовой и экономический оборот категорию «государственно-частное партнерство». В то же время остались и неразрешенные теоретико-методологические вопросы, в частности, оценка эффективности различных отношений возникающих между государством и бизнесом. Выражения «государственно-частное партнерство» или «частно-государственное партнерство» (ЧГП) определяют разные системы отношений, складывающиеся между государством и бизнесом. Все зависит от предмета этих отношений и прав собственности. Корректность использования конкретной формулировки зависит, таким образом, от инициатора этих отношений.

Для анализа данных и подобных проблем приложим аппарат иерархических игр (с правом первого хода), который позволяет оценить эффективность операций слияния, объединения, захвата, там, где нарушатся симметричность поведения, хотя сохраняется равноправие участников, в смысле достижения ими собственных интересов.

В основу разграничения организаций и понятий ГЧП и ЧГП должны быть положены главные отношения рыночной экономики – права собственности на объект партнерства и право принятия независимых решений. Согласно №488-ФЗ Специальный инвестиционный контракт заключается между инвестором и государством. Государство в лице федерального и/или региональных правительств берет на себя

обязательства по стимулированию деятельности инвестора за счет разнообразных мер, включая финансовые.

Механизмы координации и стимулирования Не теряет актуальности разработка процедур согласования интересов активных подсистем, входящих в крупномасштабный проект. Приведём основные математические конструкции. Данные результаты появились на свет в результате исследований, проводимого в рамках информационной теории иерархических систем [13]. Координирующий орган (Центр) P_0 стремится к достижению наибольшего значения критерия эффективности $f_0(x, u)$, где выбор Центра $u = (u_1, \dots, u_n)$, $u_i \in U_i$, $u \in U$, $U = U_1 \times \dots \times U_n$, выборы подсистем $x_i \in X_i$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Подсистемы нижнего уровня иерархии стремятся к увеличению критериев эффективности $f_i(x_i, u_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые предполагаются непрерывными на произведении компактов U, X_1, \dots, X_n . Реакции подсистем остаются для Центра неопределёнными до уточнения уровня информированности всех игроков. Рассмотрим несколько ситуаций информированности Центра.

Механизмы 1-го типа (прямые). Центр не рассчитывает на информацию о выборах подсистем или не имеет возможности ее обработать. Тогда его механизм управления состоит в назначении конкретных значений $u \in U$ и сообщении их подсистемам. Наилучшие значения управляющих переменных определяются из решения задачи $G_1 = \sup_{u \in U} \min_{x_i \in B_i^1(u_i)} f_0(x, u)$, где B_i^1 – множество оптимальных откликов подсистем

$$B_i^1 = \left\{ x_i \in X_i \mid f_i(x_i, u_i) = \max_{y_i \in X_i} f_i(y_i, u_i) \right\}.$$

Таковыми механизмами управления прямого типа являются: назначение плановых заданий, распределение ресурсов, назначение цен, квот, и других ограничений на производство.

Механизмы 2-го типа (с обратной связью). Центр рассчитывает на информацию о выборах подсистем в момент выбора собственной стратегии. Такими механизмами являются: тарифные сетки, правила поощрений и штрафных санкций, налоговая политика, механизмы стимулирования.

Однако следует отметить, что механизмы управления Центра (головной управляющей компании) могут иметь более сложный характер, отражая многообразные формы взаимодействия Центра и подчинённых подсистем, особенно с учётом дополнительных условий относительно прав выбора хода и дополнительных неопределённых факторов..

Перечисленные стратегии управления Центра – назначение цен или пределов их изменения, распределение ресурсов, установление пределов изменения характерных параметров подсистем, сложные стратегии – тарифы, штрафы, поощрения как функции конкретных выборов подсистем широко используются в задачах управления системами.

В качестве примера дополнительных неопределённых факторов приведём проблему, связанную с выбором налоговых политик. Проблема при выборе состоит в следующем: если уменьшить налоговое бремя, то увеличится ли собираемость налогов? Здесь центральный вопрос – неопределённость с точки зрения Центра вообще в принципах принятия решений подсистем. Вопросы управления Центра в условиях подобной дополнительной неопределённости, является предметом исследований, составляя свод эффективных прикладных приёмов в риск-менеджменте. В национальном стандарте РФ ГОСТ Р ИСО 9001-2015 «Системы менеджмента качества. Требования» (международный стандарт ISO 9001:2015 «Quality Management Systems — Requirements, IDT»), который включает цикл "Планируй - Делай - Проверяй - Действуй", и регламентируется риск-ориентированное мышление.

В теории исследования операций для моделирования неопределённости в поведении подсистем принимается постановка, когда функции цели Центра и

подсистем: записываются в виде $f_0(x, u)$, $f_i(x_i, u_i, \alpha_i)$, а параметр α_i отражает поведенческую неопределённость.

В этих условиях принципиально кардинален вопрос о децентрализации управления. Как правило, если Центр ограничен в обработке информации, предпочтительнее децентрализованное управление.

Так что наличие координирующего центра, распределяющего суммарные ресурсы, окажется выгодным для всех подсистем, если политика центра направлена на согласование всех интересов. Одна из постановок, описываемая далее, с точки зрения Государственной организации проблема создания ГЧП может рассматриваться, например, как процедура диверсификации производства. И тогда можно использовать опыт диверсификации в стратегическом управлении и стратегическом менеджменте.

Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций, М., Наука, 1971, – 384 с
2. Гайдаш К.А. Принципы исследования операций в управлении цифровыми технологиями. Настоящий сборник.
3. Ерешко Ф.И., Турко Н.И. Процедуры организации государственно-частного партнёрства в отраслях промышленности. Бизнес в законе. Экономико-юридический журнал, 2016, № 6, С. 49-56.

Operations of the organization of partnership of the State and business, part 1

К.А. Gaidash, N.I. Turko, F.I. Ereshko
SK "Rostech, CC FRC CSC RAS

Исследование операций организации партнёрства Государства и бизнеса. Ч.2

К.А. Гайдаш, Н.И. Турко
ГК «Ростехнологии»
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Ф.И.Ерешко
ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Здесь излагаются содержательные описания сфер применения правовых оснований создания ГЧП/ЧГП и формальные теоретические конструкции теории исследования операций для анализа перспектив развития партнерства государства и бизнеса в условиях широкого использования цифровых технологий в управлении. Естественным аппаратом для исследования и принятия решений в проблематике ГЧП является теория исследования операций и теория игр, поскольку действующие стороны (государство и бизнес) имеют свои ресурсы и несовпадающие интересы

Содержательные послышки в ОПК России

Необходимость ГЧП в российском оборонно-промышленном комплексе (ОПК) осознается и государством, и обществом. Но развитие механизма ГЧП в ОПК осложнено рядом причин. Это и традиционная закрытость этой сферы промышленности; обеспечения национальной безопасности в сравнении с необходимостью коммерциализации ОПК; специфическая потребительская стоимость и уникальное предназначение основной части продукции ОПК - вооружения и военной техники.

Тем не менее, в отдельных видах производства ОПК, в потенциально конкурентных его сегментах, особенно в сфере двойных технологий и инноваций, государственно-частное партнерство начинает занимать свою нишу.

Спектр отраслей и производств ОПК, в которых возможно активное сотрудничество государства и бизнеса на условиях ГЧП достаточно широк: традиционные виды вооружений и военной техники, такие как, например, бронетехника или стрелковое оружие, сырьевая и элементная базы ОПК, оптические, навигационные, тепловизионные, СВЧ и иные системы, гиперзвуковые технологии. Бизнес может принимать активное участие в создании экспортных образцов вооружения, а также в разработке технологий двойного назначения.

Государственная корпорация «Ростех»

Развитие и успехи теории принятия решений продемонстрировали широкие возможности, которые предоставляет системный подход, базирующийся на математическом моделировании. При этом инструментом для анализа и вычислений стали системы моделей, включающие как набор простых моделей, учитывающие основные качественные характеристики процессов, так и подробные формализации, опирающиеся на значительные массивы исходной информации. С учетом специфичной структуры производства продукции военного и двойного назначения из всего многообразия организационных форм управления холдингом был выбран вариант с консолидацией корпоративных функций в управляющей компании. Решение перспективных задач связано с широким использованием современных информационных технологий в рамках единого информационно-технологического пространства на основе специализированных компьютерных сред совместной работы.

В стратегии развития Корпорации «Ростех» реализуется оптимистическая модель развития ОПК. Полученная таким образом оптимальная сбалансированная система бюджетного и внебюджетного финансирования может быть использована в качестве исходных данных для обоснования целевой программы стратегии управления высокотехнологичной холдинговой компанией оборонной промышленности.

Выбор приемлемого варианта системы финансирования осуществляется, исходя из политических соображений инновационной политики и экономического роста компании.

Целевая организационная модель Корпорации «Ростех» предполагает увеличение самостоятельности холдинговых компаний и создание на их основе устойчивых промышленных компаний мирового класса, которые станут центрами создания стоимости. В этом случае Корпорация будет осуществлять стратегически-контрольные функции на верхнем уровне (выполнение годового бюджета, корректировка и контроль выполнения стратегических планов и пр.), не вмешиваясь в операционную деятельность холдинговых компаний.

В настоящее время в состав Государственной корпорации «Ростех» входят 15 холдинговых компаний (интегрированных структур), сформированных по отраслевому признаку.

Агрегированные математические модели. О роли качественных моделей принципиальную установку высказал Нобелевский комитет, подчеркнувший в пресс-релизе по поводу присуждения Нобелевской премии в 2016 году за достижения в теории контрактов, имеющих теоретико-игровую природу: «..в современной экономике содержится неисчислимо число контрактов. Новые теоретические инструменты, созданные Хартом (Hart) и Хольмстрёмом (Holmström) ценны для понимания реальных контрактов и институтов, а также для учёта возможных подводных камней в разработке контрактов. Их анализ оптимальных контрактов закладывает интеллектуальный фундамент для разработки стратегий и институтов во многих областях, от законодательства о банкротстве до политических конституций»..

На языке бизнес операций ГП может или объединиться с организациями ЧП в коалицию и вступить с ними в договорные отношения или осуществить их подчинение. Если собственность отождествляется с пакетами акций, то организация ГЧП может определиться приобретением или обменом долей или пакетов акций, что создаёт расширенный, диверсифицированный портфель предприятия ГЧП. Если операция диверсификации проводится в интересах одного управляющего лица, что соответствует методологии исследования операций (оперирующая сторона=Лидер), то все интересы добавляемых участников тогда соотносятся с интересами Лидера (государственного предприятия), ведущего участника в изучаемом управляемом процессе.

Лидер, в интересах которого проводится исследование структурных организационных мероприятий, может сохранить функции целей, описывающие интересы добавляемых участников, в качестве критериев .

Модель приобретения ресурсов, игра с правом первого хода, ЧГП.

Положим, что ЧП (игрок 1) принимает решение-обратиться к игроку 2 ГП с предложением о продаже ему части ресурсов. Эта ситуация описывается теоретико-игровой моделью с правом первого хода [8]. Первый шаг осуществляет первый игрок ЧП. Он предлагает цену p на приобретаемый ресурс объёма y . Игрок ГП решает оптимизационную задачу о выборе стратегии в предлагаемых условиях

$$[(c_2, x_2) + py] \rightarrow \max, \quad A_2 x_2 \leq b_2 - y,$$

$$f_2^{opt}(D) = \max_{\substack{x_2 \in X_2 \\ b_2 \geq y \geq 0}} [(c_2, x_2) + py], \quad X_2 = \{x_2 \in E_{n_2}^+ \mid A_2 x_2 \leq b_2 - y\}, \quad \text{где символ } D$$

характеризует изменённую модель. В результате игрок ГП формирует оптимальный отклик $y_2^{opt}(p)$. Игрок ЧП решает задачу о выборе своей стратегии x_1, p с учётом оптимального ответа игрока ГП.

$$[(c_1, x_1) - py_2^{opt}(p)] \rightarrow \max, \quad A_1 x_1 \leq b_1 + y_2^{opt}(p), \quad f_1^{opt}(D) = \max_{x_1 \in X_1(p)} [(c_1, x_1) - py_2^{opt}(p)],$$

Эффективность операции определится из условия превышения полученных выигрышей игроков с символом D над выигрышами до операции об организации ГЧП: $f_1^{opt}(D) > f_1^{opt}, f_2^{opt}(D) > f_2^{opt}$.

Замечание 2. Если игрок ЧП формулирует своё предложение с элементами отказа вида

$$p(y) = \begin{cases} p_0, & \text{если } \rightarrow y = y_0 \\ 0, & \text{если } \rightarrow y \neq y_0 \end{cases}, \quad \text{то поиск оптимального значения } y_0 \text{ сводится к решению}$$

задачи

$$[(c_1, x_1) - py] \rightarrow \max, \quad A_1 x_1 \leq b_1 + y, \quad A_2 x_2 \leq b_2 - y, \quad [(c_2, x_2) + py] \geq f_1^{opt}(D).$$

Модель объединения

Определим эту организационную схему как **коалицию** (объединение).

Производство ГП

Производство ЧП

Скалярные функции описывают цели активных участников

$$f_1(x_1) \rightarrow \max, \quad f_2(x_2) \rightarrow \max, \quad \text{оптимум целей } f_1^{opt} = \max_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) \quad f_2^{opt} = \max_{x_2 \in X_2} f_2(x_2)$$

Вектор-функции $g_i(x_i)$ отражают технологические возможности и потребности участников в ресурсах $g_1(x_1) \leq b_1, \quad g_2(x_2) \leq b_2$. В данной процедуре диверсификации производится полное объединение ресурсов

$X_{div} = \{x_1 \in E_{n_1}^+, x_2 \in E_{n_2}^+ \mid g_1(x_1) + g_2(x_2) \leq b_1 + b_2, \}$ и формируется общая цель (или оценка эффективности присоединения с позиций Предприятия 1) в виде

$$F^{opt} = \max_{(x_1, x_2) \in X_{div}} [f_1(x_1) + f_2(x_2)]$$

Справедлива **Теорема** в выпуклом (и линейном) случае. Если множество Λ_1 оптимальных множителей Лагранжа в задаче для первого участника не пересекается с

множеством Λ_2 оптимальных множителей Лагранжа в задаче для второго участника, то имеет место строгое неравенство в объединённой модели $F^{opt} > f_1^{opt} + f_2^{opt}$.

В терминах управления системой данный вывод можно сформулировать так. При предварительном анализе возможности организации ГЧП все предприятия могут оценить цены на ресурсы и на инвестиции как собственные, так и других предприятий до организации. Если стоимость привлечения ресурсов и инвестиций в отраслях различны, операция организации будет эффективна.

Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций, М., Наука, 1971, – 384 с
2. Гайдаш К.А. Принципы исследования операций в управлении цифровыми технологиями. Настоящий сборник.
3. Ерешко Ф.И., Турко Н.И. Процедуры организации государственно-частного партнёрства в отраслях промышленности. Бизнес в законе. Экономико-юридический журнал, 2016, № 6, С. 49-56.

Operations of the organization of partnership of the State and business, part 2

K.A. Gaidash, N.I. Turko, F.I. Ereshko
SK "Rostech", CC FRC CSC RAS

Инвариантность фрактальных свойств в задачах распознавания образов при изменении характеристик исходного изображения

В.Ю. Люман, Г.М. Соломаха
ТвГУ, Тверь, Россия

Проанализирована эффективность применения фрактального подхода к обнаружению объектов на двумерном изображении за счёт устойчивости фрактальных характеристик к различным искажениям.

Несмотря на высокий уровень развития современной науки и техники, в настоящее время всё ещё имеется ряд практических задач, решение которых оказывается довольно проблематичным. К числу таких задач относится задача обнаружения и распознавания объектов, что обусловлено во многом сложностью формализации процесса восприятия видимых образов. Именно поэтому всё ещё не существует универсального математического или технологического подхода, который позволил бы наиболее эффективно осуществлять процесс распознавания в условиях априорной неопределённости текущей фоноцелевой обстановки, несмотря на всю лёгкость, с которой эту задачу может решить человек при помощи визуального восприятия.

Ввиду высокой стоимости технических средств наблюдения и обработки данных, способных предоставлять исходные данные для задач автоматического анализа состояния динамических объектов, способ представления информации об объектах в виде двумерных изображений в последнее время получил широкое распространение. Согласно [4], одним из двух основных направлений в рамках задач распознавания на изображениях является поиск и распознавание объектов (всюду далее в качестве объекта рассматриваются летательные аппараты). В данном случае технология обработки изображения сводится к поиску распознаваемых геометрических объектов на всей области наблюдения, где объекты представляют собой относительно небольшие специфические локальные области, появление которых может произойти в любой точке изображения. Причём имеет место априорная неопределённость, то есть

отсутствует информация о том: имеются ли объекты на текущей наблюдаемой сцене, каков их размер, количество, ориентация, степень видимости и так далее.

В [3] был предложен алгоритм фрактального обнаружения объектов на изображении как инструмент распознавания факта присутствия воздушных целей в рассматриваемой пространственной области, использующий метод скользящего окна. Исходные данные для работы алгоритма представлены как видеоряд со съёмки летательного аппарата, охватывающего ситуации: самолёт на фоне облаков; самолёт на фоне чистого неба; чистое небо; облака; самолёт, замаскированный облаком.

На практике фрактальную размерность часто определяют через клеточное разбиение, так называемый box-counting алгоритм, основанный на исследовании зависимости количества кубиков, содержащих точки множества, от размера ребра кубика (здесь имеются ввиду не обязательно трехмерные кубики: в одномерном пространстве «кубиком» будет отрезок, в двумерном — квадрат и т.д.). Зависимость, определяющая интересующий нас показатель фрактальной размерности, имеет вид (1):

$$N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^D} \quad (1)$$

где ε – размер кубика, $N(\varepsilon)$ – количество кубиков, покрывших множество, D – фрактальная размерность множества. Отсюда можно вывести формулу фрактальной размерности (2):

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (2)$$

При анализе исходных данных из каждой точки изображения вычитается минимум яркости, иначе показатели фрактальной размерности анализируемых областей будут стремиться к показателю размерности объемного тела, причем минимум вычисляется не по всему исходному изображению, а по каждой анализируемой области отдельно. Фрактальная размерность в областях, где объект отсутствует, стремится к значению размерности плоскости и имеет показатели значительно ниже, чем размерность тех областей, где объект обнаружен, так как объект создает дополнительные неровности, а соответственно, объем. Таким образом, алгоритм обнаружения движущихся точечных объектов в последовательности изображений можно представить как комплекс следующих аналитических блоков:

1. Построение гистограмм освещённости для наблюдаемой сцены, представление её в виде двумерного массива по размеру текущей анализируемой области, элементами которого являются числа, характеризующие показатели яркости для каждого пикселя взятого изображения, измеряемые в люксах;

2. Преобразование полученного двумерного массива в четырехмерный массив, первые два индекса которого характеризуют положение анализируемой области на исходном изображении, а последние два – соответствующие показатели яркости, полученные в результате работы первого аналитического блока;

3. Вычисление минимума освещенности для каждой анализируемой области и вычитание его из яркости каждого пикселя текущей части изображения;

4. Реализация алгоритма клеточного разбиения, а именно: разбиение исследуемого множества точек (матрицы освещенности) на кубики размера ε и подсчет количества кубиков N , содержащих хотя бы одну точку множества. Проведение нескольких итераций работы этого блока и, как следствие, накопление данных для построения зависимости $N(\varepsilon)$;

5. Построение зависимости $N(\varepsilon)$ в логарифмических координатах и определение угла её наклона, который и будет характеризовать необходимый показатель фрактальной размерности. Данный подход измерения углового коэффициента графика

$\log N(\varepsilon)$ как функции от $\log \varepsilon$ является альтернативой описанного выше предельного перехода (2). Для вычисления угла наклона соответствующих зависимостей применяется метод наименьших квадратов, задача которого заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых функция двух переменных a и b

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))^2 \quad (3)$$

принимает наименьшее значение. То есть, при данных a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. Таким образом, решение примера сводится к нахождению экстремума функции двух переменных.

Анализируя набранную в ходе описанных исследований статистику, для каждого из пяти рассматриваемых состояний воздушного пространства выделены интервалы, в которые попадают соответствующие им значения показателя фрактальной размерности, при этом верна гипотеза о нормальном законе распределения D . Результаты вычислительного эксперимента представлены в табл. 1.

Таблица 1

| Ситуация | Начало интервала | Конец интервала |
|----------------------------------|------------------|-----------------|
| Самолет на фоне облаков | 2,95 | 2,98 |
| Самолет на фоне чистого неба | 2,95 | 2,98 |
| Чистое небо | 2,58 | 2,70 |
| Облака | 2,53 | 2,66 |
| Самолет, замаскированный облаком | 2,72 | 2,87 |

Одним из основных требований при разработке систем, решающих подобные проблемы обнаружения, является требование устойчивости и инвариантности анализируемых в ходе алгоритма показателей при изменении параметров (искажении) исходного изображения, что, безусловно, делает задачу исследования инвариантности фрактальных характеристик наблюдаемой фоноцелевой обстановки актуальной.

Требование инвариантности для целого ряда практических задач обнаружения объектов на изображениях оказывается достаточно общим и включает в себя следующие пункты:

- инвариантность к шумовым и динамическим искажениям;
- инвариантность к яркостным искажениям (изменению яркости и контраста);
- инвариантность к изменению местоположения объекта;
- инвариантность к изменению ориентации объекта (к повороту объекта в плоскости изображения);
- инвариантность к произвольным аффинным преобразованиям;
- инвариантность к изменению ракурса съёмки объекта (для трёхмерных объектов).

Зачастую в системах обнаружения инвариантность к перечисленным искажениям достигается путём преобразования исходного изображения следующими способами:

- применение методов и алгоритмов восстановления;
- нормализация изображений;
- преобразования подобия.

В дальнейшем будем называть указанные способы достижения эффективности процесса распознавания нормализацией исходного изображения, и понимать под этим термином преобразование, позволяющее привести изображение к виду, удобному для дальнейшей обработки. Однако предварительная нормализация значительно усложняет

алгоритм, особенно в системах, использующих метод скользящего окна. Это связано с тем, что в этом случае при обработке изображения для каждого положения скользящего окна вычисляются свои параметры нормализации. Следовательно, невозможно построить единое нормализованное изображение, а можно построить лишь серию нормализованных фрагментов. Кроме того, многие методы скользящей нормализации обеспечивают положительный результат лишь в случаях полного захвата объекта окном, а при частичном расположении обнаруживаемого объекта в окне нормализация осуществляется неточно.

Методы фрактальной обработки изображений, в свою очередь, позволяют избежать подобных предварительных преобразований, что будет доказано далее с помощью критерия качества обнаружения на основе анализа стандартизированной оценки показателя фрактальной размерности относительно заданной выборки в условиях изменения характеристик исходного изображения.

Стандартизированная оценка (z -оценка) – это мера относительного разброса наблюдаемого или измеренного значения, которая показывает, сколько стандартных отклонений составляет его разброс относительно среднего значения [2]. В качестве исследуемой выборки примем результаты, полученные в [3], а именно значения показателей фрактальной размерности в случаях присутствия целевого объекта на наблюдаемой сцене в условиях его визуальной видимости.

Далее для имеющейся выборки рассчитаем эмпирическое среднее и среднеквадратическое отклонение на основании смещённой оценки дисперсии по формулам (4) и (5) соответственно:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \quad (4)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n}} \quad (5)$$

где D_i – показатель фрактальной размерности для каждого положения скользящего окна, в котором объект был обнаружен, n – размер выборки.

Характеристики имеющейся выборки представлены в табл. 2.

Таблица 2

| Размер выборки | Эмпирическое среднее | Среднеквадратическое отклонение |
|----------------|----------------------|---------------------------------|
| 250 | 2,9639 | 0,0109 |

Инвариантность фрактальных показателей к изменению положения и ориентации объекта, а также к изменению ракурса съёмки и различным аффинным преобразованиям очевидна ввиду неизменности соотношения сигнал/шум в смысле попиксельной яркости. Однако устойчивость к таким искажениям как изменение яркости/контраста и шумовым искажениям требует анализа.

С целью определения эффективности фрактального алгоритма обнаружения проведём ряд преобразований взятого примера исходного изображения, близкого по значению фрактальной размерности к эмпирическому среднему рассматриваемой выборки. Изменение яркости/контраста произведём как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения данных показателей, до предельно-минимальной визуальной видимости объекта. В качестве шумовых искажений наложим аддитивный и статистически независимый от видеосигнала некоррелированный флюктуационный шум, который является наиболее распространённым видом помех на изображениях [1].

Далее для каждого искажённого изображения вычислим фрактальную размерность, а также стандартизированное отклонение (z – оценку) от заданной выборки по формуле (6):

$$z = \frac{D - \bar{D}}{\sigma} \quad (6)$$

где D – показатель фрактальной размерности интересующего нас изображения.

Примеры рассматриваемых искажений исходной фоноцелевой обстановки, а также результаты расчётов приведены в табл. 3.

Таблица 3

| Тип искажения | Показатель фрактальной размерности | Стандартизированная оценка |
|---------------------|------------------------------------|----------------------------|
| Без искажения | 2,9677 | 0,3553 |
| Изменение контраста | 2,9385 – 2,9704 | -2,3322 – 0,6038 |
| Изменение яркости | 2,9407 – 2,9875 | -2,1297 – 2,1776 |
| Наложение шума | 2,9441 | -1,8168 |

Для эмпирического среднего, равного 2,9639 и среднеквадратического отклонения в 0,0109, показатели фрактальной размерности обнаруживаемого объекта на двумерном изображении в условиях визуальной видимости согласно правилу трёх сигм должны попадать в интервал [2,9312;2,9966]. Полученные для искажённых кадров значения D действительно принадлежат указанному интервалу $[-3\sigma;+3\sigma]$. Таким образом, анализируя показатель фрактальной размерности и стандартизированную оценку для каждого типа применённого искажения, получаем устойчивость фрактальных свойств к приведённым выше изменениям характеристик исходных изображений с точки зрения задач обнаружения.

Список литературы

1. Гоулд Б., Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М: «Мир», 1978.
2. Крамер Гаральд. Математические методы статистики. М: «Мир», 1975.
3. Люман В.Ю. Алгоритм фрактального обнаружения объектов как инструмент опознавания воздушных целей // VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды. Том II. М.: Издательство ФИЦ ИУ РАН, 2016. С. 112–113.
4. Методы компьютерной обработки изображений. Под ред. Соффера В.А. М.: Физматлит, 2003.

Invariance of fractal properties in problems of pattern recognition when changing the characteristics of the original image

V.Y. Lyuman, G.M. Solomakha
TSU, Tver, Russia

Исследование возможностей восстановления вооружения и военной техники с использованием теории нечетких множеств

И.С. Назмутдинов

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия

Ю.В. Дьяченко

630 военное представительство МО РФ (г. Уфа), Россия

В настоящее время дальнейшее развитие средств воздушного нападения (СВН) противника, наращивание их разведывательных и ударных возможностей, повышение интенсивности боевых действий авиации, точности и дальности, применяемых авиационных средств поражения (АСП), и особенно высокоточного оружия, приводят к увеличению количества поврежденного вооружения и военной техники (ВВТ), что резко снижает эффективность функционирования частей и подразделений Военно-воздушных сил (ВВС). Поэтому статья позволяющая выбрать приоритетность восстановления ВВТ в условиях сокращения располагаемого времени и возрастающих ударных возможностей СВН противника, тем самым поддерживать эффективность функционирования части и подразделения ВВС на требуемом уровне, является важной и актуальной. Исходя из этого целью статьи является: используя аппарат теории нечетких множеств произвести многокритериальную оценку и выбор альтернатив приоритетности восстановления вооружения и военной техники в условиях большого количества неопределенностей и обеспечить требуемую эффективность функционирования частей (подразделений) связи, радиотехнического обеспечения (РТО) и автоматизированных систем управления (АСУ) ВВС.

Процесс восстановления ВВТ частей (подразделений) связи, РТО и АСУ ВВС содержит, как правило, большое количество неопределенностей, которые могут накладываться друг на друга, а именно: количество средств связи, РТО и АСУ, задачи, решаемые этими средствами, стоимость того или иного средства, располагаемое время на восстановление неисправного образца ВВТ и другие.

При исследовании процесса выбора приоритетности восстановления с целью принятия рационального решения необходимо выявить множество всех допустимых решений или альтернатив. Выбор альтернатив осуществляется на основе композиционного правила агрегирования описаний альтернатив, заданных в виде нечетких суждений [1].

Рассмотрим суть данного метода. Пусть U – множество элементов, A – его нечеткое подмножество, степень принадлежности элементов которого есть число из единичного интервала $[0, 1]$. Подмножество A являются значениями лингвистической переменной X .

Пусть множество решений характеризуется набором критериев X_1, X_2, \dots, X_p , т.е. лингвистических переменных на базовых множествах U_1, U_2, \dots, U_p соответственно. Например переменная X_1 «Материальные затраты» может иметь значение БОЛЬШИЕ, а переменная X_2 «Качество выполнения работ» – значение НИЗКОЕ и т.п. Набор из нескольких критериев с соответствующими значениями характеризует представления лицу, принимающему решение (ЛПР) об удовлетворенности (приемлемости) решения. Переменная S «Удовлетворенность» также является лингвистической. Пример высказывания:

$$d_1: \text{«Если } X_1=\text{БОЛЬШИЕ и } X_2=\text{НИЗКОЕ, то } S=\text{НЕУДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ} \text{»}. \quad (1)$$

В общем случае высказывание d_i имеет вид d_i : «Если $X_1=A_{1i}$ и $X_2=A_{2i}$ и ... $X_p=A_{pi}$, то $S=B_i$ ».

Обозначим пересечение $(X_1=A_{1i} \cap X_2=A_{2i} \cap \dots \cap X_p=A_{pi})$ через $X=A_i$. Операция пересечения нечетких множеств соответствует нахождению минимума их функций принадлежности:

$$\mu_{A_i}(v) = \min_{v \in V} (\mu_{A_{i1}}(u_1), \mu_{A_{i2}}(u_2), \dots, \mu_{A_{ip}}(u_p)), \quad (2)$$

где $V=U_1 \times U_2 \times \dots \times U_p$; $v=(u_1, u_2, \dots, u_p)$; $\mu_{A_{ij}}(u_j)$ – значение принадлежности элемента u_j нечеткому множеству A_{ij} . Тогда (1) можно записать в виде

$$d_i: \text{«Если } X=A_i, \text{ то } S=B_i\text{»}. \quad (3)$$

Для придания общности рассуждениям обозначим базовое множество U или V через W . Тогда A_i – нечеткое подмножество W , в то время как B_i – нечеткое подмножество единичного интервала I .

Импликация нечетких множеств (3) выражается следующим образом:

$$\mu_H(w, i) = \min_{w \in W} (1, (1 - \mu_A(w) + \mu_B(i))), \quad (4)$$

где H – нечеткое подмножество на $W \times I$, $w \in W$, $i \in I$.

Аналогичным образом высказывания d_1, d_2, \dots, d_q преобразуются в множества H_1, H_2, \dots, H_q . Их объединением является множество D :

$$D = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_q, \quad (5)$$

и для каждого $(w, i) \in W \times I$.

$$\mu_D(w, i) = \min_{w \in W} (\mu_{H_j}(w, i)), \quad j = \overline{1, q}. \quad (6)$$

Далее опишем способ выбора альтернатив, каждая из которых описывается нечетким подмножеством C из W .

Удовлетворенность альтернативы находится на основе композиционного правила вывода:

$$G = C \circ D, \quad (7)$$

где G – нечеткое подмножества интервала I . Тогда

$$\mu_G(i) = \max_{w \in W} (\min(\mu_C(w), \mu_D(w, i))). \quad (8)$$

Сопоставление альтернатив происходит на основе точечных оценок. Для нечеткого множества $A \subset I$ определим α -уровневое множество ($\alpha \in [0, 1]$):

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha, x \in I\}. \quad (9)$$

Для каждого A_α можно вычислить среднее число элементов – $M(A_\alpha)$:

1) для множества из n элементов $M(A_\alpha) = \sum_{x_i \in A_\alpha} x_i / n$;

2) для $A_\alpha = \{a \leq x \leq b\}$ $M(A_\alpha) = \frac{a+b}{2}$;

3) для $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq 1$ $A_\alpha = \bigcup_{i=1}^n \{a_i \leq x \leq b_i\}$;

$$M(A_\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{a_i + b_i}{2} (b_i - a_i)}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)}.$$

Тогда точечное значение для множества A будет определяться

$$F(A) = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} M(A_\alpha) d\alpha, \quad (10)$$

где α_{\max} – значение, при котором A имеет максимум.

При выборе альтернатив для каждой из них находится удовлетворительность и вычисляется соответствующая точечная оценка. Лучшей считается альтернатива с наибольшим ее значением.

Список литературы

1 Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. – Рига: РТУ, 1990. – 167 с.

2 Сиротинин Е.С., Малышев А.Н. Экспертные оценки в теории и практике принятия решений: Конспект лекций. – Калинин: ВКА ПВО, 1991. – 45 с.

Research of opportunities of restoration of arms and military technicians with use of the theory of fuzzy sets

S. Nazmutdinov

Military educational scientific center of the Air Force "Military and air academy of a name of professor N. E. of Zhukovsky and Yu.A. Gagarin", Voronezh, Russia

Yu.V. Dyachenko,

630 military representation of Ministry of Defence Russian Federation, Ufa, Russia

Проблематика управления развитием и ограничений новых технологий в сфере создания автономных систем оружия летального действия*

А.В. Рожнов

ИПУ РАН, Москва, Россия

Сегодня в системе Организации Объединенных Наций единственным межправительственным форумом, который официально занимается рассмотрением вопросов, касающихся новых технологий в сфере создания автономных систем оружия летального действия (АСОЛД) является Группа правительственных экспертов (ГПЭ) в контексте целей и задач Конвенции о конкретных видах обычного оружия (КНО). Объединяя подобные междисциплинарные знания и опыт, ГПЭ уполномочена Высокими Договаривающимися Сторонами КНО заниматься этим

* Работа подготовлена при частичной поддержке Программы Президиума РАН №30 "Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации".

предметом. Для того, чтобы процесс КНО сохранял актуальность и приобретал большую ценность, важно добиваться того, чтобы все заинтересованные субъекты (имея уверенность в неизменной финансовой поддержке совещаний ГПЭ), включая представителей промышленности и науки, вносили свой вклад в продолжающиеся дискуссии [1].

Рассматривая рекомендации ГПЭ, которая продолжила за последние три года дискуссии по правовым и этическим вопросам, имеющим отношение к АСОЛД, следует отметить предложения по новым изменениям, как в национальном законодательстве, так и в корпоративной сфере, призванные регулировать использование таких гражданских автономных систем, как *самоуправляющиеся транспортные средства*.

Так, в прошлом 2017 году в условиях сокращения объёма выделяемого времени с 10 до 5 дней ГПЭ сосредоточила основное внимание на обзоре текущего состояния разработок в сфере технологий и их применения в военных системах.

Как следует из официальных источников, детальный трехкомпонентный обзор ГПЭ технологий, военного воздействия и правовых / этических аспектов был направлен в определённой степени на переход к следующему этапу дискуссий, который в принципе может быть сфокусирован на проработке таких элементов, как определения и другие концепции с потенциалом сужения спектра рассматриваемых предметов до стратегических направлений. Приведём наиболее приоритетные вопросы обсуждения технологий АСОЛД из [1]:

Какие технологии вносят или могли бы вносить свой вклад в смертоносную автономность оружейных систем? Можно ли их в общем плане охарактеризовать как *искусственный интеллект (ИИ) / автономные системы (АС)*? Для каких гражданских целей они используются или могут использоваться?

Являются ли наиболее наглядными примерами автономных систем физические роботы (обособленные элементы) или виртуальные машины (расширенные системы обработки информации)? Возможны ли альтернативные технологические пути (например, нейроморфные, усиление человеческих возможностей), которое не охвачены дискуссией по АСОЛД?

Какие различные аспекты автономности усматриваются в нынешнем наборе технологий ИИ / АС? На каком уровне мы находимся в этих аспектах (энергетическая автономность, вычислительная автономность и т.д.) по сравнению с полной автономностью (даже в идеальном варианте)?

Имел ли место в последние годы [указывались созданная в «Google» сеть, способная распознавать изображения кошек, и разработанный компанией «DeepMind» алгоритм DQN для двухмерных игр игровой консоли «Atari 2600», виртуальный собеседник «Женя Густман», прошедший тест Тьюринга, программа «AlphaGo» и т.д.] или может ли произойти переход от конкретных приложений (узкий или слабый ИИ) к общему искусственному интеллекту (ОИИ), следствием чего может стать «интеллектуальный взрыв» / «технологическая сингулярность» / появление искусственного «суперинтеллекта» (ИСИ)?

Каким образом существующие системы подвергаются проверке (правильно ли она была построена) и аттестации (была ли построена правильная система)? Поддаются ли существующие и проектируемые автономные системы обследованию (что ты знаешь и откуда ты это знаешь)?

Могут ли машины описать свое обучение?

Каким образом промышленность решает проблемы безопасности человека и общественной безопасности (например, хакерство и невмешательство в частную жизнь)?

Могут ли автономные машины быть надёжно защищены от несанкционированного воздействия?

Возможно ли существование программных / аппаратных средств, блокирующих определенные схемы поведения машины, и можно ли воспрепятствовать тому, чтобы обучающаяся машина могла обойти / изменить их?

Ограничивает ли каким-либо образом дискуссию по АСОЛД трансформирующийся характер ИИ и его возможная вездесущность, или же ИИ сходен с другими технологиями двойного применения, которые появлялись в прошлом?

К обсуждению некоторых аспектов военного воздействия.

В каких конкретных областях применяются или могут применяться автономные технологии? Материально-техническое обеспечение? Разведка, наблюдение и рекогносцировка? Охрана границы и оборона района? Может характер их применения привести к постепенному изменению задач, которые ставятся для АСОЛД, или иным последствиям?

Имеются ли определенные сферы (например, надводная и подводная), где потенциальное применение АСОЛД является более вероятным, и почему?

На какой наступательный или оборонительный потенциал АСОЛД оказывали бы наибольшее воздействие? Может ли потенциальное применение АСОЛД снизить порог применения силы? Может ли оно расширить масштабы асимметричного наращивания сил или скрытого применения силы? Являются ли соображения, связанные с гонкой вооружений и поддержанием стабильности, актуальными для КНО?

Могут ли потенциальные АСОЛД распространяться / обучаться для действий совместно с террористами и другими незаконными негосударственными субъектами?

Имеются ли определенные виды военного применения (удаление взрывоопасных пережитков войны, разминирование и т.д.), которые могли бы быть желательными даже в нынешнем контексте КНО?

Могут ли потенциальные АСОЛД быть интегрированы в существующие системы военного командования и контроля? Имеются ли определенные доктринальные проблемы, связанные исключительно с АСОЛД?

Как потенциальные АСОЛД согласуются с существующими концепциями транспарентности в вооружениях в плане развертывания, обладания, торговли или передач?

Итак, Председатель ГПЭ [1] предложил сведенные в три широкие категории вопросы в целях стимулирования дискуссий и оказания помощи делегациям для подготовки к их работе. Они были призваны помочь начать субстантивный обзор каждой из трех ранее указанных категорий. Также они не являются исчерпывающими и не представляют в полной мере все мнения по данному предмету; в частности, некоторые вопросы директивного плана, которые относятся к следующему этапу дискуссий, были пока что ещё оставлены в стороне.

Доклад ориентирован на дальнейшее обсуждение [1] и является развитием тематики. Правовые и этические вопросы в рамках работы нашей секции этой конференции в полном объеме не рассматриваются и были представлены в ряде предшествовавших проектов и соответствующих обсуждений.

Список литературы

1. Food-for-thought Paper / Submitted by the Chairperson // Examination of various dimensions of emerging technologies in the area of lethal autonomous weapons systems, in the context of the objectives and purposes of the Convention, Item 6 of the provisional agenda, CCW/GGE.1/2017/WP.1, Geneva, 13–17 Nov. 2017.

Investigations of various dimensions of emerging technologies in the area of lethal autonomous weapons systems

A.V. Rozhnov
ICS RAS, Moscow, Russia

Оптимизация распределения литерных частот радиолокационных станций боевых машин батареи

Слугин В.Г., Зубарев А.А., Шевцов О.Ю., Мехтиев А.Я., Ковешников В.А.
АО “КБП” им. акад. А.Г.Шупунова”, Тула, Россия

Одним из параметров, обеспечивающих электромагнитную совместимость боевых машин (БМ) современных зенитных ракетно-пушечных комплексов (ЗРПК) при работе в составе батареи, является литерная частота многофункциональной радиолокационной станции (МРЛС) и станции обнаружения целей (СОЦ) каждой БМ. Построена математическая модель оптимального распределения литерных частот с учетом расположения боевых машин, имеющегося набора частот, ограничений на возможность совместного использования и равномерность распределения в заданном частотном диапазоне в связи с направленными помехами противника. Выполнена проверка метода на примере различных схем расположения БМ, различного набора литерных частот и количества БМ батареи.

При работе нескольких радиоэлектронных средств (РЭС) одного частотного диапазона возникают взаимные помехи. Уровень этих помех, а также специфика их взаимодействия, определяется рядом факторов, среди которых основными являются спектральные и пространственные характеристики излучаемых и приемных устройств, а также расстояния между РЭС. Для снижения взаимного влияния РЭС друг на друга применяются ограничения как по пространственным параметрам, так и по частотным параметрам, когда одному РЭС назначаются частоты, запрещенные для использования другими РЭС. Задача распределения литерных частот СОЦ и МРЛС состоит в определении рабочей сетки частот каждому из РЭС для всех БМ батареи с учетом их местоположения относительно друг друга. Поскольку рабочие частоты СОЦ и МРЛС находятся в различных частотных диапазонах, решение задачи может быть сведено к решению двух похожих задач, а именно – задаче распределения литерных частот СОЦ и задаче распределения литерных частот МРЛС.

Постановка задачи

С формальной точки зрения задача распределения литерных частот имеет две модификации. В первом случае, когда число БМ (m) превышает количество литерных частот (r), то есть при $m > r$, боевые машины работают на совпадающих частотах, в большей степени это относится к МРЛС. Во втором случае, при $r \geq m$ каждая БМ работает на своей частоте (для современных СОЦ и МРЛС количество литерных частот может достигать нескольких сотен), а эффективность распределения определяется разностью частот между БМ и расстояниями между ними. При решении первой задачи основное внимание уделяется анализу ситуации вокруг БМ, работающих на совпадающих литерных частотах. При решении второй задачи важно обеспечить максимальный уровень электромагнитной совместимости при равномерном использовании частотного диапазона в связи с подавлением сигнала противником и недопустимости использования некоторых сочетаний частот в составе батареи. При этом использование совпадающих частот исключается, это самостоятельная задача, требующая индивидуального подхода при разработке метода решения.

В самом общем случае задача распределения литерных частот РЭС формулируется следующим образом. Необходимо каждой БМ назначить некоторую рабочую частоту L_i на основе значений исходного заданного ряда частот

$$M : f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_r. \quad (1)$$

так, что бы значение некоторого критерия эффективности F было наилучшим (максимум либо минимум). При этом компоненты вектора частот \bar{L} , включающие определенные литеры исходного ряда, ассоциируются с условными номерами БМ.

Тогда запись $\bar{L} = (L_1, L_2, \dots, L_i, \dots, L_m)$ означает, что БМ под номером 1 присвоена литерная частота L_1 , БМ под номером 2 – L_2 , и т.д. Разумеется, значения частот L_i принадлежат исходному ряду (1), то есть $L_i \in M, i = \overline{1, m}$, где m – количество БМ батареи. Критерий оптимальности должен отображать уровень электромагнитной совместимости боевых машин, которая определяется, в первую очередь, расстояниями между БМ (S_{ij}) и их частотами (f_i, f_j); то есть

$$F = F(S_{ij}, f_i, f_j). \quad (2)$$

где i, j условные номера взаимодействующих машин. Совместное использование РЭС в зависимости от их исполнения предполагает наличие определенных ограничений на литерные частоты и расстояния между БМ, работающими на совпадающих либо различающихся частотах. В некоторых случаях частотный ряд распадается на два по существу непересекающихся диапазона – верхний и нижний, иногда частоты БМ должны соответствовать логике $f_i \neq f_j + \Delta$, где Δ – некоторая разность частот. В каждом конкретном исполнении РЭС имеются свои особенности, которые необходимо отобразить соответствующими ограничениями при поиске эффективного распределения литерных частот. В любом случае приходим к оптимизационной задаче с критерием

$$F = F(S_{ij}, f_i, f_j) \rightarrow \text{extr}(\max/\min) \quad (3)$$

и системными ограничениями

$$g_k(S_{ij}, f_i, f_j) \leq 0, k = \overline{1, k_0}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где i, j – условные номера взаимодействующих БМ, k_0 – количество ограничений (условий).

Задача в постановке (3), (4) относится к классу дискретных оптимизационных задач NP типа, то есть задач, которые не имеют строгих решений и для которых нельзя разработать точные эффективные алгоритмы. Точное решение может быть найдено, разве что, методом перебора, вариантность которого при наличии большого количества литерных частот чрезвычайно высока (например, 10^{30}). Поэтому без применения специальных декомпозиционных приемов [4,5] метод перебора не осуществим. В связи с этим для решения данной задачи можно использовать теорию случайного поиска и генетические алгоритмы, однако и в этом случае имеет место своя проблема – сложность реализации оптимизационного алгоритма на вычислительных средствах БМ. Таким образом, для поиска эффективного варианта распределения литерных частот РЭС представляется целесообразным использование метода перебора на основе декомпозиции задачи, приводящего к сокращению числа просматриваемых вариантов.

Особенности решения задачи при малом количестве литерных частот

Рассмотрим один из подходов решения данной задачи для случая $m > r$ и небольшой размерности. Сначала целесообразно распределять имеющиеся частоты (r шт.) между близко расположенными БМ (1-й кластер объема « r »), затем строят 2-й кластер по максимальной удаленности от объектов 1-го кластера и выполняют распределение с учетом уже назначенных литерных частот, подобным образом анализируют 3-й кластер и т.д. вплоть до распределения у последней БМ. При назначении литерных частот следует учитывать, что для БМ с разными литерными частотами расстояние между ними должно быть не менее некоторого минимально допустимого значения ΔS_1 (около 100 м), а с одинаковыми литерными частотами – не менее некоторого минимально допустимого значения ΔS_2 (порядка 2 км). Данный подход позволяет обнаружить ряд нюансов, учет которых приводит к различным решениям и неопределенностям. С другой стороны, при смене количества БМ и литерных частот требуется логическая переработка алгоритма и перепрограммирование. В качестве

достоинства следует отметить надежность и однозначность решения при минимальных временных затратах на компьютере.

Другой подход формальный. Рассмотрим более подробно случай, когда количество БМ превышает количество имеющихся литерных частот. Тогда, если каждая БМ может работать на любой из «г» частот, то есть существует «г» вариантов распределения только для одной БМ, то не сложно определить общее количество вариантов распределения литерных частот в группировке. Оно составит $N = r^m$. Например, при $m = 7$ и $r = 3$ количество различных распределений $N = 2187$, что вполне осуществимо при решении методом перебора.

На фоне данного многообразия актуальным является еще один не менее важным вопрос, как сравнивать различные варианты распределения литерных частот между БМ и какому из них отдать предпочтение! Таким образом, решение задачи распределения литерных частот в оптимизационной постановке замыкается на построение критерия оптимальности и ограничений, в пределах которых модель является адекватной и разрешимой.

Безусловно, критерий задачи распределения литерных частот БМ батареи должен учитывать расположение БМ, работающих на одной частоте. При этом, чем дальше они расположены друг от друга, тем лучше, то есть расстояния по совпадающим литерам должны быть максимальными. Необходимо также учитывать взаимное расположение машин и имеющиеся литеры с учетом углов закрытия и цифровой карты местности. Целесообразно также рассмотреть отклонения от нормативных значений при расположении БМ, работающих как на разных, так и совпадающих литерных частотах. Все перечисленные аспекты должны послужить основой при разработке совокупности критериев и ограничений при решении данной задачи.

В методе перебора генерируются все комбинации литерных частот и каждый вариант оценивается по совокупности критериев f_1, f_2 с использованием многокритериальной сортировки по Парето.

Определяется суммарное отклонение от нормы (H) расстояний ($S_{i,j}^{(L)}$) между БМ по совпадающим литерным частотам (L)

$$f_1(\bar{L}) = \sum_{L=1}^{L_0} (H - S_{i,j}^{(L)}), \quad (5)$$

$$S_{i,j}^{(L)} = \sqrt{(x_{i,L} - x_{j,L})^2 + (y_{i,L} - y_{j,L})^2}, \quad (6)$$

где: $x_{i,L}, x_{j,L}, y_{i,L}, y_{j,L}$ – координаты i, j БМ, работающих на одной частоте; L – индекс совпадающих литерных частот; L_0 – количество литерных частот МРЛС. При этом рассматриваются только те БМ и литерные частоты, при использовании которых $S_{i,j}^{(L)} < H$.

Тогда конкретное распределение частот отобразится вектором $\bar{L} = (L_1, L_2, \dots, L_i, \dots, L_{m_0})$, причем $L_i \in M$ согласно (1). Разумеется, для трех литерных частот $M = \{1, 2, 3\}$.

Другим важным элементом, определяющим решение, является критерий (f_2), который оценивает самый короткий участок между БМ, работающими на одной частоте. Его максимизация соответствует цели анализа, то есть

$$f_2(\bar{L}) = \max_L \min_{i,j} S_{i,j}(\bar{L}). \quad (7)$$

Это, так называемый, максиминный (минимаксный) подход, когда оценка качества системы выполняется по наихудшему варианту (в данной задаче самое близкое расположение БМ, использующих одну и ту же литерную частоту), который постепенно улучшается.

Улучшение и оптимальность в конечном итоге определяются по правилу

$$B = B_1 \vee B_2 = (f_1 < f_1^*) \vee [(f_1 = f_1^*) \wedge (f_2 > f_2^*)], \quad (8)$$

где f_1, f_2 – очередные значения критериев, f_1^*, f_2^* – лучшие значения критериев на текущий момент, B – логическая переменная принимающая значение 0 или 1.

Если условие (8) выполняется, происходит смена решения, то есть наступает улучшение. Процедура перебора продолжается вплоть до последнего сгенерированного решения.

Особенности решения задачи распределения литерных частот СОЦ

При большом количестве литерных частот, как это имеет место для современных СОЦ, для каждой БМ назначается своя литерная частота и выражение "работа на совпадающих литерных частотах" не применимо, что ранее было определяющим при формировании критерия оптимальности. В данном случае критерий, имеющий место при работе двух РЛС, определяется расстоянием (S_{ij}) между взаимодействующими РЛС и разностью частот (Δf_{ij}), причем эта зависимость прямо пропорциональна, то есть

$$F = F(S_{ij}, \Delta f_{ij}) = F(S_{ij}, |f_i - f_j|), \quad (9)$$

где i, j условные номера взаимодействующих машин.

Мощность помехи от работающей РЛС 2 на входе приемника РЛС 1 может быть описана с помощью соотношения [1 – 3]:

$$P_{ij} = -10\lg(5 + |f_i - f_j|) - 20\lg(4\pi S_{ij}). \quad (10)$$

Критерий электромагнитного взаимодействия БМ представим в виде

$$F = \min_i \sum_{j=1, i \neq j}^n P_{ij} = \min_i \sum_{j=1, i \neq j}^n [(-10\lg(5 + |f_i - f_j|) - 20\lg(4\pi S_{ij}))] \rightarrow \max_{f_i, f_j \in M_D \in M}, \quad (11)$$

где M – исходное множество значений частот, M_D – допустимое множество значений частот, определяемое внешними факторами.

Это так называемый максиминный (минимаксный) подход, фиксирующий распределения частот на основе логики "из худшего взять лучшее", в данном случае "выбрать большее из меньшего". Иначе, если на наиболее напряженном участке (БМ) достигается приемлемое состояние, то и на других позициях (БМ), тем более, должно быть не хуже. В этом случае мы получаем распределение, фиксирующее состояние, когда имеет место электромагнитная совместимость наиболее подверженной взаимными помехами боевой машины из всех БМ батареи с учетом всего многообразия частотного ряда и их расположения.

Тогда модель решения задачи распределения литерных частот СОЦ на основе оптимизационного подхода имеет следующий вид:

$$F = F(S_{ij}, \Delta f_{ij}) = F(S_{ij}, |f_i - f_j|) = \min_i \sum_{j=1, i \neq j}^n [(-10\lg(5 + |f_i - f_j|) - 20\lg(4\pi S_{ij}))] \rightarrow \max_{f_i, f_j \in M_D \in M} F \quad (12)$$

$$f_i \neq f_j \pm \Delta f, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (13)$$

$$|f_i - f_j| \geq \Delta f_0, \quad (14)$$

где: Δf – фиксированная недопустимая разность частот; Δf_0 – величина, определяющая недопустимость включения в набор близко расположенных частот и косвенно влияющая на равномерность использования исходного частотного ряда.

Если количество литерных частот $r = 20$, а количество боевых машин в каждой батарее $n_1=n_2=n_3=6$, то общее число вариантов распределений $N = 20^6 \cdot 20^6 \cdot 20^6 = 2,62214 \cdot 10^{22}$. При $r = 200$ (реально 217), $n_1 = n_2 = n_3 = 6$, $N = 200^6 \cdot 200^6 \cdot 200^6 = 2,62214 \cdot 10^{40}$. При $r = 500$ (реально 559), $n_1 = n_2 = n_3 = 6$, $N = 500^6 \cdot 500^6 \cdot 500^6 = 3,8146973 \cdot 10^{48}$. Вполне очевидно, просмотреть такое количество вариантов на компьютере не реально, для этого потребовалось бы астрономическое время ($10^9 \dots 10^{35}$ лет).

Данная задача принадлежит классу NP–задач, точное решение которых может быть получено только перебором всех вариантов. В этом случае прибегают либо к методам оптимизации, либо декомпозиции, позволяющей существенно сократить вариантность за счет рационального использования ее специфических свойств. Оптимизация с одной стороны не гарантирует оптимальность и приемлемое время решения, с другой стороны влечет разработку специальных сложных алгоритмов в составе вычислительных средств батареи, поэтому декомпозиционный подход с последующей реализацией метода перебора представляет определенный интерес.

Поэтому при большом количестве литерных частот и применении метода перебора необходима реализация следующих процедур:

1. Разбиение исходного множества литерных частот на три непересекающиеся равномерно распределенные подмножества для обеспечения возможности распределения частот на полковом уровне.

2. Преобразование множества литерных частот каждой батареи до допустимых размеров, обеспечивающих поиск оптимального решения за приемлемое время (несколько мин) методом перебора.

3. Выполнение оптимизации методом перебора.

Следует отметить, что метод является достаточно эффективным, простым в реализации, не требует больших вычислительных ресурсов и может быть использован при управлении литерными частотами РЭС одного частотного диапазона.

Список литературы

1. Судовая радиосвязь. Анализ и методика расчета электромагнитной совместимости в системах связи, радиолокации и телевидения: Учебное пособие. – Петропавловск-Камчатский, Камчат ГТУ, 2007. – 105 с.

2. Дулевич В.Е. Теоретические основы радиолокации. – М.: Сов. радио, 1978. – 607 с.

3. Справочник по радиолокации. Под ред. М. Сколника, Нью-Йорк, 1970. Пер. с англ. в 4-х томах под общей ред. К.Н. Трофимова. Том 1. – М.: Сов. радио. 1976. – 456 с.

4. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

5. Гиг ван. Дж. Прикладная общая теория систем. – М.: Мир – 1981. – 336 с.

6. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука. 1981. – 448 с.

Optimization of distribution of warranty frequencies of radar stations of fighting vehicles of the battery

Slugin V.G., Zubarev A.A., Shevtsov O.Yu., Mekhtiyev A.Ya., Koveshnikov V.A.
Shipunov AO KBP, Tula, Russia

Опыт использования операционного игрового сценарного моделирования в ОПК

В.В. Шевченко

ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Операционное игровое сценарное моделирование сложилось как методология решения задач прикладного характера в результате практического применения базовых представлений теории игр и исследования операций [1,2] в процессе участия авторов в выполнении ФЦП «Реформирование и развитие ОПК 2002-2006 годы». В основу этой методологии положено понятие операционной игры [3,4,11], по существу являющейся динамическим ансамблем статических игр. Игровое взаимодействие N лиц (игроков) в динамической операционной игре общего вида реализуется как выполнение этими игроками в каждый момент времени игрового взаимодействия принадлежащих заданному множеству операций (индивидуальных или с участием нескольких игроков), каждая из которых является статической игрой определённого вида. Любая операционная игра может быть записана как игра в нормальной или позиционной форме. Динамика состояний (позиций) каждого игрока описывается динамикой оборотов и сальдо его базовых счетов, имеющей место в силу проведения операций.

В каждый момент времени можно говорить о сальдо (Sal) любого счета в этот момент и об оборотах по дебету и кредиту ($Deb, Cred$) этого счета в текущий момент ($Deb(t), Cred(t)$) и от начального момента до текущего ($\overline{Deb}(t), \overline{Cred}(t)$). Последние обороты являются монотонно неубывающими функциями времени. Если обозначить j -й базовый счет i -го субъекта как $cnt_i^j(t) = (Deb_i^j(t), Cred_i^j(t), Sal_i^j(t))$, $t \in T$, то для любого такого счета в любой момент времени $t \in T$ имеет место соотношение

$$Sal_i^j(t + \Delta) = Sal_i^j(t) + Deb_i^j(t) - Cred_i^j(t).$$

Обороты по дебету и кредиту на заданном отрезке времени взаимодействия $[t_1, t_2] \subseteq T$ при этом определяются соотношениями

$$Deb_i^j(t_1, t_2) = \overline{Deb}_i^j(t_2) - \overline{Deb}_i^j(t_1),$$

$$Cred_i^j(t_1, t_2) = \overline{Cred}_i^j(t_2) - \overline{Cred}_i^j(t_1).$$

Наряду с базовыми рассматриваются аналитические счета, обороты и сальдо которых являются вычислимыми функциями оборотов и сальдо базовых (возможно нескольких игроков) и других аналитических счетов. Используются также понятия проводки (простой и операторной), операции, обязательства, сценарного условия, полного сценарного условия, сценария, сценарного плана.

Простая проводка - зависящий от действительно-целочисленной векторной переменной v оператор $prS_k(v)$, изменяющий сальдо связанных с ним базовых счетов определенного игрока $i_k \in I = \{1, \dots, N\}$ $cnt_{j_k}^{i_k}, \dots, cnt_{j_k}^{i_k}$ на зависящие от v величины сумм проводки по этим счетам $\sigma_1^k(v), \dots, \sigma_{i_k}^k(v)$.

Операторная проводка - оператор, изменяющий числовые параметры (характеристики), описывающие любые проводки и операции данной игры.

Под операцией op_β операционной игры понимается совокупность:

подмножества игроков $ЛПР_\beta \subseteq I$, участвующих в принятии решений по проведению данной операции;

подмножества множества проводок игры $PR^\beta \subseteq PR$, которые реализуются при проведении операции;

детерминированной функции (алгоритма) свертки операции $f_{\beta}^t(CNT^t, u_{\beta}^t, \alpha^t, t)$, определяющей зависимость значения унифицированной векторной переменной v в момент t времени от динамики оборотов и сальдо счетов CNT^t , совместного выбора входящих в $ЛПП_{\beta}$ игроков u_{β}^t и реализации неопределенного фактора α^t до момента проведения операции и самого значения этого момента t .

При этом подразумевается, что при проведении операции входящие в ее множество PR^{β} простые проводки изменяют обороты и сальдо указанных в них счетов, а операторные проводки действуют на функции свертки конкретных связанных с ними операций.

Под обязательством понимается предложение вида:

ЕСЛИ <условие> ТО <действие> ИНАЧЕ <санкция> (1)

или в укороченном виде

ЕСЛИ <условие> ТО <действие> (2)

<условие> - логическое предложение, термами которого являются любые отношения, заданные на известных игроку в момент совершения <действия> информационных единицах;

<действие> - логическое предложение, термами которого являются равенства, конкретизирующие значения информационных единиц, описывающих выбор данного игрока в некоторый момент времени (дискретного или непрерывного);

<санкция> - логическое предложение, термами которого являются равенства, конкретизирующие значения информационных единиц, описывающих выборы других игроков в некоторые моменты времени.

Отношениями могут быть равенства или неравенства, левыми или правыми частями которых могут быть любые функции от оборотов (на любых отрезках времени до текущего момента) и сальдо (в любые моменты времени до текущего) любых счетов, выборов игроков, характеристик операций и реализаций неопределенных факторов (также до текущего момента).

Записи видов (1), (2) можно использовать и для описания обязательств игроков, и для описания любых ограничений на их поведение.

Сценарное условие - любая конечная последовательность записей вида (2), каждая из которых может относиться к любому из игроков или к реализации случайного фактора.

Полное сценарное условие - сценарное условие, детерминирующее реализацию неопределенного фактора и выборы всех игроков, кроме одного (оперирующей стороны).

Сценарий - совокупность полного сценарного условия и оптимальной стратегии оперирующей стороны (первого игрока) при его выполнении.

Сценарный план - совокупность сценариев одного из игроков, описывающая все возможные или практически интересные этому игроку реализации игрового взаимодействия.

Операционные игры могут разворачиваться как в дискретном, так и в непрерывном времени, как с непрерывно, так и с дискретно меняющимися счетами. В каждом случае выписывается система соотношений, описывающих динамику операционного игрового взаимодействия. При решении задач, связанных с поддержкой принятия решений в ОПК РФ использовались операционные игры с дискретным временем и с непрерывно меняющимися счетами.

В процессе выполнения ФЦП «Реформирование и развитие ОПК 2002-2006 годы» [3,10,11] в соответствии с требованиями ФЦП разрабатывались программы создания ВИС (вертикально-интегрированных структур) в ОПК России. Задача состояла в том, чтобы из тех предприятий, в кооперации с которыми головным предприятием данного направления ранее производились В и ВТ определённого вида (РСЗО, тепловизоры,

...), определить те, которые подлежат включению в ВИС; определить организационную структуру и юридическую форму ВИС; провести сценарное моделирование ожидаемой динамики основных показателей развития ВИС при различных вариантах её формирования. При выполнении этой работы по ряду ВИС операционное игровое сценарное моделирование сформировалось как методология описания и анализа производственно-экономических процессов.

Далее методология операционного игрового сценарного моделирования использовалась в качестве инструмента сценарного прогнозирования в процессе формирования промышленной политики Правительства Москвы на 2007-2009 годы [4,5,7,11]. При описании функционирования промышленного комплекса Москвы в качестве игроков рассматривались комплекс в целом, его отрасли, ФОИВ, РОИВ, домашние хозяйства Москвы и области, внешние поставщики и потребители продукции и услуг, кредиторы, инвесторы. В совместной работе с ответственными экономистами вырабатывались показатели промышленной политики.

В процессе разработки по заказу Правительства Москвы Генеральной схемы развития и размещения промышленности Москвы рассматриваемая методология использовалась при сценарном прогнозировании основных показателей развития как промышленного комплекса, так и ОПК Москвы [4-7,11]. ОПК разделялся на научную и производственную составляющие. В связи с переходом с ОКОНХ на ОКВЭД промышленный комплекс Москвы разделялся не по отраслям, а по видам экономической деятельности.

В процессе разработки по заказу министерства промышленности и торговли механизмов федерально-регионального взаимодействия в процессе управления развитием ОПК [8,9] операционное игровое описание процесса рассматриваемого взаимодействия использовалось как инструмент качественного, онтологического, когнитивного анализа.

В процессе разработки модуля моделирования СЦ (ситуационного центра) ГАС ГОЗ (государственной автоматизированной системы государственного оборонного заказа) разрабатывались и использовались операционные игровые модели функционирования ОПК в целом, его отдельных отраслей, составляющих ОПК, участвующих в отдельных ФЦП.

В процессе разработки программного комплекса оценки проектов реконструкции предприятий стрелковой отрасли ОПК была разработана и использована операционная игровая модель функционирования рассматриваемого предприятия до и после проведения предполагаемой реконструкции.

Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука. 1971. 384 с.
2. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976. 328 с.
3. Кононенко А.Ф., Шевченко В.В. Задачи управления производственными корпорациями и операционные игры. М.: ВЦ РАН, 2004. 42 с.
4. Кононенко А.Ф., Шевченко В.В. Использование игрового и сценарного моделирования в решении задач управления промышленным комплексом региона. М.: ВЦ РАН, 2007. 48 с.
5. Матвеева Л.К., Ковалев А.М., Кононенко А.Ф., Косенкова С.Т., Шевченко В.В. Применение аппарата операционного игрового моделирования для разработки сценарного плана развития промышленной деятельности. М.: Научно-технический сборник «Вопросы оборонной техники», серия 3, выпуск 1 (338), 2007, стр. 19-27.
6. Кононенко А.Ф., Шевченко В.В. Операционные игры – эффективный инструмент для согласования экономических интересов территориальных и отраслевых

объединений. М.: Научно-технический сборник «Вопросы оборонной техники», серия 3, выпуск 2 (339), 2007, стр. 34-43.

7. Кононенко А.Ф., Шевченко В.В. Методология сценарного игрового операционного моделирования социально-экономических процессов, представленная на примере сценарного прогнозирования развития промышленного комплекса г. Москвы. М.: Научно-технический сборник «Вопросы оборонной техники», серия 3, выпуск 2 (339), 2007, стр. 44-53.

8. Кононенко А.Ф., Карпусь Н.П., Кузин А.Г., Шевченко В.В. Игровые операционные модели процесса федерально-регионального управления развитием ОПК РФ. Научно-технический журнал «Системы и средства связи, телевидения и радиовещания», №1,2 2007, стр. 23-31. М.: Федеральное агентство по промышленности, ОАО «ЭКОС», 2007.

9. Кононенко А.Ф., Карпусь Н.П., Кузин А.Г., Шевченко В.В. Классификация и анализ механизмов федерально-регионального взаимодействия при управлении развитием ОПК РФ. Научно-технический журнал «Системы и средства связи, телевидения и радиовещания», №1,2 2007, стр. 32-40. М.: Федеральное агентство по промышленности, ОАО «ЭКОС», 2007.

10. Кононенко А.Ф., Карпусь Н.П., Кузин А.Г., Шевченко В.В. Об инструментарии экономико-математического моделирования процессов управления в ОПК РФ. Научно-технический журнал «Системы и средства связи, телевидения и радиовещания», №1,2 2007, стр. 20-22. М.: Федеральное агентство по промышленности, ОАО «ЭКОС», 2007.

11. Кононенко А.Ф., Шевченко В.В. Операционные игры. Теория и приложения. М.: ВЦ РАН, 2013. - 136 с.

Experience in the use of operational gaming scenario modeling in the defense industry

V.V. Shevchenko

CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Имитационное моделирование раскрытия информации в мобильных сетях сотовой связи, используемых в зонах локальных конфликтов

И.А.Шеремет¹, Д.М.Михайлов²

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия¹

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия²

В настоящее время ключевой тенденцией развития области информационных технологий все еще остается увеличение доли смартфонов и планшетных компьютеров по отношению к традиционным персональным компьютерам – 70,8% и 28,2% соответственно. При этом прирост доли продаваемых смартфонов и планшетных компьютеров составил 50% за год [1].

Смартфон, с точки зрения состава функциональных узлов, является компьютером с небольшими функциональными отличиями, к которым, в частности, относится наличие GSM-модема. Смартфон так же работает под управлением операционной системы (ОС), которая во многом аналогична ОС для компьютеров, хотя и имеет некоторые принципиальные отличия.

При этом смартфоны хранят и обрабатывают оперативно значимые данные: списки контактов, частная переписка с использованием SMS, заметки, которые пользователь делает с использованием специального программного обеспечения, списки вызовов

абонентов с привязкой ко времени, электронные почтовые сообщения и др.

Государственные служащие также используют смартфоны и могут хранить на них личные данные и служебную информацию. Существенно, что круг общения государственных лиц, частная почта, частная переписка и заметки могут представлять не меньшую ценность для злоумышленников, чем служебная информация

Существуют тенденции, которые делают актуальным вопрос обеспечения защиты мобильных сетей сотовой связи (МССС) от атак со стороны злоумышленников

Во-первых, рост числа смартфонов, работающих под управлением ОС, приводит к росту числа вирусов для них.

Во-вторых, наличие у смартфона модема для получения доступа в сеть подвижной сотовой связи, означает, что у нарушителей появляется канал управления мобильным устройством.

В-третьих, 95% компаний, выпускающие самые распространенные ОС, зарегистрированы и базируются в США [2], где они обязаны предоставлять негласно любые сведения о своих клиентах государству. Подтверждением этих данных стала информация, опубликованная бывшим сотрудником Агентства национальной безопасности Эдвардом Сноуденом [3].

В-четвертых, все современные смартфоны имеют встроенный GPS/ГЛОНАСС передатчик, данные с которого злоумышленник может запросить без ведома пользователя с использованием скрытых команд операционной системы.

Все сказанное подтверждает актуальность проблемы обеспечения защиты от раскрытия (хищения) пользовательских данных, обрабатываемых и хранимых на мобильных устройствах и циркулирующих в МССС. Важно отметить, что вопросы обеспечения защиты от возможных вредоносных воздействий в настоящее время в Российской Федерации проработаны недостаточно из-за быстрых изменений объекта исследования, вызванных непрерывным появлением новых технологий мобильной связи и связанных с ними угроз.

Для того, чтобы выяснить, какой набор средств необходим конкретной бизнес-структуре, государственному органу или всей стране для предотвращения раскрытия хранимых данных потенциальными противниками, необходимо средство моделирования, которое обеспечивало бы определение степени раскрытия данных с мобильных устройств в зависимости от времени.

Степенью раскрытия данных будем называть функцию $q(t) = \frac{\Delta V(t)}{V}$, где V – общий объем данных, хранимых на мобильном устройстве, $\Delta V(t)$ – объем данных, раскрытых к моменту t .

В основу рассматриваемого в настоящем докладе моделирующего комплекса положена следующая теорема, характеризующая функцию степени раскрытия данных и базирующаяся на двух практически обоснованных условиях.

Условие 1.

Передача информации в любом процессе считается непрерывной во времени.

Условие 2.

Для любого количества n (в общем случае $n \rightarrow \infty$) телефонов в сети подвижной сотовой связи на интервале времени $[0, T]$ всегда существуют интервалы времени $[0, \hat{t}]$ и $[\hat{t}, T]$ (возможно сколь угодно малые), в течение которых раскрывается информация лишь на одном телефоне.

Теорема.

Степень раскрытия данных одного типа в сети подвижной сотовой связи с n телефонами является заданной на отрезке $[0, T]$ непрерывной монотонно возрастающей кусочно-линейной функцией времени $q_n(t)$, $q_n(0) = 0$.

Доказательство.

Пусть A – область действия сети подвижной сотовой связи с n телефонами. Раскрытие данных одного типа на отдельно взятом i -м телефоне ($i=1, \dots, n$) происходит по линейному закону: $q_i(t) = \frac{\Delta V_i}{\Delta t_i V_n} (t - t'_i) = k_i (t - t'_i)$, где $t \in [t'_i, t''_i] \subset [0, T]$, V_i – исходный объем данных на i -м телефоне, ΔV_i – максимальный объем данных, который может быть раскрыт на i -м телефоне, причем необходимое для этого время $\Delta t_i = t''_i - t'_i$, k_i – скорость раскрытия данных на i -м телефоне, V_n – суммарный объем данных, который находится при $t=0$ на n телефонах, т.е. $V_n = \sum_{i=1}^n V_i$. Тогда на одном и том же интервале времени одновременное раскрытие данных на m телефонах ($m \leq n$) происходит по линейному закону с суммарной скоростью $\sum_{i=1}^m k_i$.

Действительно, для произвольно взятого телефона с номером i справедливо

$$q_i(t) = \frac{k_i}{2} (t''_i - t'_i + |t - t'_i| - |t - t''_i|), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $t \in [0, \infty]$.

Тогда

$$q_n(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t). \quad (1)$$

Поскольку все $q_i(t)$ – монотонно возрастающие кусочно-линейные функции (КЛФ), то их сумма $q_n(t)$ имеет те же свойства.

Из (1) непосредственно следует

$$q_n(0) = 0, \quad q_n(T) = \frac{1}{V_n} \sum_{i=1}^n \Delta V_i \leq 1.$$

Теорема доказана.

В условиях, когда МССС имеют различную модификацию, разное число пользователей и другие параметры, использование исключительно математического (аналитического) моделирования является крайне сложным, в результате чего гораздо удобнее использование имитационного моделирования. В случае МССС имитационное моделирование является, по-видимому, единственной возможностью постановки и «проведения» экспериментов, так как организация натуральных экспериментов крайне затруднительна.

Целью имитационного моделирования является получение зависимости степени раскрытия информации пользователей МССС в течение времени в зависимости от наличия в ней тех или иных средств защиты информации.

Концептуальная структура модели основывается на следующем уточнении условий моделирования:

внедрение всех технических решений защиты информации в МССС достаточно дорогостоящее;

МССС имеет ограниченное число пользователей и ограниченную площадь охвата (функционирования системы);

заказчик защищенной системы имеет достаточно хорошее представление о возможностях потенциальных злоумышленников.

Разрабатываемую имитационную модель прежде всего стоит рассматривать в практическом применении для защиты информации во время локальных вооруженных конфликтов. Будем считать, что потенциальный конфликт, в течение которого потенциальный противник хочет получить данные, развивается в течение конечного периода времени продолжительностью T . Считается также, что военная система связи полностью неуязвима, а каждое средство защиты, используемое в МССС, имеет свое время компрометации (взлома).

Первичными целями злоумышленника (противника), как правило, являются:

1. местоположение мобильных устройств (геолокационные данные L);
2. коммуникационные данные (голосовые данные V и файловые данные F);
3. личные данные пользователей (персональные F и файловые данные P).

Далее противник с помощью специальных алгоритмов может получить данные о численности и местоположении личного состава, после чего посредством комплексной аналитической обработки коммуникационных данных и личных данных пользователей МССС вскрыть планы действий подразделений и соединений (включая информацию об их возможных перемещениях).

При моделировании учитывается, что в целях защиты информации в МССС могут быть использованы следующие технические решения из области защиты информации.

1. Защищенная операционная система, имеющая сертификат ФСБ России;
2. Программный продукт для мобильных устройств, который позволяет обнаруживать, что мобильный телефон подключен к настоящей или виртуальной базовой станции (ГХ);
3. Мобильное устройство с доверенной аппаратной платформой;
4. Доверенная базовая станция (ДБС);
5. Доверенное коммутационное оборудование сотового оператора;

Потенциальные возможности противника проистекают из использования недоверенного оборудования вместо любого из перечисленных.

В результате моделирования должна быть получена временная зависимость получения противником данных в зависимости от объема инвестиций в оснащение личного состава защищенными средствами сотовой связи, а также переоборудования коммутационного оборудования операторов МССС в регионе конфликта.

Входными данными для одного сеанса применения моделирующего комплекса являются следующие параметры.

1. Бюджет на систему защиты;
2. Площадь, на которой возможен (происходит) конфликт и расположены средства связи МССС;
3. Время развертывания военной системы связи (считается, что после развертывания данной системы мобильные устройства личным составом боевых подразделений уже не используются);
4. Количество личного состава, уже дислоцированного в зоне конфликта (в случае, если речь идет о приграничных военных действиях);
5. Распределение бюджета на закупки каждого класса средств защиты и количество этих средств;
6. Характеристики местности в зоне конфликта (равнинная, горная).

Построенная имитационная модель позволяет варьировать входные параметры и получать зависимости соответствующих значений выходных параметров от времени.

Модель системы реализована посредством программного инструментария AnyLogic, который обладает современным графическим интерфейсом и позволяет использовать для разработки моделей язык Java.

В качестве агентов в системе для описанной системы используются следующие:

1. Мобильный телефон
2. Базовая станция
3. Коммутационное оборудование
4. Виртуальные базовые станции противника
5. Штаб потенциального противника

Для иллюстрации возможностей разработанного моделирующего комплекса рассмотрим базовый случай, который характеризуется использованием МССС на площади 3 квадратных километра участка GSM связи в составе 5 коммутаторов с размещенными на этой площади 50 пользователями мобильных устройств, которые не защищены.

Моделировалось внедрение следующих средств защиты:

1. Изменение количества установленных копий доверенных ОС от 0 до 35;
2. Изменение количества установленных копий ПО «ГХ» от 0 до 45;
3. Изменение количества доверенных коммутаторов сети от 0 до 3.

Полученные в результате моделирования графики зависимостей позволяют сделать выводы о целесообразности использования для различных целей, связанных с защитой сети GSM, различных продуктов. Степень раскрытия личных данных и точных геолокационных данных на конец 100 единиц модельного времени при стандартных параметрах – 9% и 72% соответственно. Увеличение количества установленного ПО «ГХ» снижает скорость раскрытия всех видов данных до примерно середины рассматриваемого интервала времени. Конечное раскрытие личных данных на степень раскрытия точных геолокационных данных практически не влияет (3% и 72%).

Увеличение количества используемых доверенных ОС вместо обычных ОС, приводит к невозможности получения злоумышленником данных на начальных этапах. При этом степень конечного раскрытия личных данных и точных геолокационных данных снижается (6% и 52%). Замещение обычных коммутаторов сети доверенными замедляет раскрытие всех типов данных на начальных этапах и снижает конечное раскрытие данных о численности личного состава и точных геолокационных данных (98% и 70%), но приводит к увеличению в долгосрочном периоде раскрытия личных данных, что можно объяснить раскрытием информации любого мобильного устройства при взломе коммутатора сети. Это возможно при использовании достаточно мощного криптоаналитического оборудования [5].

Разработанная имитационная модель позволяет полностью воссоздать картину возможных последствий использования МССС в зоне конфликта с учетом возможностей потенциального противника по получению доступа к информации мобильных устройств. Имитационная модель позволяет варьировать количественные варианты разработанных средств защиты информации и делать экономические расчеты, насколько повышается защищенность информации в зависимости от инвестиций в различные средства защиты. Гибкость модели определяется универсальностью интерфейса, количеством предусмотренных начальных параметров и тем, что сама модель создана на распространенном языке программирования Java. Одним из главных преимуществ представленной модели является разделение информации на несколько классов, которые возможно защищать различными разработанными продуктами. Степень защищенности той или иной чувствительной информации можно варьировать в зависимости от целей, стоящих перед командованием в определенной ситуации.

Список литературы

1. Worldwide Quarterly PC Tracker. Product Information. 2013. URL: http://www.idc.com/tracker/showproductinfo.jsp?prod_id=1 (дата обращения: 17.09.2013).

2. Desktop Top Browser Share Trend [Electronic resource]: Market Share Reports, November, 2012 to September, 2013. URL: <http://www.netmarketshare.com/> (дата обращения: 15.09.2013).
3. The Guardian [Electronic resource]: Verizon forced to hand over telephone data – full court ruling. 2013. URL: <http://www.theguardian.com/world/interactive/2013/jun/06/verizon-telephone-data-court-order> (дата обращения: 21.12.2013).
4. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. М.: Физматлит, 2002. 320 с.
5. Столингс В. Криптография и защита сетей: принципы и практика. 2-е изд.: Пер. с англ. М.: Изд. Дом Вильямс, 2001. С. 8-14.

Simulation modeling of information disclosure in mobile cellular networks used in areas of local conflicts

I. A. Sheremet¹, D. M. Mikhailov²

¹*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia*

²*Moscow state University named after M. V. Lomonosov, Moscow, Russia*

Legal and ethical issues of deweaponization of advanced technologies in the area of lethal autonomous weapons systems*

A.V. Rozhnov, G.E. Slepko, and V.I. Goncharenko

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The report proposes a discussion of expert opinion of the legal and ethical issues of deweaponization of advanced technologies in the area of autonomous systems. Materials are used and based on an analysis of official sources from 2017 [1].

Where does legal accountability and liability reside for existing or planned autonomous systems? With the planner-developer, the legal owner, the user and/or the machine?

What are the main features of national or regional laws planned or already in place for the regulation of autonomous systems such as driverless cars, entertainment or companion robots and chatbots [2, 3]?

Are there existing codes of conduct or industry standards that can have relevance for the lethal autonomous weapons systems (LAWS) discussion [4, 5]? What is of relevance to the certain conventional weapons in these reference documents?

Are there regulatory insights from other domains such as genetics?

Could international humanitarian law developed for human and State-controlled behaviour continue to apply mutatis mutandis to potentially autonomous machines and through which mediatory mechanisms?

How do potential LAWS fit with existing national weapons review prior to development, testing and deployment?

Are there legal gaps in regard to potential autonomous systems in other international policy domains such as trade (Rules of Origin etc.) and intellectual property?

Can machines be truly intelligent in the sense of humans (phenomenally conscious, intentional, creative, empathic, evolutionary, free agents with embodied intelligence)?

What system of ethics or specific ethical values could apply to machines? How can different views of consciousness and human-material world interaction in different ethical/theological systems be reconciled in a universally applicable set of injunctions for learning machines?

*This research is partly supported by the Presidium of the Russian Academy of Sciences, Program №30 "Theory and Technologies of Multi-level Decentralized Group Control under Confrontation and Cooperation".

Ethics/morality related concerns have focused so far on machines taking life. What about the human-machine pair acting collaboratively or human enhancement?

How can these ethical injunctions be coded? Can a machine become a moral being?

The report was used in conducting topic modelling on fundamental research on topics in 2018 [5, 6, 7]: the transformation of law in the conditions of the digital technologies development, the model of legal regulation of international scientific and technical cooperation and international integration of Russia.

References

1. Food-for-thought Paper / Submitted by the Chairperson // Examination of various dimensions of emerging technologies in the area of lethal autonomous weapons systems, in the context of the objectives and purposes of the Convention, Item 6 of the provisional agenda, CCW/GGE.1/2017/WP.1, Geneva, 13–17 Nov. 2017.
2. Republic of Korea's "Intelligent robots development and distribution act".
3. European Union's Parliament Committee on Legal Affairs' report 2015/2103 (INL).
4. Principles of Robotics. UK EPSRC-AHRC.
5. P7000-7002 Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), Global Initiative for Ethical Considerations in Artificial Intelligence & Autonomous Systems.
6. Rozhnov A.V. Autonomous systems evolution, "Army-2016", Convention and Exhibition Center "Patriot" (<http://www.patriot-expo.ru>), 2016.
7. Russian Foundation for Basic Research. - URL: <http://www.rfbr.ru>.

Расширения моделей боя с учетом морального фактора

В.В. Шумов,

Международный научно-исследовательский институт проблем управления, Москва, Россия

Моделирование боя (конфликта) имеет давнюю историю (см. напр., работы М.П. Осипова и Ф.У. Ланчестера [1, 2]). Данный доклад является продолжением серии работ [3, 4], в которых предпринята попытка учета морального фактора в моделях боя. На основе положений военной социологии разработаны расширения двух групп моделей боя. При большом числе участников конфликта целесообразно использовать расширенные модели ланчестерско-осиповского типа, учитывающие моральные потенциалы участников конфликта и позволяющие прогнозировать ход и исход боя не только на начальном этапе боя, но и на более поздних стадиях. При малом числе участников конфликта целесообразно использовать расширенную вероятностную модель конфликта, учитывающую моральные потенциалы сторон и основные тактические характеристики боевых единиц.

К. фон Клаузевиц отмечал, что война есть акт насилия, имеющий целью заставить противника выполнить нашу волю [5]. По Н.Н. Головину всякий бой кончается отказом от него одной из сражающихся сторон, т. е. чисто психологическим актом [6]. В «Науке о войне» Н.Н. Головин выполнил блестящее исследование о влиянии потерь на исход боя. Важнейшим фактором победы войска в бою является процент «кровавых» потерь (потери ранеными и убитыми), при котором войско все еще не утрачивает боеспособность (моральный дух) [7].

В бою его участники делятся на три группы [6, 7]:

- 1) пораженные (убитые или раненные);
- 2) активно участвующие в конфликте;
- 3) уклоняющиеся от участия в конфликте.

Пусть имеются две стороны, участвующие в конфликте. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) численность участников первой (второй) стороны в момент времени $t > 0$, численности в нулевой момент времени – x_0 и y_0 соответственно. Исключим из рассмотрения операционные потери (пропорциональные численности своих войск) и ввод (вывод) резервов.

Доли пораженных бойцов сторон в момент времени $t > 0$ равны:

$$u_t = \frac{x_0 - x(t)}{x_0}, \quad v_t = \frac{y_0 - y(t)}{y_0}, \quad (1)$$

В соответствии с основным законом психофизики в форме С. Стивенса (любой бой есть социально-психологический акт), вероятности отказа от активного участия в конфликте бойцов первой и второй стороны равны:

$$F_x(u_t) = (u_t)^A, \quad F_y(v_t) = (v_t)^B, \quad (2)$$

где A и B – параметры модальности. В терминах психофизики вероятности отказа от боя есть реакция индивидов на стимул (долю пораженных бойцов). Используя измеримые показатели морального потенциала сторон – проценты выдерживаемых кровавых потерь

(убитыми и ранеными) бойцами первой μ_x и второй μ_y сторон, из условий (по определению медианы)

$$0,5 = (\mu_x)^A, \quad 0,5 = (\mu_y)^B$$

находим:

$$A = \ln 0,5 / \ln(\mu_x), \quad B = \ln 0,5 / \ln(\mu_y). \quad (3)$$

Запишем систему уравнений динамики боя с переносом огня, учитывающих психологические качества бойцов сторон (по противнику ведут огонь непораженные и не отказавшиеся от боя бойцы):

$$\dot{x}(t) = -a_y y(t)(1 - F_y(v_t)), \quad \dot{y}(t) = -a_x x(t)(1 - F_x(u_t)), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (4)$$

где $\dot{x}(t) = dx/dt$, $\dot{y}(t) = dy/dt$, a_x (a_y) – параметр, отражающий боевую производительность (количество поражаемых единиц противника в единицу времени) боевой единицы первой (второй) стороны.

Модель боя (4), учитывающая показатели боевого духа при отсутствии целенаправленных воздействий, имеет простой вид:

$$\dot{x}(t) = -a_y y(t) \left(1 - \left(\frac{y_0 - y(t)}{y_0} \right)^B \right), \quad \dot{y}(t) = -a_x x(t) \left(1 - \left(\frac{x_0 - x(t)}{x_0} \right)^A \right). \quad (5)$$

Модель (5) позволяет оценить ход боя не только на начальном этапе боя, но и на более поздних его стадиях. Полученное расширение уравнений Осипова–Ланчестера не противоречит теории и практике боя: небоеспособными признаются соединения, части и подразделения при наличии в них менее 40% боевого состава [8, с. 210].

Для борьбы с небольшими боевыми группами противника (террористические группы, банды и другие формирования с числом боевых единиц до 500) метод динамики средних (и основанные на нем ланчестеровские модели) дает существенные погрешности. Поэтому он должен быть дополнен другими методами и моделями.

С. Скапердас [9] предложил следующую функцию успеха в конфликте (вероятность победы первого игрока):

$$p_1(x, y) = \frac{g(x)}{g(x) + g(y)}, \quad (6)$$

где: x – количество материального ресурса (усилий) в распоряжении первого игрока; y – количество материального ресурса (усилий) в распоряжении второго игрока; g – функция, задающая технологию конфликта.

Оперируя показателями μ_x и μ_y , характеризующими моральный дух войска, выражение (6) можно переписать в виде:

$$p_1(x, y) = \frac{\alpha \mu_x x}{\alpha \mu_x x + \mu_y y} = \frac{\alpha \rho x}{\alpha \rho x + y}, \quad \rho = \lambda / \mu. \quad (7)$$

Показатель α отражает отношение технологических возможностей сторон и умений командиров по использованию социально-технологических факторов в бою (сражении, конфликте). Исходя из определения боя (совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск [8]) и его принципов параметр боевого превосходства первой стороны вычислим с использованием определения среднего геометрического (относительных величин):

$$\alpha = \sqrt[4]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}, \quad \alpha_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (8)$$

где: α_1 – коэффициент превосходства первой стороны во всестороннем обеспечении; α_2 – коэффициент превосходства в средствах разведки, связи и навигации; α_3 –

коэффициент превосходства в маневренности; α_4 – коэффициент превосходства в огневых возможностях.

Коэффициент α_1 отражает опыт и мастерство командиров по подготовке к бою разнородных подразделений, обеспечению непрерывного боевого и других видов обеспечения. Г. К. Жуков на военно-научной конференции отмечал: «По опыту не только разбираемой нами операции, а и всех операций которые мне пришлось готовить и проводить, я должен сказать, что без предварительной и тщательной подготовки командного состава и войск успеха в бою и операции не достигалось» [10].

Коэффициенты α_2 – α_4 должны вычисляться с учетом противодействия противника. В частности коэффициент α_4 должен использовать эффективную дальность поражения противника с учетом имеющихся у него средств защиты. Если возможности мониторинга обстановки и обнаружения противника существенно различны для дня и ночи, определенных условий погоды, то расчеты следует выполнять отдельно для каждого состояния природы.

Список литературы

1. Осипов М. П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. 1915. № 6. С. 59–74; № 7. С. 25–36; № 8. С. 31–40; № 9. С. 25–37.
2. Lanchester F. W. Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. London: Constable and Co, Ltd., 1916. 243 p.
3. Павловский Ю.Н. О факторе Л.Н. Толстого в вооруженной борьбе // Математическое моделирование. 1993. Т. 5. № 1. С. 3-15.
4. Шумов В.В. Учет психологических факторов в моделях боя (конфликта) // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8. № 6. С. 951-964.
5. Клаузевиц К. О войне. – М.: Госвоениздат, 1934.
6. Головин Н. Н. Исследование боя. Исследование деятельности и свойств человека как бойца. Книга 2. Статьи и письма. – М.: ВАГШ, 1995. – 303 с.
7. Головин Н. Н. Наука о войне. О социологическом изучении войны. – Париж: Издательство газеты «Сигнал», 1938. – 242 с.
8. Война и мир в терминах и определениях: военно-политический словарь / Под общ. ред. Д. Рогозина. – М.: ПоРог, 2004. – 334 с.
9. Skarpedas S. Contest success functions // Economic Theory. – 1996. – № 7. – P. 283–290.
10. Речь Г. К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г. // Военная мысль. – 1985. Спец. выпуск (февраль). – С. 3, 17–33.

Extensions of combat models taking into account the moral factor

V.V. Shumov,

International Research Institute for Advanced Systems, Moscow, Russia

Алфавитный указатель авторов

А

Агасандян Г.А. 284,289
Акинфиев В.К. 7
Алескеров Ф.Т. 443,447
Алимов Д.А. 159
Антипина Е.А. 58
Апраушева Н.Н. 514
Архипов В.А. 326
Афраймович Л.Г. 55
Ахуньянова С.А. 294

Б

Багров Н.С. 486
Баева Н.Б. 205
Байрамов О.Б. 298
Балашов В.В. 58
Бардадым Т.А. 120
Бекларян Л.А. 487
Белолипецкий А.А. 351
Белотелов Н.В. 354
Белоусов Ф.А. 129,164
Белявский Г.И. 10
Белянкин Г.А. 165
Березовский О.А. 120
Березкин В.Е. 130
Блюмин С.Л. 534
Бобрик Г.И. 243
Бобрик П.П. 243,489
Богомолов А.И. 187
Божко А.Н. 268
Бритков В.Б. 340
Бродский Ю.И. 449
Бронштейн Е.М. 60

В

Валуев А.М. 357,494
Васин А.А.
165,247,454,458
Вахранев А.В. 311
Воронин А.А. 14
Воронцова Е.А. 497
Вуйтович М. 403
Вышинский Л.Л. 270

Г

Гайдамака Ю.В. 518
Гайдаш К.А. 537,541

Гармаш М.В. 210
Гармашов И.А. 210
Гасанов И.И. 301
Гасников А.В. 497
Гиндуллин Р.В. 60
Голиков А.И. 99
Гончар Д.Р. 62
Горбунова А.В. 518
Горбунов Э.А. 497
Горелов М.А. 17,398
Грибов А.Г. 403
Григорьева О.М. 247
Гринько П.С. 498
Гришунин С.В. 317
Гудков С.М. 433

Д

Давидсон М.Р. 498
Данилова Н.В. 10
Двуреченский П.Е. 497
Демин С.С. 443
Денисов Д.В. 486
Дикусар В.В. 153,403
Дмитрук А.В. 105
Дьячкова Н.Ф. 317
Дьяченко Ю.В. 552

Е

Евтушенко Ю.Г. 99
Еналеев А.К. 23
Ерешко Ант.Ф. 305
Ерешко Арт.Ф. 311
Ерешко Ф.И.
17,275,301,541
Ермолова М.А. 170
Ерохин И.Л. 67

Ж

Жемчугов Н.А. 28
Жукова А.А. 221
Жуковский В.И. 406
Журбенко Н.Г. 107

З

Зенюк Д.А. 463
Зубарев А.А. 69,557

И

Иванов А.А. 447

Ильин С.Ю. 55
Исаева И.И. 14
Искаков М.Б. 30

К

Каменев Г.К.
133,175,360
Каменев И.Г. 179
Карабекян Д.С. 447
Карминский А.М. 317
Карпенко А.П. 113
Кашенков А.Р. 32
Катаргин Н.В. 184,187
Кипяткова В.А. 191
Киселев В.Г. 345
Ковешников В.А. 69,557
Кокорин В.А. 372
Колданов П.А. 252
Колесник Г.В. 464
Кононов Д.А. 195
Королев А.В. 210
Коротченко А.Г. 115
Косоруков О.А. 74
Коноваленко И.А. 354
Костенко В.А. 77
Крейнес М.Г. 200
Крылатов А.Ю. 500
Кудрявцев К.Н. 406,408
Куковеров М.В. 253
Кульба В.В. 275
Куприянов Б.В. 81
Куркин Е.В. 205

Л

Лаптин Ю.П. 120
Лебедев В.Н. 280,412
Лезина З.М. 477
Лепская М.А. 365
Лесик И.А. 247
Логинов А.К. 477
Лозинская М.А. 357
Луценко М.М. 414
Люман В.Ю. 547

М

Мадера А.Г. 208
Малинов В.Г. 124

Марков Б.В. 129
Матвеев В.Д. 210
Меденников В.И. 275
Меньшиков И.С.
368,379,420
Меньшикова О.Р.
368,379,420
Мехтиев А.Я. 69,557
Мирошник С.Н. 83
Митрофанов А.В. 351
Михайлов Д.М. 565
Мохонько Е.З. 424
Мячин А.Л. 473

Н
Назарова В.М. 354
Назаров А.А. 524
Назмутдинов И.С. 552
Наумов В.А. 518
Нефедов В.Н. 127
Нижегородцев Р.М. 214
Николаев П.В. 454
Новикова Н.М. 428,433
Ногин В.Д. 138

О
Обросова Н.К. 159
Огнева М.С. 454
Оленёв Н.Н. 194
Охрименко В.В. 298

П
Павлова Н.Г. 218
Панкратова Я.Б. 28
Пастухова Ю.И. 372
Петров Л.Ф. 326
Петросян Л.А. 28
Поудиновский В.В. 141
Полюдова Д.С. 420
Полякова Е.В. 191
Поспелов И.Г. 221
Поспелова И.И. 428
Пройдакова Е.В. 502

Р
Рабинович Я.И. 144
Разжевайкин В.Н. 375
Рожнов А.В. 554
Ройзензон Г.В. 340

Рытова А.И. 520

С
Савадян А.С. 165
Сагирова А.Р. 221
Самуйлов К.Е. 518
Самыловская А.К. 105
Сандомирская М.С. 256
Саркисов В.Г. 330
Седуш А.О. 379
Сергеев А.С. 86
Симонов П.М. 294
Слугин В.Г. 557
Смирнов А.С. 77
Сморякова В.М. 115
Соломаха А.Г. 226
Соломаха Г.М. 226
Сорокин С.В. 514
Соломаха Г.М. 547
Стабулит И.С. 408
Старков Д.М. 420
Суслов Н.И. 229
Сытов А.Н. 332

Т
Тимме Е.А. 385
Тисс Ж.-Ф. 256
Трембачёва О.С. 155
Турко Н.И. 541
Тюленева А.С. 458

У
Угольницкий Г.А. 10,35
Умывакин В.М. 387
Усов А.Б. 35
Ухоботов В.И. 408
Ушев Ф.А. 256

Ф
Фаллер Д.С. 463
Федянин Д.Н. 39

Х
Хачатрян Н.К. 487
Хоботов Е.Н. 170
Худяшова Е.Е. 524
Хуснуллин Н.Ф. 96

Ц
Цодикова Я.Ю. 477
Цодиков Ю.М. 233

Цыганов В.В. 42

Ч
Чеботарев П.Ю. 477
Черепанов В.М. 480
Черникова Н.Ю. 218
Чечулин В. Л. 237
Чхартишвили А.Г. 47

Ш
Шананин А.А. 159
Швец А.В. 387
Швыдун С.В. 443
Шевцов О.Ю. 69,557
Шевченко В.В. 50,563
Шевченко Д.П. 280
Шеремет И.А. 565
Шестаков И.Л. 458
Широколобова А.П. 500
Шпитонков М.И. 393

Э
Эдиев Д.М. 238

Я
Якуба В.И. 447
Яминов Р.И. 336

А
Alekseenko A.E. 513
Aleskerov F. 350
Alparslan Gök S.Z.
436,439,440
Andrianova D.A. 506
Antipin A.S. 110

В
Buldyayev A. 350
Burlov V.G. 510

С
Chehovich Y.V. 511

Д
Dresvyanskaya N.V. 22

Е
Ergun S. 440

Ф
Filatov A.Yu. 259,261,263
Furugyan M.G. 89,92

G

Gasnikov A. 512
Grachev M.I. 510

I

Ivanova A. 512

K

Kamenev I.G. 506
Karachev A.N. 513
Karminsky A.M. 321
Kartvelishvili I.S.
265,530
Karp D.B. 263
Khamisov O.V.
108,109,259
Khmelnitskaya A.B. 435
Kholodov Y.A. 513
Khoroshilova E.V. 110
Khromova E.P. 321
Korobov A. 148

M

Makolskaya Ya.S. 263
Martinez L. 148
Mazalov V.V. 419
Minarchenko I.M. 259

N

Novikova A.S. 259

O

Olgun M.O. 436,439

P

Palanci O. 436,439
Perevozchikov A.G. 527
Podkovalnikov S.V. 259
Prangishvili A.I. 265

R

Reshetov V.Y. 527
Roy Cerqueti 282

S

Semenov K.S. 259
Semenov K.O. 382

Shonia L.O. 265,530
Shonia O.B. 265,530
Sokolovsky Yu.M. 261

T

Talman D. 435

U

Ukhalova T.S. 259
Usta P. 440

V

Van der Laan G. 435

W

Weber G.W. 436,439,440

Y

Yamilov A. 350
Yanochkin I.E. 527
Yatsalo B. 148

Z

Zeynep S. 439

Научное издание

IX МОСКОВСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ (ORM2018)

Москва, 22–27 октября 2018 г.

Труды

В двух томах

ТОМ II

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Обложка: *М. А. Еронина*

Подписано в печать 26.09.2018 г.
Формат 60х90 1/8. Усл. печ. л. 72,5.
Тираж 184 экз. Изд. № 199.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495) 939–3890/91. Тел./Факс 8(495) 939–3891

Отпечатано в типографии ООО «Паблит»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 230-20-52
Заказ №