

ТАВРИЧЕСКИЙ  
ВЕСТНИК  
ИНФОРМАТИКИ И  
МАТЕМАТИКИ

№ 3 (40) ' 2018

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ  
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

**ОСНОВАН В 2002 ГОДУ**

**ISSN 1729-3901**

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ ([https://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=48863](https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863)).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

УДК: 517.9

MSC2010: 37C05

## О НОВЫХ ИНВАРИАНТАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КУПКИ-СМЕЙЛА НА СФЕРЕ БЕЗ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ

© А. И. Морозов О. В. Починка

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ  
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКИ, МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК  
ул. БОЛЬШАЯ ПЕЧЕРСКАЯ, д. 25/12, НИЖНИЙ НОВГОРОД, 603155, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ.  
E-MAIL: *olga-pochinka@yandex.ru*

ABOUT NEW INVARIANTS OF КУПКА-SMALE DIFFEOMORPHISMS ON THE SPHERE  
WITHOUT SOURCES AND SINKS.

Morozov A. I. Pochinka O. V.

### Abstract.

We know a lot of cases, when topological entropy of continuous map determine by structure of periodic orbits. The classical result in this field is the Sharkovskiy ordering. Sharkovskiy [6] enter mapping, that turn manifold of natural numbers in to ordered set as follows:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec \dots \\ \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

It is valid for continuous interval maps. The existence of a periodic orbit of period three implies the existence of periodic points of any period and topological entropy is positive. We have different situation for orientation-preserving homeomorphism functioning on twodimensional disk  $\mathbb{D}^2$ : the rotation of the disk have topological entropy zero, but such mapping can have point of any period. In J. M. Gambaudo, S. Van Strien and C. Tresser work [1] they determine hereditary rotation compatible of periodic orbit and proven, that any periodic orbit of orientation-preserving homeomorphism  $f$  on  $\mathbb{D}^2$  with topological entropy zero are hereditary rotation compatible. Moreover, if  $f$  have the smoothness class  $C^{1+\epsilon}$ , than the condition on periodic orbit are necessary and sufficient to conclude that topological entropy of  $f$  equal zero.

It means, that any diffeomorphism with topological entropy zero on the disk have very simple structure of periodic orbits. Around fixed point located periodic orbit of some period, wich is turning around fixed point and then, around every point of periodic orbit turning another periodic orbit. According that, depending on your choice superstructure, appropriate periodic orbit superstructures flow regular have (fig.1) engagement. Thus, irregular engagement of orbit will be a  $C^1$  - barrier.

Cascade periodic orbits of orientation-preserving map on disk can be matched with signature, consisting of a sequence  $l_n, n > 0$  rational numbers, that every  $l_n$  describe, how orbits of period  $q_{n+1}$  associated with orbits of period  $q_n$ . Moreover, with any sequence of signature and periods we

can build orientation-preserving homeomorphism of twodimensional disk with specified signature of cascade periodic orbits. However, exist topological barrier for realisation this cascade with orientation-preserving diffeomorphism of twodimensional disk. Thus, in J. M. Gambaudo, D. Sullivan, C. Tresser [3] work we can see, that sequence  $\lambda_n = \frac{l_n}{q_n}$  is converge for  $C^1$ -map. Limit of this sequence call asymptotic number of rotation.

Classic cascade period doubling on disk have sequence  $\lambda_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$  and realize by infinitely smooth diffeomorphism [3]. In R. Bowen and J. Franks works ([4] и [5])built diffeomorfisms, realize sequence  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$  in smoothness class  $C^1$  and  $C^2$  respectively. Also in work [4] there is a hypothesis about unachievable sequence  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$  for map in smoothness class more than two.

In this work we introduce another invariant, that distinguish diffeomorphisms, wich built using different sequence of signature. We build diffeomorphisms  $f_+, f_- : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , which are double applied period doubling bifurcation to diffeomorphism source-sink with turning in one direction at  $f_+$  and turning in different directions at  $f_-$ . Resultant diffeomorphisms have only one sink point  $\omega_+, \omega_-$ , one source orbit  $\mathcal{O}_{\alpha_+}, \mathcal{O}_{\alpha_-}$  and two saddle orbit  $\mathcal{O}_{\sigma_+^1}, \mathcal{O}_{\sigma_+^2}, \mathcal{O}_{\sigma_-^1}, \mathcal{O}_{\sigma_-^2}$  respectively. Then we consider orbit spaces of the sink basin

$$\hat{V}_+ = (W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+)/f_+, \hat{V}_- = (W_{\omega_-}^s \setminus \omega_-)/f_-$$

and natural projection

$$p_+ : W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+ \rightarrow \hat{V}_+, p_- : W_{\omega_-}^s \setminus \omega_- \rightarrow \hat{V}_-.$$

Since saddle points are hyperbolic, them orbits have invariant neighbourhoods  $U_+^1, U_+^2, U_-^1, U_-^2$ . Let

$$\hat{U}_+^1 = p_+(U_+^1), \hat{U}_+^2 = p_+(U_+^2), \hat{U}_-^1 = p_-(U_-^1), \hat{U}_-^2 = p_-(U_-^2).$$

Threes

$$S_+ = (\hat{V}_+, \hat{U}_+^1, \hat{U}_+^2), S_- = (\hat{V}_-, \hat{U}_-^1, \hat{U}_-^2)$$

we call scheme of diffeomorphisms  $f_+, f_-$ , respectively.

The main result of this paper is the theorem below.

**Theorem 1.** *Scheme  $S_+, S_-$  are not equivalent, that is not exist homeomorphism  $\varphi : \hat{V}_+ \rightarrow \hat{V}_-$ , such that  $\varphi(\hat{U}_+^1) = \hat{U}_-^1, \varphi(\hat{U}_+^2) = \hat{U}_-^2$ .*

**Keywords:** *Kupka-Smale diffeomorphism, cascade of periodic orbits, unstable manifold, stable manifold, orientation-preserving diffeomorphism, topological entropy*

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Хорошо известны случаи, когда топологическая энтропия непрерывного отображения определяется структурой периодических орбит. Классическим результатом в

этом направлении является порядок А.Н. Шарковского. Отношение, введеное Шарковским [6], превращает множество натуральных чисел в упорядоченное множество и притом упорядоченное следующим образом:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec \dots \\ \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Оно действительно для непрерывных отображений интервалов. Согласно этому порядку, существование периодической орбиты периода три влечет наличие периодических точек любого периода и, следовательно, положительное значение топологической энтропии. Для сохраняющего ориентацию гомеоморфизма, действующего на двумерном диске  $\mathbb{D}^2$ , ситуация иная: поворот диска имеет нулевую топологическую энтропию, при этом может иметь точки любого наперед заданного периода. В работе Ж. Гамбадо, С. Ван Стрина и С. Триссера [1] введено понятие *наследственно согласованной по вращению* периодической орбиты и доказано, что все периодические орбиты сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов  $f$  диска  $\mathbb{D}^2$  с нулевой топологической энтропией являются наследственно согласованными по вращению. Более того, если  $f$  имеет класс гладкости  $C^{1+\varepsilon}$ , то описанное условие на периодические орбиты является необходимым и достаточным для того, чтобы топологическая энтропия отображения  $f$  равнялась нулю.

То есть любой диффеоморфизм с нулевой топологической энтропией на диске имеет очень простую структуру периодических орбит. Вокруг неподвижной точки расположена периодическая орбита некоторого периода, которая вращается вокруг неподвижной точки, а затем вокруг каждой точки периодической орбиты вращается другая периодическая орбита. При этом, с точки зрения рассмотрения надстройки, соответствующие периодические орбиты надстроечного потока (см. рисунок 1) имеют регулярные зацепления. Таким образом, не регулярная зацепленность орбит является  $C^1$ -препятствием.

Каскаду периодических орбит сохраняющего ориентацию отображения диска можно сопоставить сигнатуру, состоящую из последовательности  $l_n, n \geq 0$  рациональных чисел таких, что каждое  $l_n$  описывает, как орбиты периода  $q_{n+1}$  связаны с орбитами периода  $q_n$ . Более того, по любой последовательности сигнатур и периодов можно построить сохраняющий ориентацию гомеоморфизм 2-диска с заданной сигнатурой каскада периодических орбит. Однако существуют топологические препятствия для реализации такого каскада сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом 2-диска. А именно, из работы Ж. Гамбадо, Д. Салливана и С. Триссера [3] следует,

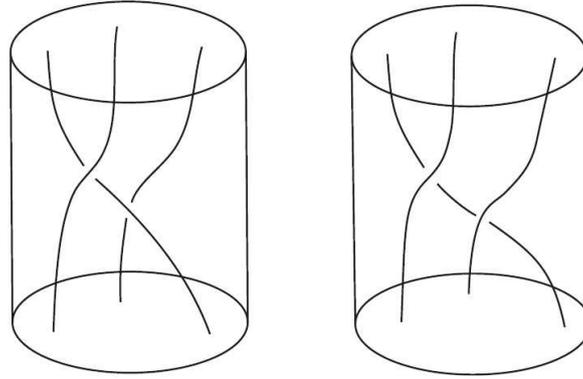


Рис. 1. Отображение слева имеет положительную топологическую энтропию. Изображение справа не дает никакой информации о топологической энтропии отображения.

что последовательность  $\lambda_n = \frac{l_n}{q_n}$  является сходящейся для  $C^1$ -отображений. Предел этой последовательности называется *асимптотическим числом вращения*.

Классический каскад удвоения периодов на диске имеет последовательность  $\lambda_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$  и реализуется бесконечно гладким диффеоморфизмом (см. [3]). В работах Р. Боуэна, Дж. Френкса, [4] и [5] построены диффеоморфизмы, реализующие последовательность  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$  в классах гладкости  $C^1$  и  $C^2$ , соответственно. Также в работе [4] высказана гипотеза о нереализуемости последовательности  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$  отображением класса гладкости большего двух.

В данной работе мы вводим еще один инвариант, различающий диффеоморфизмы, построенные по разным последовательностям сигнатур. Именно, мы строим диффеоморфизмы  $f_+, f_- : S^2 \rightarrow S^2$ , являющиеся результатами дважды примененной бифуркации удвоения периода к диффеоморфизму источник-сток, с вращением в одну сторону в случае  $f_+$  и в разные стороны, в случае  $f_-$ . Результирующие диффеоморфизмы имеют единственную стоковую точку  $\omega_+, \omega_-$ , одну источниковую орбиту  $\mathcal{O}_{\alpha_+}, \mathcal{O}_{\alpha_-}$  и две седловые орбиты  $\mathcal{O}_{\sigma_+^1}, \mathcal{O}_{\sigma_+^2}, \mathcal{O}_{\sigma_-^1}, \mathcal{O}_{\sigma_-^2}$ , соответственно. Далее мы рассматриваем пространства орбит бассейнов стока

$$\hat{V}_+ = (W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+)/f_+, \hat{V}_- = (W_{\omega_-}^s \setminus \omega_-)/f_-$$

и естественные проекции

$$p_+ : W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+ \rightarrow \hat{V}_+, p_- : W_{\omega_-}^s \setminus \omega_- \rightarrow \hat{V}_-.$$

В силу гиперболичности седловых точек, их орбиты обладают инвариантными окрестностями  $U_+^1, U_+^2, U_-^1, U_-^2$ . Положим

$$\hat{U}_+^1 = p_+(U_+^1), \hat{U}_+^2 = p_+(U_+^2), \hat{U}_-^1 = p_-(U_-^1), \hat{U}_-^2 = p_-(U_-^2).$$

Тройки

$$S_+ = (\hat{V}_+, \hat{U}_+^1, \hat{U}_+^2), S_- = (\hat{V}_-, \hat{U}_-^1, \hat{U}_-^2)$$

назовем *схемами диффеоморфизмов*  $f_+, f_-$ , соответственно.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Theorem 2.** *Схемы  $S_+, S_-$  являются не эквивалентными, то есть не существует гомеоморфизма  $\varphi: \hat{V}_+ \rightarrow \hat{V}_-$  такого, что*

$$\varphi(\hat{U}_+^1) = \hat{U}_-^1, \varphi(\hat{U}_+^2) = \hat{U}_-^2.$$

## 2. КАСКАДЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ

Пусть  $g$  — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм на двумерном диске  $\mathbb{D}^2$ . Каскад периодических орбит отображения  $g$  — это последовательность периодических орбит  $\{O_n\}_{n \leq 0}$  периода  $\{q_n\}_{n \leq 0}$  такого, что для каждого  $n \leq 1$  выполняются условия:

1.  $q_n = a_n \cdot q_{n-1}$  с условием  $q_0 = 1$  и  $a_n > 1$ ,
2. Существует набор простых замкнутых попарно не пересекающихся кривых  $C_n^0, \dots, C_n^{q_n-1}$ , которые ограничивают попарно не пересекающиеся диски  $D_n^0, \dots, D_n^{q_n-1}$  со следующими свойствами:
  - а) каждый диск  $D_n^i$  содержит одну точку орбиты  $O_{n-1}$  и  $p_n$  точек орбиты  $O_n$ ,
  - б) кривая  $g(C_n^i)$  изотопна кривой  $C_n^{i+1 \sim \text{mod } q_n}$  в проколоте диске  $\mathbb{D}^2 \setminus \bigcup_{i \leq n} O_i$ ,
  - в)  $\bigcup_{0 \leq i \leq q_n-1} D_n^{i+1} \subset \bigcup_{0 \leq i \leq q_{n-1}-1} D_n^i$ .
  - г) диаметр диска  $D_n^i$  стремится к нулю с увеличением  $n$ .

Пусть  $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$  — дуга, соединяющая тождественное отображение  $f_0$  с отображением  $g = f_1$ , и  $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  — ее продолжение, соединяющее тождественное отображение со всеми итерациями отображения  $g$ , определенное формулой

$$g_t = f^{[t]} \circ f_{\{t\}},$$

где  $[t]$  и  $\{t\}$  — целая и дробная части  $t$ , соответственно. Обозначим через  $l_n$  алгебраическое число оборотов, которые совершает вектор

$$\frac{f_t(x_n) - f_t(x_{n-1})}{\|f_t(x_n) - f_t(x_{n-1})\|}$$

в то время, как  $t$  изменяется от 0 до  $q_n$  (здесь  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^2$ ). Положим

$$\lambda_n = \left\{ \frac{l_n}{q_n} \right\}.$$

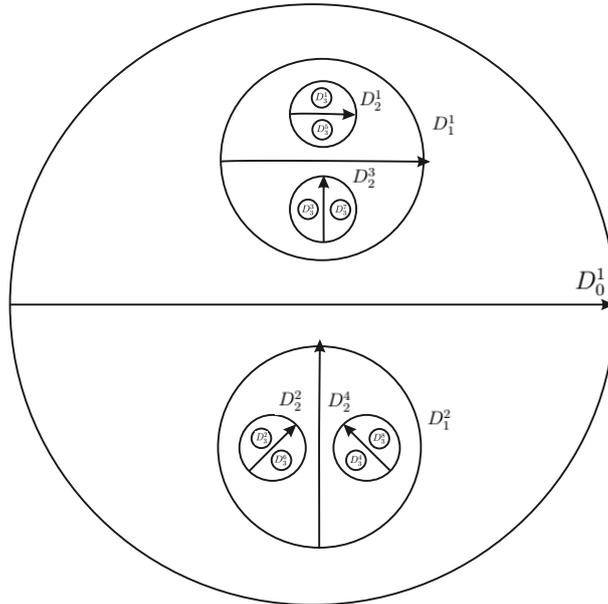


Рис. 2. Индуктивно определенное расположение дисков  $\{D_{n+1}^i\}$  с поворотом оси на угол  $(i - 1)\pi/2^{n+1}$

Согласно [2], число  $\lambda_n$  не зависит от выбора шара  $D_n^i$ , от выбора точки  $x_n$  в шаре  $D_n^i$ , от выбора изотопии  $f_t$  и является топологическим инвариантом гомеоморфизма с точностью до сохраняющего ориентацию сопрягающего гомеоморфизма. Более того, для любого каскада периодических орбит сохраняющего ориентацию  $C^1$ -диффеоморфизма на двумерном диске, последовательность  $\lambda_n$  имеет предел, который называется *асимптотическим числом вращения*.

На рисунке 2 изображены две итерации отображения, построенного в работе [4] и реализующего монотонную последовательность  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$ .

### 3. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ

Чтобы лучше представить конструкцию примеров построенных в работах [4] и [5] мы опишем другой подход к пониманию динамики удвоения периодов. А именно, рассмотрим сдвиг на единицу времени градиентного потока на сфере (см. рисунок 3). Это отображение  $g$  имеет восемь неподвижных точек: сток  $\omega_+$ , седла  $\sigma_+^1, \sigma_+^2, f_+(\sigma_+^2)$  и источники  $\alpha_+, f_+(\alpha_+), f_+^2(\alpha_+), f_+^3(\alpha_+)$ . Если сделать композицию этого отображения с поворотом в кольце  $A_1$  на  $180^\circ$  относительно центральной вертикальной оси (постепенно поворачивая окружности от верхнего края кольца на  $0^\circ$  до нижнего на  $180^\circ$  *orc*, сохраняя поворот на  $180^\circ$  во всех слоях ниже кольца  $A_1$ ) и аналогичным поворотом в

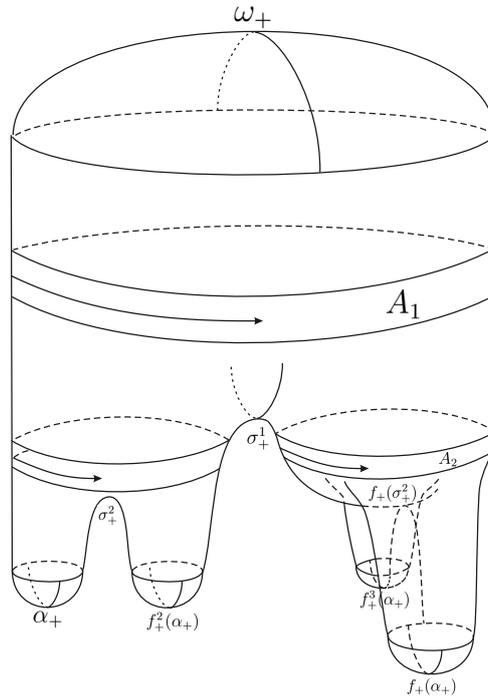


Рис. 3. Градиентный поток на сфере

кольцах  $A_2$  на  $90^\circ$ , результирующее отображение  $f_+$  будет иметь неподвижные точки  $\omega_+, \sigma_+^1$ , точки  $\sigma_+^2, f_+(\sigma_+^2)$  периода 2 и точки  $\alpha_+, f_+(\alpha_+), f_+^2(\alpha_+), f_+^3(\alpha_+)$  периода 4. Динамика диффеоморфизма  $f_-$  отличается только тем, что вращение в кольце  $A_1$  происходит в противоположную вращению в  $A_2$  сторону.

В этом разделе мы введем понятие схемы  $S_\pm$  диффеоморфизмов  $f_\pm$  и установим, что эти схемы не эквивалентны.

Опишем общую идею факторизации, достаточно часто используемую для установления топологических инвариантов диффеоморфизмов поверхности.

Пусть  $\omega$  — неподвижный гиперболический сток поверхностного диффеоморфизма  $f$ . Согласно [8], диффеоморфизм  $f$  в некоторой окрестности точки  $\omega$  топологически сопряжен линейному диффеоморфизму пространства  $\mathbb{R}^2$ , заданному формулой:

$$L(x, y) = \left( \frac{x}{2}; \frac{y}{2} \right).$$

$V_\omega = W_\omega^s \setminus \omega$ . Мы определим  $\hat{V}_\omega = V_\omega / f$ , как пространство орбит действия группы  $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$  на  $V_\omega$  и зададим естественную проекцию  $p_\omega : V_\omega \rightarrow \hat{V}_\omega$ .

Согласно [7], пространство  $\hat{V}_\omega$  диффеоморфно двумерному тору, проекция  $p_\omega$  является накрытием и индуцирует эпиморфизмом  $\eta_\omega : \pi_1(\hat{V}_\omega) \rightarrow \mathbb{Z}$ , определяемый следующим образом. Пусть  $[\hat{c}] \in \pi_1(\hat{V}_\omega)$ . Любое поднятие  $c$  из петли  $\hat{c}$  с началом в

$x \in V_\omega$  имеет конечную точку в  $f^n(x)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$  не зависит от выбора поднятия. Тогда  $\eta_\omega([\hat{c}]) = n$ .

Пусть  $\sigma$  — гиперболическое седло периода  $m_\sigma$  диффеоморфизма  $f$ . Определим линейный диффеоморфизм  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  формулой:

$$A(x, y) = \left(-\frac{x}{2}, 2y\right).$$

Положим  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$ . Заметим, что множество  $U$  инвариантно относительно диффеоморфизма  $A$ . Окрестность  $U_\sigma$  точки  $\sigma$  диффеоморфизма  $f$  называется *линеаризацией*, если существует гомоморфизм  $\mu_\sigma : U_\sigma \rightarrow U$  сопрягающий диффеоморфизм  $f^{m_\sigma}|_{U_\sigma}$  с диффеоморфизмом  $A|_U$ . Окрестность  $U_{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(U_\sigma)$  орбиты  $\mathcal{O}_\sigma = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(\sigma)$  с отображением  $\mu_{\mathcal{O}_\sigma}$ , полученным посредством гомеоморфизма  $\mu_\sigma f^{-j} : f^j(U_\sigma) \rightarrow U, j = 0, \dots, m_\sigma - 1$ , называется *линеаризирующей окрестностью* орбиты  $\mathcal{O}_\sigma$ . Существование линеаризирующей окрестности у любой гиперболической седловой орбиты следует, например, из [7].

#### 4. НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СХЕМ

Рассмотрим пространства орбит бассейнов стока

$$\hat{V}_+ = (W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+)/f_+, \hat{V}_- = (W_{\omega_-}^s \setminus \omega_-)/f_-$$

и естественные проекции

$$p_+ : W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+ \rightarrow V_+, p_- : W_{\omega_-}^s \setminus \omega_- \rightarrow V_-.$$

В силу гиперболичности седловых точек  $\sigma_+^1, \sigma_+^2, \sigma_-^1, \sigma_-^2$ , их орбиты обладают инвариантными линеаризирующими окрестностями, которые мы обозначим через  $U_+^1, U_+^2, U_-^1, U_-^2$ . Положим  $\hat{U}_+^1 = p_+(U_+^1), \hat{U}_+^2 = p_+(U_+^2), \hat{U}_-^1 = p_-(U_-^1), \hat{U}_-^2 = p_-(U_-^2)$ .

Чтобы понять, что схемы  $S_+ = (\hat{V}_+, \hat{U}_+^1, \hat{U}_+^2), S_- = (\hat{V}_-, \hat{U}_-^1, \hat{U}_-^2)$  диффеоморфизмов  $f_+, f_-$  не эквивалентны, на рисунках 4, 5 изображены двумерные кольца, являющиеся фундаментальными областями ограничений диффеоморфизмов  $f_+, f_-$  на  $W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+, W_{\omega_-}^s \setminus \omega_-$  соответственно. В этих кольцах нарисованы проекции линеаризирующих окрестностей после осуществления соответствующих поворотов в нижних кольцах (см. рисунок 3).

Для получения искомого схем, достаточно склеить границы колец. Результатом такой склейки в обоих случаях являются двумерные торы. При этом проекция каждой из окрестностей  $U_+^1, U_-^1$  является кольцом, а проекция каждой из окрестностей  $U_+^2, U_-^2$  является трубчатой окрестностью дуги (см. рисунки 6 и 7). В силу того, что

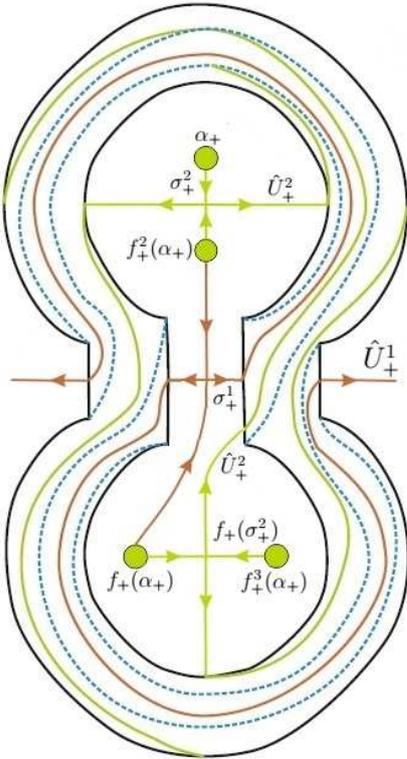


Рис. 4. Проекция  
линеаризующих  
окрестностей по-  
сле поворота на  
 $\pi$  против часовой  
стрелки

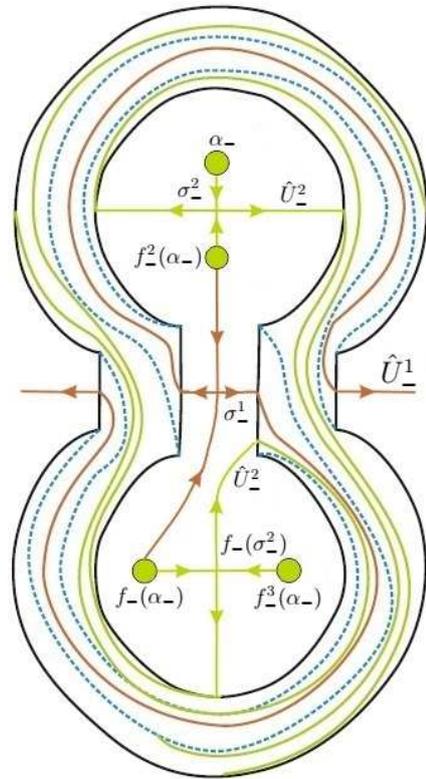


Рис. 5. Проекция  
линеаризующих  
окрестностей после  
поворота на  
 $\pi$  по  
часовой стрелке

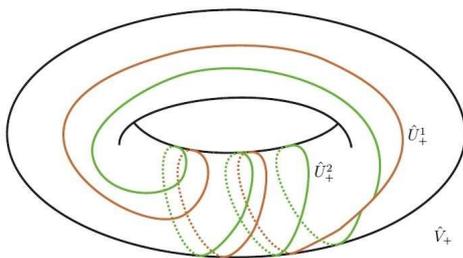


Рис. 6. Схема диф-  
феоморфизма  $f_+$

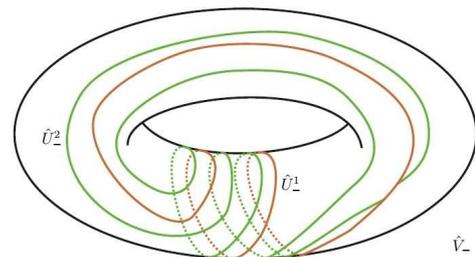


Рис. 7. Схема диф-  
феоморфизма  $f_-$

объединения  $\hat{U}_+^1 \cup \hat{U}_+^2$  и  $\hat{U}_-^1 \cup \hat{U}_-^2$  имеют разные гомотопические типы на двумерном торе, не существует гомеоморфизма  $\varphi : \hat{V}_+ \rightarrow \hat{V}_-$  такого, что  $\varphi(\hat{U}_+^1) = \hat{U}_-^1$ ,  $\varphi(\hat{U}_+^2) = \hat{U}_-^2$ , что и завершает доказательство теоремы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты: введен новый инвариант гомеоморфизмов диска с каскадом периодических орбит — схема отображения. Показано, что этот инвариант различает диффеоморфизмы, построенные по разным последовательностям сигнатур. Именно, мы построили диффеоморфизмы двумерной сферы, являющиеся результатами дважды примененной бифуркации удвоения периода к диффеоморфизму источник-сток, с вращением в одну сторону и в разные стороны. Основным результатом работы является доказательство не эквивалентности схем этих диффеоморфизмов, то есть отсутствия гомеоморфизма, переводящего компоненты одной схемы в компоненты другой. С 1980х годов стоит вопрос о возможности построения  $C^3$  диффеоморфизма Купки-Смейла на сфере без источников и стоков, но точный ответ так и не был получен. Результаты, полученные в этой статье, приближают нас к этому ответу.

**Благодарности:** Результаты получены при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01041, за исключением исследований, связанных с методом факторизации, выполненных в рамках проекта ЦФИ в 2018 году.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. GAMBAUDO, J. M., VAN STREEN, S. and TRESSER, C. (1989) The periodic orbit structure of orientation preserving diffeomorphisms on  $\mathbb{D}^2$  with topological entropy zero. *Annales de l'I.H.P. Physique theorique*. [Online] Numdam section A, tome 50, n<sup>o</sup> 3. p. 335–356. Available from: <http://www.numdam.org>. [Accessed: 12th Septembre 1989].
2. MOREIRA, F. J. (2003) Topological Obstructions to smoothness for infinitely renormalizable maps of the disk. *IOP Publishing Ltd and London Mathematical Society*. [Online] Nonlinearity Volume 17, Number 15. p. 1547-1570. Available from: <http://arXiv:math/0307240> . [Accessed: 17th Jul 2003].
3. GAMBAUDO, J. M., SULLIVAN, D., TRESSER, C. (1994) Infinite cascades of braids and smooth dynamical systems. *Elsevier science ltd*. [Online] Topology Volume 33, No 1. p. 85-94. Available from: <http://www.math.stonybrook.edu>. [Accessed: 20th April 1992].
4. BOWEN, R. and FRANKS, J. (1975) The periodic points of maps of the disk and the interval.. *Topology*. [Online] Elsevier Limited Volume 15, Issue 4. p. 337-342. Available

from:

<https://www.sciencedirect.com>. [Accessed: 20th November 1975].

5. FRANKS, J. and LAI-SANG YOUNG (1981) A  $\mathbb{C}^2$  Kupka-Smale Diffeomorphism of the Disk With No Sources or Sinks.. *Dynamical Systems and Turbulence*. [Online] Lecture Notes in Mathematics Volume 898. p. 90-98. Available from: <https://link.springer.com>. [Accessed: 07 October 2006].
6. Шарковский, А. Н. Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя / Украинский математический журнал . — Volume 5, Issue 16, №1, 1964. — 61-71. с.  
SHARCOVSKII, A. N (1964) Co-existence of cycles of continuous transformation of the line into itself. *Mathematical Problems of Cybernetics*. Ukrainian mathematical journal (Volume 5, Issue 16, №1). p. 61-71..<http://umj.imath.kiev.ua>
7. GRINES, V., MEDVEDEV, T., POCHINKA O. (2016) Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. *Developments in mathematics*. [Online] Springer Volume 46. p. 364. Available from: <https://link.springer.com>. [Accessed: 28th February 2017].
8. PALIS, J. di MELO, W. (1982) Geometric theory of dynamical systems. An introduction.. *Springer-Verlag*. [Online] Internet archive book. p. 198. Available from: <https://archive.org>. [Accessed: 18th August 1982].
9. SMALE, S. (1967) Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms. *Proc. Int. Congr. Mathematicians*. [Online] Matematika Volume 11, Issue 4. p. 490–496. Available from: <http://www.mathnet.ru>. [Accessed: 1963].
10. LI, T. and YORKE, J. (1975) Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*. [Online] Jstor Volume 82, No 10. p. 985-992. Available from: <http://www.its.caltech.edu>. [Accessed: December 1975].
11. FRANKS, J. (1977) Some smooth maps with infinitely many hyperbolic periodic points. *Transactions of the American Mathematical Society*. [Online] Springer Volume 226. p. 175–179. Available from: <https://link.springer.com>. [Accessed: 02 October 2006].

являются фредгольмовыми ни в одном из названных пространств даже в общем случае заданных гладких функций. В работе рассматриваются системы уравнений с ядрами из пространства непрерывных на квадрате вектор-функций со значениями в пространстве суммируемых на отрезке функций. Теорема 2 содержит условия, при которых фредгольмовость системы линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных вектор-функций эквивалентна обратимости более простой системы линейных интегральных уравнений с частными интегралами. При получении этих условий использована теорема С. М. Никольского о представлении фредгольмова оператора в виде суммы обратимого и компактного операторов. Приведены конкретные классы ядер, для которых справедливо утверждение теоремы 2, рассмотрен частный случай системы линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами, для которой фредгольмовость системы равносильна обратимости линейных интегральных уравнений с параметром при каждом значении параметра. Теорема 5 содержит условия фредгольмовости системы интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами и непрерывно дифференцируемыми ядрами в пространстве непрерывно дифференцируемых вектор-функций.

**Ключевые слова:** системы линейных интегральных уравнений типа Романовского, частные интегралы, фредгольмовость систем, обратимость систем, матричные операторы и уравнения, ядра типа потенциала

---

Морозов А. И., Починка О. В. О новых инвариантах диффеоморфизмов Купки-Смейла на сфере без источников и стоков / А. И. Морозов О. В. Починка // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 82–92.

УДК: 517.9

В настоящей работе введен новый инвариант гомеоморфизмов диска с каскадом периодических орбит — схема отображения. Показано, что этот инвариант различает диффеоморфизмы, построенные по разным последовательностям сигнатур. Именно, мы строим диффеоморфизмы двумерной сферы, являющиеся результатами дважды примененной бифуркации удвоения периода к диффеоморфизму источник-сток, с вращением в одну сторону и в разные стороны. Основным результатом работы является доказательство не эквивалентности схем этих диффеоморфизмов, то есть отсутствия гомеоморфизма, переводящего компоненты одной схемы в компоненты другой.

*Ключевые слова:* диффеоморфизм Купки смейла, каскады периодических орбит, неустойчивое многообразие, устойчивое многообразие, сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, топологическая энтропия.

---

---

Плиев М. А. О латерально непрерывных ортогонально аддитивных операторах / М. А. Плиев // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 93 – 100.

УДК: 517.9

В статье исследуется полоса латерально непрерывных ортогонально аддитивных операторов в векторной решетке регулярных ортогонально аддитивных операторов, действующих из векторной решетки  $E$  в векторную решетку  $F$ . Установлено, что эта полоса совпадает с полосой, дизъюнктивной полосе, порожденной всеми сингулярными ортогонально аддитивными операторами, действующими из  $E$  в  $F$ .

*Ключевые слова:* Ортогонально аддитивный оператор, регулярный оператор, латерально непрерывный оператор, сингулярный оператор, ортогонально аддитивное отображение, векторная решетка, латеральный идеал.

---

---

Струкова И. И. О периодических на бесконечности функциях относительно подпространств / И. И. Струкова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 101 – 116.

УДК: 517.9

Статья посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа непрерывных периодических на бесконечности функций. Рассматриваются различные подпространства исчезающих на бесконечности функций. Вводятся понятия медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций относительно введенных подпространств. Вводятся понятия рядов Фурье (канонического и обобщенного), изучаются свойства коэффициентов Фурье. Доказана теорема о суммируемости на бесконечности рядов Фурье методом Чезаро. Кроме того, получены аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье, а также критерий представимости периодической на бесконечности функции (относительно выбранного подпространства) в виде суммы периодической и исчезающей на бесконечности функций и спектральный критерий периодичности функции на бесконечности. Результаты статьи