Шварц Д. А.

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ

Москва
2018

Предисловие

Ответ на вопрос "сколько вариантов?" приходится искать очень многим — от пенсионерки, забывшей и пытающейся подобрать код в подъезде[1], до рассчитывающего вероятности риска аналитика или страхового агента. Иногда найти ответ не просто и требуется знание науки, которая и называется комбинаторикой, но в большинстве случаев хватает знания нескольких элементарных приемов и умения их сочетать и, главное, выбирать нужный.

Для овладевания этой, "элементарной" частью комбинаторики не нужен курс лекций — всю потребную теорию можно рассказать за два часа, а вот навык в решении задач совершенно необходим и достигается только тренировкой. При этом, если студенту-математику достаточно небольшого набора упражнений, который можно найти в задачниках по дискретной математике, то студенту-нематематику или интересующемуся школьнику нужно иметь под рукой значительно больше задач.

Кроме того, обычно комбинаторике посвящается 1-2 лекции и столько же семинаров в течении курса дискретной математики или теории вероятности. Студенту с поставленной в школе математической интуицией этого достаточно. Если же интуиция хромает (а таких студентов становится все больше и больше), нужны дополнительные занятия. Лучше с преподавателем, но, если это невозможно, то с задачником-самоучителем.

К сожалению, известные автору задачники с разделом "комбинаторика" рассчитаны как минимум на сильного студента технического вуза времен СССР, причем с самого начала загружены математической символикой, что вызывает у большинства студентов-младшекурсников дополнительные сложности.

Итак, первая цель книги — занять пока пустую нишу элементарного по изложению и содержанию задачника для школьников и студентов-нематематиков.

Вторая цель — собрать под одной обложкой множество красивых комбинаторных задач, растворенных в фольклоре маткружков, подборках преподавателей, книгах по дискретной математике и многих других местах вплоть до сайта anekdot.ru.

Задачник сделан в виде самоучителя — автор еще сохраняет детскую надежду, что в будущем студенты будут учить комбинаторику самостоятельно и его функции сведутся к проверке контрольных работ. Формально никаких предварительных знаний не требуется, вся необходимая теория раскидана по главам, а доказательства немногих формул разобраны при решении примеров.

Тем не менее для понимания доказательств необходимы начальные знания из те-

[1] Впрочем, она так и не решила задачи, предпочтя позвонить автору.

ории множеств (они будут небесполезны и при решении задач), а решение задач из приложений требует знакомства с бинарными отношениями, логикой и теорией вероятности.

В начале каждой из первых четырех глав решается несколько типичных задач и приводятся необходимые обозначения и теоретические сведения. Все нужные для понимания формулы и утверждения строго доказываются. Основную часть глав занимают задачи. При их решении используются методы не только текущей главы, но и предыдущих.

Первая, вторая и четвертая глава посвящены основным комбинаторным приемам — правилу суммы и произведения, перестановкам, сочетаниям и размещениям, формуле включения и исключения и задаче Муавра. Следующим шагом было бы введение производящих функций, но его читатель сделает за гранью этой книги.

Третья глава посвящена свойствам биномиальных коэффициентов, введенных главой ранее. На подобные вещи редко хватает времени в курсе дискретной математики, но тема слишком красива, чтобы про нее забыть. Конечно, эту главу можно существенно расширить и углубить, но основной принцип задачника — оставаться на элементарном уровне.

Первые два параграфа пятой главы посвящены комбинаторным моделям, возникающим в теории множеств, бинарных отношениях и, математической логике и теории графов. Для решения задач нужно знать определения. Часто именно ответы на комбинаторные вопросы часто помогают понять суть определений. Например, вопрос о числе асимметричных бинарных отношений — хороший тест на понимание, что это такое.

В следующих двух параграфах собраны комбинаторные задачи, с карточными и шахматными формулировками. Наконец, в последнем параграфе пятой главы — просто смесь интересных задач, при решении которых используются комбинаторные идеи.

Шестая глава содержит ответы к задачам и решения (или указания к решению) наиболее трудных и интересных.

* * *

Несколько общих советов по решению задач. Они тривиальны, но часто бывают полезны.

Постарайтесь четко понять, что Вас спрашивают, особенно, если дело происходит на контрольной. В комбинаторике многое зависит от нюансов формулировки, часто лингвистических.

Не пытайтесь угадать формулу, в которую надо подставить числа. Придумайте рассуждение, позволяющее получить ответ и уже тогда используйте формулы.

Обычно в комбинаторных задачах не требуется доводить до численного ответа. Даже наоборот, ответ 15! значительно более нагляден, чем 1307674368000.

Ответ в комбинаторной задаче почти всегда — натуральное число. Если у Вас получилось, например, $2^7/7$, ищите ошибку.

Проверяйте ответ на разумность. Если Ваша интуиция говорит, что вариантов в этой задаче немного, а комбинаторная формула дает несколько миллиардов, вероятнее всего, что эта формула не от той задачи.

В задачах, зависящих от переменных, полезно посмотреть, что получается при небольших их значениях. Возможно, удастся быстро подсчитать ”руками” и проверить ответ.

Взгляды автора на то, как нужно учить комбинаторике сформировали занятия маткружков (1993-2001 г.), уроки в математических классах 57-й школы (1997-2004 г.), лекции и семинары по дискретной математике в Высшей школе экономики (2000-НВ).

* * *

Особо хочется упомянуть студентов факультета бизнес-информатики ВШЭ, занятия с которыми автор ведет с момента основания факультета (2001 г.). Первые 2 года комбинаторика занимала целый модуль (6-7 лекций и столько же семинаров), а материал курса соответствовал первым четырем главам. С 2003 г. часть курса, относящаяся непосредственно к комбинаторике, сократилась до 2 лекций и 3 семинаров. Базовыми стали 1, 2 и частично 4-я (в части, касающейся формулы включений-исключений) главы. Но комбинаторные мотивы (в первую очередь — первый параграф пятой главы) востребованы в остальной части курса.

Ритм ”один семинар — одна глава” для большинства студентов довольно жесткий, но посильный. Разве что 4-й главе можно посвятить 2 семинара. Дополнительное время для работы со студентами образуется за счет лекций, на которых рассказывать в общем-то нечего. Более точные рекомендации зависят от имеющегося времени, планов и силы студентов. Автор с удовольствием обсудит подобные вопросы по электронной почте.

Популярный стиль обучения комбинаторике через ”4 комбинаторные модели” (сочетания и размещения с повторениями и без) автор считает излишне формальным и противоречащим духу комбинаторики. Но нельзя не признать, что для многих студентов это самый простой способ получить положительную оценку (хоть часто и посредственную). Поэтому, если есть время, можно рассказать и про ”4 модели”.

* * *

Автор признателен всем коллегам, с которыми он вел или обсуждал семинары по комбинаторике. Среди них Т.А. Андреева, А.Г. Броневич, В.А. Кохов, О.П. Кузнецов, А.А. Лазарев, А.А. Лебедев, К.С. Сорокин.

Особо хочется поблагодарить М.Н. Вялого и А.Н. Флерова, с работы с которыми началась карьера автора в ГУ ВШЭ. Именно их система преподавания комбинаторики легла в основу этого задачника.

Отдельная благодарность А. Шеню, прочитавшему сырой текст и приславшему множество ценных замечаний и Р. Кизилову, написавшему решения многих задач в качестве практики после 1-го курса.

At last but not least, большое спасибо моим любимым студентам, без которых не было бы и нужды в этой книге. Я вас не забыл, но даже просто список фамилий тех, кто запомнился мне в связи с комбинаторикой, занял бы около страницы. Поэтому упомяну только Софью Кисельгоф, с которой мне довелось общаться и как с ученицей и как с коллегой.

Любые замечания, комментарии или вопросы будут с благодарностью приняты. `dshvarts@mail.ru`.

Глава 1.

Правила суммы и произведения

Рассмотрим несколько типичных задач.

1. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее?

Решение. У туриста есть 7 способов подняться на гору и для каждого из них есть по 7 способов спуститься. Итого $7+7+7+7+7+7+7 = 7 \cdot 7 = 49$ способов.

2. Что изменится, если наложить условие, что подъем и спуск осуществляются различными путями?

Решение. Для каждого из 7 способов подняться в гору будет не 7, а 6 способов спуститься. Поэтому ответ $7 \cdot 6 = 42$.

3. Бросают две игральные кости (с шестью гранями каждая).

а) Сколькими способами они могут упасть?

б) Сколькими способами они могут упасть так, что либо на каждой грани выпадет четное число очков, либо на каждой грани выпадет нечетное число очков?

Решение. **а**) На первой кости может выпасть любое число очков от 1 до 6 и, в каждом из этих вариантов на второй кости тоже может выпасть от 1 до 6 очков. Поэтому всего возможностей $6 \cdot 6 = 36$. Кости в этой задаче мы считаем разными, т.е. варианты, когда на первой кости выпадает 1, а на второй — 2 и когда на первой кости выпадает 2, а на второй — 1, считаются различными.

б) Если на каждой грани выпадает четное число очков, то есть 3 возможности для первой кости и 3 для второй (2, 4, 6). Всего $3 \cdot 3 = 9$ вариантов.

Аналогично, если на каждой грани выпадет нечетное число очков (1, 3, 5), будет также 9 вариантов. Всего же возможностей $9 + 9 = 18$.

При решении этих задач использовались следующие два правила.

Правило произведения. *Если объект A может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект B*[1] *может быть выбран n способами, то выбор (A и B) можно осуществить mn способами.*

Правило суммы. *Если объект A может быть выбран m способами, а объект B — другими n способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор (A или B) можно осуществить $m + n$ способами.*

[1]Часто такая ситуация возникает, если A выбирается независимо от B.

Формально правило произведения означает, что мощность декартова произведения множеств равна произведению мощностей: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, а правило суммы, что если два множества не пересекаются, то мощность их объединения равна сумме мощностей: $A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$.

4. Сколькими способами 7 человек могут разместиться в очереди?

Решение. На первом месте может оказаться любой из 7 человек, на втором — любой из 6 (все, кроме уже выбранного первого), на 3-м — любой из $5, \ldots$, на последнее место остается только один кандидат. Итого, по правилу произведения $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается $n!$ и произносится "эн факториал". Удобно считать, что $0! = 1$. Далее, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \ldots$ Произведение k последовательных натуральных чисел, начиная с n, т.е., $n(n+1)\ldots(n+k-1)$ обозначается $[n]^k$ и произносится "n в верхней степени k", а произведение k последовательных убывающих натуральных чисел, начиная с n: $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ — $[n]_k$ ("n в нижней степени k").

5. Проверьте, что

а) $n! = (n-1)! \cdot n$ для всех n, начиная с 1;

б) при $n \geq k$ $[n]_k = n!/(n-k)!$;

в) $[n]^k = (n+k-1)!/(n-1)!$;

6. В кухне пять лампочек. Каждая может гореть или не гореть. Сколькими способами может быть освещена кухня?

Решение. Для первой лампочки есть два варианта — гореть или не гореть, для каждого из них есть два варианта для второй лампочки, то есть всего $2 \cdot 2 = 4$ варианта. Рассуждая аналогично и применяя правило произведения, получаем $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ варианта.

Обобщим предыдущую задачу и найдем число подмножеств множества из n элементов.

Подмножество определяется тем, какие элементы в него входят, а какие не входят. Для каждого из n элементов множества есть 2 варианта — входит он в подмножество или не входит, поэтому по аналогии с предыдущей задачей получаем 2^n вариантов.

7. Сколько можно составить шестибуквенных слов (слово — это произвольная последовательность букв), содержащих хотя бы один раз букву А, если можно использовать все 33 буквы алфавита?

Решение. Проще подсчитать количество слов, которые не содержат ни одной буквы А. На первом месте может стоять любая из 32 остальных букв, на втором — тоже одна из 32 и т.д. Всего 32^6 слов. Всего же слов по тем же соображениям 33^6. Чтобы получить число слов, содержащих хотя бы одну букву А, надо из числа всех слов вычесть число тех, которые А не содержат. Получим $33^6 - 32^6$.

При решении этой задачи было проиллюстрировано еще одно свойство: если $B \subset A$, то $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

8. В магазине есть 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Все предметы разные.

Сколькими способами можно купить

а) чашку с блюдцем?

б) комплект из чашки, блюдца и ложки?

в) два предмета с разными названиями?

9. В киоске "Союзпечать" продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

10. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова "КОМБИНАТОРИКА"?

11. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

12. Вася собрал 15 васильков и 10 маргариток и решил подарить их двум девочкам: Марго и Рите. Сколькими способами он может разделить свои цветы на два букета, если хочет, чтобы у каждой девочки было хотя бы по одному васильку и три маргаритки?

13. В соревновании участвуют 10 спортсменов. Каково количество возможных вариантов распределения первых трех мест?

14. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно использовать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

15. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Они готовы менять либо одну марку на одну марку либо один значок на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить обмен (одного предмета)?

16. В урне находятся три красных и четыре синих шара. Шары одного цвета не различаются. Сколькими способами можно вынуть из урны 4 шара? Рассмотрите упорядоченный и неупорядоченный выбор с возвращением и без возвращения.

17. **а**) Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

б) Та же задача, если флаг может быть и двухцветным, но полосы одного цвета не могут быть рядом?

18. Монету бросают 10 раз. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

19. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

20. Студенческая группа изучает 10 предметов. В понедельник — 4 пары, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

21. Избушка на курьих ножках имеет форму куба, стоящего на двух ногах. У Бабы Яги 6 красок. Сколькими способами она может покрасить избушку в 6 цветов, так, чтобы каждая грань была покрашена в свой цвет?

22. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее "Спортпрогноз"? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча — победа одной из команд либо ничья; счет роли не играет).

23. **а**) Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть единица или тех, в записи которых ее нет?

б) Тот же вопрос для первых 10 миллионов чисел.

24. Каждую клетку квадратной таблицы $n \times n$ можно покрасить в красный, желтый или зеленый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

25. Сколькими способами можно разложить монеты в 1, 5, 10, 50 копеек и 1, 2, 5, 10 рублей по четырем карманам джинс (всех монет по одной)?

26. В районе есть четыре города: А, Б, В и Г. Из города А в город Б ведет 6 дорог, из города Б в город В — 4 дороги, из города А в город Г — две дороги, и из города Г в город В — тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

27. Стандартный автомобильных номер имеет вид: А123БВ45 — буква, три цифры, две буквы, две цифры. Цифры могут быть любыми, а буква — одной из 12 букв русского алфавита, сходных по написанию с латинскими: А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. Сколько существует различных номеров?

28. **а**) Сколько существует различных семизначных телефонных номеров;

б) сколько из них содержат хотя бы одну нечетную цифру?

в) во скольких из них ни одна цифра не встречается дважды?

29. Сколько есть 4-буквенных слов в русском алфавите, в которые входит хотя бы одна гласная? (Всего 33 буквы, 10 из них гласные.)

30. Сколькими способами можно выписать в ряд все буквы русского алфавита ровно по разу?

31. Код Морзе сопоставляет каждой из букв русского алфавита последовательность из точек и тире (непустую). Докажите, что хотя бы одна буква закодирована последовательностью, в которой не меньше 5 знаков.

32. В алфавите некоторого племени всего 5 букв: a, b, c, d и e. Зато слово — это совершенно любая последовательность букв. Сколько в языке этого племени

а) слов из 5 букв;

б) слов из не более, чем 5 букв;

в) слов из пяти букв, в которых есть хотя бы две одинаковые буквы;

33. В языке одного племени было 6 гласных и 8 согласных, причем при составлении слов гласные и согласные непременно чередовались. Сколько слов из девяти букв могло быть в этом языке?

34. В недавно изданном словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные, затем трехбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово *cbcad*? (Племя использует английский алфавит).

35. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

36. Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все 7). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

37. В пассажирском поезде 17 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 17 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?

38. Сколькими способами можно построить замкнутую ломаную, вершинами которой являются все вершины правильного n-угольника (ломаная может быть самопересекающейся)?

39. В столовой предложено на выбор 6 блюд. Каждый день студент берет некоторый набор блюд (возможно, не берет ни одного блюда), причем этот набор блюд должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней студент сможет питаться по таким правилам и какое количество блюд он в среднем при этом будет съедать за день?

40. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

41. **а**) Сколькими способами можно перетасовать колоду из 36 карт?

б) так, чтобы красные и черные карты чередовались?

в) так, чтобы любые 4 подряд идущие карты были всех 4 мастей?

42. Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

43. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

44. Сколько существует 6-значных чисел[2],

а) первая цифра которых 7?

б) делящихся на 5?

в) в десятичной записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются ровно по одному разу?

г) в десятичной записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются ровно по одному разу и цифры 2 и 4 не стоят рядом?

д) в десятичной записи которых встречаются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

е) в десятичной записи которых встречаются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, причем каждая не более одного раза?

ж) сумма цифр которых четна?

з) все цифры которых четны?

и) все цифры которых имеют одинаковую четность?

к) в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

л) в которых все цифры различны?

м) четных чисел, в которых все цифры различны.

н) палиндромов, т.е. чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, таких как 543345, 170071)?

о) в их десятичной записи некоторая цифра встречается ровно 5 раз?

п) составленных из цифр 1 и 2?

р) не содержат цифры 2?

с) в запись которых входит цифра 5?

т) в запись которых входит ровно одна цифра 5?

у) делящихся на 4 и состоящих из цифр 1, 2, 3, 4;

ф) делящихся на 4 и состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, причем каждая цифра может

[2] Натуральное число не может начинаться с 0.

встречаться только один раз?;

х) в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр;

ц) содержащих в десятичной записи четное число нечетных цифр?

45. Сколько делителей (включая 1 и само себя) имеет число

а) 2310;

б) $2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{20}$;

в) $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 111$;

г) 10^{10};

д) общий случай: $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}$, где $p_1, p_2, \ldots p_n$ — различные простые.

46. Какое число имеет больше делителей: 20^{15} или 201^5?

47. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное (НОК) равно 1000^{1000}?

48. Найдите сумму всех

а) чисел от 1 до 99 999;

б) нечетных пятизначных чисел;

в) пятизначных чисел, составленных из цифр 1 и 2;

г) пятизначных чисел, составленных из нечетных цифр;

д) пятизначных чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр $1, \ldots, 5$;

е) пятизначных чисел, которые можно составить из цифр $0, 1, \ldots, 6$. (одна и та же цифра в числе может повторяться).

49. Каждую доску забора из 100 досок необходимо раскрасить в один из 6 цветов так, чтобы из любых идущих подряд 5 досок не было одноцветных. Сколькими способами это можно сделать?

50. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов. Сколькими способами из них можно составить

а) букет[3];

б) букет из цветов одного сорта;

в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

г) букет, в котором нечетное количество цветов;

д) букет, не менее, чем из 3 цветов?

Цветы одного сорта считаем одинаковыми.

51. В отделе работает 8 сотрудников.

а) Каждый месяц ровно один сотрудник получает премию. Сколькими способами можно составить годовой график выплаты премий?

б) Каждый месяц в отпуске может находиться не более одного сотрудника. Сколькими способами можно составить годовой график отпусков? (Каждый сотрудник должен сходить в отпуск ровно один раз).

52. Найдите число прямоугольников, составленных из клеток доски с n горизонта-

[3] Молодые люди, считающие букетом набор из 0 цветов, могут спросить об этом мнение своей девушки.

лями и n вертикалями, которые содержат клетку с координатами (p,q).

53. Сколькими способами 10 человек могут выстроиться в очередь, если

а) Иванов, Петров и Сидоров хотят стоять подряд (в произвольном порядке);

б) Иванов хочет стоять раньше Петрова;

в) Иванов и Петров не хотят стоять друг за другом?

54. Сколько существует различных способов размещения 15 человек за столом с занумерованными местами, если А должен сидеть во главе стола (на месте №1), а В не должен сидеть рядом с А?

55. Сколькими способами можно расставить цифры от 0 до 9 в вершинах правильного 10-угольника так, чтобы 0 и 9 не оказались на диаметрально противоположных местах? Расстановки, отличающиеся поворотом 10-угольника, считаем одинаковыми.

56. Двенадцать девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

57. Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10-ю креслами так, чтобы юноши и девушки чередовались?

58. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 6 девушек и 6 юношей?

59. Сколькими способами можно расставить в ряд 10 различных чисел так, чтобы наибольшее и наименьшее из них стояли рядом?

60. Четыре человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов?

61. Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.

62. В аудитории 3 ряда по 5 мест в каждом ряду. На семинаре присутствуют 10 студентов. Один из них никогда не сидит в среднем ряду. Два других студента всегда сидят в первом ряду. Трое из оставшихся всегда сидят слева. Остальные четверо размещаются произвольно. Сколько существует различных размещений студентов в аудитории?

63. В школе 65 семиклассников. Они написали три контрольные работы и за каждую получили одну из четырех оценок: $5,4,3,2$. Докажите, что найдутся два ученика с одинаковыми оценками за все работы.

64. Стоматолог выяснил, что в его районе любые два человека отличаются набором зубов. Максимальное количество зубов у человека — 32. Каким может быть максимальное население района?

65. Сколькими способами можно выбрать четырех человек на четыре различные должности, если имеется девять кандидатов на эти должности?

66. Туристическое агентство заявляет о возможности "1001 вариант отдыха". Сделайте правдоподобное предположение, что может иметься в виду.

67. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или по горизонтали клетку (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

68. На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует несамопересекающихся незамкнутых 9-звенных ломаных с вершинами в этих точках?

Глава 2.

Биномиальные и мультиноминальные коэффициенты

Решим для начала несколько задач.

69. Приходя на заседание кафедры, каждый преподаватель, входя в аудиторию, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовали в заседании, если было всего 78 рукопожатий?

Решение. Пусть на заседании присутствовали k преподавателей. Каждый пожал руку всем остальным, то есть сделал $k-1$ рукопожатие. Значит, всего $k(k-1)$. Но каждое рукопожатие мы посчитали два раза, поэтому рукопожатий было $k(k-1)/2$.

Решая уравнение $k(k-1)/2 = 78$, узнаем, что на заседание пришло 13 преподавателей.

Можно решить задачу и перебором — когда второй преподаватель вошел в комнату, произошло первое рукопожатие, когда вошел третий — второе и третье (третьего преподавателя с первым и вторым),... После прихода k-го преподавателя происходили очередные $k-1$ рукопожатий, осталось только дождаться, с приходом какого преподавателя их станет 78. Если Вы не уверены в справедливости первого рассуждения, доведите это до конца. Заодно будет доказано, что

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

70. Сколькими способами в футбольной команде (11 человек) можно выбрать

а) капитана и его заместителя.

б) двух вице-капитанов;

Решение. а) Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, всего есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выбора.

б) Точно также, как и в пункте а), первого из вице-капитанов можно выбрать 11 способами, второго — 10. По правилу произведения получается 110. Но каждую из возможных пар кандидатов $\{A, B\}$ мы посчитали два раза, сначала рассмотрев A, как первого вице-капитана, а B — как второго, затем наоборот. Поэтому правильный ответ — $110/2 = 55$;

71. Сколькими способами можно выбрать команду из трех школьников в классе, в котором учатся 30 человек?

Решение. Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго — 29 способами, третьего — 28 способами. Таким образом получаем $30\cdot29\cdot28$ вариантов выбора. Однако каждая команда при этом подсчете учтена несколько раз: одна и та же тройка учеников может быть выбрана по разному, например, сначала A, потом B, потом C или сначала C, потом A, потом B и т.д. Поскольку число перестановок из трех элементов равно 3!, то каждая команда учтена нами ровно 6 раз. Поэтому получаем $30 \cdot 29 \cdot 28/6$.

Обобщим задачу. Именно, подсчитаем число подмножеств n-элементного множества, содержащих ровно k элементов. Число способов выбрать k элементов поочереди — сначала первый, затем второй и т.д. равно $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = [n]_k = n!/(n-k)!$. Но каждое из подмножеств мы подсчитали столько раз, сколько есть способов упорядочить k элементов, а это число равно $k!$. Поэтому на $k!$ надо поделить. Полученные числа называются биномиальными коэффициентами, обозначаются

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(читается: "число сочетаний из n по k"). Теперь некоторые задачи мы можем решить моментально.

72. Сколькими способами можно выбрать 3 книжки из 5?

Решение. Ответ — $\binom{5}{3}$, по определению биномиальных коэффициентов.

73. Сколькими способами можно выбрать из 7 человек комиссию из 3 человек и ее председателя (из числа членов комиссии)?

Решение. Число способов выбрать комиссию из трех человек равно $\binom{7}{3}$ и для каждого из них есть 3 способа выбрать председателя. Ответ: $3\binom{7}{3}$.

При подсчете биномиальных коэффициентов удобно сразу сокращать на больший из факториалов в знаменателе. Например,

$$\binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35.$$

74. У бедного студента осталось гречки на две порции, риса на три порции и макарон на две порции. Сколько у студента способов съесть это на завтраки в течение недели (по одной порции в день)?

Решение. Если студент разложит имеющиеся 7 порций еды по разным тарелкам, то вариантов выбора станет 7!, но поскольку разные порции, например, риса не отличимы, то общее количество необходимо разделить на 2! (число способов упорядочить 2 тарелки с гречкой), затем на 3! (число способов упорядочить 3 тарелки с рисом), затем на 2! (макароны). Итого получим $7!/2!3!2! = 210$ способов завтракать в течение недели[1].

[1] Хотя разнообразие, надо признать, довольно грустное.

Выражения вида

$$\frac{n!}{k_1!, \ldots, k_m!},$$

где $k_1+, \ldots, +k_m = n$, *называются мультиноминальными коэффициентами и обозначаются* $\binom{n}{k_1, \ldots, k_m}$. *Подробнее о них будет сказано в следующей главе.*

75. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

76. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

77. **а**) Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на пары?

б) Докажите, что число этих разбиений нечетно.

78. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

79. Сколькими способами можно

а) разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой;

б) разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой;

в) выбрать из 15 человек две команды по 5 человек в каждой?

80. Сколькими способами колоду из 36 карт можно перетасовать так, чтобы карты каждой масти шли в порядке старшинства?

81. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них

а) был ровно один туз?

б) был хотя бы один туз?

в) были представители всех четырех мастей?

82. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по 2 туза?

83. Чемпионат России по шахматам проводится в один круг. Сколько играется партий, если участвуют 18 шахматистов?

84. На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

85. **а**) Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Пусть причем никакие 3 диагонали не пересекаются в одной точке.

б) Во скольких точках внутри 20-угольника пересекаются диагонали?

в) На сколько частей они делят n-угольник?

86. На плоскости дано n прямых общего положения. (Никакие две прямые не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке.) Чему рано число образованных ими треугольников?

87. На прямой a отмечено n точек, а на параллельной ей прямой b — m точек. Сколько существует

а) треугольников;

б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

в) Соединим все выбранные точки отрезками. Сколько у этих отрезков точек пересечения вне прямых a и b?

88. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Докажите, что существует не менее $\binom{n}{5}/(n-4)$ различных выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

89. 3 человека должны унести 9 различных предметов.

а) Сколькими способами это можно сделать, если каждый готов взять 3 предмета?

б) А если третий согласен нести и 4 предмета?

90. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах

а) "КОМПЬЮТЕР";

б) "ЛИНИЯ";

в) "ПАРАБОЛА";

г) "АБРАКАДАБРА";

д) "ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ"[2]?

е) Как изменится ответ, если потребовать, чтобы все буквы О стояли рядом?

91. **а**) Спортивный клуб насчитывает 30 членов, из которых надо выделить 4 человека для участия в забеге на 1000 метров. Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете?

92. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

93. Сколькими способами можно составить расписание первого тура чемпионата России по футболу, в котором играет 16 команд? (Кто хозяин поля, важно).

94. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

95. Сколькими способами можно переставить буквы слова "ЭПИГРАФ" так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

96. Найти число слов в алфавите из n символов, в которые каждый символ входит ровно 2 раза.

97. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

98. Сколькими способами можно выложить 10 шашек на шахматной доске так, чтобы в каждом ряду лежала хотя бы одна шашка?

99. Сколько существует способов разместить **а**) 6 одинаковых шашек; **б**) 2 белых и 4 черных шашки на шахматной доске так, чтобы никакие две шашки не находились в одном горизонтальном или вертикальном ряду?

100. Сколькими способами можно рассадить 12 человек по 3 комнатам так, чтобы в первых двух было по 5 человек, а в третьей — 2 человека?

101. У Нины 7 разных шоколадных конфет, у Коли 9 разных карамелек. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом пятью конфетами (5 на 5)?

102. В классе 25 учеников. Сколькими способами учитель может назначить

а) двух дежурных;

б) трех дежурных;

в) четырех дежурных при условии, что Петров и Сидоров не могут дежурить од-

[2] Среди известных автору слов это содержит наибольшее количество букв О при отсутствии других гласных.

новременно?

103. Сколькими способами можно 20 девушек и 20 юношей выбрать команду

а) из пяти человек, так, чтобы в нее вошло не более трех юношей;

б) в которой было бы одинаковое число юношей и девушек?

104. На школьном вечере присутствуют 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

105. Труппа театра состоит из 20 артистов. Сколькими способами можно выбрать из нее по 6 человек для участия в двух спектаклях так, чтобы ни один артист не участвовал в двух спектаклях?

106. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в нее должен входить хотя бы один математик?

107. Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

108. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных слов набор, состоящий не более чем из 5 слов?

109. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин, на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

110. Ладья может за каждый ход переместиться на соседнее поле вверх или вправо. Сколько различных путей перемещения ладьи из левого нижнего угла шахматной доски 8×8 в правый верхний угол?

111. Имеется куб размером $10{\times}10{\times}10$, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент, причем так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось. Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

112. Сколько существует 6-значных чисел,

а) у которых по три четных и нечетных цифры;

б) у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей;

в) сумма цифр которых равна 2; **г**) 3; **д**) 4?

113. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

114. Полоска $1 \times n$ разбита на единичные квадраты, каждый из которых покрашен в один из четырех цветов: черный, белый, красный и желтый. Сколькими способами это можно сделать цветом при условии, что в белый цвет покрашены 4 квадрата, а в черный — 6 ($n \geq 10$)?

115. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

116. В комиссии из 10 депутатов произошло 14 попарных ссор. Докажите, что все равно можно составить подкомиссию из трех не ссорившихся депутатов.

117. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?

118. На собеседовании десяти людям был предложен тест, состоящий из нескольких вопросов. Известно, что любые пять человек ответили вместе на все вопросы (т.е. на каждый вопрос хоть один из пяти дал правильный ответ), а любые четыре — нет. При каком минимальном количестве вопросов это могло быть?

119. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии? Рассмотрите задачу также в том случае, когда комиссия состоит из n человек, а сейф можно открыть при наличии m членов комиссии ($m \leq n$).

120. Сколько бинарных последовательностей (элементы последовательности — 0, 1) длины n содержат

а) в точности k символов 1?

б) не более k символов 1?

121. Сколько троичных последовательностей (элементы последовательности — 0, 1, 2) длины n содержат в точности k символов 1?

Глава 3.

Тождества с биномиальными коэффициентами. Треугольник Паскаля

122. Найти коэффициент при x^k в разложении $(1+x)^n$ по степеням x.

Решение. Раскроем скобки, но не будем пока приводить подобные слагаемые. Слагаемые вида x^k появятся из произведений, в которые из k скобок вошел x, а из остальных $n-k$ — единица. То есть нужно найти число способов выбрать k скобок (из которых в произведение войдет x из n. Это число по определению $\binom{n}{k}$. То есть

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Эта формула называется "Бином Ньютона"[1] *Немного ее обобщим.*

123. **Полиномиальная теорема.** Докажите, что в равенстве

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$$

коэффициенты $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}$ могут быть найдены по формуле

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Решение. Раскроем скобки, но не будем пока приводить подобные слагаемые. Получим сумму, состоящую из всевозможных произведений $x_1, \ldots, x_m$. Коэффициент при $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m}$ — число произведений, в которые x_1 входит k_1 раз, x_2 — k_2, ..., x_m — k_m,

[1]Который уже стал символом сложности математики. Диссертацию о биноме Ньютона писал у Конан-Дойля профессор Мориарти, а Бегемот в булгаковском "Мастере и Маргарите", предсказывая время смерти, презрительно хмыкает: "Тоже мне бином Ньютона!" А оказывается, все довольно просто.

которое, в свою очередь, есть число слов из символов $x_1, \ldots, x_m$, в которые x_i входит k_i раз. Рассуждая аналогично задаче 74 из главы 2, получаем как раз $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}$.

124. Докажите, что $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Решение. Подобные тождества можно доказывать двумя способами — прямым вычислением:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{n-k}$$

или комбинаторным рассуждением, показывающим, что правая и левая части равенства это одно и то же число, просто вычисленное разными способами. В данном случае для того, чтобы выбрать k элементов из n, можно просто выбрать эти элементы ($\binom{n}{k}$ способов), а можно выбрать те $n-k$ элементов, которые в наши k не попадут ($\binom{n}{n-k}$ способов).

125. Докажите, что $\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}$.

Решение. Вычисление:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{m+1} &= \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(m+1)!(n-m)!} = \\ &= \frac{(m+1)\cdot n!}{(m+1)!(n-m)!} + \frac{(n-m)\cdot n!}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \\ &= \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}.\end{aligned}$$

Комбинаторное рассуждение: число способов выбрать $m+1$ элемент из $n+1$, по определению равное $\binom{n+1}{m+1}$, можно подсчитать и по-другому. Рассмотрим два случая: если 1-й элемент входит в выбранные $m+1$, то нам осталось выбрать m из оставшихся n; если же первый элемент в выбираемые нами не входит, то из оставшихся n нужно выбрать уже $m+1$ элементов. Всего $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}$ вариантов.

Как видно из примеров, в простых случаях удобно написать выкладку, в более сложных легче привести рассуждение.

Треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots && \ldots && \ldots && \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

строится сверху вниз — каждая строка начинается и кончается единицами, а в остальных клетках записывается сумма чисел, стоящих над ней. Оказывается, что в клетках треугольника Паскаля стоят биномиальные коэффициенты. Более точно,

126. Докажите, что в n-й строке и k-м столбце треугольника Паскаля стоит $\binom{n}{k}$. Нумерация столбцов начинается с 0.

Решение. Докажем по индукции по строкам. Для первой строки утверждение очевидно — $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Пусть теперь утверждение доказано для первых n строк. Число, стоящее на k-м месте в $n+1$-й строке равно сумме двух чисел, стоящих над ним — чисел из n-й строки и $k-1$-го и k-го столбцов, т.е. по предположению индукции $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, а это по предыдущей задаче равно $\binom{n+1}{k}$. Что и требовалось.

127. Почему равенства $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$ и $11^4 = 14641$ похожи на строки треугольника Паскаля?

128. В разложении $(x+y)^n$ по формуле бинома Ньютона второй член оказался равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите x, y и n.

129. Найдите m и n зная, что

$\binom{n}{m+1} : \binom{n}{m} : \binom{n}{m-1} = 5 : 5 : 3.$

130. Докажите, что при $k < (n-1)/2$ $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$, а при $k > (n-1)/2$ $\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$, т.е. последовательность биномиальных коэффициентов возрастает до середины, а потом убывает.

131. При каком k достигает максимума выражение $k \cdot \binom{40}{k}$?

132. Какое слагаемое в разложении $(1+2)^{100}$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

133. Докажите, что если p — простое число и $1 \le k \le p-1$, то $\binom{p}{k}$ делится на p.

134. Определите коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

135. Найдите константу в разложении $(x^3 + 1/x^2)^{10}$ по степеням x.

136. Найдите коэффициент при

а) x^{29} и x^{30} в выражении $(1 + x + x^2 + \ldots + x^9 + x^{10})^3$.

б) x^3y^7 в разложении $(2x - y)^{10}$.

в) коэффициент при $x_1^3 x_2 x_4^5 x_5$ в разложении $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$.

137. **Малая теорема Ферма.** Пусть p — простое число. Тогда $a^p - a$ делится на p. Докажите теорему Ферма, разлагая $(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a \text{ раз}})^p$ посредством полиномиальной теоремы.

138. Вычислите суммы:

а) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$;

б) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}$;

г) $\binom{n}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}-\ldots$.

139. Докажите тождества:

а) $\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$;

б) $\binom{n+m}{k}=\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\ldots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$;

г) $\sum\limits_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\binom{n}{j}2^{n-j}$.

140. Докажите, что число $\binom{n+3}{k+3}-\binom{n}{k}-\binom{n}{k+3}$ делится на 3.

141. **а**) Найдите целые p, q, r, такие, что

$$n^3=p\binom{n}{1}+q\binom{n}{2}+r\binom{n}{3}$$

для всех целых неотрицательных n.

б) Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}.$$

Указание: используйте задачу Муавра из главы 4.

в) Используйте полученное равенство для нахождения суммы $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

142. **Свойство шестиугольника.** В треугольнике Паскаля любое не крайнее число ($\binom{n}{k}$, $1\le k\le n-1$) имеет 6 соседей, расположенных "шестиугольником". Докажите, что произведение трех вершин, стоящих в этом шестиугольнике через одну, равно произведению других трех вершин, т.е.

$$\binom{n-1}{k-1}\cdot\binom{n}{k+1}\cdot\binom{n+1}{k}=\binom{n-1}{k}\cdot\binom{n+1}{k+1}\cdot\binom{n}{k-1}.$$

143. Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число a (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

144. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом.

145. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме чисел в предыдущей левой диагонали, начиная с самого правого вплоть до стоящего слева над числом.

146. Докажите равенство:

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots = F_{n+1},$$

где F_n — числа Фибоначчи: $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$, $\ldots$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Сумма, стоящая в левой части равенства, может быть интерпретирована как сумма элементов треугольника Паскаля, стоящих в одной диагонали.

147. При каких значениях n все числа в n-й строке треугольника Паскаля нечетны?

Глава 4.

Формула включений и исключений и задача Муавра

4.1. Задача Муавра

Задачей Муавра обычно называют одну из двух задач, часто применяемых при комбинаторных подсчетах:

***148**. Сколько решений имеет уравнение*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

***а**) в натуральных; **б**) в целых неотрицательных числах?*

Задачу удобно интерпретировать так: есть n одинаковых выстроенных в ряд шаров, которые нужно разделить на k частей, т.е. поставить между ними k перегородок, причем в первом случае перегородки не могут стоять рядом и в начале (конце) ряда, а во втором случае таких ограничений нет, например, если все перегородки окажутся в конце, получится решение уравнения $x_1 = n$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_k = 0$.

В первом случае есть $n-1$ место между шарами, куда можно поставить $k-1$ перегородку. Число решений равно числу способов выбрать из $n-1$ мест $k-1$, где перегородки будут поставлены, т.е. $\binom{n-1}{k-1}$.

Во втором случае есть n одинаковых шаров и $k-1$ одинаковых перегородок, которые можно расположить произвольным образом, т.е. из $n+k-1$ места выбрать n мест для шаров (или, если угодно, $k-1$ место для перегородок). Получим $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Часто встречаются еще две формулировки задачи Муавра:

— сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы k натуральных (неотрицательных целых) слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными);

— сколькими способами можно разложить n одинаковых шаров по k различным ящикам?

В качестве примера решим несколько задач.

149. Сколькими способами можно составить букет из 17 цветов, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны и васильки?

Решение. Пусть в букете x_1 гвоздик, x_2 розы, x_3 гладиолусов, x_4 ирисов, x_5 тюльпанов и x_6 васильков. Тогда нам нужно найти число целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$, причем $x_i \geq 0$.

Применяя задачу Муавра, получаем $\binom{17+6-1}{6-1} = \binom{22}{5}$.

150. Сколькими способами можно разделить 10 одинаковых пирожных между Анной, Борисом и Валентиной, если Анна должна получить не менее одного пирожного, Борис — не менее двух, а Валентина — не менее трех?

Решение. Запишем уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$

Сделаем замену $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 3$. Тогда $y_1 + y_2 + y_3 = 4$, $y_i \geq 0$. Используя задачу Муавра, получаем ответ $\binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$.

Можно сделать то же и более наглядно — сразу отдадим Анне одно пирожное, Борису — два, Валентине — 3 и будем делить 4 оставшихся.

151. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ при дополнительных ограничениях $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq -5$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 8$?

Решение. Положим $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 + 5$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4 - 8$. При заданных ограничениях $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ тогда и только тогда, когда $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 26$ и каждое $y_i \geq 0$; последняя задача есть стандартная задача Муавра, число решений которой равно $\binom{26+4-1}{4-1} = \binom{29}{3} = 3654$.

152. Найдите число членов в разложении $(x + y + z)^{10}$ (после приведения подобных членов).

153. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

154. Нужно купить 9 ручек, в продаже имеются ручки 4 видов. Сколькими способами это можно сделать?

155. Есть 5 карточек с цифрой "3", 3 карточки с цифрой "4" и 3 карточки с цифрой "5". Сколькими способами можно выложить ряд из 8 карточек так, чтобы цифры, написанные на выложенных карточках, не убывали слева направо?

156. Сколькими способами 4 человека могут разделить между собой

а) 10 яблок;

б) 6 яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин;

в) 7 яблок и 4 апельсина?

Фрукты одного вида считаем одинаковыми.

157. Имеется m белых и n черных шаров, причем $m \geq n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

158. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырех комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

159. Сколькими способами можно разделить 100 одинаковых акций между 5-ю людьми так, чтобы каждому досталось не менее одной акции?

160. Сколькими способами можно выбрать 10 чисел от 1 до 35, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

161. С понедельника по пятницу доктор должен принять 6 человек. Ежедневно он может принимать любое количество пациентов. Сколькими способами он может составить расписание приема? (Порядок приема пациентов в течение дня существенен.)

162. Сколькими способами можно разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг?

163. На каждом борту лодки должно сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем десять человек хотят сидеть на левом борту лодки, двенадцать — на правом, а девяти безразлично где сидеть?

164. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зеленых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

165. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6.

а) Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым;

б) А если некоторые ящики могут оказаться пустыми?

166. Поезду, в котором находятся m пассажиров, предстоит сделать n остановок.

а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках?

б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

167. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, лузы считаются различными.

168. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя.

а) Сколькими способами может произойти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

б) Решите ту же задачу, если голосование тайное, т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально.

169. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?

170. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем

а) 8 открыток;

б) 8 различных открыток?

171. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

172. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара можно разложить в 6 различных ящиков?

173. Сколькими способами 12 пятаков можно разложить по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не оказался пустым?

174. В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать двадцать?

175. Сколькими способами можно разложить 3 рублевых купюры и 10 полтинников в 4 различных пакета?

176. Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, зеленый или синий переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

4.2. Формула включения и исключения

Начнем с простой задачи.

177. Сколько существует натуральных чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 5?

Решение. Сначала вычеркнем числа, кратные 2; их количество равно 500. Затем вычеркнем числа, кратные 5; их количество равно 200. При этом числа, делящиеся и на 2, и на 5, будут вычеркнуты дважды. Их количество равно 100 (это числа, делящиеся на 10). Значит, всего мы вычеркнули $500 + 200 - 100 = 600$ чисел, а осталось $1000 - 600 = 400$.

Здесь мы неявно воспользовались (ну, или заново доказали) еще один простой теоретико-множественный факт — число элементов в объединении двух множеств равно сумме мощностей этих множеств минус число элементов в их пересечении:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Оказывается, что и для большего числа множеств мощность объединения выражается через мощности пересечений, например,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Здесь уже не удается ограничиться пересечениями по два множества, добавляется и тройное пересечение.

Общее утверждение (оно как раз и называется формулой включений и исключений) выглядит так:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}| \right).$$

То есть для подсчета числа элементов в объединении множеств нужно сначала сложить мощности всех множеств, затем вычесть мощности всех попарных пересечений, затем прибавить мощности всех пересечений по 3 множества и т.д.

Доказательство. *В левой части равенства все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств, считаются по одному разу. Докажем то же про правую часть.*

Пусть x принадлежит ровно k множествам из $A_1, \ldots, A_n$. Тогда при суммировании мощностей $A_1, \ldots, A_n$ мы считаем его k раз со знаком $+$, x также входит в $\binom{k}{2}$ попарных пересечений, где мы считаем его со знаком $-$. И так далее. В пересечения *больше, чем k множеств, x не входит, поэтому всего в правой части равенства x учитывается*

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$

раз. Подставим в формулу для бинома Ньютона $x = 1$ и $y = -1$.

$$0 = (1-1)^k = 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^k\binom{k}{k},$$

Перенеся все, кроме 1, в левую часть, получим

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} = 1,$$

что и требовалось.

Приведем еще пару примеров.

178. Сколько существует натуральных чисел от 1 до 900, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение. Пусть A — множество чисел, делящихся на 2, B — делящихся на 3, C — делящихся на 5. Найдем количество чисел, делящихся или на 2 или на 3 или на 5, то есть $A \cup B \cup C$. По формуле включений и исключений:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

$|A| = 450$, $|B| = 300$, $|C| = 180$, $|A \cap B| = 150$ (это числа, делящиеся на 6), аналогично $|A \cap C| = 90$, $|B \cap C| = 60$ $|A \cap B \cap C| = 30$ и

$$|A \cup B \cup C| = 450 + 300 + 180 - 150 - 90 - 60 + 30 = 660.$$

Нас же интересуют числа, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Их число равно $900 - |A \cup B \cup C| = 900 - 660 = 240$.

179. В коллективе 70 человек. 25 из них знают английский язык, 16 — немецкий, 18 — французский, 5 — английский и немецкий, 7 — английский и французский, 3 — немецкий и французский, 3 — все три языка. Сколько людей знают хотя бы один из этих трех языков?

Решение. Пусть A — множество людей, знающих английский, B — немецкий, C — французский. По условию необходимо найти $|A \cup B \cup C|$, причем известно, что $|A| = 25$, $|B| = 16$, $|C| = 18$, $|A \cap B| = 5$, $|A \cap C| = 7$, $|B \cap C| = 3$ $|A \cap B \cap C| = 3$. Применим формулу включений и исключений: $|A \cup B \cup C| = 25 + 16 + 18 - 5 - 7 - 3 + 3 = 47$.

180. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса было и там и там?

181. В классе 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом, а 10 ничем не занимаются. Сколько ребят занимаются и математикой, и биологией?

182. На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?

183. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 — испанский, 75 — немецкий. Сколько человек заведомо знают все три языка?

184. Каждый из 4 языков знают 15 человек, каждые 2 — 6, каждые 3 языка — двое, все языки — один. Сколько человек в группе?

185. Сколько различных элементов в объединении четырех множеств, имеющих по 13 элементов, если каждая пара множеств имеет по 8 общих элементов, каждая тройка множеств имеет по 5 общих элементов и 3 элемента принадлежат всем четырем множествам.

186. Найдите количество положительных целых чисел, не превышающих 1 000 000, которые являются либо квадратами, либо кубами целых положительных чисел.

187. Найдите число целых положительных чисел, не превосходящих 210 и

а) не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7;

б) не делящихся ни на 6, ни на 10, ни на 15.

188. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру? (Числа 23 и 37 можно увидеть и в числе 237.)

189. Сколько перестановок 10 цифр либо начинаются с трех цифр 012, либо содержат последовательность цифр 23 на третьем и четвертом местах, либо оканчиваются комбинацией цифр 789?

190. Сколькими способами 7 человек могут встать в очередь так, чтобы либо А, Б и В стояли на первых трех местах, либо Б, В и Г на втором–четвертом местах, либо Е и Ж на последних?

191. Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенным оставался или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

192. В группе A_1 студентов имеет не менее одной двойки, A_2 — не менее двух двоек, A_3 — не менее трех двоек и т. д. Как, зная числа $A_1, A_2, \ldots$, определить общее число двоек в группе?

193. Сколько подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 12\}$, имеют пустое пересечение по крайней мере с одним из подмножеств $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $\{6, 8, 10, 12\}$.

194. Найдите число решений уравнения $x + y + z = n$, где x, y, z — *различные* неотрицательные целые числа.

195. При выяснении читательских вкусов студентов оказалось, что 60% студентов читают журнал A, 50% — журнал B, 50% — журнал C, 30% — журналы A и B, 20% — B и C, 40% — A и C, 10% — A, B и C. Выяснить, сколько процентов студентов

а) не читает ни одного из журналов;

б) читает в точности 2 журнала;

в) читает не менее двух журналов.

196. Найти количество перестановок символов алфавита $\{А, Б, В, Г, \ldots, Я\}$, содержащих по крайней мере одну из последовательностей *АБВГД*, *КЛМНО*, *ЬЪЭЮЯ*.

197. Четыре супружеские пары занимают места за вращающимся круглым столом

(8 мест). Сколько способов разместить их, чтобы никакая пара не сидела на диаметрально противоположных местах?

198. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существенен.

а) Сколько можно составить различных наборов колечек в коробке?

б) Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

в) Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не менее 3 и не более 9, колечек с корицей не менее 3 и не более 9, а ореховых не менее 2 и не более 4?

199. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов. Сколькими способами из них можно составить букет из 9 цветов? (Цветы одного сорта считаем одинаковыми.)

200. Сколько решений (в целых неотрицательных числах) у уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$ при условии, что

а) $x_1 \leq 3$;

б) $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 3$;

в) $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 3$, $x_3 \leq 3$;

г) $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 3$, $x_3 \leq 3$, $x_4 \leq 3$?

201. Нужно разгрузить 11 составов с зерном на три склада. На первый склад может поместиться 6 составов, на второй — 5 составов, на третий — 4 состава. Сколькими способами можно разгрузить составы? (Порядок разгрузки составов не важен.)

202. Сколькими способами можно представить 1000000 в виде произведения трех множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются

а) разными;

б) одинаковыми.

Глава 5.

Разнообразные приложения

5.1. Теория множеств, логика, бинарные отношения, теория графов

203. **а**) Сколько всего подмножеств множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$?

б) Сколько из них содержат хотя бы одно нечетное число?

в) Сколько них таких, что $\{1\} \in X$ и $\{2\} \notin X$?

Каких подмножеств у множества N больше:

г) содержащих множество $\{1, 3, 5\}$, или не пересекающихся с ним;

д) с четным или с нечетным числом элементов?

204. Множество C состоит из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы

а) множества A и B не пересекались;

б) множество A содержалось бы в множестве B?

205. Множество S содержит n элементов. Сколько существует последовательностей подмножеств множества S длины k: $(T_1, \ldots, T_k)$, таких, что

а) $T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_k = \varnothing$;

б) $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_k$;

в) $k = n + 1$ и $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_{n+1}$?

206. Докажите, что

$$\sum_{A,B \subset N} |A \cap B| = n4^{n-1},$$

где $n = |N|$.

207. Докажите неравенства Бонферрони для подмножеств $A_1, A_2, \ldots A_n \subset S$:

$$\textbf{а)}\ \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset \{1,\ldots n\}, |I=k|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \le \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|,$$

если q — четное число;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k+1}\sum_{I\subset\{1,\dots n\},|I=k|}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|\geq\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|,$

если q — нечетное число.

Эти неравенства показывают, что ошибка, возникающая при удалении всех, кроме первых q членов, в формуле включений-исключений, имеет тот же знак, что и первое удаленное слагаемое.

208. Сколько существует

а) булевых векторов длины n, т.е. векторов, компоненты которых — нули и единицы;

б) булевых матриц размера $n\times m$, т.е. матриц, элементы которых нули и единицы?

Во скольких из этих матриц

в) каждый столбец содержит ровно k единиц;

г) все столбцы ненулевые;

д) все столбцы попарно различны?

209. В n-мерном булевом кубе найдите число

а) вершин;

б) всех граней, включая вершины и сам куб;

в) ребер;

г) k-мерных граней.

210. Сколько существует

а) всего;

б) сохраняющих 1;

в) сохраняющих 0;

г) линейных;

д) самодвойственных

логических функций, зависящих от n переменных?

211. Найдите

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C(n)}{2^{2^n}},$$

где $C(n)$ — число функций, зависящих от n переменных и образующих полную систему в одиночку.

212. Пусть во множестве A — n элементов, в B — m элементов. Сколько существует

а) соответсвий;

б) всюду определенных соответствий;

в) функций;

г) всюду определенных функций;

д) инъективных всюду определенных функций;

е) биекций;

между A и B?

213. Сколько различных производных порядка k у гладкой функции n переменных?

214. Пусть $|A| = n$. Найдите число

а) всех;

б) рефлексивных;

в) антирефлексивных;

г) симметричных;

д) асимметричных;

е) антисимметричных;

ж) полных;

з) связных

бинарных отношений на A;

и) линейных порядков на A.

5.2. Вероятность

Вероятностью называется отношение числа исходов, удовлетворяющих условию задачи, к числу всех возможных исходов. Задачи этого раздела предполагают "комбинаторные" решения, т.е. вычисление обоих чисел комбинаторными методами.

Теория вероятности, красивая, глубокая и интересная наука, остается за пределами задачника.

215. Из коробки с 10 шарами, пронумерованными от 0 до 9, вынимают не глядя два шара. Какова вероятность того, что номера обоих нечетны?

Решение. Всего 100 способов упорядоченно вытащить пару шаров $(10 \cdot 10)$, из них нас устраивает 20 $(5 \cdot 4)$. Значит, вероятность равна $25/100 = 1/5$.

216. Бросают 3 монеты.

а) С какой вероятностью все монеты выпадут на одну сторону?

б) С какой вероятностью выпадет хотя бы один орел?

Решение. Каждая монета может упасть либо орлом (О), либо решкой (Р) — 2 варианта. Поэтому всего исходов $2^3 = 8$.

В первом случае нас устраивают только 2 исхода — ООО и РРР, во втором — все исходы, кроме одного (РРР), поэтому вероятности соответственно равны $2/8 = 1/4$ и $(8-1)/8 = 7/8$.

217. Одновременно бросают 2 игральные кости.

а) Какова вероятность того, что на костях выпадет равное количество очков?

б) Какова вероятность, что число, выпавшее на первой кости, больше числа, выпавшего на второй кости?

Решение. На каждой кости может выпасть любая цифра от 1 до 6, поэтому всего исходов $6 \cdot 6 = 36$.

В первом случае нас устраивают только 6 исходов — от (1,1) до (6,6), во втором — половина оставшихся, т.е $(36-6)/2 = 15$. Вероятности соответственно равны $1/6$ и $5/12$.

218. В урне 10 шаров. Вероятность вытащить из нее два белых шара (из двух) равна $\frac{2}{15}$. Сколько в урне белых шаров?

219. Имеется три ящика, в каждом из которых лежат шары с номерами от 0 до 9. Из каждого ящика вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что

а) вынуты три шара с номером 1;

б) вынуты три шара с одинаковыми номерами?

220. В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара. Какова вероятность того, что все вынутые шары будут белыми?

221. Монету бросают 100 раз подряд. Какова вероятность того, что

а) выпадет ровно 50 орлов;

б) орлов выпадет больше, чем решек;

222. Одновременно бросают 2 кости. **а**) Какое значение суммы выпавших очков более вероятно?

223. Одновременно бросают 3 кости. Какова вероятность того, что

а) на всех костях выпадут одинаковые числа;

б) все числа на костях разные;

в) выпало ровно два одинаковых числа;

г) не выпало ни одной шестерки?

224. **Парадокс де Мере.** Имеются 3 игральные кости. Почему число 11 в сумме выпадает чаще, чем 12, хотя оба разбиваются в сумму 6 способами: $11 = (6{+}4{+}1, 6{+}3{+}2, 5{+}5{+}1, 5{+}4{+}2, 5{+}3{+}3, 4{+}4{+}3)$, $12 = (6{+}5{+}1, 6{+}4{+}2, 6{+}3{+}3, 5{+}5{+}2, 5{+}4{+}3, 4{+}4{+}4)$?

225. Какое из событий более вероятно:

а) появление по крайней мере одной шестерки при бросании 6 костей;

б) появление хотя бы двух шестерок при бросании 12 костей;

в) появление не менее трех шестерок при бросании 18 костей?

226. Какое наименьшее число раз нужно:

а) бросить монету, чтобы вероятность появления хотя бы одного орла была больше 1/2;

б) бросить игральную кость, чтобы вероятность появления хотя бы одной шестерки была больше 1/2;

в) вытянуть карту из колоды (без возвращения), чтобы вероятность появления хотя бы одного туза была больше 1/2?

227. Среди билетов лотереи половина выигрышных. Сколько билетов надо купить, чтобы вероятность хоть что-то выиграть была больше 0,95?

228. Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найдите вероятность того, что из них можно составить цепочку согласно правилам игры.

229. Какова вероятность того, что при игре в домино вы не получите при раздаче ни одного дубля (каждый из четырех игроков получает по 7 костей домино)?

230. **Спортлото.** В лотереях ”5 из 36” и ”6 из 45” необходимо отметить на карточке 5(6) чисел из 36(45). Во время тиража также выбирается 5(6) чисел из 36(45). Карточка выигрывает, если не менее 3(4) отмеченных чисел совпадает с выпавшими при тираже. Причем, чем больше чисел совпадет, тем больше приз. Вычислите вероятность совпадения

а) 3, 4 и 5 чисел в лотерее "5 из 36";

б) 4, 5 и 6 чисел в лотерее "6 из 45".

в) Участник лотереи "6 из 45" на первой карточке отметил номера $(1, 2, 3, 11, 12, 13)$, а на второй — $(1, 2, 3, 21, 22, 23)$. Найдите вероятность того, что участник получит ровно два минимальных выигрыша.

231. В классе 10 мальчиков и 10 девочек.

а) Ребят случайным образом рассадили за 10 парт. Какова вероятность того, что за каждой партой оказались мальчик и девочка?

б) По жребию разыгрывают 10 билетов на концерт. Какова вероятность того, что на концерт пойдет одинаковое число мальчиков и девочек?

На школьном празднике ребята рассаживаются в один ряд в актовом зале. Какова вероятность того, что

в) все девочки будут сидеть рядом;

г) Петя и Маша будут сидеть рядом?

232. Кодовой замок имеет 10 кнопок с цифрами от 0 до 9 и открывается **а**) одновременным; **б**) последовательным нажатием на определенные три кнопки. Какова вероятность, что человеку, не знающему код, удастся открыть его с первого раза?

233. Замок на сейфе открывается набором определенной комбинации из 5 цифр от 0 до 9 (при этом учитывается порядок цифр в комбинации). Какова вероятность открыть сейф в течение часа, если тратить на набор каждой новой комбинации одну секунду?

234. Из 5 пар находившихся в шкафу ботинок вор в спешке украл 4 случайных ботинка. С какой вероятностью вор остался с носом, т.е. что украденных ботинок нет парных?

235. В записанном телефонном номере $8-901-135-3*-**$ три последние цифры стерлись. Найдите вероятность того, что:

а) стерлись различные цифры, отличные от 1,3,5;

б) стерлись одинаковые цифры;

в) две из стершихся цифр совпадают.

236. Двое делят пополам 10 конфет, две из которых с сюрпризом. Найдите вероятности того, что первому достанется **а**) 0; **б**) 1; **в**) 2 конфеты с сюрпризом.

237. Из чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ без возвращения выбираются три числа. С какой вероятностью первое из них окажется между вторым и третьим?

238. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найдите вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

239. В теннисном турнире участвуют 2^n игроков. Предположим, что лучший игрок всегда побеждает второго по мастерству, а тот, в свою очередь побеждает всех остальных. Проигрывающий в финале занимает второе место. Какова вероятность того, что это место займет второй по мастерству игрок?

240. Какова вероятность, что в компании из 12 человек все дни рождения придутся на разные месяцы года?

241. В классе 30 учеников. Докажите, что вероятность того, что у каких-нибудь двух учеников совпадают дни рождения, составляет больше 50 процентов. Можно считать, что никто из учеников не родился 29 февраля.

242. Многие москвичи считали билет с четырех(шести)значным номером счастливым, если сумма первых двух (трех) цифр равна сумме последних двух (трех). Примета советовала при получении счастливого билета немедленно его съесть. Сколько существует **а**) четырехзначных; **б**) шестизначных счастливых билетов? Найдите вероятность получить счастливый билет.

243. В классе n человек и столько же мест за партами. Ученики, которые хорошо написали предыдущую контрольную, хотят на следующей сидеть на "своем" месте, а те, кто написали плохо — на каком-нибудь другом. **а**) Сколькими способами они могут пересесть, если хорошо предыдущую контрольную не написал никто? **б**) Предполагая, что на самом деле ученики пересаживались случайно, вычислите вероятность того, что случится событие, описанное в пункте а).

5.3. Карты

Предполагается, что колода карт перед сдачей хорошо перемешана, т.е. все возможные перестановки карт равновероятны.

244. Сколькими способами можно сдать 6 карт из 36 так, чтобы среди них был

а) ровно один туз;

б) ровно два туза;

в) ровно одна дама красной масти;

г) ровно два туза и один король;

д) хотя бы один туз;

е) не менее двух тузов;

ж) ровно один туз и не менее одного короля;

з) два туза и не менее двух королей?

245. Из колоды в 36 карт одну за другой вытягивают две карты. Какова вероятность того, что они одного цвета? Выбор

а) без возвращения;

б) с возвращением.

246. Колоду из 36 карт раздают на двоих. Какова вероятность, что тузов у них окажется поровну?

247. Найдите вероятность того, что в колоде из 36 карт все четыре туза окажутся рядом.

248. **Покер.** Имеется колода из 52 карт, по 13 карт каждой масти. Подсчитайте, сколькими способами можно выбрать 5 карт так, что среди них окажутся:

а) "Straight flush": пять последовательных карт одной масти;

б) "Каре": четыре карты из пяти одного достоинства;

в) "Flush": пять карт одной масти;

г) "Full house" или "3+2": три карты одного достоинства и две другого;

д) "Straight": пять последовательных карт;

е) "3": три карты одного достоинства;

ж) "2+2": две пары карт одного достоинства;

з) "2": пара карт одного достоинства;

и) Вычислите вероятности перечисленных событий.

Преферанс

249. При игре в преферанс каждому из трех игроков раздают по 10 карт, а две карты кладут в прикуп. Сколько различных раскладов возможно в этой игре? (Считаются возможные раздачи без учета того, что каждые 10 карт достаются конкретному игроку.)

250. Найти вероятность того, что в прикупе 2 туза.

251. Пусть играющий имеет 5 старших карт масти, исключая даму. Найти вероятность того, что у одного из противников "третья дама".

252. У игрока в преферанс оказалось 4 козыря, а еще 4 находятся на руках у двух его противников. Какова вероятность того, что козыри лягут **а**) 2 : 2; **б**) 3 : 1; **в**) 4 : 0?

5.4. Шахматы

В этом параграфе выражение "фигуры угрожают друг другу" (фигуры бьют друг друга) подразумевает, что поля, на которых они расположены, связаны между собой ходом этой фигуры независимо от цвета фигур.

253. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного короля, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

254. **а**) Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня); **б**) а если не забывать, что слоны должны стоять на полях разного цвета?

255. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга **а**) две ладьи; **б**) двух королей; **в**) двух слонов; **г**) двух коней; **д**) двух ферзей?

256. Найдите вероятность того, что случайным образом поставленные на шахматную доску **а**) две ладьи; **б**) два короля; **в**) два слона; **г**) два коня; **д**) два ферзя не бьют друг друга.

257. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску

а) белую и черную ладьи;

б) 6 белых ладей;

в) 4 белых и 2 черных ладьи;

г) 8 белых ладей?

258. Сколькими способами можно расставить n не угрожающих друг другу ладей на доске $n \times n$, если k из них — белые и $n - k$ — черные?

259. Найти вероятность того, что при случайной расстановке k $(2 \leq k \leq 8)$ ладей на шахматной доске никакие две ладьи не будут угрожать друг другу. При каких k эта вероятность меньше 1/2? Меньше 1/100?

260. Сколькими способами можно расставить n ладей на доске $n \times n$ так, чтобы они держали под обстрелом все поля доски?

261. Докажите, что число способов поставить на шахматную доску максимальное число не бьющих друг друга слонов есть квадрат целого числа.

5.5. Разные задачи

262. Будем считать игральные кости различными, если их нельзя совместить одну с другой при помощи вращений кубика. Сколько существует различных игральных костей? Решите ту же задачу для правильного двенадцатигранника (додекаэдра), на гранях которого написаны числа от 1 до 12.

263. На фабрике игрушек два цеха. В первом цеху автомат производит кубики с ребром 1 см, одинаковые и одинаково покрашенные шестью красками так, что все грани имеют разные цвета. Кубики сваливают в коробки, где они ориентированы случайно. Во втором цеху из этих кубиков склеивают параллелепипеды с ребрами 1 см, 1 см, 2 см. Сколько видов готовой продукции производит фабрика? (Два параллелепипеда считаются одинаково раскрашенными, если можно так расположить их в пространстве, что одинаково расположенные грани окрашены одинаково.)

264. **а**) Какое число различных ожерелий длины n можно составить из n различных камней (ожерелья, полученные поворотами из данного ожерелья, считаются одинаковыми)?

б) Предположим теперь, что ожерелье можно не только поворачивать, но еще и переворачивать. Как изменится ответ в пункте а)?

265. Пусть p — простое число. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.) Получите формулу и выведите из нее малую теорему Ферма: пусть p — простое число, тогда $a^p - a$ делится на p для любого натурального a.

266. За круглым столом были приготовлены 12 мест для жюри с указанием имени на каждом месте. Николай Николаевич, пришедший первым, по рассеянности сел не на свое, а на следующее по часовой стрелке место. Каждый член жюри, подходивший к столу после этого, занимал свое место или, если оно уже было занято, шел вокруг стола по часовой стрелке и садился на первое свободное место. Возникшее расположение членов жюри зависит от того, в каком порядке они подходили к столу. Сколько может возникнуть различных способов рассадки жюри?

267. На окружности отмечено несколько точек, A — одна из них. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках больше: содержащих точку A или не содержащих ее? На сколько?

268. Докажите, что число неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника равно ближайшему к $n^2/12$ целому числу.

269. Нарисуйте на плоскости 6 точек так, чтобы они служили вершинами ровно для 17 треугольников.

270. **Головоломка "Ханойская башня"** представляет собой 8 дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший.

а) Докажите, что эта головоломка имеет решение. Какой способ решения головоломки будет оптимальным (по числу перемещений)?

б) Занумеруем колышки числами 1, 2, 3. Предположим, что требуется переместить диски с 1-го колышка на 3-й. Сколько понадобится перекладываний, если прямое перемещение диска с 1-го колышка на 3-й запрещено?

в) Сколько понадобится перекладываний, если в условии предыдущего пункта добавить дополнительное требование: первый диск нельзя класть на второй колышек?

271. Петя поднимается по лестнице из 10 ступенек. За один раз он прыгает либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки. Сколькими способами Петя сможет подняться по лестнице?

272. Сколько существует 7-значных чисел, составленных из цифр 1 и 2, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

273. Архитектор хочет расположить 7 высотных зданий так, чтобы, гуляя по городу, можно было увидеть их шпили в любом (циклическом) порядке. Удастся ли это ему?

274. Сколькими способами можно разменять 20 копеек монетами достоинством в 5, 2 и 1 копейку?

275. На конгресс собрались по 5 представителей от каждой из 100 компаний. Сколько способов сформировать комитет из 25 представителей, в который входит не более чем по одному представителю от каждой компании? Сколько способов сформировать комитет из 25 представителей, в который входит не более чем по три представителя от каждой компании?

276. Докажите, что количество всех цифр в последовательности $1, 2, 3, 4, \ldots, 1000$ равно количеству всех нулей в последовательности $1, 2, 3, 4, \ldots, 10000$.

277. Подсчетом количества упорядоченных пар непустых деревьев с выделенным корнем, имеющих в сумме n вершин, докажите равенство

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1}.$$

278. Пусть $a(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — число таких деревьев с n вершинами, что каждая вершина i имеет степень d_i. Доказать, что

$$a(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}.$$

Используя полученную формулу, докажите формулу для числа деревьев с n вершинами.

279. Сколько существует пар (x, y) целых чисел таких, что $|x| + |y| < 100$?

280. Сколько существует пар целых чисел x, y, заключенных между 1 и 1000, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 7?

281. В каждую клетку таблицы 10 на 10 требуется вписать 1 или -1 так, чтобы произведение всех чисел в каждом столбце и произведение чисел в каждой строке равнялись 1. Сколькими способами можно заполнить таблицу?

282. На кафедре математики работают n профессоров, читающих $2n$ курсов. Каждый семестр каждый профессор читает 2 курса, каждый курс читается только одним профессором, и каждый профессор может читать каждый курс. Сколько существует различных возможностей распределить курсы в осеннем семестре? Сколько существует возможностей распределить курсы в весеннем семестре так, что ни один профессор не читает ту же пару курсов, что и в осеннем семестре?

283. Девять волейбольных команд принимают участие в турнире, каждая команда встречается с другой в точности один раз. Игры проводятся на двух площадках: площадке А и площадке В. Верно ли, что при любом расписании игр найдутся 4 команды, которые будут играть все 6 игр друг с другом на одной и той же площадке?

284. В парламенте 30 депутатов. Каждые два из них либо лояльны друг к другу, либо враждуют, причем каждый лоялен ровно к 6 другим. Каждые 3 депутата образуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все три члена попарно лояльны или все трое попарно враждуют.

285. Правильная треугольная пирамида сложена из 120 одинаковых шаров. Сколько шаров лежит в ее основании?

286. **а**) Сколько различных слов можно получить перестановкой букв *aaabbbccc*?

б) Сколько будет таких слов, в которых не стоят две одинаковые буквы подряд?

287. Имеется 40 одинаковых конфет и 10 различных шоколадок. Сколько способов разделить эти сладости между 5 детьми так, чтобы каждый получил не менее 5 конфет и по крайней мере 1 шоколадку?

Ответы, указания, решения

Глава 1

8. а) Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трех блюдец. Поэтому есть 3 разных комплекта, содержащих выбранную чашку. Поскольку чашек всего 5, то число различных комплектов равно 15.

б) Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно 60.

в) Возможны три разных случая: первый — покупаются чашка с блюдцем, второй — чашка с ложкой, третий — блюдце и ложка. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных вариантов (в первом — 15, во втором — 20, в третьем — 12). Складывая, получаем общее число возможных вариантов: 47.

9. $20 = 5 \cdot 4$.

10. $18 = 3 \cdot 6$.

11. $70 = 7 \cdot 5 \cdot 2$.

12. Если у каждой девочки будет по васильку и по 3 маргаритки, то ему нужно распределить 13 васильков и 4 маргаритки, т.е. разбить каждый вид цветов на 2 набора. Это можно сделать $14 \cdot 5 = 70$ способами.

13. $[10]_3 = 720$.

14. 3^6.

15. $500 = 20 \cdot 20 + 10 \cdot 10$.

16. *Упорядоченный выбор с возвращением.* Каждый из 4 выбранных шаров может быть (независимо от других) либо красным либо синим, поэтому ответ — $2^4 = 16$.

Упорядоченный выбор без возвращения. Подходят все варианты из предыдущего пункта, кроме $KKKK$ — нельзя выбрать 4 красных шара. Ответ: $16 - 1 = 15$.

Неупорядоченный выбор с возвращением. В этом случае существенно лишь количество вынутых красных шаров, поскольку оно определяет количество синих. А красных шаров может быть вынуто от 0 до 4. Ответ: 5.

Неупорядоченный выбор без возвращения. Подходят все варианты из предыдущего пункта, кроме $KKKK$. Ответ: $5 - 1 = 4$.

17. а) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$; **б**) $6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 150$.

18. В результате каждого из 10 бросков может выпасть или орел или решка — 2 варианта. Ответ: $2^{10} = 1024$.

19. На первое место можно положить любой из четырех шариков, на второе —

любой из трех оставшихся, на третье — любой из двух оставшихся, а на четвертое — последний оставшийся шарик. Итак, ответ: $4! = 24$.

20. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

21. Если хотя бы 2 грани буду выкрашены в один цвет, то все цвета использовать не удастся. Значит, необходимо использовать одну краску на одну грань, поэтому ответ: $6! = 720$.

22. Для каждого из 13 матчей возможны 3 исхода, поэтому всего вариантов заполнения лотерейной карточки 3^{13}.

23.а) Сначала найдем, сколько чисел от 000000 (будем считать, что в начале менее, чем 6-значных чисел стоят нули) до 999999 не содержат в записи единицы. На любом из 6 мест может стоять любая цифра, кроме 1 (9 вариантов), поэтому таких чисел 9^6. Среди первого миллиона не встречается 0, который мы посчитали (а 1000000 учитывать не нужно, т.к. в его десятичной записи есть единица). Поэтому правильный ответ — $9^6 - 1$. Единицу в десятичной записи содержат остальные числа, поэтому их $10^6 - 9^6 + 1$. Чтобы сравнить эти числа, проще сравнить одно из них с половиной миллиона. $9^6 - 1 = 531440 > 500000$, поэтому среди первого миллиона больше чисел, не содержащих 1 в десятичной записи.

б) Аналогично, $9^7 - 1 = 4782968 < 5000000$, поэтому среди первых 10 миллионов больше уже чисел, содержащих в десятичной записи 1.

24. Каждая из n^2 клеток может быть покрашена тремя различными цветами, поэтому всего вариантов 3^{n^2}.

25. 4^8.

26. Выделим два случая: путь проходит через город Б или через город Г. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных маршрутов: в первом — 24, во втором — 4. Складывая, получаем общее количество маршрутов: 28.

27. $10^5 \cdot 12^3$.

28. **а**) 10^7; **б**) $10^7 - 5^7$; **в**) $[10]_7$.

29. $33^4 - 23^4$.

30. $33!$.

31. Последовательностей менее чем из 5 значков существует $2+4+8+16 = 30$, что меньше числа букв (33).

32. **а**) 5^5; **б**) $5+5^2+5^3+5^4+5^5$; **в**) Вычитаем из всех возможных слов те, в которых все буквы различны, т.е. число перестановок 5 букв. Ответ: $5^5 - 5!$.

33. $6^5 \cdot 8^4 + 6^4 \cdot 8^5$.

34. Заметим, что однобуквенных слов 26 (столько же сколько и букв в английском алфавите), двухбуквенных — 26^2, трехбуквенных — 26^3, четырехбуквенных — 26^4. Теперь определим, какое по счету слово $cbcad$. Пятибуквенных слов, начинающихся с a или b — $2 \cdot 26^4$, слов $caxxx$ (где x — любая буква) — 26^3, слов, начинающихся на cba или cbb — $2 \cdot 26^2$, слов, начинающихся на $cbca$ и расположенных выше $cbcad$ — 3. Значит, слово $cbcad$ расположено на $26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 2 \cdot 26^4 + 26^3 + 2 \cdot 26^2 + 3 + 1$ месте.

35. $5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 325$.

36. $2^7 = 128$.

37. $17!$.

38. Выберем произвольный порядок вершин (это можно сделать $n!$ способами) и проведем ломаную в этом порядке — из 1-й вершины во 2-ю, из 2-й в 3-ю,..., из n-й в 1-ю. Но для любой замкнутой ломаной существует n способов начать ее строить и 2 способа ее рисования (в прямом и обратном направлении). Поэтому существует только $n!/2n = (n-1)!/2$ ломаных.

39. Количество дней равно количеству различных наборов из 6 блюд. Для каждого блюда есть две возможности — быть выбранным или невыбранным, поэтому количество наборов (дней) равно $2^6 = 64$.

Далее, каждому набору блюд можно сопоставить противоположный набор, состоящий из блюд, которых нет в исходном наборе. Вместе в исходном и в противоположном наборе 6 блюд, значит в среднем приходится по 3 блюда на набор. Поскольку все 64 набора разбиваются на пары противоположных, то в среднем за эти 64 дня студент съедал 3 блюда.

40. Сначала выберем пику. Она может быть произвольного достоинства. Трефа может быть любого достоинства, кроме достоинства пики, бубна — любого из 11 $(13-2)$ достоинств, черва — любого из 10. Ответ: $13\cdot12\cdot11\cdot10$.

41. **а**) $36!$; **б**) $2\cdot(18!)^2$; **в**) $4!\cdot(9!)^4$.

42. $9\cdot10^9 - 9\cdot9!$.

43. Выпишем все цифры в порядке убывания: 9876543210. Чтобы получить девятизначное число, нужно убрать одну цифру. Это можно сделать 10 способами.

44. **а**) 10^5; **б**) $9\cdot10^4\cdot2$; **в**) $6!$;

г) Вычтем из ответа пункта в) число вариантов, где 2 и 4 стоят рядом. Это число равно числу перестановок 5 элементов (1, $\{2,4\}$, 3, 5, 6) умножить на число способов переставить 2 и 4, т.е. $5!\cdot2$. Ответ: $6!-5!\cdot2=480$.

д) 7^6; **е**) $[7]_6$; **ж**) $9\cdot10^4\cdot5$; **з**) $4\cdot5^5$; **и**) $4\cdot5^5+5^6$; **к**) $9^10^5-5^6$; **л**) $9\cdot9!/4!$; **м**) $5\cdot5\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5+4\cdot4\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5$; **н**) $9\cdot10^2$; **о**) $9+9\cdot5+9\cdot8\cdot6$; **п**) $2^6=64$; **р**) $8\cdot9^5$; **с**) $9\cdot10^5-8\cdot9^5$; **т**) $9^5+5\cdot9^4\cdot8$; **у**) $4\cdot4^4=4^5$. Указание: переберите возможные варианты двух последних цифр. **ф**) $8\cdot4!$; **х**) 9^6. **ц**) На первом месте может стоять любая из 9 цифр (кроме 0), на втором, третьем,..., 5-м — любая цифра (из 10), на последнем — одна из 5: если среди предыдущих цифр встретилось четное число нечетных, то любая четная цифра, если нет, то любая нечетная. По правилу произведения, ответ: $9\cdot10^4\cdot5$.

45. **а**) $2310=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$. Каждый делитель может или делиться на любой из этих простых множителей или не делиться. Поэтому число делителей равно $2^5=32$;

б) Каждое из чисел может входить в разложение делителя в любой степени от 0 до 10, от 0 до 15 и от 0 до 20 соответственно. Ответ: $11\cdot16\cdot21$.

в) $3^4\cdot5^2\cdot7^6\cdot111=3^5\cdot5^2\cdot7^6\cdot37$; все числа 3, 5, 7, 37 — простые. Следовательно, делителями будут все числа $3^k\cdot5^l\cdot7^m\cdot111^n$, где $0\ge k\ge5$, $0\ge l\ge2$, $0\ge m\ge6$, $0\ge n\ge1$. Степени k, l, m, n выбираются независимо, поэтому ответ: $6\cdot3\cdot7\cdot2=252$.

г) $10^{10}=2^{10}\cdot5^{10}$. Аналогично имеем $11\cdot11=121$ делитель.

д) Каждый множитель может входить в делитель в одной из своих степеней, т.е. от 0 до m_i — m_i+1 вариант. Чтобы задать делитель, достаточно задать степени, в которых в него входят $p_1,\dots,p_m$. Поэтому по правилу произведения число $p_1^{m_1}p_2^{m_2}\dots p_n^{m_n}$ имеет $(m_1+1)\cdot(m_2+1)\cdot\ldots\cdot(m_n+1)$ делителей.

46. Число $20^{15}=2^{30}\cdot5^{15}$ имеет $31\cdot16=496$ делителей. $201^5=3^5\cdot67^5$, поэтому у 201^5 всего $6\cdot6=36$ делителей.

47. Обозначим $n = 1000^{1000} = 2^{3000} \cdot 5^{3000}$. Если НОК$(a, b) = n$, то $a = 2^{a_1}5^{a_2}$, $b = 2^{b_1}5^{b_2}$, где где одно из чисел a_1 и b_1, также, как и одно из чисел a_2 и b_2 должно быть равно 3000, а другое — меньше 3000. Если $a_1 = 3000$, существует 3001 вариант выбора b_1 $(0, \ldots, 3000)$. Если $a_1 < 3000$ (3000 вариантов), b_1 обязано быть равно 3000. Всего 6001 вариантов выбора a_1 и b_1. Столько же вариантов выбора a_2 и b_2. Поэтому вариантов выбора a и b — 6001^2, если считать, что пара (a, b) упорядочена. Если считать пару неупорядоченной, то каждый вариант, кроме $a = b = 1000^{1000}$ мы посчитали 2 раза, поэтому ответ — $(6001^2 + 1)/2$.

48. а) Разобьем все числа на пары: 1 и 99999, 2 и 99998, 3 и 99997,..., 49999 и 50001. Без пары останется 50000, а сумма чисел в каждой паре равна 100000. Поэтому сумма всех цифр равна $100000 \cdot 49999$ (число пар) $+50000 = 4999950000$. По легенде это рассуждение в 9-летнем возрасте придумал великий немецкий математик К.Ф. Гаусс (1777—1855). Также можно воспользоваться формулой для суммы арифметической прогрессии (или вывести ее таким способом).

б) Всего 90000 пятизначных чисел, половина (т.е. 45000) из них нечетна. Также как и в предыдущей задаче, их можно разбить на 22500 пар, сумма чисел в каждой из которых равна $10001 + 99999 = 110000$. Ответ: $110000 \cdot 22500 = 2475000000$.

в) Всего таких чисел $2^5 = 32$. Их можно разбить на 16 пар, отличающиеся в каждом из разрядов (например, в одну пару попадут числа 12122 и 21211). Сумма чисел в каждой паре — 33333, поэтому сумма всех чисел равна $33333 \cdot 16 = 533328$.

г) Таких чисел 5^5. Их можно разбить на пары, объединив с числом $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$ число $\overline{(10 - x_1)(10 - x_2)(10 - x_3)(10 - x_4)(10 - x_5)}$ (например, в одну пару попадут числа 13753 и 97357). Без пары останется только число 55555, т.е. сумма чисел в любой паре равна $111110 = 55555 \cdot 2$, поэтому среднее арифметическое всех чисел равно 55555 и их сумма равна $55555 \cdot 5^5 = 173609375$.

д) Всего имеется $5! = 120$ способов переставить цифры в числе 12345. Среди этих способов ровно в пятой части (т.е. в 24 случаях) цифра 1 стоит на первом месте. То же самое справедливо для любой цифры и любого места. Поэтому искомая сумма равна $24(10000+1000+100+10+1+20000+2000+200+20+2+30000+3000+300+30+3+40000+4000+400+40+4+50000+5000+500+50+5) = 24(11111+22222+33333+44444+55555) = 24 \cdot 11111 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3999960$.

е) Таких чисел $6 \cdot 7^4$, поскольку на первом месте не может стоять 0. На первом месте может стоять любая из цифр $1 \ldots 6$, причем каждая из них встречается одно и то же число раз, т.е. $6 \cdot 7^4/6 = 7^4$. На втором и последующих местах может стоять любая из 7 цифр, поэтому каждая из них встречается $6 \cdot 7^4/7 = 6 \cdot 7^3$ раз.

Итак, сумма всех чисел равна $10000 \cdot 7^4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + (1000 + 100 + 10 + 1) \cdot 6 \cdot 7^3 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7^3 \cdot 21 \cdot (70000 + 6666) = 552225198$.

49. Первую можно раскрасить 6 цветами, вторую — 5, далее 4, 3, 2. Каждую следующую можно раскрасить двумя способами. Ответ: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^{96}$.

50. а) Для букета есть 4 способа выбрать гвоздику (ничего не выбрать, взять 1, 2 или 3), 5 способов выбрать розу и 6 способов выбрать тюльпан. По правилу произведения получаем $4 \cdot 5 \cdot 6 - 1$ (букет из 0 цветов не считается) способов выбрать букет.

б) Различных букетов из гвоздик 3 (от 1 до 3 гвоздик), из роз — 4, из тюльпанов

— 5. Поэтому всевозможных букетов $12 = 3 + 4 + 5$.

в) В букете может быть 1 или 3 гвоздики, 1 или 3 розы, 1, 3 или 5 тюльпанов. Всего $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ вариантов.

г) Букетов из нечетного числа цветов ровно половина от числа всех букетов, поскольку можно построить взаимно-однозначное соответствие между "четными" и "нечетными" букетами. Именно, букету из x гвоздик, y роз и z тюльпанов можно сопоставить букет из $3 - x$ гвоздик, y роз и z тюльпанов. Поэтому "нечетных" букетов будет $120/2 = 60$.

д) Вычтем из числа всех букетов число букетов, состоящих менее, чем из 3 цветов, т.е. букеты из 1 цветка (их 3 штуки), букеты из 2 цветов (их 6 штук: 3 букета, состоящие из одинаковых цветов и 3 — из разных). Ответ: $119 - 3 - 6 = 110$.

51. а) 8^{12}; **б**) $[12]_8$.

52. Каждый прямоугольник однозначно определяется своим левым нижним и правым верхним углами. Координаты левого нижнего угла могут меняться от 0 до $p - 1$ ($q - 1$), координаты правого верхнего — от p (q) до n. Ответ: $pq(n - p + 1)(n - q + 1)$.

53. а) $8! \cdot 3!$; **б**) $10!/2$; **в**) $10! - 2 \cdot 9!$.

54. Вычтем из всех рассадок, в которых А сидит во главе стола (их 14!) те, в которых В сидит рядом с А. Посадить В рядом с А можно 2 способами, а разместить оставшиеся 13 человек можно 13! способами. Ответ: $14! - 2 \cdot 13!$.

55. Указание: можно считать, что 0 стоит в "верхней" вершине 10-угольника. Ответ: $9! - 8! = 332\,560$.

56. $11!$.

57. $2 \cdot 5! \cdot 5!$.

58. $6!$.

59. $2 \cdot 9!$.

60. 4^9.

61. Первую книгу можно разместить 5 способами. Вторую книгу можно разместить 4 способами на одной из пустых полок и поместить ее справа или слева от первой книги — 6 способов. Третью книгу можно разместить 7 способами, независимо от расположения первых двух книг и т.д. Это дает $5 \cdot \ldots \cdot 24 = [5]^{20}$ способов размещения всех 20 книг.

62. $3! \cdot (4 \cdot 3) \cdot 6 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)$.

63. Вариантов оценок $4^3 = 64 < 65$.

64. 2^{32} человек.

65. $[9]_4$.

66. Разложим 1001 в произведение простых множителей: $1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$. Можно предположить, что варианты отдыха складываются из 3 независимых выборов: один из множества размера 13, другой из множества размера 11, третий — из множества размера 7. Например, агентство предлагает 7 видов отдыха в 13 странах продолжительностью от 5 до 15 дней.

67. Указание. Найдите число способов поставить фишки на поля одного цвета и на поля разных цветов. Ответ: нет.

68. Первая точка выбирается 10 способами. На каждом следующем шаге необходимо выбирать точку, соседнюю с какой-либо уже находящейся в ломаной. Иначе, новое звено ломаной делит многоугольник на две части, в каждой из которых есть точка, которой пока нет в ломаной и их невозможно соединить, не пересекая уже проведенные звенья. Т.е. на каждом шаге (кроме последнего) новую точку можно выбрать двумя способами. Итого $10 \cdot 2^8$. Но таким способом каждая ломаная считается 2 раза (как пройденная в обоих направлениях). Окончательный ответ: $10 \cdot 2^7 = 1280$.

Глава 2

75. $\binom{7}{4} = 35$.

76. $\binom{10}{3} = 120$.

77. а) Чтобы разбить $2n$ человек на пары, можно сначала их упорядочить ($(2n)!$ способами), затем объединить в пары первого и второго, третьего и четвертого,... Каждое разбиение на пары учитывается $n! \cdot 2^n$ раз, поскольку неважны порядок пар и порядок в каждой из n пар. Ответ: $\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$.

б) $\frac{(2n)!}{n!2^n} = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \cdot 2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ — нечетное число.

78. В команду входит либо одна девочка, либо две. Если в команде две девочки, то двух мальчиков к ним можно добавить $\binom{7}{2}$ способами. Если же в команду входит только одна девочка (ее можно выбрать двумя способами), то команду можно дополнить тремя мальчиками $\binom{7}{3}$ способами. Ответ: $\binom{7}{2} + 2 \cdot \binom{7}{3}$.

79. а) Первую команду можно выбрать $\binom{10}{5}$ способами. Этот выбор полностью определяет вторую команду. Но при таком подсчете каждая пара команд A и B учитывается дважды: один раз, когда в качестве первой команды выбирается команда A, и второй, — когда B. Т.е., ответ: $\binom{10}{5}/2$.

б) $\frac{15!}{5!5!5!3!}$; **в**) $\frac{15!}{5!5!5!2!}$.

80. Поскольку порядок карт в каждой масти определен, то достаточно выбрать места, на которых лежат карты всех мастей. Места для пик можно выбрать $\binom{36}{9}$ способами. Если места для пик выбраны, места для треф можно выбрать $\binom{27}{9}$ способами, для бубей $\binom{18}{9}$ способами, а черви займут оставшиеся места. Ответ: $\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}$.

81. а) $4 \cdot \binom{48}{5}$; **б**) Перейдите к дополнению: $\binom{52}{6} - \binom{48}{6}$;

в) Число 6 представляется в виде суммы четырех натуральных слагаемых двумя способами: $6 = 1+1+1+3 = 1+1+2+2$. Ответ: $4 \cdot \binom{13}{3} \cdot 13^3 + \binom{4}{2} \cdot 13^2 \cdot \binom{13}{2}^2 = 8682544$.

82. $\binom{32}{16}\binom{4}{2}/2$.

83. $153 = (18 \cdot 17)/2$.

84. $\binom{n}{2}$.

85. а) $n \cdot (n-3)/2$.

б) Выберем произвольные 4 вершины. Проведенные через них диагонали пересекаются только в одной точке, т.е., чтобы выбрать точку пересечения диагоналей, надо выбрать 4 вершины из n. Ответ: $\binom{n}{4}$.

в) Будем поочередно проводить диагонали. Если провести новую диагональ, число частей, на которые проведенные ранее диагонали делят многоугольник, увеличивается на $m+1$, где m — число точек пересечения новой диагонали с ранее проведенными, т.е. каждая новая диагональ и каждая новая точка пересечения диагоналей увеличивают число частей на 1. Поэтому общее число частей, на которые диагонали делят n-угольник, равно сумме единицы (та часть, что была до проведения диагоналей), $n(n-3)/2$ (числа диагоналей) и $\binom{n}{4}$ (числа точек пересечения диагоналей). Ответ: $\binom{n}{4}+\frac{n(n-3)}{2}+1$.

86. Любые 3 прямые задают ровно один треугольник. Ответ: $\binom{n}{3}$.

87. а) $\binom{m}{1}\binom{n}{2}+\binom{m}{2}\binom{n}{1}$; **б)** $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$. **в)** Не более $\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{2}$. Указание: если никакие 3 отрезка не пересекаются в одной точке, каждый четырехугольник из предыдущего пункта задает ровно одну точку пересечения.

88. Если выбрать любые пять точек, то существует выпуклый четырехугольник с вершинами в них (докажите). Остается заметить, что четверку точек можно дополнить до пятерки $n-4$ различными способами.

89. а) $\binom{9}{3,3,3}$;

б) Условию задачи удовлетворяют 3 варианта — все несут по 3 предмета, первый — 3, второй — 2 и третий — 4, и первый — 2, второй — 3 и третий — 4.

Ответ: $\binom{9}{3,3,3}+2\binom{9}{4,3,2}$.

90. а) Так как все буквы слова различны, то всего можно получить 9! слов.

б) В этом слове две буквы И, а все остальные буквы разные. Временно будем считать разными и буквы И, обозначив их через И и И'. Тогда получится 5! разных слов. Но слова, получающиеся друг из друга перестановкой букв И и И', одинаковы. Поэтому разных слов всего 5!/2.

в) Считая три буквы А этого слова различными (А, А', А"), получим 8! разных слов. Но слова, отличающиеся перестановкой букв А, одинаковы. Поскольку буквы А, А', А" можно переставлять 3! способами, все 8! слов разбиваются на группы по 3! одинаковых. Ответ: 8!/3!.

г) $\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!}=\binom{11}{5,2,2,1,1}=83160$;

д) $\binom{18}{7,3,2,2,1,\ldots,1}$;

е) В этом случае 7 букв "О" подряд можно считать одной буквой. Ответ: $\binom{12}{3,2,2,1,\ldots,1}$

91. а) $\binom{30}{4}$; **б)** $[30]_4$. Ответы отличаются, поскольку этапы в эстафете упорядочены.

92. $7!/1!2!4!=105$.

93. Можно расставить 16! способами 16 команд на 16 местах, после чего разбить их на пары $1-2, 3-4, \ldots, 15-16$ (команды с нечетными номерами — хозяева, с четными — гости). Но при этом каждое разбиение на пары в этих вариантах встречается 8! раз (количество способов переставить 8 пар по порядку). Таким образом, количество расписаний первого тура равно $16!/8! = 518918400$.

94. $\binom{5}{0}+\binom{6}{1}+\binom{7}{2}+\binom{8}{3}$.

95. Достаточно выбрать места, на которых стоят гласные буквы. Ответ: $\binom{7}{3}$.

96. $\frac{(2n)!}{2^n}$.

97. $\binom{32}{12}\cdot\binom{20}{12}$.

98. Возможны два варианта:

1) в каком-то ряду 3 шашки, в остальных — по одной. Ряд с тремя шашками можно выбрать 8 способами, места для трех шашек в нем — $\binom{8}{3}$, и 8 способами — место для шашки в каждом из остальных рядов. Итого $8\cdot\binom{8}{3}\cdot 8^7$ способов.

2) В двух рядах по 2 шашки, в остальных - по одной. Рассуждая аналогично, получим $\binom{8}{2}\cdot(\binom{8}{2})^2\cdot 8^6$ способов.

Ответ: $\binom{8}{3}\cdot 8^8+(\binom{8}{2})^3\cdot 8^6$.

99. а) Для того, чтобы задать расположение шашек, нужно выбрать 6 горизонталей, в которых они окажутся $\binom{8}{6}$ способами и для каждого из этих способов для каждой горизонтали выбрать вертикаль, в которой окажется шашка. Первую вертикаль можно выбрать 8, способами, вторую — семью,$\ldots$, шестую — тремя. По правилу произведения, ответ: $\binom{8}{6}\cdot[8]_6=564480$.

б) Для каждого расположения из предыдущего пункта существует $\binom{6}{2}$ способов выбрать из 6 возможных мест 2 места для белых шашек и на остальных 4 местах разместить черные шашки. Ответ: $\binom{6}{2}\cdot\binom{8}{6}\cdot[8]_6=8467200$.

100. $\binom{12}{5,5,2}$.

101. $\binom{7}{5}\cdot\binom{9}{5}$.

102. а) $\binom{25}{2}$; **б**) $\binom{25}{3}$; **в**) $\binom{23}{4}+\binom{24}{3}+\binom{24}{3}$.

103. а) $\binom{20}{5}+\binom{20}{4}\binom{20}{1}+\binom{20}{3}\binom{20}{2}+\binom{20}{2}\binom{20}{3}=23562$.

б) Сопоставим каждой компании из k юношей и k девушек компанию множество из 20 человек, в которое включим k девушек, вошедших в компанию, и $20-k$ юношей, в компанию не вошедших. Это соответствие взаимно-однозначным, поэтому искомое число равно числу способов выбрать 10 человек из 20, т.е. $\binom{20}{10}$.

104. Выберем сначала четырех юношей ($\binom{12}{4}$ способами), затем четырех девушек ($\binom{15}{4}$ способами), и образуем из них 4 пары (4! способами). Ответ: $\binom{12}{4}\binom{15}{4}\cdot 4!$.

105. $\binom{20}{6}\binom{14}{6}$.

106. $2\binom{10}{7}+\binom{10}{6}$.

107. $3\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{60}{20}$.

108. $\binom{15}{0}+\binom{15}{1}+\binom{15}{2}+\binom{15}{3}+\binom{15}{4}+\binom{15}{5}$.

109. Нужно указать 8 мест из 30, в которых будут произведены разрезы. Ответ: $\binom{30}{8}$.

110. Обозначим каждый ход ладьи вверх буквой a, а каждый ход вправо — b. Каждому перемещению ладьи из левого нижнего угла в правый верхний угол однозначно соответствует слово длины 14, состоящее из 7 букв a и 7 букв b. Количество различных путей (слов) равно $\binom{14}{7}$.

111. Из условия задачи следует, что кузнечик должен совершить всего 27 прыжков — по 9 в каждом направлении. Обозначим направления буквами a, b и c. Каждый путь однозначно определяется последовательностью длины 27, в которой буквы a, b и c встречаются по 9 раз.

Ответ: $\frac{27!}{9!^3}$.

112. а) Разберите случаи в соответствии с тем, цифра какой четности стоит на первом месте. Затем в каждом случае выберите места для нечетных цифр. Ответ: $\binom{5}{2}\cdot 5^6+\binom{5}{3}\cdot 4\cdot 5^5$.

б) Каждому такому числу однозначно соответствует выбор 6-ти цифр из набора $9,8,7,6,5,4,3,2,1,0$. Ответ: $\binom{10}{6}$.

Разберите все возможные представления чисел 2, 3, 4 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых. Не забывайте, что первая цифра — не ноль. Ответ: **в**) 6; **г**) $1+5+5+\binom{5}{2}=21$; **д**) $1+10+5+\binom{5}{2}+5\cdot 4+\binom{5}{3}=56$.

113. $\binom{6}{3}(\binom{6}{3}-1)(\binom{6}{3}-2)(\binom{6}{3}-3)(\binom{6}{3}-4)$.

114. Квадраты, окрашенные в белый цвет, можно выбрать $\binom{n}{4}$ различными способами. Квадраты, окрашенные в черный цвет, можно после этого выбрать $\binom{n-4}{6}$ различными способами. Оставшиеся $n-10$ квадратов можно окрасить произвольно любым из двух цветов (красный, желтый) 2^{n-10} различными способами. Общее количество различных раскрасок равно $\binom{n}{4} \cdot \binom{n-4}{6} \cdot 2^{n-10}$.

115. $\binom{10}{5}$. Достаточно выбрать места для четных цифр.

116. Общее число способов выбрать подкомиссию из 3 человек равно $\binom{10}{3} = 120$. Каждая ссора разрушает не более 8 таких подкомиссий, поэтому число разрушенных подкомиссий не больше $8 \cdot 14 = 112$. Значит, не разрушено по крайней мере 8.

117. Рассмотрите 7 оставшихся на полке книг. Между каждыми двумя соседними (и справа и слева от крайних) либо есть пустое место (от одной вынутой книги) либо нет. Набор пустых мест однозначно определяет комплект вынутых книг. Ответ: $\binom{8}{5}$.

118. Для каждого вопроса количество людей, не ответивших на него, не больше четырех, иначе на какой-то вопрос не ответили некоторые пять человек, что противоречит условию. Но для каждой четверки людей найдется вопрос, на который они не ответили (иначе они бы вместе ответили на все вопросы вопреки условию); т.е., на этот вопрос не ответили в точности эти четверо людей. Итак, каждой четверке людей можно поставить в соответствие вопрос, на который они (и только они) не ответили. Поэтому число вопросов не меньше числа четверок. Наоборот, если в тесте было вопросов столько же, сколько четверок людей, причем на каждый вопрос не ответило 4 человека и все эти четверки различны, то условие задачи выполняется. Поэтому ответ: $\binom{10}{4} = 210$.

119. Задача аналогична 118. Любые 5 человек сейф открыть не могут. Значит у них нет ключа от некоторого замка. Но любой другой член комиссии должен этот ключ иметь. Поэтому нужно поставить $\binom{9}{5}$ замков. 4 ключа от каждого замка отдаются некоторой четверке членов комиссии, причем разные ключи раздаются разным четверкам. В общем случае понадобится $\binom{n}{m-1}$ замков и $n-m+1$ ключ к каждому из них.

120. а) $\binom{n}{k}$; **б**) "Не менее k" означает 0 или 1... или k. Поэтому ответ: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k}$.

Подумайте, почему неверно следующее рассуждение: сначала выберем места, на которых стоят k единиц, это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами. На остальных местах может стоять либо 0 либо 1, поэтому ответ: $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$.

121. Для размещения единиц выберем среди n возможностей k позиций $\binom{n}{k}$ способами. Тогда для каждого размещения единиц существует 2^{n-k} способов поместить 0 или 2 в каждую из оставшихся $n-k$ позиций. По правилу произведения, ответ: $\binom{n}{k}2^{n-k}$.

Глава 3

127. Например, $11^4 = (10+1)^4 = 10^4 + 10^3\binom{4}{1} + 10^2\binom{4}{2} + 10\binom{4}{3} + 1 = 10000 + 4000 + 600 + 40 + 1 = 14641$. Аналогичная формула для 11^5 уже не верна, т.к. $\binom{5}{2} = 10$, эта единица переходит в следующий разряд и коэффициенты "смешиваются".

128. $x = 2$, $y = 3$, $n = 5$.

129. $m = 3$, $n = 7$.

130. Найдем отношение соседних биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} : \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.$$

Это число больше единицы, если $k+1 > n-k$, т.е. $2k > n-1$ и меньше единицы в противном случае.

131. Ответ: $k = 20$ и 21. Решение аналогично задаче 130.

132. Ответ: $\binom{100}{64}2^{64}$. Решение аналогично задаче 130.

133. $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$. Если $0 < k < p$, то $k!(p-k)!$ и p взаимно просты, поэтому число p в числителе сократиться не может.

134. Число 18 нельзя представить в виде суммы чисел 5 и 7, поэтому коэффициент при x^{18} будет равен нулю. Число 17 представляется в виде суммы чисел 5 и 7 следующим образом: $17 = 7+5+5$; с точностью до перестановки слагаемых это представление единственно. В одном из 20 выражений $1+x^5+x^7$ мы должны выбрать x^7, а в двух из 19 оставшихся таких выражений мы должны выбрать x^5. Поэтому коэффициент при x^{17} равен $20 \cdot \binom{19}{2} = 3420$.

135. Константа — это коэффициент при $(x^3)^4 \cdot (1/x^2)^6$, т.е. $\binom{10}{4} = 210$.

136. а) 3, 1; **б**) $2^3 \cdot (-1)^7 \cdot \binom{10}{3} = -960$; **в**) $\binom{10}{3,1,0,5,1} = \frac{10!}{3!\cdot 5!} = 5040$ (по полиномиальной теореме).

137. Подставим в полиномиальную теорему $n = p$, $m = a$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1$. Получим

$$(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a \text{ раз}})^p = \sum_{k_1+k_2\ldots+k_a=p} 1^{k_1}\ldots 1^{k_a}\binom{p}{k_1,\ldots k_a} = \sum_{k_1+k_2\ldots+k_a=p} \frac{p!}{k_1!\ldots k_a!}.$$

Числители всех дробей делятся на p. Знаменатели делятся на p только, если одно из k_i равно p, остальные k_j — 0. Поэтому ровно a слагаемых равны единице $(p!/p!)$, остальные делятся на p. Значит, a дает при делении на p тот же остаток, что и a^p. Теорема доказана.

138. а) 2^n; **б**) 0; Достаточно подставить в формулу бинома $a = b = 1$ и $a = 1$, $b = -1$ соответственно.

в) Поскольку биномиальные коэффициенты симметричны,

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k} = \sum_{k=n-[n/2]}^{n}\binom{n}{k}.$$

Эти суммы содержат все биномиальные коэффициенты, причем, если n нечетно, то по одному разу, а если n — четно, то и в ту и в другую сумму войдет $\binom{n}{n/2}$. Поэтому "сумма сумм" равна 2^n, если n нечетно и и $2^n + \binom{n}{n/2}$, если n четно. Стало быть, ответ, т.е. половина "суммы сумм" равен $2^{n-1} + \binom{n}{n/2}/2$ для четных n и 2^{n-1} для нечетных.

г) 0, если n имеет остаток 2 или 5 при делении на 6; 1, если n имеет остаток 0 или 1 при делении на 6; -1, если n имеет остаток 3 или 4 при делении на 6.

139. а) Левая часть: число способов выбрать m элементов из n, а потом из выбранных m выбрать еще k. Правая часть: сразу выбираем k элементов из n, а из оставшихся выбираем еще $m-k$.

б) Левая часть равенства перечисляет все способы выбрать k элементов из $n+m$. То же число можно получить, разбив $n+m$ элементов на 2 части (из n и m) и отдельно посчитав число способов выбрать k элементов так, чтобы все элементы попали во вторую часть ($\binom{n}{0}\binom{m}{k}$ способов, один — в первую часть, $k-1$ — во вторую, ($\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}$ способов),...

в) Подставьте в равенство из пункта 2 $m=n$ и воспользуйтесь симметричностью биномиальных коэффициентов.

г) Левая часть есть число способов выбрать k элементов из n, а затем j элементов из выбранных k, причем k может быть любым от j до n. То же самое можно сделать по другому — сначала выбрать j элементов из n, а затем — любое подмножество, содержащее эти j элементов, т.е. для каждого из остальных $n-j$ элементов надо выбрать, входит он во множество или нет.

д) Левая часть есть число способов размещения k одинаковых объектов по $n+2$ различным ящикам. Правая часть подсчитывает количество таких же размещений разбиением множества размещений согласно количеству объектов в первом ящике.

140. Используем несколько раз соотношение $\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q} - \binom{p-1}{q-1}$:

$$\binom{n+3}{k+3} = \binom{n+2}{k+3} + \binom{n+2}{k+2} = \binom{n+1}{k+3} + 2\binom{n+1}{k+2} + \binom{n+1}{k+1} =$$
$$\binom{n}{k+3} + 3\binom{n}{k+2} + 3\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k},$$

поэтому

$$\binom{n+3}{k+3} - \binom{n}{k} - \binom{n}{k+3} = 3\left(\binom{n}{k+2} + \binom{n}{k+1}\right),$$

т.е. делится на 3.

141. а) n^3 есть число способов размещения трех различных объектов по n различным ящикам. Сумма $\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$ подсчитывает то же количество размещений, классифицируя их по количеству занятых ящиков. Поэтому $p=1$, $q=r=6$.

б) Используем наряду с результатом пункта а) тождество $\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{j} = \binom{n}{j+1}$, где j — произвольное неотрицательное целое число. Имеем

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \textstyle\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{k}{1} + 6\binom{k}{2} + 6\binom{k}{3}\right] =$$
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} + 6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} + 6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3} = \binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4}.$$

142.

$$\binom{n-1}{k-1}\cdot\binom{n}{k+1}\cdot\binom{n+1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=$$
$$=\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\binom{n-1}{k}\cdot\binom{n+1}{k+1}\cdot\binom{n}{k-1}.$$

143–147. Указание: докажите по индукции. В задаче **147.** ответ: $n = 2^k - 1$.

Глава 4

152. Разложение есть сумма членов вида $x^i y^j z^k$, где $i + j + k = 10$. Поэтому количество слагаемых равно числу неотрицательных целых решений уравнения $i + j + k = 10$, которое равно $\binom{10+2}{2} = 66$.

153. Пусть $x_1, \ldots, x_7$ — количество монет, доставшихся нумизматам. Тогда число способов дележа равно числу решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots x_7 = 15$ в натуральных числах. Ответ: $\binom{14}{6}$.

154. Ответ: $\binom{12}{9}$.

155. Расположим карточки по неубыванию. Выбрать 8 карточек из 11 все равно, что выбрать и исключить 3. Так как карточки одного цвета одинаковы, число способов их выбрать равно числу решений уравнения $x_3 + x_4 + x_5 = 3$, где x_3 — число исключенных карточек с цифрой "3", x_4 — с цифрой "4", x_5 — с цифрой "5". Ответ: $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$.

156. **а**) $\binom{13}{3}$; **б**) $\binom{9}{3} \cdot 4^3$; **в**) $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3}$.

157. Из $m+1$-ой позиции ($m-1$ место между белыми шарами и два места по краям) нужно выбрать n позиций, в которые будут положены черные шары. Ответ: $\binom{m+1}{n}$.

158. $\binom{14}{3}$.

159. $\binom{100-1}{5-1} = \binom{99}{4}$.

160. Пусть $x_1, \ldots, x_{10}$ — искомые числа, упорядоченные по возрастанию. Обозначим $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, \ldots, y_{10} = x_{10} - x_9, y_{11} = 36 - x_{10}$. Тогда все y_i положительны и их сумма равна 36, т.е. задача свелась к классической задаче Муавра. Ответ: $\binom{36-1}{11-1} = \binom{35}{10}$.

161. Составим сначала расписание — сколько человек в какой день готов принять доктор. Пусть $x_1, \ldots, x_5$ — число пациентов, принятых в понедельник, ..., пятницу. Тогда расписаний будет столько же, сколько решений уравнения $x_1 + \ldots + x_5 = 6$ в неотрицательных числах, т.е $\binom{10}{4}$. Чтобы сформировать расписание приема, надо упорядочить пациентов и вписать их в расписание по датам. Поэтому ответ: $\binom{10}{4} \cdot 6!$.

162. Сначала выстроим все книги в ряд, это можно сделать 20! способами, а потом, не меняя порядка, будем расставлять их по полкам, сначала на первую, потом на вторую,... Число способов выполнить последнюю операцию равно $\binom{24}{4}$. Ответ: $20! \cdot \binom{24}{4}$.

163. $\binom{10}{0}\binom{9}{4}\binom{17}{4} + \binom{10}{1}\binom{9}{3}\binom{18}{4} + \binom{10}{2}\binom{9}{2}\binom{19}{4} + \binom{10}{3}\binom{9}{1}\binom{20}{4} + \binom{10}{4}\binom{9}{0}\binom{21}{4}$.

164. Сначала выбираем,как будут лежать синие шары среди красных и зеленых, затем считаем число взаимных расположений красных и зеленых шаров. Ответ: $\binom{11}{5} \cdot \binom{10}{5}$.

165.а) $\binom{19}{5}$; **б**) $\binom{25}{5}$.

166. а) n^m; **б**) $\binom{m+n-1}{m}$.

167. $\binom{15}{7} \cdot \binom{10}{2}$.

168. а) n^n; **б**) $\binom{2n-1}{n}$.

169. $\binom{34}{4}$.

170. а) $\binom{17}{8}$; **б**) $\binom{10}{8}$.

171. а) Она может побывать или не побывать на каждом из 28 не крайних полей. Ответ: 2^{28}.

б) Надо представить число 29 в виде суммы 7 натуральных слагаемых (порядок важен!). Ответ: $\binom{28}{5}$.

172. $\binom{6+4-1}{6-1}^3 = \binom{9}{5}^3$.

173. $\binom{11}{4} = 330$.

174. $\binom{22}{2} = 231$.

175. $\binom{6}{3} \cdot \binom{13}{3} = 5720$.

176. $\binom{14}{2} = 91$.

180. $80\% + 60\% - 100\% = 40\%$.

181. Хотя бы в каком-то кружке занимаются $35 - 10 = 25$ учеников. Далее, $20 + 11 - 25 = 6$.

182. Перейдем к дополнению: свет был включен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шел 50% времени, так что "дополнительные" события не могли занять более $20 + 10 + 50 = 80\%$ времени. Следовательно, музыка под дождем в темноте звучала не меньше $100 - 80 = 20\%$ времени.

183. Указание: Сколько человек не знают английский язык? испанский? немецкий? Ответ: $100 - (100 - 80) - (100 - 85) - (100 - 75) = 40$.

184. $15 \cdot 4 - 6 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 1 = 31$.

185. $4 \cdot 13 - 6 \cdot 8 + 4 \cdot 5 - 3 = 21$.

186. Квадратами среди первого миллиона будут числа 1^2, 2^2,..., 1000^2, кубами — 1^3, 2^3,..., 100^3. Пересечением этих множеств будут шестые степени: $1^6, 2^6, \dots, 10^6$. Ответ: $1000 + 100 - 10 = 1090$.

187. Пусть W — множество чисел, кратных 2, X — кратных 3, Y — кратных 5, Z — кратных 7.

а) $210 - |W| - |X| - |Y| - |Z| + |W \cap X| + |W \cap Y| + |W \cap Z| + |X \cap Z| + |X \cap Y| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z| - |W \cap Y \cap Z| - |W \cap X \cap Z| - |W \cap X \cap Y| + -|W \cap X \cap Z \cap Y| = 210 - 105 - 70 - 42 - 30 + 35 + 21 + 15 + 14 + 10 + 6 - 2 - 3 - 5 - 7 + 1 = 48$.

Попробуйте придумать, как решить эту задачу, не используя формулу включений-исключений. Подсказка: $48 = 210 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}$.

б) Пусть A — множество чисел, кратных 6, B — кратных 10, C — кратных 15, тогда $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C$ — множество чисел, кратных 30.

Ответ: $210 - (35 + 21 + 14) + (7 + 7 + 7) - 7 = 154$.

188. Сначала посчитаем, не учитывая повторения:

— По 100 номеров вида $237**$, $*237*$ и $**237$.

— по 10 номеров вида $2337*$, $23*37$, $*2337$", $3723*$, $37*23$ $*3723$.

Итого: $3 \cdot 100 + 6 \cdot 10 = 360$.

Но мы посчитали два раза 4 номера 23237 ($**237$ и $23*37$), 23737 ($237**$ и $23*37$), 37237 ($**237$ и $3723*$) и 23723 ($237**$ и $*3723$).

Ответ: $360-4=356$.

189. Пусть A_1, A_2, A_3 — множества перестановок, удовлетворяющих трем перечисленным условиям соответственно. Количество перестановок n элементов, в которых зафиксировано положение k из них есть $(n-k)!$. Поэтому $|A_1|=7!$, $|A_2|=8!$, $|A_3|=7!$, $|A_1\cap A_2|=6!$, $|A_1\cap A_3|=4!$, $|A_2\cap A_3|=5!$, $|A_1\cap A_2\cap A_3|=3!$.

По формуле включений и исключений получаем ответ: $7!+8!+7!-6!-4!-5!+3!=49542$.

190. Пусть X множество очередей, в которых А, Б и В стоят на первых местах, Y — в которых Б,В и Г стоят на 2—4 местах и Z — в которых Е и Ж — на последних. Вариантов для ситуации $|X|=4!3!$ (не забываем про перестановки А, Б и В), $|Y|=4!3!$ и $|Z|=5!2!$. Пересечения: $|X\cap Y|=3!2!$, $|X\cap Z|=2!3!2!$, $|Y\cap Z|=2!3!2!$, $|X\cap Y\cap Z|=2!2!$. Ответ: $|X\cup Y\cup Z|=|X|+|Y|+|Z|-|X\cap Y|-|X\cap Z|-|Y\cap Z|+|X\cap Y\cap Z|=472$.

191. Пусть X — множество раскрасок, при которых не закрашен верхний ряд, Y, — при которых не закрашен нижний ряд и Z, — при которых не закрашены две вертикальные полоски. Поскольку остальные клетки можно независимо или закрасить или нет, то $|X|=|Y|=2^8$, $|Z|=2^4$. Аналогично, что $|X\cap Y|=2^4$, $|X\cap Z|=2^4$, $|Y\cap Z|=2^4$, $|X\cap Y\cap Z|=2^2$.

Ответ: $|X\cup Y\cup Z|=|X|+|Y|+|Z|-|X\cap Y|-|X\cap Z|-|Y\cap Z|+|X\cap Y\cap Z|=532$.

192. A_1 студентов имеют не менее одной двойки, A_2 — не менее двух двоек, следовательно A_1-A_2 студентов имеют ровно одну двойку. Аналогично, A_2-A_3 студентов имеют ровно две двойки,..., A_k-A_{k+1} студентов имеют ровно k двоек. Поэтому общее число двоек равно $(A_1-A_2)+2(A_2-A_3)+3(A_3-A_4)+\ldots=A_1+A_2+A_3+\ldots$. Подразумевается, что число студентов в группе конечно, поэтому все A_k, начиная с некоторого, равны 0.

193. Пусть A_1, A_2, A_3 — множества подмножеств, не пересекающихся с тремя заданными подмножествами, соответственно. Тогда $|A_1|=2^8$ (все подмножества множества $\{5,6,\ldots,12\}$), аналогично $|A_2|=2^6$, $|A_3|=2^6$, $|A_1\cap A_2|=2^4$(все подмножества $\{6,8,10,12\}$), $|A_1\cap A_3|=2^4$, $|A_2\cap A_3|=2^2$, $|A_1\cap A_2\cap A_3|=2^0=1$ (единственное пустое множество). По формуле включений-исключений получаем ответ:

$$2^8+2^6+2^8-2^4-2^4-2^2+1=541.$$

194. Количество неотрицательных целых решений (без всяких ограничений) равно $\binom{n+2}{2}$. Пусть A, B, C — множества решений со свойствами $x=y$, $x=z$, $y=z$, соответственно. Тогда $|A|=|B|=|C|$ есть количество целых неотрицательных решений уравнения $2x+y=n$, которое равно $[n/2]+1$ (x может принимать любое значение от 0 до $[n/2]$). Множества $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\cap B\cap C$ пусты, если n не делится на 3, и содержат единственное решение $(n/3,n/3,n/3)$, если делится.

Ответ: $\binom{n}{2}-3([n/2]+1)+3-1=\binom{n}{2}-3[n/2]-1$, если n делится на 3, и $\binom{n}{2}-3[n/2]-3$, если не делится.

195. **а**) 20%; **б**) 60%; **в**) 70%.

196. Пусть A_1 — множество перестановок $\{АБВГД, Е, \ldots, Я\}$, A_2 — множество перестановок $\{А, Б, В, \ldots, Й, КЛМНО, П, \ldots, Я\}$, A_3 — множество перестановок $\{А, Б,$

$B, \ldots, Ш, ЬЪЭЮЯ\}$. Нужно найти количество элементов в объединении этих множеств. По формуле включений-исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot (28+1)! - 3 \cdot (23+2)! + (18+3)!$$

197. Всего существует $8!/8 = 7! = 5040$ рассадок (без ограничений). Обозначим $A_1, \ldots A_4$ множества рассадок, в которых 1-я,..., 4-я пары сидят напротив друг друга. Нас интересуют рассадки, не входящие ни в одно из этих множеств, поэтому ответом задачи будет $5040 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. Вычислим мощности самих множеств A_i и их пересечений.

Если одна пара сидит напротив друг друга, то остальных людей можно разместить на оставшихся местах $6! = 720$ способами. Т.е. $|A_1| = 720$.

Если одна пара сидит напротив друг друга, вторую пару можно посадить 6 способами, а остальные разместятся на оставшихся 4 местах 4! способами. Поэтому $|A_1 \cap A_2| = 6 \cdot 4! = 114$.

Если три пары сидят напротив друг друга, то четвертая тоже. Разместить первую пару можно только одним способом (учитывая повороты стола), остается 6 способов разместить вторую пару, 4 — третьей пары, и два — четвертой. Поэтому

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48.$$

Те же результаты получатся и для пересечения любых других множеств A_i. Поэтому по формуле включений-исключений получаем ответ: $5040 - 4 \cdot 720 + 6 \cdot 144 - 4 \cdot 48 + 48 = 2880$.

198. а) Пусть в коробке x_1 шоколадных колечек, x_2 колечек с орехами и x_3 с корицей. Нам нужно найти количество различных целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 18$; $x_1, x_2, x_3, \geq 0$. Это количество дается формулой $\binom{18+3-1}{3-1} = \binom{20}{2} = 190$.

В пунктах б) и в) воспользуйтесь формулой включений и исключений.

б) $190 - 45 - 45 - 120 + 15 + 15 = 10$.

в) Нахождение множества целочисленных решений $x_1 + x_2 + x_3 = 18$; $3 \leq x_1 \leq 9, 2 \leq x_2 \leq 4, 3 \leq x_3 \leq 9$ заменой переменных $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 3$ сводится к нахождению целочисленных решений уравнения $y_1 + y_2 + y_3 = 10$; $0 \leq y_1 \leq 6, 0 \leq y_2 \leq 2, 0 \leq y_3 \leq 6$.

Ответ: $\binom{12}{2} - 2\binom{5}{2} - \binom{9}{2} + 2 = 12$.

199. Всего цветов 12, поэтому букетов из 12 цветов столько же, сколько и букетов из 3 цветов. Для 3 цветов ограничений по числу цветов одного вида в букете нет. Используем задачу Муавра. Ответ: $\binom{12+3-1}{3-1} = \binom{14}{2} = 91$.

202. а) $1000000 = 2^6 \cdot 5^6$. Каждый множитель однозначно определяется количеством двоек и пятерок, входящих в его разложение. Суммарное количество в трех множителях как двоек, так и пятерок, равно 6. Ответ: $\binom{8}{2}^2 = 784$.

б) Среди разложений из пункта а) Есть ровно одно, не зависящее от порядка множителей $(100 \cdot 100 \cdot 100)$. Те разложения, в которых есть два равных множителя, мы посчитали трижды. В каждый из равных множителей 2 может входить в степени 0, 1, 2 или 3, т.е. всего четырьмя различными способами; столькими же способами может входить 5. Всего 16 разложений, но одно из них — $100 \cdot 100 \cdot 100$. Остается 15 разложений. Поэтому остается $784 - 1 - 45 = 738$ разложений с попарно различными множителями, но каждое из них мы посчитали 6 раз, поэтому остается $738/6 = 123$ различных разложений. Итого $1 + 15 + 123 = 139$ разложений.

Глава 5

203.а) 2^n; **б**) $2^n - 2^{[n/2]}$; **в**) 2^{n-2}.

г) Любому подмножеству X, не пересекающемуся с $\{1, 3, 5\}$, можно сопоставить подмножество $X \cup \{1, 3, 5\}$, содержащее $\{1, 3, 5\}$. Поэтому тех и других подмножеств одинаково.

д) Подмножеств одинаково. Выберем произвольный элемент x и каждому подмножеству A сопоставим подмножество $A\Delta\{x\}$. В этом подмножестве либо на один элемент больше, чем в A, либо на один элемент меньше. В любом случае четность меняется. Поэтому построено взаимно-однозначное соответствие между "четными" и "нечетными" подмножествами.

204. Каждый элемент C может либо не входить никуда, либо входить в A, либо входить в B (в пункте **а**)) или входить в B, но не входить в A (в пункте **б**)). В любом случае для каждого из n элементов есть 3 варианта. Ответ: 3^n в каждом из пунктов.

205. а) Каждый элемент S не может не входить ни в одно из множеств T_i, все остальные $2^k - 1$ вариантов возможны для каждого из n элементов. Ответ: $(2^k - 1)^n$.

б) Каждый элемент S не может не входить ни в одно множество, входить только в T_1, только в T_1 и T_2,..., входить во все множества. Всего $k + 1$ вариант для каждого из n элементов. Ответ: $(k + 1)^n$.

в) Поскольку множества T_i строго вложены друг в друга, то число элементов в них должно быть попарно различно. Это возможно, только если $T_1 = \varnothing$, T_2 состоит из одного элемента, T_3 — из двух,..., T_{n+1} — из n. Поскольку множества содержатся друг в друге, то каждое следующее получается из предыдущего добавлением одного элемента. Поэтому, чтобы задать всю последовательность множеств, надо только определить, в каком порядке мы добавляем элементы множества $\{1, \ldots, n\}$. Число порядков равно числу перестановок, т.е. $n!$.

206. Вычислим, сколько раз при подсчете левой части учтен элемент x. Подмножество $A \ni x$ можно выбрать 2^{n-1} способами, Подмножество $B \ni x$ — столькими же, т.е. каждый элемент множества учтен в сумме 4^{n-1} раз, т.е. вся сумма равна $n4^{n-1}$.

207. Указание. Достаточно доказать утверждение в случае, когда объединение множеств содержит ровно один элемент, входящий в m из них, т.е.

$$\sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} \leq (\geq) 1$$

если q четно (нечетно), т.е.

$$\sum_{k=0}^{q} (-1)^{k} \binom{m}{k} \geq (\leq) 0$$

, если q четно (нечетно).

А это утверждение можно доказать индукцией по m.

208. а) 2^n; **б**) 2^{mn}; **в**) $\binom{n}{k}^m$; **г**) $(2^n-1)^m$; **д**) $[2^n]_m$.

209.а) 2^n; **б**) 3^n. Указание: любая из координат может быть либо фиксирована (и равна 0 или 1) либо принимать любое значение. **в**) $2^{n-1}n$; **г**) $\binom{n}{k}2^{n-k}$.

210.а) 2^{2^n}; **б**) , **в**) 2^{2^n-1}; **г**) 2^{n+1}; **д**) $2^{2^{n-1}}$.

211. Ответ: 1/4. Указание. Воспользуемся критерием Поста. Искомая функция должна не сохранять ни 0 ни 1, т.е. их не более 1/4 от общего числа. Функция, не сохраняющая 0 и 1 автоматически не монотонна. Осталось доказать, что линейных и самодвойственных функций мало относительно их общего числа.

212. а) Каждому элементу A может соответствовать любое подмножество B. Ответ: $(2^m)^n = 2^{mn}$.

б) Каждому элементу A может соответствовать любое подмножество B, кроме пустого. Ответ: $(2^m-1)^n$.

в) Каждому элементу A может соответствовать любой элемент B или ничего. Ответ: $(m+1)^n$.

г) Каждому элементу A может соответствовать любой элемент B. Ответ: m^n.

д) В отличие от предыдущего пункта, в разных точках инъективная функция принимает разные значения. Ответ: $[m]_n$. В частности, если $n > m$, то ответ — 0, т.е. таких функций не существует.

е) $n!$.

213. Производные функции отличаются друг от друга тем, сколько раз по какой переменной продифференцировали, т.е., чтобы найти ответ, надо решить уравнение $x_1 + \ldots + x_n = k$, где x_i — число дифференцирований по i-й переменной. А это — классическая задача Муавра. Ответ: $\binom{n+k-1}{k}$.

214. а) По определению, бинарное отношение на множестве A — множество упорядоченных пар, т.е. подмножество декартова произведения $A \times A$. Поэтому число отношений равно числу подмножеств $A \times A$, т.е. $2^{|A\times A|} = 2^{n\cdot n} = 2^{n^2}$.

б) Рефлексивное отношение обязательно содержит пары вида (x, x) (n штук, а каждая из остальных n^2-n пар может либо входить в отношение, либо не входить. Ответ: 2^{n^2-n}.

в) Антирефлексивных отношений столько же, сколько и рефлексивных.

г) Рассмотрим два несовпадающих элемента, x и y. Возможны два варианта: обе пары (x, y) и (y, x) входят в отношение или обе не входят. Пары вида (x, x) могут либо входить, либо не входить. Поэтому, чтобы задать симметричное отношение, надо выбрать один из двух вариантов $\binom{n}{2} + n = n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$ раз. Ответ: $2^{n(n+1)/2}$.

д) Асимметричность отношения не допускает ни для каких $x \neq y$ вхождения в него пар (x, y) и (y, x) одновременно, поэтому для каждых x и y возможнен один из трех вариантов — входит только (x, y); только (y, x); не входит ни одна из этих пар. Так как пар неравных элементов $\binom{n}{2}$, всего $3^{\binom{n}{2}}$ вариантов отношений. Пары вида (x, x) в отношение входить не могут, поэтому вариантов больше не становится.

е) Антисимметричность отличается от асимметричности тем, что пары вида (x, x) могут либо входить, либо не входить. Поэтому, чтобы задать антисимметричное отношение, надо задать асимметричное и выбрать, какие пары вида (x,x) входят в отношение. Ответ: $3^{\binom{n}{2}}\cdot 2^n$.

ж) —**з**) Полные отношения это в точности дополнительные к асимметричным, а связные — к антисимметричным. Поэтому полных отношений будет столько же, сколько и асимметричных, т.е. $3^{\binom{n}{2}}$, а связных — столько же, сколько и асимметричных, т.е. $3^{\binom{n}{2}}\cdot 2^n$.

и) Число линейных порядков равно числу способов переставить элементы в некотором порядке, т.е. числу перестановок. Ответ: $n!$.

218. Сущестует $\binom{10}{2}=45$ вариантов вытащить 2 шара из урны. Пусть подходящих вариантов x, тогда $x/45=2/15$, т.е. $x=6$. Если в урне y белых шаров, то $\binom{y}{2}=6$, т.е. $y=4$. В урне 4 белых шара.

219. а) $1/10^3$; **б**) $10/10^3=1/100$.

220. $\binom{10}{4}/\binom{25}{4}=21/1265$.

221. а) Всего исходов 2^{100}. Устраивающие нас исходы задаются номерами бросков, в которых выпадет орел, т.е. выбором 50 номеров из 100, что можно сделать $\binom{100}{50}$ способами. Ответ: $\frac{\binom{100}{50}}{2^{100}}$.

б) Нам подходит ровно половина исходов, не подходивших в пункте а). Вероятность равна $\frac{(2^{100}-\binom{100}{50})/2}{2^{100}}=\frac{1}{2}-\frac{\binom{100}{50}}{2^{101}}$.

222. $7=1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1$, значит, вероятность выпадения 7 — $\frac{6}{36}$, $8=2+6=3+5=4+4=5+3=6+2$, вероятность выпадения 6 и 8 — $\frac{5}{36}$, 5 и 9 — $\frac{4}{36}$, 4 и 10 — $\frac{3}{36}$, 3 и 11 — $\frac{2}{36}$, 2 и 12 — $\frac{1}{36}$. Ответ: 7.

223. а) $\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$;

б) $\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3}=\frac{5}{9}$.

в) Исключим из всех исходов те, в которых выпадают разные числа (их $6\cdot5\cdot4$) и те, в которых выпадают одинаковые (6 шт.). Искомая вероятность равна

$$\frac{6^3-6-6\cdot5\cdot4}{6^3}=\frac{5}{12}.$$

г) $\frac{5^3}{6^3}$.

224. Поскольку не все 2 разбиения равновероятны, например, $5-5-1$ втрое более вероятно, чем $4-4-4$.

225. Сравним дополнительные события.

а) вероятность того, что при 6 бросках не выпадет ни одной шестерки равна $5^6/6^6$. Обозначим это число за a.

б) вероятность того, что при 12 бросках выпадет 0 или 1 шестерка равна

$$b=\frac{5^{12}+12\cdot5^{11}}{6^{12}}=\frac{5^{12}}{6^{12}}\cdot(1+\frac{12}{5})=3,4a^2.$$

в) вероятность того, что при 18 бросках выпадет 0, 1 или 2 шестерки равна

$$c=\frac{5^{18}+18\cdot5^{17}+\binom{18}{2}\cdot5^{16}}{6^{18}}=\frac{5^{18}}{6^{18}}\cdot(1+\frac{18}{5}+\frac{18\cdot17}{2\cdot5^2})=(1+3,6+6,12)a^3=10,72a^3.$$

Но $a \sim 0,3349 > 1/3$, то $a < b < c$. Итак, более вероятно событие а).

226. а) Существует единственный не подходящий исход из 2^n возможных, поэтому появления орла равна $1-(1/2^n)$, что больше $1/2$ уже при $n=2$.

б) Всего исходов при n бросках кости — 6^n. Шестерка не выпадает ни разу в 5^n из них, а значит, выпадает хотя бы раз в 6^n-5^n случаях. Вероятность равна $(6^n-5^n)/6^n = 1-(5/6)^n$. Она будет больше $1/2$, если $(5/6)^n < 1/2$, что верно при $n \geq 4$.

в) Всего $\binom{52}{n}$ способов вытянуть n карт. Из них $\binom{48}{n}$ способов выбрать n карт из всех, кроме тузов. Поэтому вероятность не вытянуть ни одного туза равна

$$\frac{\binom{48}{n}}{\binom{52}{n}} = \frac{48!}{n!(48-n)!} : \frac{52!}{n!(52-n)!} = \frac{(52-n)(51-n)(50-n)(49-n)}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}.$$

Вероятность вытянуть туза больше $1/2$, когда это число меньше $1/2$, что верно при $n \geq 8$.

227. Для n билетов возможно 2^n исходов, а неблагоприятный из них только один. Вероятность этого исхода $(\frac{1}{2^n})$ должна быть меньше $0.05 = \frac{1}{20}$, что верно для всех n, начиная с 5 (т.к. $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$). Ответ: 5 билетов.

228. Выбрать 2 кости можно $\binom{28}{2} = 378$ способами. Если одна из костей — дубль, то цепочку с ней образуют 6 других костей. Если обе кости — не дубли, то для каждой кости можно выбрать пару 10 способами (по 5 с каждой "стороны"). Итак, всего пар костей, образующих цепочку — $7\cdot 6 + \frac{21\cdot 10}{2} = 147$. Вероятность равна $147/378 = 7/18$.

229. Всего 28 костей, из них 7 дублей. Существует $\binom{28}{7}$ способов выбрать 7 костей из 28; из них $\binom{21}{7}$ способов выбрать 7 костей без дублей. Искомая вероятность равна

$$\binom{21}{7}\Big/\binom{28}{7} = \frac{21!}{14!7!}\cdot\frac{21!7!}{28!} = \frac{21!21!}{14!28!} \approx 0,1.$$

230.а) Все 5 чисел можно угадать только одним способом. Комбинация, в которой угаданы 4 числа, задается неугаданным числом (5 вариантов) и тем, что выбрано вместо него (31 вариант). Итого $5\cdot 31 = 155$ комбинаций. Угадать 3 числа означает не угадать два. Аналогично, получаем $\binom{5}{2}\binom{31}{2}$ комбинаций. Чтобы получить вероятности, эти числа надо разделить на число всех исходов, т.е. $\binom{36}{5}$.

б) Аналогично, вероятность совпадения 6 чисел — $\frac{1}{\binom{45}{6}}$, 5 чисел — $\frac{6\cdot 39}{\binom{45}{6}}$, 4 чисел — $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{39}{2}}{\binom{45}{6}}$.

в) Заметим, что должны выпасть как минимум два из чисел 1, 2, 3 (иначе выпадет одно из этих чисел и числа 11, 12, 13, 21, 22, 23, что невозможно, так как получается 7 чисел, а не 6). Остается 2 варианта.

1) Выпало два из чисел 1, 2, 3 и по два из чисел 11, 12, 13 и 21, 22, 23. Всего $3\cdot 3\cdot 3 = 27$ вариантов.

2) Выпали числа 1, 2, 3, по одному из чисел 11, 12, 13 и 21, 22, 23 и еще какое-то число. Всего $1\cdot 3\cdot 3\cdot 36 = 324$ варианта.

Поэтому вероятность получить два минимальных выигрыша равна $351/\binom{45}{6}$.

231.а) $\frac{10!^2\cdot 2^{10}}{20!}$; **б)** $\frac{\binom{10}{5}^2}{\binom{20}{10}}$;

в) Всего 20! рассадок. Чтобы найти число устраивающих нас, сначала зададим порядок рассадки внутри группы девочек (10! способов), затем определим, в каком порядке сидят мальчики и группа девочек (11! способов). Ответ: $\frac{10!\cdot 11!}{20!}$

г) Теперь группа не из 10 человек, а из двух. Рассуждая аналогично, получаем $\frac{19!\cdot 2!}{(20!)} = 1/10$.

232. **а**) $1/\binom{10}{3} = 1/120$; **б**) $1/(10\cdot 9\cdot 8) = 1/720$.

233. За час удастся проверить $60\cdot 60 = 3600$ комбинаций, а всего Комбинаций $\frac{10!}{5!}$. Вероятность открыть сейф равна $\frac{3600\cdot 5!}{10!} = \frac{3600}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = 5/42 \approx 0,12$.

234. Выбрать 4 ботинка, чтобы среди них не было парных можно $\frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}{4!}$ способами, а просто выбрать 4 ботинка — $\binom{10}{4}$ способами. Вероятность украсть 4 непарных ботинка равна $\frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 6!\cdot 4!}{4!10!} = \frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = 8/21$.

235. Могли быть стерты любые 3 числа (1000 вариантов), в пункте **а**) подходят только $7\cdot 6\cdot 5$ из них, в пункте **б**) — 10 (000 — 999). В пункте **в**) есть 3 способа выбрать место для "уникальной" цифры, 10 способов выбрать эту цифру и 9 — выбрать посторяющуюся. Итого $3\cdot 10\cdot 9 = 270$ способов.

Вероятности равны $0,21$ в **а)**, $0,01$ в **б)** и $0,27$ в **в)**.

236. Обозначим через $p_а$, $p_б$ и $p_в$ ответы к соответствующим пунктам. Заметим, что $p_а = p_в$, а $p_б = 1 - p_а - p_в = 1 - 2p_а$. Осталось вычислить вероятность $p_а$. Она равна $\binom{8}{5}/\binom{10}{5} = \frac{8!5!5!}{5!3!(10)!} = \frac{5\cdot 4}{10\cdot 9} = 2/9$. Ответ: **а**) 2/9; **б**) 5/9; **в**) 2/9.

237. Случится ровно одно из трех событий: "первое число между вторым и третьим", "второе число между первым и третьим" и "третье число между первым и вторым", т.е. сумма их вероятностей равна 1. А т.к. эти события равновероятны, то вероятность каждого равна 1/3. Ответ: 1/3.

238. Аналогично задаче 237, здесь 6 равновероятных событий (тома стоят в каком-то порядке). Поэтому вероятность того, что книги расставлены правильно, равна 1/6.

239. Второй по мастерству игрок попадает в финал, если попадает в другую половину сетки относительно первого. Всего $(2^n)!$ вариантов расставить игроков по сетке, из них подходит $2^n\cdot 2^{n-1}\cdot(2^n-2)!$. (Сначала ставим первого по мастерству игрока в любое место сетки, затем второго — в другую половину, затем остальных — куда угодно.) Ответ: $2^{n-1}/(2^n-1)$.

240. $\frac{12!}{12^{12}}$.

241. Докажем, что вероятность того, что ни у каких двух учеников не совпадают дни рождения, меньше 1/2. Всего 365^{30} вариантов распределения дней рождения, из которых нас устраивает $[365]_{30} = 365\cdot 364\cdot\ldots\cdot 336$ вариантов. Искомая вероятность равна $365\cdot 364\cdot\ldots\cdot 336/365^{30}$. Это число намного меньше 1/2 (вероятность меньше 1/2, даже если учеников 24). Можно его просто вычислить, но красивее — доказать. Надо проверить, что

$$(364/365)\cdot(363/365)\cdot\ldots\cdot(336/365) == (1-1/365)\cdot(1-2/365)\cdot\ldots\cdot(1-29/365) < 1/2.$$

Домножив обе части неравенства на $(1+1/365)\cdot(1+2/365)\cdot\ldots\cdot(1+29/365)$, получим:

$$(1-(1/365)^2)\cdot(1-(2/365)^2)\cdot\ldots\cdot(1-(29/365)^2) < \\ < \frac{1}{2}\cdot(1+1/365)\cdot(1+2/365)\cdot\ldots\cdot(1+29/365).$$

Левая часть меньше 1, поэтому достаточно убедиться, что правая часть больше 1. Но $\frac{1}{2}\cdot(1+1/365)\cdot(1+2/365)\cdot\ldots\cdot(1+29/365) > \frac{1}{2}\cdot(1+(1/365+2/365+\ldots+29/365)) = \frac{1}{2}\cdot(1+(1/365)(1+2+\ldots+29)) = \frac{1}{2}\cdot(1+(29\cdot30)/(2\cdot365)) = \frac{1}{2}\cdot(1+870/730) > 1$.

242.Обозначим x_k число поледовательностей из двух (трех) цифр с суммой цифр k. Тогда число счастливых билетов с суммой первых двух (трех) цифр k будет равно x_k^2, а общее число счастливых билетов —

$$\sum_{k=0}^{18(27)} x_k^2.$$

Осталось вычислить x_k.

а) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, ..., $x_9 = 10$, $x_{10} = 9$,..., $x_{18} = 1$. Число счастливых билетов равно $1^2+2^2+\ldots+9^2+10^2+9^2+\ldots+2^2+1^2 = 2\cdot(1^2+2^2+\ldots+9^2)+10^2 = 670$.

Для вычислений можно использовать равенство $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Вероятность равна $670/10000 = 0,067$.

б) Для вычисления x_k для 6-значных счастливых билетов удобно использовать задачу Муавра. 55252 счастливых билета, вероятность $\approx 0,055$.

243.а) Воспользуемся формулой включения-исключения. Всего перестановок $n!$. Тех из них, которые оставляют на месте определенный элемент — $(n-1)!$. При этом имеется ровно $n = \binom{n}{1}$ способов выбрать этот элемент. Перестановок, оставляющих на месте два элемента ровно $(n-2)!$, способов выбрать эти два элемента: $\binom{n}{2}$. В общем случае перестановок, сохраняющих определенные k элементов — $(n-k)!$, а способов выбрать эти элементы — $\binom{n}{k}$.

В результате получаем

$$x_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!.$$

После упрощения

$$x_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k\frac{1}{k!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

б) Вероятность такой перестановки равна

$$\frac{x_n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^k\frac{1}{k!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!} \approx \frac{1}{e}.$$

244. **а**) $4\binom{32}{5}$; **б**) $\binom{4}{2}\binom{32}{4}$; **в**) $2\cdot\binom{50}{3}$. **г**) $\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{28}{3}$; **д**) $\binom{36}{6}-\binom{32}{6}$; **е**) $\binom{36}{6}-\binom{32}{6}$; **ж**) $\binom{4}{1}(\binom{36-4}{5}-\binom{36-2\cdot4}{5})$.

245. **а**) Всего исходов $36 \cdot 35$, их них подходящих $36 \cdot 17$. Вероятность — $17/35$.

б) Всего исходов $36 \cdot 36$, их них подходящих $36 \cdot 18$. Вероятность — $18/36 = 1/2$.

246. Расклад задается тем, какие карты попали, например, к 1-му игроку, т.е. всего $\binom{36}{18}$ исходов. Из них подходит $\binom{4}{2}\binom{32}{16}$. Ответ: $\frac{32!4!}{16!16!2!2!}\frac{18!18!}{36!} \sim 0,4$.

247. Из 36! исходов условию удовлетворяют 4!33!, где второй множитель — число перестановок 4 тузов вместе и остальных 32 карт, а первое — число перестановок тузов внутри группы. Ответ: $33! \cdot 4!/36! = 1/1785$.

248. **а**) В каждой из 4 мастей существует только 9 способов выбрать пять последовательных карт (начиная с 23456 и заканчивая 10ВДКТ). Ответ: $9 \cdot 4 = 36$.

б) Четверку карт одного достоинства можно выбрать 13 способами, а последняя карта может быть любой из 48 оставшихся. Ответ: $13 \cdot 48$.

в) Мастей — 4, а способов выбрать пять карт одной масти — $\binom{13}{5}$. Ответ: $4\binom{13}{5}$.

г) $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}$. Первый множитель — число способов выбрать достоинство карт тройки, второй — масти карт тройки, третий и четвертый — достоинство и масти карт двойки.

д) $9 \cdot 4^5$. Первый множитель — число способов выбрать достоинства последовательных карт, второй — масть каждой из карт.

е) $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2$. Первый множитель — число способов выбрать достоинство карт тройки, второй — масти карт тройки, третий — достоинства оставшихся двух карт, четвертый — их масти.

ж) $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44$. Первый множитель — число способов выбрать достоинство карт двоек, второй — их масти, третий оставшуюся карту.

з) $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3$.

и) Чтобы подсчитать вероятности, нужно поделить ответ каждого пункта на $\binom{52}{5}$. Например, вероятность пары $\approx 0,05$, каре — $\approx 0,0002$.

249. $\frac{32!}{10!^3 \cdot 2! \cdot 3!}$.

250. $\binom{4}{2}/\binom{32}{2} \approx 1:83$.

253. Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому разберем три случая:

— если белый король стоит в углу (их 4), то он бьет 4 поля (включая то, на котором стоит) и остается 60 полей, на которые можно поставить черного короля;

— если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей 24), то он бьет 6 полей, и для черного короля остается 58 возможных полей;

— если же белый король стоит не на краю доски (таких полей 36), то он бьет 9 полей, и для черного короля остается 55 возможных полей. Таким образом, всего есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов расстановки королей.

254. **а**) $8!/2!2!2! = 5040$; **б**) $((8 \cdot 4)/2) \cdot (6!/2!2!) = 2880$.

255. **а**) Первая ладья может стоять на любом из 64 полей и в любом случае бьет все поля на своих вертикали и горизонтали. Для второй ладьи остается по 7 вертикалей и горизонталей, т.е. 49 полей. Ответ: $64 \cdot 49/2 = 1568$;

б) В отличии от 253 короли одинаковые, поэтому делим ответ на 2: $3612/2 = 1806$.

в) Имеем несколько вариантов расположения первого слона на поле:

— с краю поля: бьет 7 (чужих) + 1 (свою) = 8 клеток; всего таких 28, т.е. для второго слона $64 - 8 = 56$ позиций; $28 \cdot 56$ комбинаций;

— на периметре квадрата с вершинами $(b2; b7; g2; g7)$: бьет 9 (чужих) + 1 = 10 клеток; всего таких 20, т.е. для второго слона $64 - 10 = 54$ позиции: $20 \cdot 54$ комбинаций;

— на периметре квадрата с вершинами $(c3; c6; f3; f6)$: бьет 11 (чужих) + 1 = 12 клеток; всего таких 12, т.е. для второго слона $64 - 12 = 52$ позиций; $12 \cdot 52$ комбинаций;

— в одной из клеток $(d4; d5; e4; e5)$: бьет $13 + 1 = 14$ клеток; их всего 4, т.е для второго слона есть $64 - 14 = 50$ позиций; $4 \cdot 50$ комбинаций.

Просуммируем результаты всех случаях, поделив все на 2 (т.к. не важен порядок слонов в паре), получим: $28 \cdot 28 + 10 \cdot 54 + 6 \cdot 52 + 2 \cdot 50 = 1736$.

В оставшихся пунктах рассуждаем аналогично. Ответы: **г**) $(4 \cdot 61 + 8 \cdot 60 + 20 \cdot 59 + 16 \cdot 57 + 16 \cdot 55)/2 = 1848$; **д**) $(28 \cdot 42 + 20 \cdot 40 + 12 \cdot 38 + 4 \cdot 36)/2 = 1288$.

256. Так как любые две фигуры можно поставить на шахматную доску $\binom{64}{2}$ способами, то все ответы здесь — поделенные $64 \cdot 63/2 = 2016$ соответствующие ответы задачи 255.

257. а) Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьет 15 полей (включая поле, на котором она стоит). Поэтому остается 49 полей, на которые можно поставить черную ладью. Таким образом, всего есть $64 \cdot 49 = 3136$ разных способов.

б) $\frac{64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9}{6!}$;

в) $\frac{64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9}{4! \cdot 2!}$;

г) Решим задачу в общем случае — сколькими способами можно расставить n не угрожающих друг другу ладей на доске $n \cdot n$?

Заметим, что при любом расположении более n ладей найдется хотя бы одна вертикаль и хотя бы одна горизонталь с двумя или более ладьями, т.е. n это наибольшее число мирных ладей на доске $n \cdot n$.

На первую вертикаль можно произвольно поставить одну из n ладей, затем на вторую вертикаль — одну из $n-1$ оставшихся ладей, причем горизонталь, занятая первой ладьей исключается (ладьи не должны угрожать друг другу), на третью вертикаль — одну из $n-2$ оставшихся. (горизонтали, занятые первыми двумя ладьями, исключаются) и т.д., вплоть до $n-1$-й вертикали, на которой для ладьи остается выбор из двух горизонталей, и последней, n-й вертикали, с единственным полем для ладьи. Комбинируя n различных расположений ладьи на первой вертикали с $n-1$ расположением на второй, $n-2$ — на третьей и т.д., получаем $n!$ различных расположений ладей. В частности, на обычной доске восемь ладей, не угрожающих друг другу, можно расположить $8! = 40320$ способами.

Если ладьи занумерованы числами от 1 до n, то существует уже $(n!)^2$ расположений ладей, не угрожающих друг другу. Это следует из того, что n подходящих полей можно выбрать $n!$ способами; столько же способов имеется для расположения на этих полях n занумерованных ладей.

258. Всякая расстановка, удовлетворяющая условиям задачи, определяется выбором n полей для всех n мирных ладей и затем указанием k полей из этих n, на которых будут расположены белые ладьи, остальные $n-k$ полей займут черные ладьи. Таким образом, искомое число расстановок равно $n! \cdot \binom{n}{k}$.

259. Общее количество способов поставить k ладей на доску: $\binom{64}{k}$. Чтобы ладьи не били друг друга нужно выбрать $\binom{8}{k}$ способами столбцы, в которых они будут стоять и A_8^k способами строки. Значит, искомая вероятность равна:

$$\frac{\binom{8}{k} \cdot A_8^k}{\binom{64}{k}}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $p < 1/2$ при $k \geq 4$ и $p < 1/100$ при $k \geq 6$.

260. Если n ладей охраняют доску, то либо на каждой вертикали, либо на каждой горизонтали стоит хотя бы одна из них (если существуют вертикаль и горизонталь, свободные от ладей, то поле, находящееся на их пересечении, не атаковано). Число расстановок ладей по одной на каждой вертикали равно n^n (первую ладью можно поставить на одно из n полей первой вертикали; вторую, независимо от первой, на одно из n полей второй вертикали и т.д.). Столько же имеется расстановок и по одной на каждой горизонтали. Однако при таком подсчете дважды учитываются расстановки, в которых на каждой вертикали и на каждой горизонтали стоит по одной ладье. Так как каждая из них характеризуется тем, что никакая пара ладей не угрожает друг другу, то решением задачи является число $2 \cdot n^n - n!$.

261. Слоны, стоящие на черных полях не бьют слонов, стоящих на белых, поэтому, чтобы получить "максимальную" расстановку не бьющих друг друга слонов, надо расставить максимальное число не бьющих друг друга слонов на черные клетки (k способами), а затем (тоже k способами) расставить не бьющих друг друга слонов на белые клетки. Всего способов $k \cdot k = k^2$.

Литература

[1] *Бунимович Е.А., Булычев В.А.* Вероятность и статистика. 5—9 кл. М.: Дрофа, 2002.

[2] *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

[3] *Виленкин Н.Я.* Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.

[4] *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[5] *Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Лань, 2009.

[6] *Кузнецов О.П.* Дискретная математика для инженера. СПб.: Лань, 2004.

[7] Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. Издательство Саратовского университета, 1969.

[8] http://problems.ru