УДК 517.938
DOI: 10.17377/mattrudy.2018.21.208

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2018, том 21, № 2, 163–180

О ТОПОЛОГИИ МНОГООБРАЗИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫЕ ПОТОКИ С ЗАДАННЫМ НЕБЛУЖДАЮЩИМ МНОЖЕСТВОМ

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, В. С. Медведев

В работе изучается взаимосвязь между структурой множества состояний равновесия градиентно-подобного потока и топологией несущего многообразия размерности 4 и выше. Вводится класс многообразий, допускающих обобщенное разложение Хегора. Устанавливается, что если неблуждающее множество градиентно-подобного потока состоит в точности из μ узловых и ν седловых состояний равновесия индексов Морса 1 и $n-1$, то его несущее многообразие допускает обобщенное разложение Хегора рода $g=\frac{\nu-\mu+2}{2}$. Приводится алгоритм построения градиентно-подобных потоков на замкнутых многообразиях размерности $n\geq 3$ по заданным числам узловых состояний равновесия и седловых состояний равновесия различных индексов Морса.

Ключевые слова и фразы: градиентно-подобные потоки на многообразиях, разложение Хегора, связь между динамикой и топологией.

§1. Введение. Формулировка результатов

Напомним, что поток f^t, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n, называется потоком *Морса — Смейла*, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и замкнутых траекторий либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Поток Морса — Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным*. Индексом состояния равновесия p (замкнутой траектории γ) называется число, равное размерности его неустойчивого многообразия W^u_p (W^u_γ). Состояния равновесия индексов 0 и n будем называть *узловыми* (*стоковыми*

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01041), за исключением доказательства теоремы 2, полученного в рамках выполнения программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 г. (проект Т-95).

и источниковыми соответственно), а индексов $1, 2, \ldots, n-1$ — *седловыми.* Если инвариантные многообразия попарно различных седловых состояний равновесия потока f^t не пересекаются, то будем говорить, что поток f^t *не имеет гетероклинических пересечений.* Обозначим через Ω_{f^t} множество всех состояний равновесия потока f^t, через Ω^i — множество всех его состояний равновесия индекса $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и через $|\Omega^i|$ — его мощность.

Потоки Морса — Смейла обнаруживают замечательную взаимосвязь между структурой неблуждающего множества и топологией несущего многообразия. В частности, любой градиентно-подобный поток имеет по крайней мере по одному состоянию равновесия индексов 0 и n, и для него справедлива следующая формула Пуанкаре — Хопфа (см. например, [5]):

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^n|\Omega^i| = \chi(M^n), \tag{1}$$

где $\chi(M^n)$ — эйлерова характеристика многообразия M^n.

В классической работе [14], где системы Морса — Смейла введены по аналогии с грубыми потоками на поверхностях (понятие грубого потока введено А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным, см. [1]), получены неравенства, аналогичные неравенствам Морса, связывающие число состояний равновесия и периодических траекторий различных индексов потока с числами Бетти.

Приведем еще несколько относительно недавних результатов, касающихся взаимосвязи между динамикой потоков Морса — Смейла и топологией несущего многообразия.

Положим

$$g_{f^t} = \frac{1}{2}\Big(\big|\Omega^1 \cup \Omega^{n-1}\big| - \big|\Omega^0 \cup \Omega^n\big| + 2\Big),$$

$$k_{f^t} = \frac{1}{2}\Big(\big|\Omega^0 \cup \Omega^n\big| + \big|\Omega^1 \cup \Omega^{n-1}\big|\Big).$$

Из формулы (1) следует, что в случае $n = 2$ число g_{f^t} совпадает с родом несущего многообразия M^2.

Для градиентно-подобных потоков на трехмерных многообразиях имеется следующий результат, доказанный в работе [2].

Предложение 1. *Пусть f^t — градиентно-подобный поток, заданный на связном замкнутом ориентируемом многообразии M^3. Тогда многообразие M^3 допускает разложение Хегора рода g_{f^t}.*

В настоящей работе понятие разложения Хегора обобщается на случай многообразий размерности $n > 3$, и в теореме 1 дается обобщение предложения 1.

Будем называть сферой S^k многообразие, гомеоморфное стандартной сфере

$$\mathbb{S}^k = \big\{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{k+1} \;\big|\; x_1^2 + \cdots + x_{k+1}^2 = 1\big\},$$

и шаром B^n многообразие, гомеоморфное стандартному шару

$$\mathbb{B}^n = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{R}^n \;\big|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\big\}.$$

Напомним, что *связной суммой гладких ориентируемых связных многообразий* M_1^n и M_2^n называется многообразие $M_1^n \sharp M_2^n$, полученное следующим образом. Пусть $e_1 : \mathbb{B}^n \to M_1^n$, $e_2 : \mathbb{B}^n \to M_2^n$ — вложения стандартных дисков такие, что e_1 является сохраняющим ориентацию, а e_2 — меняющим ориентацию (т. е. якобиан отображения e_1 больше нуля, а якобиан отображения e_2 меньше нуля). Тогда многообразие $M_1^n \sharp M_2^n$ есть результат склеивания многообразий с краем $M_1^n \setminus e_1(\operatorname{int} \mathbb{B}^n)$, $M_2^n \setminus e_2(\operatorname{int} \mathbb{B}^n)$ по диффеоморфизму $h : e_1(\mathbb{S}^{n-1}) \to e_2(\mathbb{S}^{n-1})$ такому, что $h = e_2 e_1^{-1} \mid e_1(\mathbb{S}^{n-1})$.

Согласно [11, Lemma 2.1] гладкое многообразие, получающееся в результате операции связной суммы, определяется однозначно (с точностью до диффеоморфизма) и не зависит от выбора вложений e_1 и e_2.

Из работы [8] непосредственно вытекает следующий результат.

Предложение 2. *Пусть M^3 — трехмерное замкнутое связное ориентируемое многообразие. Градиентно-подобный поток без гетероклинических пересечений f^t существует на многообразии M^3 тогда и только тогда, когда либо M^3 является сферой S^3 и $g_{f^t} = 0$, либо M^3 является связной суммой g_{f^t} копий $S^2 \times S^1$.*

В серии работ [3; 10; 17] на случай размерности $n > 3$ несущего многообразия получены различные обобщения необходимых условий существования градиентно-подобного потока f^t, устанавливаемого предложением 2. Для полноты изложения результаты этих работ приводятся ниже (предложение 3) после ряда определений. Обобщение достаточных условий, устанавливаемых в предложении 2, составляет теорему 2 настоящей работы.

Пусть M^n — топологическое замкнутое n-мерное многообразие, $n \geq 2$, и Σ^k — топологически вложенная в M^n сфера размерности k ($1 \leq k \leq n-1$). Сфера Σ^k называется *локально плоской*, если для любой точки $z \in \Sigma^k$ существуют окрестность $U(z) = U \subset M^n$ и гомеоморфизм $\varphi_z : U \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_z(\Sigma^k \cap U) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Заметим, что проективная плоскость $\mathbb{P}^2$ представляется как объединение не пересекающихся между собой топологически вложенной окружности S^1 и двумерного открытого диска B^2: $\mathbb{P}^2 = S^1 \cup B^2$. При этом окружность, топологически вложенная в двумерное многообразие, всегда локально плоско вложена (см. например, [4; 9]). По аналогии с проективной плоскостью в [17] введены многообразия, названные проективно-подобными.

Многообразие M^n называется *проективно-подобным*, если

1) $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;
2) M^n является объединением не пересекающихся между собой $n/2$-мерной сферы $S^{n/2}$, локально плоско вложенной в M^n, и открытого n-мерного шара B^n: $M^n = S^{n/2} \cup B^n$, $S^{n/2} \cap B^n = \varnothing$.

Градиентно-подобный поток называется *полярным*, если $|\Omega^0| = |\Omega^n| = 1$.

Предложение 3. *Пусть f^t — градиентно-подобный поток, не имеющий гетероклинических пересечений и заданный на замкнутом ориентируемом многообразии M^n $(n > 3)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *g_{f^t} и k_{f^t} являются целыми числами;*
2) *если $g_{f^t} = 0$, то либо M^n гомеоморфно сфере S^n, либо существует число $1 \leq l^0_{f^t} \leq k_{f^t}$ такое, что M^n гомеоморфно связной сумме*
$$M^n = N^n_1 \sharp \cdots \sharp N^n_{l^0_{f^t}},$$
где каждое слагаемое N^n_i, $i = 1, \ldots, l^0_{f^t}$, допускает полярный поток, все седловые точки которого имеют индекс Морса, отличный от 1 и $n-1$;
3) *если $g_{f^t} \neq 0$, то либо M^n гомеоморфно связной сумме*
$$M^n = S^{n-1} \times S^1 \sharp \cdots \sharp S^{n-1} \times S^1$$
g_{f^t} слагаемых, либо существует число $1 \leq l^1_{f^t} \leq k_{f^t}$ такое, что M^n гомеоморфно связной сумме
$$M^n = S^{n-1} \times S^1 \sharp \cdots \sharp S^{n-1} \times S^1 \sharp N^n_1 \sharp \cdots \sharp N^n_{l^1_{f^t}},$$
где число слагаемых вида $S^{n-1} \times S^1$ равно g_{f^t} и каждое слагаемое N^n_i, $i = 1, \ldots, l^1_{f^t}$, допускает полярный поток, все седловые точки которого имеют индекс Морса, отличный от 1 и $n-1$;
4) *если в случае 2 (случае 3) существует номер $i_* \in \{1, \ldots, l^0_{f^t}\}$ $\big(j_* \in \{1, \ldots, l^1_{f^t}\}\big)$ такой, что многообразие $N^n_{i_*}$ $(N^n_{j_*})$ допускает полярный поток с единственным состоянием равновесия, то n принадлежит $\{4, 8, 16\}$ и $N^n_{i_*}$ $(N^n_{j_*})$ является проективно-подобным многообразием.*

Результаты предложений 2 и 3 позволяют получить достаточные условия существования замкнутых и гетероклинических траекторий потоков Морса — Смейла.

Следствие 1. *Пусть f^t — поток Морса — Смейла без гетероклинических пересечений на замкнутом ориентируемом многообразии M^n размерности $n \geq 3$ и $g_{f^t} \neq 0$. Тогда если фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ не содержит подгруппы, изоморфной свободному произведению g_{f^t} экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$), то неблуждающее множество потока f^t имеет по крайней мере одну периодическую траекторию.*

Следствие 2. *Пусть f^t — градиентно-подобный поток на замкнутом ориентируемом многообразии M^n такой, что $g_{f^t} \neq 0$, фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ не содержит подгруппы, изоморфной свободному произведению g_{f^t} экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$, и сепаратрисы различных седловых состояний равновесия с индексом Морса, не равным 1 или $n-1$, не пересекаются.*

Тогда существует по крайней мере одна пара p, q седловых состояний равновесия потока f^t индексов 1, $n-1$ соответственно таких, что

$$W^s(p) \cap W^u(q) \neq \varnothing.$$

Ниже классическое понятие разложения Хегора обобщается на случай многообразия размерности выше трех.

Напомним, что многообразие M размерности n получается из многообразия N с краем ∂N *приклеиванием ручки* $H_k = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ *индекса* k, если существует вложение $\varphi : \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k} \to \partial N$ такое, что M есть фактор-пространство объединения $N \cup H_k$ по отношению эквивалентности, в силу которого эквивалентны точки $x \in \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k}$ и $\varphi(x)$.

Многообразие Q^n, полученное приклеиванием ручек индексов, максимальный из которых равен k, называется (n,k)-*ручечным телом.* Будем говорить, что $(n,1)$-ручечное тело *имеет род* $g \geq 1$, если оно получено приклеиванием к шару g ручек индекса 1. По аналогии со случаем $n = 3$ каждую сферу $S_i^{n-2} \subset Q^n$, изотопную образу сферы $\left\{\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{S}^{n-2} \subset \partial H_k$, принадлежащую границе ручки с номером $i \in \{1, \dots, g\}$, будем называть *меридианом* $(n,1)$-ручечного тела Q^n.

Пусть Q_1^n, Q_2^n — два $(n,1)$-ручечных тела рода g и $\phi : \partial Q_1^n \to \partial Q_2^n$ — гомеоморфизм, меняющий естественную ориентацию края. Склеивая Q_1^n и Q_2^n посредством гомеоморфизма ϕ, мы получим ориентируемое многообразие $M^n = Q_1^n \cup_\phi Q_2^n$.

В случае $n = 3$ представление многообразия M^3 в виде двух склеенных $(2,1)$-ручечных тел рода g называется *разложением Хегора рода* g, а общая граница этих тел называется *поверхностью Хегора.* Представление в виде разложения Хегора рода g существует для любого трехмерного многообразия M^3, но число g не определяется однозначно. Наименьший род разложений Хегора данного многообразия называется его *родом Хегора* и обозначается символом g_{M^3}.

По аналогии будем называть представление гладкого многообразия M^n размерности $n > 3$ в виде двух склеенных $(n, 1)$-ручечных тел рода g *обобщенным разложением Хегора*. Минимальное число g_{M^n} всех возможных таких разложений данного многообразия M^n назовем его *обобщенным родом Хегора*.

Разложение Хегора представляет собой частный случай понятия удвоения (double). Говорят, что замкнутое многообразие M^n является *удвоением* многообразия N с краем ∂N, если M^n может быть получено склеиванием двух копий многообразия N по некоторому диффеоморфизму φ, обращающему естественную ориентацию края ∂N (см, например, [12]).

Теорема 1. 1. *Пусть f^t — градиентно-подобный поток, заданный на связном замкнутом ориентируемом многообразии M^n, $n > 3$, все седловые состояния равновесия которого имеют индекс Морса 1 или $n-1$.*[1] *Тогда многообразие M^n допускает обобщенное разложение Хегора рода g_{f^t}.*

2. *На любом ориентируемом многообразии M^n, $n \geq 3$, имеющем обобщенный род Хегора $g_{M^n} > 0$, существует полярный поток f^t, все множество седловых состояний равновесия которого состоит из g_{M^n} состояний равновесия индекса 1 и g_{M^n} состояний равновесия индекса $n-1$. Кроме того, если M^n является связной суммой $2g_{M^n}$ копий многообразий $S^{n-1} \times S^1$, то поток f^t может быть построен таким образом, что он не имеет гетероклинических пересечений.*

Замечание 1. Пусть многообразие M^n допускает обобщенное разложение Хегора минимального рода g_{M^n}, но не является связной суммой $2g_{M^n}$ копий многообразий $S^{n-1} \times S^1$, и пусть f^t — полярный поток на M^n, множество седловых состояний равновесия которого состоит из $2g_{M^n}$ состояний равновесия индексов 1 и $n-1$. Тогда $g_{f^t} = g_{M^n}$ и из предложения 3 следует, что f^t имеет по крайней мере одну гетероклиническую траекторию (если предположить, что таких траекторий нет, то многообразие M^n является связной суммой $2g_{M^n}$ многообразий $S^{n-1} \times S^1$).

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее достаточное условие существования замкнутой траектории потока Морса — Смейла.

Следствие 3. *Пусть f^t — поток Морса — Смейла, заданный на замкнутом многообразии M^n, все седловые состояния равновесия которого имеют индекс Морса 1 или $n-1$. Если выполняется неравенство $g_{M^n} > g_{f^t}$, то неблуждающее множество f^t содержит по крайней мере одну периодическую траекторию.*

[1] Если неблуждающее множество градиентно-подобного потока f^t не содержит седловых состояний равновесия, то оно состоит в точности из одного источникового и одного стокового состояния равновесия, а несущее многообразие M^n является сферой.

Теорема 2. *Пусть $\mu \geq 2$, $\nu \geq 0$, $g \geq 0$ — целые числа такие, что $g = \frac{\nu-\mu+2}{2}$, и λ — любое целое неотрицательное число. Тогда существует градиентно-подобный поток f^t без гетероклинических пересечений, неблуждающее множество которого состоит в точности из μ узлов, ν седловых состояний равновесия индексов 1, $n-1$ и 2λ состояний равновесия индексов, отличных от 1 и $n-1$, а топология несущего многообразия M^n описывается следующим образом:*

1) *если $g = 0$ и $\lambda = 0$, то M^n является сферой S^n;*
2) *если $g = 0$ и $\lambda > 0$, то M^n является удвоением ручечного тела с λ ручками индексов, отличных от 1 и $n-1$;*
3) *если $g_{f^t} > 0$ и $\lambda = 0$, то M^n можно представить в виде связной суммы*
$$M^n = S^{n-1} \times S^1 \sharp \cdots \sharp S^{n-1} \times S^1;$$
4) *если $g_{f^t} > 0$ и $\lambda > 0$, то M^n можно представить в виде связной суммы*
$$M^n = S^{n-1} \times S^1 \sharp \cdots \sharp S^{n-1} \times S^1 \sharp N,$$
где число слагаемых $S^{n-1} \times S^1$ равно g, а многообразие N является удвоением ручечного тела с λ ручками индексов, отличных от 1 и $n-1$.

Замечание 2. В работе [17] решалась проблема реализации полярных потоков, множество седловых состояний равновесия которых состоит в точности из одной точки, и было показано, что несущее многообразие таких потоков является проективно-подобным. Проблема реализации градиентно-подобных потоков с произвольным числом седловых состояний равновесия индексов, отличных от 1 и $n-1$ является открытой проблемой.

§2. Разложение Хегора несущего многообразия градиентно-подобного потока

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 1. Вначале приведем несколько вспомогательных утверждений. Первое из них является непосредственным следствием теоремы 2 из [16].

Предложение 4. *Пусть f^t — градиентно-подобный поток на замкнутом гладком многообразии M^n. Тогда:*

1) *многообразие M^n представляется в виде дизъюнктного объединения устойчивых (неустойчивых) многообразий всех состояний равновесия потока f^t;*

2) *для любого седлового состояния равновесия p потока f^t замыкание $\operatorname{cl} l_p^u$ компоненты связности l_p^u многообразия $W_p^u \setminus p$ представляется в следующем виде*:

$$\operatorname{cl} l_p^u = l_p^u \cup p \cup \bigcup_{q \in \Omega_{f^t} : l_p^u \cap W_q^s \neq \varnothing} W_q^u.$$

Напомним, что дважды дифференцируемая функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ на гладком замкнутом ориентируемом многообразии M^n называется *функцией Морса*, если все ее критические точки не вырождены, т. е. для любой критической точки $p \in M^n$ определитель матрицы Гессе $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_p$ в этой точке отличен от нуля. Согласно лемме Морса (см. [5, лемма 2.2]) в некоторой окрестности невырожденной критической точки p существуют локальные координаты $y_1, \ldots, y_n$, называемые *координатами Морса*, в которых функция φ имеет вид

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(p) - y_1^2 - \cdots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \cdots + y_n^2.$$

Число $k \in \{0, \ldots, n\}$ не зависит от выбора локальных координат и называется *индексом точки p*. Будем обозначать индекс критической точки через $\operatorname{ind}(p)$. Гладкий поток, индуцированный векторным полем $X = -\operatorname{grad}\varphi$, называется *градиентным потоком*.

В силу работы [15, Theorem B] справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. *Для любого градиентно-подобного потока f^t на гладком замкнутом многообразии M^n существует функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ такая, что*:

1) *φ является функцией Морса*;
2) *множество критических точек функции φ совпадает с неблуждающим множеством $\Omega(f^t)$ потока f^t*;
3) *$\varphi\big(f^t(x)\big) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$*;
4) *$\varphi(p) = \operatorname{ind}(p)$ для любого $p \in \Omega(f^t)$*.

Более того, существует такая метрика на M^n, в которой поток f^t является градиентным потоком для функции φ.

Будем называть функцию φ, описанную в предложении 5, *самоиндексирующейся энергетической функцией* потока f^t. Для любого $c \in [0, n]$ положим $M_c = \varphi^{-1}[0, c]$.

Напомним, что множество A называется *аттрактором* потока f^t, если найдется замкнутая окрестность (захватывающая окрестность) $V \subset M^n$ такая, что все траектории потока f^t пересекают ее границу ∂V трансверсально, и $A = \bigcap_{t>0} f^t(V)$. Множество R называется *репеллером* потока f^t, если оно является аттрактором для потока f^{-t}.

Положим

$$A_{f^t} = \Omega^0 \cup \bigcup_{p \in \Omega^1} W^u_p, \quad R_{f^t} = \Omega^n \cup \bigcup_{q \in \Omega^{n-1}} W^s_q.$$

Из предложения 4 следует, что любая одномерная сепаратриса седлового состояния равновесия содержит в своем замыкании, кроме себя самой и седловой точки, единственную узловую точку. Поэтому множеству A_{f^t} (R_{f^t}) можно поставить в соответствие граф, вершины которого соответствуют стоковым (источниковым) состояниям равновесия, а ребра — одномерным неустойчивым (устойчивым) многообразиям седловых состояний равновесия. Обозначим через g_a (g_r) число подмножеств множества A_{f^t} (R_{f^t}), гомеоморфных окружности.

Лемма 1. *Множества A_{f^t} и R_{f^t} являются связными аттрактором и репеллером потока f^t, и*

$$\left|\Omega^0\right| = \left|\Omega^1\right| - g_a + 1, \quad \left|\Omega^n\right| = \left|\Omega^{n-1}\right| - g_r + 1. \tag{2}$$

Доказательство. В силу предложения 5 для потока f^t существует самоиндексирующаяся энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$. Пусть $\varepsilon \in (0; 1)$. Положим $M_{1+\varepsilon} = \varphi^{-1}[0, 1+\varepsilon]$ и покажем, что $M_{1+\varepsilon}$ является захватывающей окрестностью для A_{f^t}.

Из определения следует, что $A_{f^t} \subset M_{1+\varepsilon}$. Так как A_{f^t} инвариантно, то $A_{f^t} \subset \bigcap_{t>0} f^t(M_{1+\varepsilon})$. Покажем, что

$$A_{f^t} = \bigcap_{t>0} f^t(M_{1+\varepsilon}).$$

Предположим противное. Тогда существует точка

$$x \in \bigcap_{t>0} f^t(M_{1+\varepsilon}) \setminus A_{f^t}.$$

Из предложения 4 следует, что существует состояние равновесия $p \in \Omega_{f^t}$ такое, что $x \in W^u_p$. Так как множество $\bigcap_{t>0} f^t(M_{1+\varepsilon})$ замкнуто и инвариантно, то $p \in \bigcap_{t>0} f^t(M_{1+\varepsilon}) \setminus A_{f^t}$, что невозможно, поскольку множество $M_{1+\varepsilon}$ не содержит состояний равновесия, отличных от тех, что принадлежат A_{f^t}. Следовательно, $A_{f^t} = \bigcap_{t>0} f^t(M_{1+\varepsilon})$.

Аналогичным образом доказывается, что множество R_{f^t} является аттрактором для потока f^{-t} с захватывающей окрестностью $M^n \setminus \operatorname{int} M_{1+\varepsilon}$.

Докажем связность A_f. Вначале докажем связность его захватывающей окрестности $M_{1+\varepsilon}$. Предположим противное. Тогда $M_{1+\varepsilon}$ представляется в виде объединения непересекающихся непустых инвариантных подмножеств E_1 и E_2 и объединение

$$\bigcup_{p \in A_{f^t}} W^s_p = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(E_1 \cup E_2)$$

является несвязным. В силу предложения 4 многообразие M^n представляется в виде

$$M^n = \bigcup_{p \in A_{f^t}} W^s_p \cup R_{f^t}.$$

Тогда

$$M^n \setminus R_{f^t} = \bigcup_{p \in A_{f^t}} W^s_p,$$

поэтому $M^n \setminus R_{f^t}$ несвязно. С другой стороны, так как $n > 3$, а размерность репеллера R_f не превышает 1, то R_f не делит M^n; следовательно, множество $M^n \setminus R_{f^t}$ связно. Полученное противоречие доказывает связность $M_{1+\varepsilon}$. Тогда A_f связно как пересечение связных компактных вложенных множеств. Связность репеллера R_f доказывается аналогично.

Докажем равенство $|\Omega^0| = |\Omega^1| - g_a + 1$ (равенство $|\Omega^n| = |\Omega^{n-1}| - g_r + 1$ доказывается аналогично). Из связности A_f следует, что если множество Ω^1 пусто, то множество A_{f^t} состоит из единственного узлового состояния равновесия. Тогда $|\Omega^0| = 1$, $|\Omega^1| = 0$, $g_a = 0$ и равенство выполняется. Если множество Ω^1 непусто, то из каждого подмножества аттрактора A_f, гомеоморфного окружности, удалим по одной седловой точке вместе с ее неустойчивым многообразием. Получим связный граф без циклов, т. е. дерево с $|\Omega^0|$ вершинами и $|\Omega^1| - g_a$ ребрами. Непосредственно вычисляется, что $|\Omega^0| = |\Omega^1| - g_a + 1$. □

Доказательство теоремы 1. Докажем первое утверждение. Пусть f^t — градиентно-подобный поток, заданный на связном замкнутом ориентируемом многообразии M^n, $n > 3$, все седловые состояния равновесия которого имеют индекс Морса 1 или $n - 1$. Покажем, что тогда многообразие M^n допускает разложение Хегора рода g_{f^t}.

В силу предложения 5 для потока f^t существует самоиндексирующаяся энергетическая функция φ. Многообразие $M_\varepsilon = \varphi^{-1}([0, \varepsilon])$ гомеоморфно дизъюнктному объединению $|\Omega^0|$ n-шаров. Из [13, теорема 3.4] следует, что многообразие $M_{1+\varepsilon}$ получается из многообразия M_ε приклеиванием к нему $|\Omega^1|$ ручек $H_1, \dots, H_{|\Omega^1|}$ индекса 1. В лемме 1 доказано, что множества $M_{1+\varepsilon}$ и A_{f^t} связны. Напомним, что аттрактор A_{f^t} является носителем графа, множество вершин которого изоморфно множеству стоковых точек, а множество ребер — множеству неустойчивых инвариантных многообразий седловых точек индекса 1, при этом граф содержит в точности g_a циклов. Поэтому при удалении из каждого подмножества множества A_{f^t}, гомеоморфного окружности, неустойчивого многообразия произвольной седловой точки (или его части, содержащей эту точку) получается связное множество. Выберем на каждом подмножестве множества A_{f^t}, гомеоморфном окружности, по седловой точке и обозначим их через

$$\sigma_{|\Omega^1|-g_a+1}, \sigma_{|\Omega^1|-g_a+2}, \ldots, \sigma_{|\Omega^1|}.$$

Так как каждая ручка H_i содержит седловую точку $\sigma_i \in A_{f^t}$ вместе с частью ее неустойчивого многообразия $W^u_{\sigma_i} \cap \varphi^{-1}\big((\varepsilon, 1]\big)$, то многообразие

$$M_{1+\varepsilon} \Big\backslash \bigcup_{i=|\Omega^1|-g_a+1}^{|\Omega^1|} H_i = M_\varepsilon \cup \bigcup_{j=1}^{|\Omega^1|-g_a} H_j$$

является связным многообразием. Это многообразие является результатом приклеивания к $|\Omega^0|$ шарам ручек в количестве $|\Omega^1| - g_a = |\Omega^0| - 1$ штук. Поэтому многообразие

$$M_\varepsilon \cup \bigcup_{j=1}^{|\Omega^1|-g_a} H_j$$

является шаром, а многообразие $M_{1+\varepsilon}$ является $(n, 1)$-ручечным телом рода g_a. Аналогично, рассматривая поток f^{-t} и функцию Морса $n - \varphi$, получаем, что многообразие $N = M^n \setminus \operatorname{int} M_{1+\varepsilon}$ является n-ручечным телом индекса 1 рода g_r. Поскольку многообразия $M_{1+\varepsilon}$ и N имеют общую границу, то $g_a = g_r$. Из формул (2) следует, что $g_{f^t} = (g_a + g_r)/2 = g_a$; таким образом, многообразие M^n допускает разбиение Хегора рода g_{f^t}.

Докажем второе утверждение. Пусть M^n — ориентируемое многообразие размерности $n \geq 3$, допускающее обобщенное разложение Хегора с минимальным родом g_{M^n}. Построим полярный поток f^t на M^n, все седловые состояния равновесия которого имеют индекс Морса 1 или $n-1$ и их общее число равно $2g_{M^n}$.

По определению существуют $(n, 1)$-ручечное тело $Q^n_{g_{M^n}}$ и диффеоморфизм $h : \partial Q^n_{g_{M^n}} \to \partial Q^n_{g_{M^n}}$ такие, что $M^n = Q^n_{g_{M^n}} \bigcup_h Q^n_{g_{M^n}}$.

Пусть X_n — ограничение векторного поля $\dot{x} = x$, $x \in \mathbb{R}^n$, на шар $\mathbb{B}^n$. Определим на ручке $H_1 = \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$ векторное поле $X_{1,n-1}$ уравнениями $\dot{x} = -x$ и $\dot{y} = y$, где $x \in \mathbb{B}^1$ и $y \in \mathbb{B}^{n-1}$. Поля X_n и $X_{1,n-1}$ индуцируют на ручечном теле $Q^n_{g_{M^n}}$ векторное поле, задающее градиентно-подобный поток F^t_+, траектории которого трансверсальны границе $\partial Q^n_{g_{M^n}}$, такой, что его неблуждающее множество состоит в точности из одного источника и g_{M^n} седловых состояний равновесия индекса $n-1$ таких, что инвариантные многообразия различных состояний равновесия не пересекаются. На второй копии ручечного тела $Q^n_{g_{M^n}}$ определим поток $F^t_- = F^{-t}_+$. Обозначим через $D_+ \subset \partial\, Q^n_{g_{M^n}}$ и $D_- \subset \partial\, Q^n_{g_{M^n}}$ множества пересечений инвариантных многообразий всех седловых состояний равновесия потоков F^t_+ и F^t_- с различными копиями $\partial\, Q^n_{g_{M^n}}$ соответственно. Множества D_+ и D_- являются объединением меридианов на различных копиях ручечного тела $Q^n_{g_{M^n}}$ соответственно.

Если M^n диффеоморфно связной сумме g_{M^n} копий $S^{n-1}\times S^1$, то, не уменьшая общности, можно считать, что диффеоморфизм h переводит классы изотопных меридианов тела $Q^n_{g_{M^n}}$ в себя. Поэтому найдется диффеоморфизм $\widetilde{h}:\partial Q^n_{g_{M^n}}\to\partial Q^n_{g_{M^n}}$, изотопный h, такой, что $\widetilde{h}(D_+)\cap D_-=\varnothing$. Тогда, склеив две копии тела $Q^n_{g_{M^n}}$ по диффеоморфизму $\widetilde{h}$, получим многообразие, диффеоморфное M^n, с полярным потоком f^t на нем, множество седловых состояний равновесия которого состоит в точности из g_{M^n} точек индекса 1 и g_{M^n} точек индекса $n-1$, причем инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия потока f^t не пересекаются.

Если M^n не диффеоморфно связной сумме g_{M^n} копий $S^{n-1}\times S^1$, то в силу теоремы о приведении в общее положение (см., например, [6, гл. 3, § 2, теорема 2.4]) существует диффеоморфизм $\widetilde{h}:\partial Q^n_{g_{M^n}}\to\partial Q^n_{g_{M^n}}$, изотопный h, такой, что пересечение $\widetilde{h}(D_+)\cap D_-$ трансверсально. Склеив две копии тела $Q^n_{g_{M^n}}$ по диффеоморфизму $\widetilde{h}$, получим многообразие, диффеоморфное M^n, и полярный поток f^t на нем, множество седловых состояний равновесия которого состоит в точности из g_{M^n} точек индекса 1 и g_{M^n} точек индекса $n-1$. □

§3. Реализация градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений с заданными числами узловых и седловых состояний равновесия

В этом параграфе доказывается теорема 2. *Доказательство* проведем по шагам.

Шаг 1. *Построение вспомогательного потока* ϕ^t_ν *на цилиндре*

$$C=\big\{(x_1,\dots,x_n)\subset\mathbb{R}^n\ \big|\ x_1^2+\dots+x_{n-1}^2=1,\ x_n\in[0,1]\big\},$$

трансверсального границе цилиндра, неблуждающее множество которого состоит из ν *седловых состояний равновесия индексов* 1 *и* $n-1$ *и* ν *узлов.*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt} &= x_1x_n,\\ &\dots\\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_{n-1}x_n,\\ \frac{dx_n}{dt} &= -(x_1^2+\dots+x_{n-1}^2),\end{cases}\tag{3}$$

где $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Сфера
$$\mathbb{S}^{n-1} = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\bigr\}$$
инвариантна относительно потока, задаваемого системой (3). Действительно, система (3) эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 dx_1 & = \; x_1^2 x_n dt, \\ & \dots \\ x_{n-1} dx_{n-1} & = \; x_{n-1}^2 x_n dt, \\ x_n dx_n & = \; -x_n(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) dt. \end{cases} \tag{4}$$

Откуда
$$x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n = 0,$$
и, следовательно, $x_1^2 + \dots + x_n^2 = \mathrm{const}$ — первый интеграл системы (3).

Обозначим через ψ^t ограничение потока, задаваемого системой (3), на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ и покажем, что его состояния равновесия $S(0, 0, \dots, -1)$ и $N(0, 0, \dots, 1)$ являются гиперболическими. Для этого введем на $\mathbb{S}^{n-1}$ гладкую структуру, состоящую из двух карт

$$\bigl(U = \mathbb{S}^{n-1} \setminus N, \eta_N\bigr) \quad \text{и} \quad \bigl(V = \mathbb{S}^{n-1} \setminus S, \eta_S\bigr),$$

где гомеоморфизмы η_N и η_S суть стереографические проекции областей U и V на гиперплоскости $x_n = -1$ и $x_n = 1$ соответственно. Пусть $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Обозначим через $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ координаты точки $\eta_N(x)$. Тогда $\xi_i = 2\frac{x_i}{1 - x_n}$ и в локальных координатах $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ поток ψ^t задается следующей системой уравнений:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\xi_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{5}$$

Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = -1$ характеристического уравнения системы (5) лежат вне мнимой оси, поэтому положение равновесия $O = \eta_N(S)$ с координатами $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-1} = 0$ гиперболическое. Аналогично доказывается гиперболичность состояния равновесия N.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = \; x_1 x_n, \\ & \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} & = \; x_{n-1} x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} & = \; -(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2), \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} & = \; -\cos \pi\nu x_{n+1}. \end{cases} \tag{6}$$

Обозначим через ϕ^t_ν ограничение потока, соответствующего системе (6), на цилиндр C. Неблуждающее множество потока ϕ^t_ν состоит из ν узловых и ν седловых гиперболических положений равновесия. Обозначим эти положения равновесия через $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ и $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$, где

$$\begin{aligned} N_i &= \Big(0, 0, \ldots, 1, \tfrac{1}{\nu}\big(\tfrac{1}{2} + i\big)\Big), \\ S_i &= \Big(0, 0, \ldots, -1, \tfrac{1}{\nu}\big(\tfrac{1}{2} + i\big)\Big), \end{aligned} \qquad i = 0, \ldots, \nu - 1.$$

Траектории потока ϕ^t_ν трансверсально пересекают границу цилиндра C. Если ν четно, то касательный вектор к траектории потока в точках сферы

$$S_0^{n-1} = \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \;\big|\; x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1,\ x_{n+1} = 0\big\}$$

направлен вне C, а касательный вектор к траектории потока в точках сферы

$$S_1^{n-1} = \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \;\big|\; x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1,\ x_{n+1} = 1\big\}$$

направлен внутрь C. При этом касательные векторы в точках

$$(x_1, \ldots, x_n, 0) \in S_0^{n-1} \quad \text{и} \quad (x_1, \ldots, x_n, 1) \in S_1^{n-1}$$

равны. Если ν нечетно, то касательные векторы к траекториям потока $\{\phi^t_\nu\}$ в точках края цилиндра C направлены вне C.

Шаг 2. *Построение потока $f^t_{\nu+2,\nu,0}$ на сфере S^n.*

Как и в шаге 1, непосредственно убеждаемся, что система уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 x_{n+1}, \\ & \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= x_n x_{n+1}, \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} &= -(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \end{cases} \tag{7}$$

индуцирует поток Ψ^t на стандартной сфере $\mathbb{S}^n$, которая является для нее интегральной поверхностью. При этом неблуждающее множество потока Ψ^t состоит в точности из двух состояний равновесия: источника в точке $(0, \ldots, 0, 1)$ и стока в точке $(0, \ldots, 0, -1)$.

Положим

$$B^n_- = \Big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \;\Big|\; x_{n+1} \in [-1, 0]\Big\}, \quad \Psi^t_- = \Psi^t\,\Big|_{B^n_-},$$

$$B^n_+ = \Big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\Big|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (x_{n+1} - 1)^2 = 1, \;\; x_{n+1} \in [1, 2]\Big\}.$$

Обозначим через $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ отображение, заданное формулой

$$p(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} - 1),$$

и через Ψ^t_+ — поток на шаре B^n_+, равный $p^{-1}\Psi^t p\Big|_{B^n_+}$.

Траектории потока Ψ^t_δ трансверсально пересекают границу шара B^n_δ при $\delta \in \{+,-\}$, причем касательный вектор к траектории в любой точке границы шара равен $(0,\dots,0,-1)$.

Пусть $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{2\nu}\right)$, и пусть $g(x_{n+1})$ — гладкая функция, равная единице при $x_{n+1} \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ и нулю при $x_{n+1} \in \left[0,\frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[1-\frac{\varepsilon}{2},1\right]$ и положительная при $x_{n+1} \subset \left(\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon\right) \cup (1-\varepsilon, 1-\frac{\varepsilon}{2}\big)$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 x_n g(x_{n+1}), \\ & \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_{n-1} x_n g(x_{n+1}), \\ \frac{dx_n}{dt} &= -(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) g(x_{n+1}), \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} &= -\cos \pi\nu x_{n+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) индуцирует на цилиндре C поток $\widetilde{\phi}^t_\nu$, совпадающий с потоком ϕ^t_ν вне ε-окрестностей границы цилиндра C и топологически эквивалентный ему. Касательные векторы к траекториям потока $\widetilde{\phi}^t_\nu$ в точках сферы S^{n-1}_0 равны $(0,\dots,0,-1)$, а в точках сферы S^{n-1}_1 равны $(0,\dots,0,-1)$ в случае четного ν и $(0,\dots,0,1)$ в случае нечетного ν.

Рассмотрим множество $B^n_- \cup C \cup B^n_+$, которое по построению является сферой S^n. Из определений потоков $\widetilde{\phi}^t_\nu$, Ψ^t_+ и Ψ^t_- следует, что на S^n индуцируется искомый гладкий градиентно-подобный поток $f^t_{\nu+2,\nu,0}$, совпадающий на цилиндре C с потоком $\widetilde{\phi}^t_\nu$, на шаре B^n_- — с потоком Ψ^t_-, а на шаре B^n_+ — с потоком Ψ^t_+ в случае четного ν и с потоком Ψ^{-t}_+ в случае нечетного ν.

Шаг 3. *Построение потока $f^t_{\nu,\nu,0}$ на $S^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.*

Если ν четно, то склеим компоненты связности границы цилиндра C при помощи отображения, отождествляющего точки

$$(x_1,\dots,x_n,0) \ \text{ и } \ (x_1,\dots,x_n,1).$$

В результате получим многообразие $S^{n-1} \times S^1$ и искомый поток на нем, индуцированный потоком ϕ^t_ν. Пусть теперь $\nu \geq 3$ нечетно. Выберем на сфере S^n два гладких замкнутых шара B^n_1 и B^n_2, границы которых трансверсальны траекториям потока $f^t_{\nu,\nu+2,0}$, построенного на предыдущем шаге, и таких, что каждый шар B^n_ω и B^n_α содержит внутри в точности одно состояние равновесия: устойчивый узел ω и неустойчивый узел α соответственно. Из конструкции потока $f^t_{\nu,\nu+2,0}$ следует, что ω (α), принадлежит замыканию инвариантного многообразия в точности одного седлового состояния равновесия, которое пересекает границу шара B^n_ω (B^n_α) по множеству δ_ω (δ_α), являющемуся либо сферой S^{n-1}, либо состоящему в точности из одной или двух точек. Поэтому найдутся диффеоморфизм $h:\partial B^n_\omega\to\partial B^n_\alpha$ и модификация $\widetilde{f}^t_{\nu,\nu+2,0}$ потока $f^t_{\nu,\nu+2,0}$ такие, что:

1) $h(\delta_\omega)\neq\delta_\alpha$;
2) фактор-пространство $\big(S^n\setminus(\operatorname{int}B^n_\omega\cup\operatorname{int}B^n_\alpha)\big)/_\sim$, где $y\sim x$, если $y=h(x)$, $x\in\partial B^n_\omega$, $y\in\partial B^n_\alpha$, является прямым произведением $S^{n-1}\times S^1$;
3) поток $\widetilde{f}^t_{\nu,\nu+2,0}$ индуцирует на многообразии $\big(S^n\setminus(\operatorname{int}B^n_\omega\cup\operatorname{int}B^n_\alpha)\big)/_\sim$ искомый поток $f^t_{\nu,\nu,0}$.

Шаг 4. *Построение потока $f^t_{\nu,\nu+2-2g,0}$ на связной сумме $g>1$ копий $S^{n-1}\times S^1$.*

Так как $\mu\geq 2$, то $\nu\geq 2g$, поэтому, пользуясь алгоритмом, описанным на предыдущем шаге, можно построить потоки $f^t_{\nu-2g+2,\nu-2g+2,0}$ и $f^t_{2,2,0}$ на многообразиях P^n_1 и P^n_2, диффеоморфных $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$. Пусть α_1 — источниковое состояние равновесия потока $f^t_{\nu-2g+2,\nu-2g+2,0}$, ω_2 — стоковое состояние равновесия потока $f^t_{2,2,0}$. Выберем гладкие замкнутые шары $B^n_1\subset P^n_1$ и $B^n_2\subset P^n_2$ такие, что $\alpha_1\subset B^n_1$ и $\omega_2\subset B^n_2$, границы шаров трансверсальны траекториям потоков $f^t_{\nu-2g+2,\nu-2g+2,0}$ и $f^t_{2,2,0}$ соответственно и внутренности шаров не содержат состояний равновесия, отличных от α_1 и ω_2. Аналогично тому, как это делалось на предыдущем шаге, склеим многообразия с краем $P^n_1\setminus\operatorname{int}B^n_1$ и $P^n_2\setminus\operatorname{int}B^n_2$; в результате получим связную сумму $S^{n-1}\times S^1\sharp S^{n-1}\times S^1$ и поток $f^t_{\nu-2g+4,\nu-2g+2,0}$ на ней. Если $g=2$, то искомый поток построен. Если $g>2$, то обозначим через P^n_3 еще один экземпляр многообразия $S^{n-1}\times S^1$ с потоком $f^t_{2,2,0}$ на нем, выберем шар B^n_3, содержащий внутри единственное состояние равновесия потока $f^t_{2,2,0}$, которое при этом является источником, и шар $B^n_4\subset S^{n-1}\times S^1\sharp S^{n-1}\times S^1$, содержащий единственное стоковое состояние равновесия потока $f^t_{\nu-2g+4,\nu-2g+2,0}$, и продолжим процесс построения связной суммы аналогично тому, как это описано выше. Через конечное число шагов получим искомый поток.

Шаг 5. *Построение потока $f^t_{\nu,\nu+2-2g,2\lambda}$ на связной сумме сферы S^n или $g\geq 1$ копий $S^{n-1}\times S^1$ и многообразия N, являющегося удвоением ручечного тела индекса меньшего $n-1$.*

Пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ — произвольные натуральные числа такие, что $\lambda_1+\dots+\lambda_k=\lambda$. Обозначим через $\psi^t_{i,n-i}$ поток на ручке $B^i\times B^{n-i}$ индекса i, индуцированный векторным полем $\dot{x}=-x,\dot{y}=y$, $x\in B^i$, $y\in B^{n-i}$, $i\in\{0,2,3,\dots,n-2\}$. Приклеим к шару $B^0\times B^n$ с заданным на нем потоком $\psi^t_{0,n}$ λ_i ручек индекса i, на каждой из которых определен поток $\psi^t_{i,n-i}$, $i\in\{1,\dots,k\}$. Получим ручечное тело Q^n_+ с заданным на нем градиентным потоком F^t_+, трансверсальным границе, неблуждающее множество которого состоит в точности из одного источникового состояния равновесия и λ_i седловых состояний равновесия индекса i, $i\in\{1,\dots,k\}$. На втором экземпляре Q^n_- такого же ручечного тела определим поток $F^t_-=F^{-t}_+$.

Обозначим через $D_+ \subset \partial Q^n_+$ $(D_- \subset \partial Q^n_-)$ совокупность всех следов инвариантных многообразий седловых состояний равновесия потока F^t_+ (F^t_-). Склеим многообразия Q^n_+ и Q^n_- по диффеоморфизму $h : \partial Q^n_+ \to \partial Q^n_-$ такому, что $h(D_+) \cap D_- = \varnothing$. В результате получим многообразие N, являющееся удвоением тела Q^n_+, с заданным на ним градиентно-подобным потоком $f^t_{2,0,2\lambda}$ без гетероклинических пересечений. Искомый поток получим при помощи операции связной суммы многообразия N с одним из многообразий S^n или $S^{n-1} \times S^1 \sharp \cdots \sharp S^{n-1} \times S^1$, как это описано на предыдущих шагах. $\square$

Список литературы

1. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // *ДАН СССР.* 1937. Т. 14, № 5. С. 247–251.
2. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С.* Новые соотношения для систем Морса — Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами // *Матем. сб.* 2003. Т. 194, № 7. С. 25–56.
3. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С.* О структуре несущего многообразия для систем Морса — Смейла без гетероклинических пересечений // *Тр. МИРАН.* 2017. Т. 297. С. 201–210.
4. *Келдыш Л. В.* Топологические вложения в евклидово пространство // *Тр. МИАН СССР.* 1966. Т. 81. С. 3–184.
5. *Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс.* М.: Мир, 1972.
6. *Хирш М. Дифференциальная топология.* М.: Мир, 1979.
7. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике.* Москва, Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004. Ч. 1.
8. *Bonatti C., Grines V., Medvedev V., and Pecou E.* Three-Dimensional manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // *Topology Appl.* 2002. V. 117, N 3. P. 335–344.
9. *Daverman R. J. and Venema G. A. Embeddings in Manifolds* / Graduate Studies in Mathematics, 106. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2009.
10. *Grines V. Z., Gurevich E. A., and Pochinka O. V.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection // *J. Math. Sci.* 2015. V. 208, N 1. P. 81–90.
11. *Kervaire M. A. and Milnor J. W.* Groups of homotopy spheres. I // *Ann. Math.* 1963. V. 2, N 77. P. 504–537.
12. *Lee J. Introduction to Smooth Manifolds* / Graduate Texts in Mathematics, 218. New York: Springer-Verlag, 2012.

13. *Matsumoto Y. An Introduction to Morse Theory* / Translations of Mathematical Monographs, 208. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
14. *Smale S.* Morse inequalities for a dynamical system // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1960. V. 66. P. 43–49.
15. *Smale S.* On gradient dynamical systems // *Ann. of Math.* (2). 1961. V. 74, N 1. P. 199–206.
16. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. V. 73, N 6. P. 747–817.
17. *Zhuzhoma E. V. and Medvedev V. S.* Morse–Smale systems with few nonwandering points // *Topology Appl.* 2013. V. 160, N 3. P. 498–507.

Гринес Вячеслав Зигмундович
Гуревич Елена Яковлевна
Жужома Евгений Викторович
Медведев Владислав Сергеевич
Национальный исследовательский
университет, Высшая школа экономики,
ул. Б. Печерская, 25,
Нижний Новгород, 603155 РОССИЯ.
E-mail: vgrines@yandex.ru,
els93@yandex.ru,
medvedev@unn.ac.ru,
zhuzhoma@mail.ru

Статья поступила
13 февраля 2018 г.