Труды Московского математического общества *Том 79, вып. 2, 2018 г.*

Бифуркации полицикла «сердце» в типичных двупараметрических семействах

А. В. Дуков

В работе описан полицикл «сердце» и доказано, что множество полей с полициклом «сердце» образуют банахово подмногообразие коразмерности два в пространстве гладких векторных полей на двумерной сфере. Построена бифуркационная диаграмма типичного семейства, содержащего данный полицикл, и описана перестройка фазового портрета.

Библиография: 6 названий. *УДК*: 517.925.41 + 514.763.81 *MSC2010*: 34C23, 34C37, 37J45.
Ключевые слова: полицикл, двупараметрическое семейство, бифуркационная диаграмма, мелькающие сепаратрисные связки.

§ 1. Введение

Рассмотрим векторное поле на сфере с полициклом «сердце» (рис. 1.1), состоящим из двух сёдел, связанных сепаратрисными связками.

Исследуем задачу о полулокальной бифуркации «сердца» в типичном 2-параметрическом семействе. Полулокальность означает, что бифуркация исследуется только в малой окрестности полицикла. Исследуем бифуркационную диаграмму семейства. При «естественном» выборе параметров, описанном ниже, интересная бифуркация происходит только в первом квадранте, при положительных значениях параметров. Возможная бифуркационная диаграмма представлена на рис. 1.2а, б.

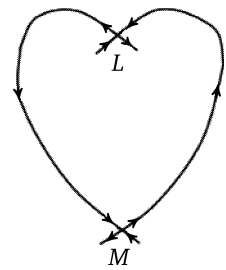


Рис. 1.1. Полицикл «сердце»

Кривые SL_1 и SL_2 соответствуют петлям сепаратрис. На рис. 1.2а кривая PC соответствует параболическому циклу. Счётное число кривых, накапливающихся к PC и SL_1, соответствуют так называемым мелькающим сепаратрисным связкам. Исследуемая бифуркация — простейшая полулокальная бифуркация, в которой возникают мелькающие сепаратрисные связки.

Мелькающие сепаратрисные связки в однопараметрическом семействе представляют собой зависящую от параметров последовательность сепаратрисных связок одних и тех же двух сёдел, каждая из которых совершает большее количество оборотов, чем предыдущая. Они были открыты Мальта и Палисом в 1981 году. В [2] ими было описано однопараметрическое семейство, в котором происходит бифуркация параболического предельного цикла. С обеих сторон на этот предельный цикл наматываются сепаратрисы

© А. В. Дуков, 2018

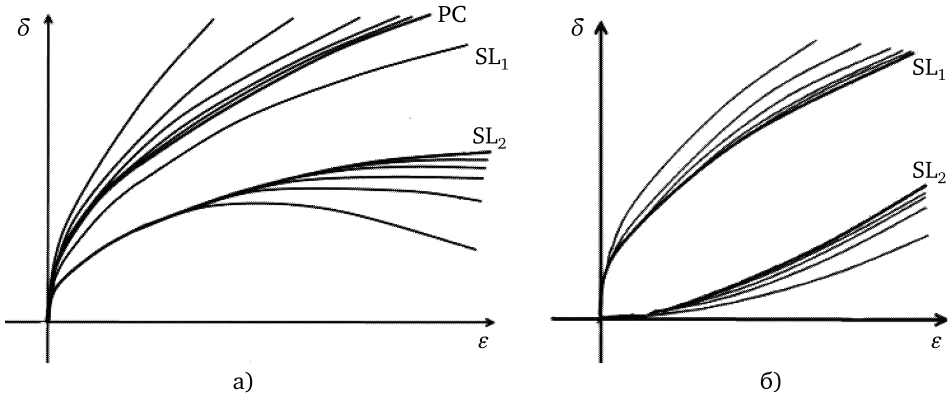


Рис. 1.2. Две возможные бифуркационные диаграммы

сёдел, образуя при разрушении цикла мелькающие связки. Недавно в [4] было показано, что мелькающие связки представляют не только самостоятельный интерес: одновременное появление в семействе нескольких серий связок может привести к возникновению числового инварианта — величины, не меняющейся при переходе к эквивалентным семействам. Во всех рассмотренных до этого момента случаях бифуркации были только глобальными: мелькающие связки возникали благодаря внешним (удалённым от бифурцирующего полицикла или цикла) сёдлам. В 2015 году Ю. С. Ильяшенко был поставлен вопрос: встречаются ли мелькающие сепаратрисные связки в типичных полулокальных семействах. Данная статья даёт положительный ответ на этот вопрос.

Напомним, что *характеристическим числом седла* называется отношение его собственных значений, взятое со знаком минус, причём отрицательное собственное значение стоит в числителе. Седло называется диссипативным, если его характеристическое число больше единицы. Существует два качественно различных сценария бифуркации полицикла «сердце», зависящие от диссипативности сёдел. Ключевым результатом статьи являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Бифуркационная диаграмма типичного двупараметрического семейства, возмущающего поле с полициклом «сердце», в случае диссипативного и недиссипативного сёдел представляет собой объединение кривых, стремящихся к началу координат: двух кривых, соответствующих полям с петлёй сепаратрисы, одной кривой, соответствующей полю с параболическим предельным циклом и двух бесконечных серий кривых, соответствующих мелькающим сепаратрисным связкам.*

Бифуркационная диаграмма в этом случае представлена на рис. 8.1 (с. 268).

Теорема 2. *Бифуркационная диаграмма типичного двупараметрического семейства, возмущающего поле с полициклом «сердце», в случае двух недис-*

сипатаивных сёдел представляет собой объединение кривых, стремящихся к началу координат: двух кривых, соответствующих полям с петлёй сепаратрисы, и двух бесконечных серий кривых, соответствующих мелькающим сепаратрисным связкам.

Бифуркационная диаграмма в этом случае представлена на рис. 8.2. Все необходимые определения приводятся ниже в § 2. Там же вводятся основные понятия и обозначения, используемые далее. Основным объектом изучения является типичное двупараметрическое семейство векторных полей на сфере. Каждый из его параметров определяется как величина размыкания соответствующей связки. При нулевых значениях параметров поле имеет полицикл «сердце». В § 2 также даётся определение отображения Пуанкаре, необходимого для нахождения предельных циклов.

Параграф 3 посвящён геометрии полей с полициклом «сердце» в пространстве всех векторных полей. Они образуют гладкое банахово многообразие коразмерности 2.

Основная задача §§ 4–7 — описать бифуркационную диаграмму семейства. Будет показано, что на диаграмме имеется счётное число кривых, исходящих из начала координат базы параметров. Эти кривые соответствуют полям с сепаратрисными связками или полуустойчивым предельным циклом. В частности, доказывается наличие мелькающих сепаратрисных связок.

§ 2. Полицикл «сердце» и его отображение Пуанкаре

Рассмотрим C^1-гладкое 2-параметрическое семейство V векторных полей на сфере с параметрами ε и δ. При каждом значении параметров поля семейства имеют два седла $M(\varepsilon, \delta)$ и $L(\varepsilon, \delta)$. Как именно определены параметры, описано ниже.

Пусть μ и λ — характеристические числа сёдел M и L соответственно, зависящие от параметров семейства. Наложим на векторное поле условие общности положения при нулевых значениях параметров:

$$\mu(0), \lambda(0) \notin \mathbb{Q}, \quad \lambda(0)\mu(0) \neq 1. \tag{2.1}$$

Также пусть при нулевых значениях параметров между сёдлами имеются две сепаратрисные связки, которые образуют полицикл, т. е. в данном случае двуугольник, вершинами которого являются сёдла M и L, а рёбрами — их сепаратрисы. Причём свободные сепаратрисы (не участвующие в его образовании) располагаются по разные стороны от полицикла. В дальнейшем под словом сепаратрисы будем понимать только сепаратрисы, участвующие в образовании полицикла, т. е. те, что при нулевых значениях параметров образуют сепаратрисную связку (рис.1.1).

Проведём трансверсали $\Gamma_1^+, \Gamma_1^-, \Gamma_2^+, \Gamma_2^-$ к полициклу следующим образом. Полагаем, что Γ_1^+, Γ_1^- располагаются в окрестности U_M седла M, которая

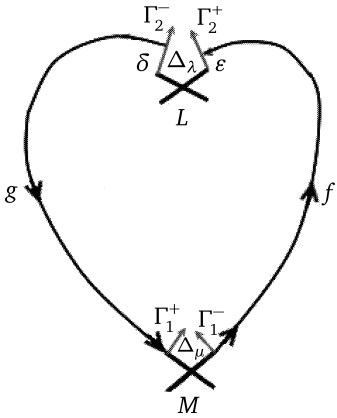


Рис. 2.1. Возмущённый полицикл «сердце»

будет задана ниже, причём сепаратриса, входящая в седло M, пересекает Γ_1^+, а выходящая — Γ_1^-. Трансверсали Γ_2^+, Γ_2^- располагаются аналогично вблизи седла L.

Пусть на этих трансверсалях выбраны координаты с началом в точке пересечения сепаратрисы ближайшего седла с трансверсалью, причём ориентация трансверсалей Γ_1^+, Γ_1^- противоположна ориентации трансверсалей Γ_2^+, Γ_2^- относительно полицикла (рис. 2.1).

В силу [1, глава 9, 1.2] и условия типичности (2.1) в неких окрестностях U_M и U_L сёдел M и L существуют такие конечно-гладкие координаты на трансверсалях, что отображения соответствия в окрестности нуля будут иметь вид:

$$\Delta_\lambda\colon\ \Gamma_2^+ \to \Gamma_2^-, \quad \Delta_\lambda(x,\varepsilon,\delta) = x^{\lambda(\varepsilon,\delta)}; \tag{2.2}$$

$$\Delta_\mu\colon\ \Gamma_1^+ \to \Gamma_1^-, \quad \Delta_\mu(x,\varepsilon,\delta) = x^{\mu(\varepsilon,\delta)}. \tag{2.3}$$

В этих координатах точка $x=0$ соответствует точке пересечения трансверсали и сепаратрисы соответствующего седла.

Введём зависящее от параметров отображение Пуанкаре Δ обхода всего полицикла:

$$\Delta\colon\ \Gamma_1^- \to \Gamma_1^-, \quad \Delta(x) = \Delta(x,\varepsilon,\delta) = \Delta_\mu \circ g \circ \Delta_\lambda \circ f(x). \tag{2.4}$$

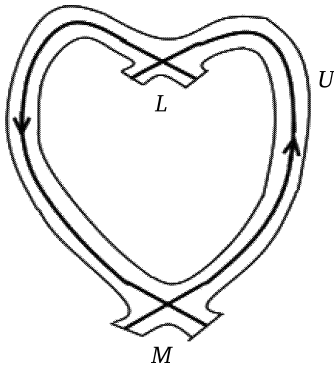


Рис. 2.2. Окрестность U

Оно определено вблизи точки $x=0$ при подходящих ненулевых значениях параметров и представляет собой композицию функций (2.2), (2.3) и двух регулярных отображений соответствия $f\colon \Gamma_1^- \to \Gamma_2^+$ и $g\colon \Gamma_2^- \to \Gamma_1^+$, C^1-гладких в окрестности нуля.

Рассмотрим кольцо $U \subset \mathbb{S}^2$, которое при нулевых значениях параметров является окрестностью полицикла и замыкание $\overline{U}$ которого не содержит предельных циклов и других особых точек. Пусть граница U состоит из дуг фазовых кривых поля при нулевых значениях параметров и трансверсалей, проведённых к сепаратрисам, не образующим полицикл. При этом полагаем, что кольцо U достаточно узкое, чтобы отображение Пуанкаре было определено в каждой точке $U \cap \Gamma_1^-$. Наша задача — изучить поведение поля в этом кольце (рис. 2.2). Заметим, что сепаратрисы, не участвующие в образовании полицикла, покидают окрестность U (рис. 2.2).

Наложим условие типичности на семейство:

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(0)}{\partial \varepsilon} & \dfrac{\partial f(0)}{\partial \delta} \\ \dfrac{\partial g(0)}{\partial \varepsilon} & \dfrac{\partial f(0)}{\partial \delta} \end{pmatrix}\Bigg|_{\varepsilon=0,\,\delta=0} \neq 0,$$

где ε и δ — параметры семейства. Это неравенство инвариантно относительно замены параметров. После того как в § 3 будет доказано, что множество полей с полициклом «сердце» (обозначенное через H) является банаховым многообразием, из этого условия будет следовать, что семейство трансверсально пересекает H. Тогда без ограничения общности можно считать, что отображения f и g имеют вид:

$$f\colon\ \Gamma_1^- \to \Gamma_2^+, \quad f(x) = \varepsilon - \tilde{f}_{\varepsilon\delta}(x); \tag{2.5}$$

$$g\colon\ \Gamma_2^- \to \Gamma_1^+, \quad g(x) = \tilde{g}_{\varepsilon\delta}(\delta - x), \tag{2.6}$$

где $\tilde{f}_{\varepsilon\delta}(0) = \tilde{g}_{\varepsilon\delta}(0) = 0$. Таким образом, нулевое значение параметров соответствует полю с неразомкнутыми сепаратрисными связками (рис. 2.1). Поскольку f и g являются диффеоморфизмами по x и гладко зависят от ε и δ, существуют такие положительные гладкие функции $a(\varepsilon,\delta)$ и $b(\varepsilon,\delta)$, что

$$\tilde{f}_{\varepsilon\delta}(x) = a(\varepsilon,\delta)x(1+o(1)), \quad \tilde{g}_{\varepsilon\delta}(x) \quad = b(\varepsilon,\delta)x(1+o(1)), \quad x \to 0, \tag{2.7}$$

причём их производные при $x, \varepsilon, \delta \to 0$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\tilde{f}'_{\varepsilon\delta}(x) = a + o(1); \qquad \tilde{g}'_{\varepsilon\delta}(x) = b + o(1); \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_{\varepsilon\delta}}{\partial \varepsilon}(x) = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon}x(1+o(1)); \quad \frac{\partial \tilde{g}_{\varepsilon\delta}}{\partial \varepsilon}(x) = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon}x(1+o(1)); \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_{\varepsilon\delta}}{\partial \delta}(x) = \frac{\partial a}{\partial \delta}x(1+o(1)); \quad \frac{\partial \tilde{g}_{\varepsilon\delta}}{\partial \delta}(x) = \frac{\partial b}{\partial \delta}x(1+o(1)). \tag{2.10}$$

Здесь через $a, b, \frac{\partial a}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial b}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial a}{\partial \delta}, \frac{\partial b}{\partial \delta}$ обозначены значения при $\varepsilon = \delta = 0$ функций $a(\varepsilon,\delta)$ и $b(\varepsilon,\delta)$ и их соответствующих частных производных.

Более того, в силу гладкой зависимости отображений f и g от параметров выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} a(\varepsilon,\delta) &= a + O(\varepsilon) + O(\delta); \quad & b(\varepsilon,\delta) &= b + O(\varepsilon) + O(\delta); \\ \lambda(\varepsilon,\delta) &= \lambda + O(\varepsilon) + O(\delta); \quad & \mu(\varepsilon,\delta) &= \mu + O(\varepsilon) + O(\delta). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Напомним, что *диссипативным* (*недиссипативным*) называется седло, у которого характеристическое число строго больше (меньше) единицы. В зависимости от значений характеристических чисел сёдел можно выделить шесть случаев:

1. $\mu > 1,\ \lambda < 1,\ \lambda\mu < 1.$
2. $\mu > 1,\ \lambda < 1,\ \lambda\mu > 1.$
3. $\mu < 1,\ \lambda > 1,\ \lambda\mu > 1.$
4. $\mu < 1,\ \lambda > 1,\ \lambda\mu < 1.$
5. $\mu > 1,\ \lambda > 1.$
6. $\mu < 1,\ \lambda < 1.$

Чем отличаются эти случаи?

1. Диссипативность сёдел определяет поведение траекторий, проходящих вблизи седла, в частности, влияет на возникновение предельных циклов при разрушении петель сепаратрис.

2. Произведение $\lambda\mu$ определяет поведение траекторий вблизи обоих сёдел, в частности, влияет на порядок возникновения петель сепаратрис сёдел.

Ниже рассматриваются лишь случаи 1 (случай диссипативного и недиссипативного сёдел) и 6 (случай двух недиссипативных сёдел), поскольку остальные сводятся к этим двум. Действительно, если заменить время на противоположное, то случай 1 перейдёт в случай 3, а случай 6 — в случай 5. Случаи 1 и 4 получаются друг из друга переименованием λ в μ и наоборот. Случаи 2 и 3 получаются друг из друга аналогичным образом. Случаю 1 будет соответствовать бифуркационная диаграмма на рис. 1.2а, а случаю 6 — на рис. 1.2б.

Дадим теперь определения, которые необходимы для понимания теорем 1 и 2, приведённых в § 1.

Определение 1. Два векторных поля называются *орбитально топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм фазовых пространств, переводящий фазовые кривые одного поля в фазовые кривые другого поля с сохранением ориентации.

Определение 2. Векторное поле называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность в пространстве гладких векторных полей, любое поле которой орбитально топологически эквивалентно данному.

Определение 3. *Бифуркационной диаграммой* семейства называется множество всех точек базы параметров, которым соответствует структурно неустойчивое поле.

§ 3. Поля с полициклом «сердце» как банахово многообразие

Рассмотрим C^r-гладкое поле $v \in \mathrm{Vect}^r(\mathbb{S}^2)$, имеющее сепаратрисную связку γ двух сёдел. Обозначим через $\mathrm{SC} \subset \mathrm{Vect}^r(\mathbb{S}^2)$ множество векторных полей с сепаратрисной связкой. Обозначим через SC_γ множество векторных полей $w \in \mathrm{SC}$, сепаратриса γ_w которых близка к γ.

Теорема 3 (Сотомайор [3]). *В пространстве* $\mathrm{Vect}^r(\mathbb{S}^2)$ SC_γ *является банаховым многообразием коразмерности* 1, *т. е. для любой точки* $w \in \mathrm{SC}_\gamma$ *существует окрестность* $W \subset \mathrm{Vect}^r(\mathbb{S}^2)$ *и такая* C^{r-1}*-гладкая функция* $F\colon W \to \mathbb{R}$, *что*

- $F^{-1}(0) = \mathrm{SC}_\gamma \cap W$,
- $DF(p)$ *является сюръекцией для любой точки* $w \in \mathrm{SC}_\gamma$.

Полицикл «сердце» получается в результате образования двух сепаратрисных связок. Обозначим через $\widetilde{H}$ пересечение двух поверхностей SC_{γ_1} и SC_{γ_2}, соответствующих полям с одной из сепаратрисных связок (рис. 3.1).

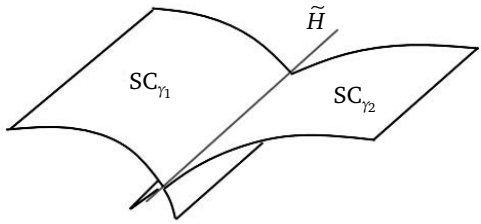


Рис. 3.1. Множество полей с полициклом «сердце» есть пересечение двух банаховых многообразий

Предложение 1. *$\widetilde{H}$ — банахово многообразие класса гладкости C^{r-1} коразмерности 2.*

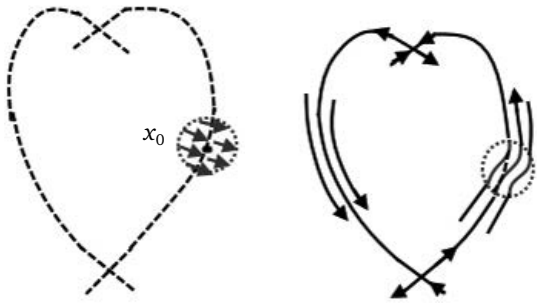
Доказательство. По теореме Сотомайора для любого поля $w \in \widetilde{H}$ существуют окрестность W и такие C^{r-1}-гладкие функции $F_1, F_2 \colon W \to \mathbb{R}$, что $F_1^{-1}(0) = \mathrm{SC}_{\gamma_1} \cap W$ и $F_2^{-1}(0) = \mathrm{SC}_{\gamma_2} \cap W$. Имеем:

$$\widetilde{H} \cap W = \mathrm{SC}_{\gamma_1} \cap \mathrm{SC}_{\gamma_2} \cap W = F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0).$$

Следовательно, $\widetilde{H}$ есть множество нулей функции $F = (F_1, F_2) \colon W \to \mathbb{R}^2$. В доказательстве своей теоремы Сотомайор в качестве F_1 и F_2 брал функции, сопоставляющие каждому полю величину размыкания сепаратрисных связок на некой трансверсали. В описанном в предыдущих параграфах семействе V с полициклом «сердце» в качестве F_1 и F_2 подойдут функции f и g.

Докажем, что dF сюръекция. Для этого достаточно найти два таких вектора $h_1, h_2 \in T_w \operatorname{Vect}^r(\mathbb{S}^2)$, что $dF(h_1)$ и $dF(h_2)$ линейно независимы.

Построим сначала h_1. Возьмём точку $x_0 \in \mathbb{S}$, лежащую на той сепаратрисе поля w, которая определяет поверхность SC_{γ_1}. Выпрямим поле в некоторой окрестности Ox_0 этой точки. Рассмотрим бесконечно гладкое поле $h_1 = (0, \rho(x, y))$, где $\rho(x, y) \geqslant 0$, которое тождественно равно нулю на всей сфере, кроме Ox_0. В этой окрестности поле h_1 перпендикулярно полю w. Рассмотрим однопараметрическое семейство векторных полей $w + \xi h$, где



а) б)

Рис. 3.2. а) Поле смещения h; б) полученное поле $w + \varepsilon h$

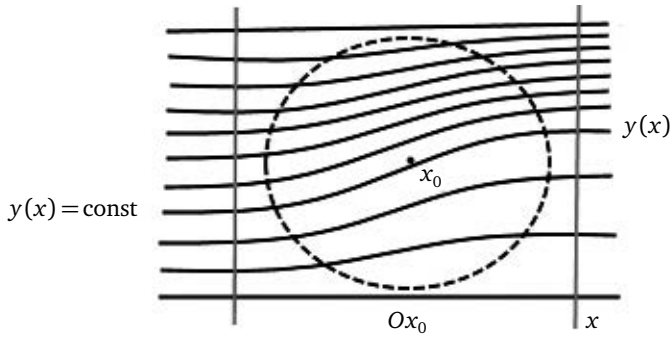


Рис. 3.3. Поле $w + \xi h_1$, задаваемое системой (3.1) в выпрямляющей карте при $\xi \neq 0$

$\xi \in (\mathbb{R}, 0)$ (рис. 3.2). В выпрямляющей карте это семейство задаётся в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = \xi \rho(x, y). \end{cases} \tag{3.1}$$

Фазовые кривые $y_\xi(x)$ этой системы зависят от параметра ξ (рис. 3.3). При $\xi = 0$ все фазовые кривые системы (3.1) задаются равенством $y_0(x) = \text{const}$. Следовательно,

$$F_1(w + \xi h) = y_\xi(x) - y_0(x) = \xi \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(x, y_\xi)\, dx - y_0(x). \tag{3.2}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{d\xi} F_1(w + \xi h) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(x, y_\xi)\, dx + \xi \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\partial}{\partial \xi} \rho(x, y_\xi)\, dx.$$

По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра второе слагаемое справа стремится к нулю при $\xi \to 0$. Поскольку ρ неотрицательно и тождественно не равно нулю на всей окрестности Ox_0, получаем

$$\frac{\partial}{d\xi} F_1(w + \xi h) \neq 0.$$

Это условие сохраняется при переходе в исходную (не выпрямленную) карту. Помимо этого

$$\frac{\partial}{d\xi} F_2(w + \xi h) = 0,$$

поскольку по построению вторая сепаратриса не размыкается.

Аналогично на другой сепаратрисе выбираем точку и строим поле h_2. Для него будет выполнено условие

$$\frac{\partial}{d\xi} F_2(w + \xi h_2) \neq 0$$

и равенство

$$\frac{\partial}{d\xi} F_1(w + \xi h) = 0.$$

Следовательно, в образе дифференциала $F=(F_1,F_2)$ лежат два независимых вектора

$$\Big(\frac{\partial}{d\xi}F_1(w+\xi h_1),0\Big) \quad \text{и} \quad \Big(0,\frac{\partial}{d\xi}F_2(w+\xi h_2)\Big).$$

Что и требовалось доказать. □

§ 4. Переход к первому квадранту

Окрестность любого седла распадается на четыре гиперболических сектора. При нулевых значениях параметров и у седла M, и у седла L один из секторов лежит в компоненте связности дополнения к полициклу, отличной от компоненты, в которой лежат остальные три. Назовём этот сектор *основным*, а два смежных к нему *боковыми* (рис. 4.1). Заметим, что если какая-либо сепаратриса при достаточно малых значениях параметров попала в боковой сектор одного из сёдел, то она покинет окрестность U полицикла. Это следует из конструкции окрестности.

Предложение 2. *Если оба параметра ненулевые и хотя бы один из параметров ε или δ отрицательный, то сепаратрисных связок при разрушении полицикла «сердце» не возникает.*

Доказательство. 1) Пусть $\varepsilon<0$, $\delta<0$. Исходящая сепаратриса седла M, достигнув окрестности U_L седла L, окажется в его боковом секторе и, следовательно, покинет окрестность U полицикла (рис. 4.2). Входящая сепаратриса седла L в обратном времени достигает окрестности U_M седла M и по аналогичным причинам покидает окрестность полицикла. Рассуждения для входящей сепаратрисы седла M и исходящей сепаратрисы седла L

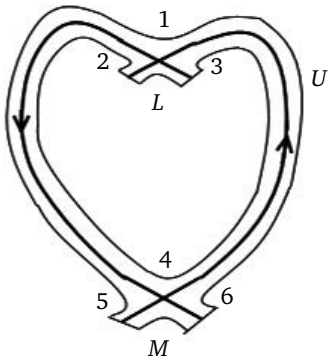


Рис. 4.1. Для седла L сектор 1 является основным, сектора 2 и 3 — боковыми. Для седла M основным является сектор 4, а сектора 5 и 6 — боковыми

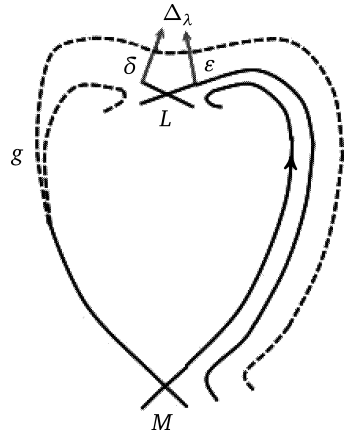


Рис. 4.2. Векторное поле в случае, когда один из параметров отрицательный

повторяются дословно с точностью до обращения времени. Следовательно, все сепаратрисы покидают окрестность U.

2) Пусть $\varepsilon < 0$, $\delta > 0$. Как описано выше, из $\varepsilon < 0$ следует, что исходящая сепаратриса седла M и входящая сепаратриса седла L покидают U. Исходящая сепаратриса седла L достигает окрестности U_M седла M, попадает в его боковой сектор и покидает окрестность полицикла. Входящая сепаратриса седла M в обратном времени пересекает U_L и «движется» вдоль входящей сепаратрисы седла L, пока не достигнет U_M и не покинет окрестность U полицикла.

3) Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta < 0$. Доказательство проводится аналогично п. 2. Получили, что вне первого квадранта бифуркационной диаграмме принадлежат лишь координатные оси. □

Следствие 1. *Если хотя бы один из параметров отрицательный, то у соответствующего поля отсутствуют предельные циклы.*

Доказательство. Пусть поле имеет предельный цикл. Оба седла не могут находиться по одну сторону от цикла, поскольку каждое седло имеет лишь один сектор, проходя через который траектории не покидают окрестность U. Причём эти сектора расположены в полицикле так, что предельный цикл, проходящий через них, оставляет сёдла в разных компонентах связности. Следовательно, сёдла разделены предельным циклом и никакая сепаратриса одного седла не может достигнуть бокового сектора другого седла, как это описано в доказательстве предложения 2. Таким образом, при наличии предельного цикла оба параметра положительные. □

Перейдём к изучению части бифукационной диаграммы, заключённой в первом квадранте.

§ 5. Петли сепаратрис

Опишем все возникающие петли сепаратрис, т. е. гомоклинические траектории сёдел.

Предложение 3. *Кривые на бифуркационной диаграмме, соответствующие петлям сепаратрис, разбивают росток первого квадранта в нуле на три связных компоненты.*

Кривую в базе параметров, соответствующую полям с петлёй сепаратрисы седла M, обозначим через SL_M, а с петлёй сепаратрисы седла L — через SL_L. Здесь и в дальнейшем сектор между осью ординат и кривой SL_M будем называть верхним, между осью абсцисс и кривой SL_L — нижним, а оставшийся сектор — средним.

Доказательство. Чтобы возникла петля у седла M (рис. 5.1б), должно выполняться равенство

$$g \circ \Delta_\lambda \circ f(0) = 0. \tag{5.1}$$

Обозначим выражение в левой части (5.1) через $\Phi(\varepsilon, \delta)$. Заметим, что $\Phi(0, \delta) = g(0) = \tilde{g}_{0\delta}(\delta) > 0$ при всех $\delta > 0$, в то время как $\Phi(\varepsilon, 0) = \tilde{g}_{\varepsilon 0}(\Delta_\lambda(\varepsilon)) < 0$

при всех $\varepsilon > 0$. Следовательно, в силу непрерывности функция $\Phi(\varepsilon, \delta) < 0$ на отрезке, соединяющем точки $(\varepsilon, 0)$ и (ε, δ) для некоторого малого $\delta > 0$. Рассмотрим сколь угодно малый прямоугольник R с вершинами $(0, 0)$, $(0, \varepsilon_0)$, $(\varepsilon_0, \delta_0)$ и $(0, \delta_0)$. При любом фиксированном δ функция $\Phi(\varepsilon, \delta)$ на концах сечения $\delta = \mathrm{const}$ прямоугольника R принимает значения разных знаков. В силу непрерывности на каждом таком сечении существует точка (δ, ε), в которой $\Phi(\varepsilon, \delta) = 0$. Соответствующее этой точке поле имеет петлю сепаратрисы седла M. Покажем, что на каждом сечении такая точка единственна при малых $\delta > 0$. Для этого достаточно проверить, что прямоугольник R можно выбрать таким малым, что в нём функция $\Phi(\varepsilon, \delta)$ строго убывает по ε, т. е. $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \delta) < 0$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $h_1(x, \tau_1, \tau_2), h_2(x, \tau_1, \tau_2)\colon (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ — C^1*-гладкие функции и* $\Delta_\nu(x, \tau_1, \tau_2) = x^{\nu(\tau_1, \tau_2)}$, *где* $\nu(\tau_1, \tau_2) \in C^1(\mathbb{R}^2, 0)$, $0 < \nu(0, 0) < 1$. *Пусть при* $x, \tau_1, \tau_2 \to 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_i}{\partial \tau_j}(x, \tau_1, \tau_2) \to c_{ij}, \quad \text{где} \quad c_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i = j; \\ &\frac{\partial h_i}{\partial x}(x, \tau_1, \tau_2) \to a_i < 0; \quad h_i(x, \tau_1, \tau_2) \to 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Тогда $\frac{\partial}{\partial \tau_1} h_2 \circ \Delta_\nu \circ h_1(x, \tau_1, \tau_2) \to -\infty$ *при* $x, \tau_1, \tau_2 \to 0$, *где композиция берётся по переменной* x.

Доказательство. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} h_2 \circ \Delta_\nu \circ h_1 = \frac{\partial h_2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x}\frac{\partial h_1}{\partial \tau_1}\right). \tag{5.3}$$

Поскольку по условию

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau_1}(x) \to c_{11} \neq 0 \quad \text{и} \quad h_1(x) \to 0,$$

выражение в скобках из (5.3)

$$\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial \tau_1}(h_1(x)) + \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x}(h_1(x))\frac{\partial h_1}{\partial \tau_1}(x) = \frac{\partial \nu}{\partial \tau_1} h_1(x)^\nu \ln h_1(x) + \nu h_1(x)^{\nu-1}\frac{\partial h_1}{\partial \tau_1}(x) \to +\infty$$

при $x, \tau_1, \tau_2 \to 0$. Следовательно, в силу (5.2) выражение (5.3) стремится к $-\infty$ при $x, \tau_1, \tau_2 \to 0$. □

Вернёмся к доказательству предложения (3). С этого момента оно разбивается на следующие две стадии: доказывается существование кривой в базе параметров, соответствующей полям а) с петлёй седла M; б) с петлёй седла L. Последняя стадия подразделяется на два шага: б1) для сёдел разной диссипативности, который в § 2 обозначен как случай 1; б2) для сёдел одной диссипативности, обозначенный как случай 6.

а) Полагаем $h_1 = f$, $h_2 = g$, $\Delta_\nu = \Delta_\lambda$, $\tau_1 = \varepsilon$ и $\tau_2 = \delta$. В силу неравенств (2.8)–(2.10) при $\lambda < 1$ функция Φ из равенства (5.1) удовлетворяет условиям леммы. Заметим, что неравенство $\lambda < 1$ выполнено и в случае диссипативных сёдел (случай 1), и в случае недиссипативных сёдел (случай 6), опи-

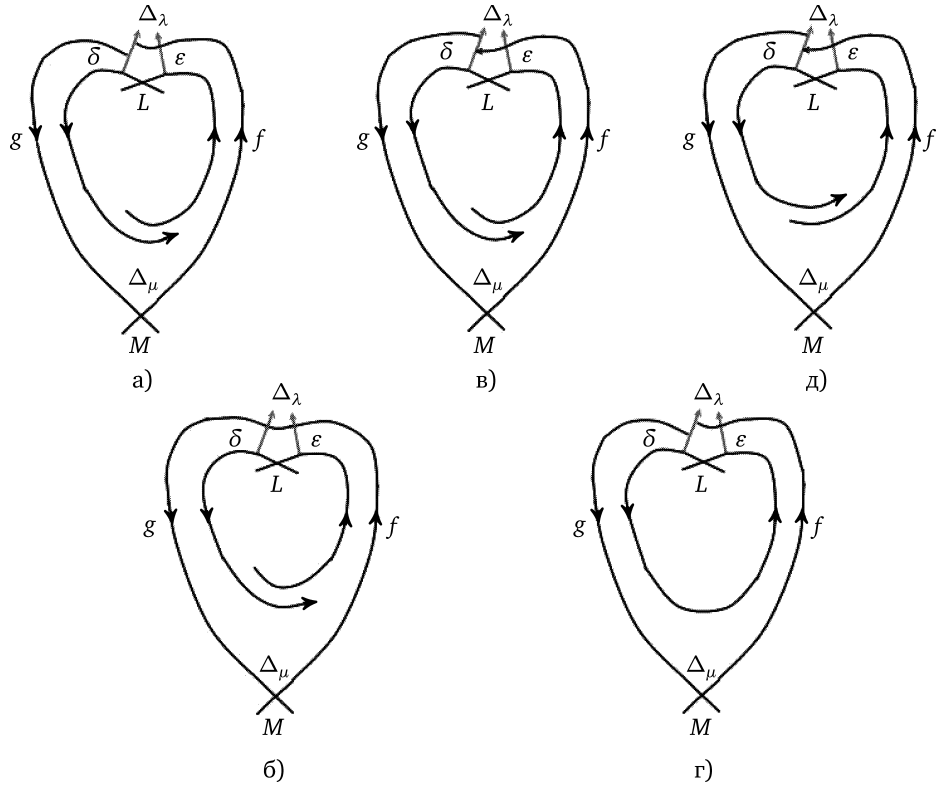


Рис. 5.1. Фазовый портрет поля в а) верхнем, в) среднем, д) нижнем секторе, а также в моменты образования петель сепаратрис. Демонстрирует процесс образования и разрушения петель сепаратрис при переходе от верхнего сектора к нижнему в порядке а–б–в–г–д

санных в § 2. Следовательно, $\partial\Phi/\partial\varepsilon \to -\infty \neq 0$ при $\varepsilon, \delta \to 0$. Таким образом, на каждом сечении $\delta = \mathrm{const}$ прямоугольника R существует и единственная такая точка $(\varepsilon(\delta), \delta)$, что $\Phi(\varepsilon(\delta), \delta) = 0$. Более того, по теореме о неявной функции, применённой к равенству $\Phi(\varepsilon, \delta) = 0$ в точке $(\varepsilon(\delta), \delta)$, при малых $\delta > 0$ функция $\varepsilon(\delta)$ является гладкой. Поскольку прямоугольник R можно выбрать сколь угодно малым, $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Следовательно, равенство (5.1) в силу (2.11) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered} \varepsilon(\delta) = \Delta_\lambda^{-1}(\delta) = \delta^{\frac{1}{\lambda(\varepsilon(\delta),\,\delta)}} = \delta^{\frac{1}{\lambda + o(1)}} \quad \text{при } \delta \to 0, \\ \ln \varepsilon(\delta) = \frac{1}{\lambda}(1 + o(1)) \ln \delta \quad \text{при } \delta \to 0. \end{gathered} \tag{5.4}$$

б) Аналогично для другого седла: (рис. 5.1г):

$$f \circ \Delta_\mu \circ g(0) = 0. \tag{5.5}$$

Обозначим через $\Psi(\varepsilon,\delta)$ выражение в левой части (5.5). Заметим, что

$$\Psi(0,\delta) = -\tilde{f}_{0\delta}\circ\Delta_\mu\circ\tilde{g}_{0\delta}(\delta) < 0$$

при $\delta>0$ и $\Psi(\varepsilon,0)=\varepsilon>0$. Существует малый прямоугольник R, на концах сечения $\varepsilon=\mathrm{const}$ которого функция $\Psi(\varepsilon,\delta)$ меняет знак. Следовательно, в силу непрерывности $\Psi(\varepsilon,\delta)$ на каждом таком сечении существует точка, в которой соответствующее поле имеет петлю сепаратрисы седла L.

б1) Полагаем $h_1=g$, $h_2=f$, $\Delta_\nu=\Delta_\mu$, $\tau_1=\delta$ и $\tau_2=\varepsilon$. В силу неравенств (2.8)–(2.10) функция Ψ из равенства (5.5) при $\mu<1$ удовлетворяет условиям леммы. Заметим, что неравенство $\mu<1$ выполняется только в случае диссипативных сёдел (случай 1). Следовательно, $\partial\Psi/\partial\delta\to-\infty\neq 0$ при $\varepsilon,\delta\to 0$. Таким образом, по теореме о неявной функции, применённой к равенству $\Psi(\varepsilon,\delta)=0$ в любой точке существования решения, при малых значениях параметров кривая на бифуркационной диаграмме, соответствующая полям с петлёй сепаратрисы седла L, является графиком гладкой при $\varepsilon>0$ функции $\delta(\varepsilon)$. Поскольку прямоугольник R сколь угодно мал, $\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, равенство (5.5) в силу (2.11) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}\delta(\varepsilon) = \tilde{g}_{\varepsilon\delta}^{-1}\circ\Delta_\mu^{-1}\circ\tilde{f}_{\varepsilon\delta}^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{b}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{\frac{1}{\mu(\varepsilon,\,\delta(\varepsilon))}}(1+o(1)),\\ \ln\delta(\varepsilon) = \frac{1}{\mu}(\ln\varepsilon-\ln a)(1+o(1))-\ln b+o(1)\quad \text{при } \varepsilon\to 0.\end{gathered}\tag{5.6}$$

б2) Полагаем $h_1=f^{-1}$, $h_2=g^{-1}$, $\Delta_\nu=\Delta_\mu^{-1}$, $\tau_1=\varepsilon$ и $\tau_2=\delta$. В силу неравенств (2.8)–(2.10) функция Ψ^{-1} из равенства $\Psi^{-1}(0)=0$, получаемого из (5.5), при $\mu>1$ удовлетворяет условиям леммы. Заметим, что неравенство $\mu>1$ выполняется только в случае недиссипативных сёдел (случай 6). После аналогичных рассуждений находим, что на диаграмме имеется гладкая кривая, соответствующая полям с петлёй сепаратрисы седла L. Непосредственно проверяется, что асимптотика в этом случае в точности совпадает с (5.6).

Таким образом, на бифуркационной диаграмме имеется две кривые, разбивающие первый квадрант на три сектора. Поскольку $1/\mu>\lambda$, сравнивая соотношения (5.4) и (5.6), получаем, что кривая SL_M на бифуркационной диаграмме будет расположена выше, чем SL_L. Предложение 3 доказано. □

§ 6. Случай диссипативного и недиссипативного сёдел. Бифуркационная диаграмма

Рассмотрим случай 1. Напомним, что в этом случае характеристические числа сёдел удовлетворяют неравенствам

$$\mu>1,\quad \lambda\mu<1.\tag{6.1}$$

В этом параграфе будет показано, что бифуркационная диаграмма семейства имеет вид, изображённый на рис. 1.2а. Здесь и в дальнейшем под диаграммой будем подразумевать лишь её росток в нуле в базе $(\mathbb{R}^2,0)$.

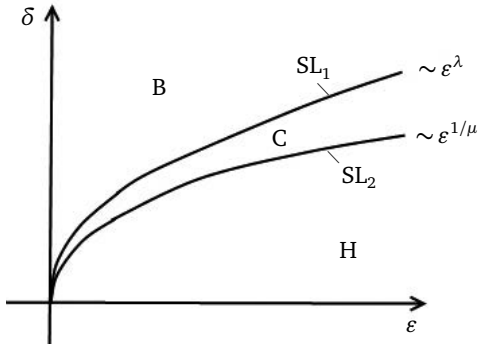


Рис. 6.1. Кривые бифуркационной диаграммы, соответствующие петлям сепаратрис. B — верхний сектор, C — средний сектор, H — нижний сектор

6.1. Предельные циклы.

Предложение 4. *Значениям параметров из верхнего сектора бифуркационной диаграммы соответствуют поля, имеющие в окрестности U от нуля до двух предельных циклов. В среднем секторе — ровно один предельный цикл. В нижнем секторе соответствующие параметрам поля предельных циклов не имеют.*

Доказательство. Найдём (зависящие от параметров) неподвижные точки отображения Пуанкаре полицикла «сердце». Они будут соответствовать предельным циклам, возникающим при разрушении полицикла. Получаем уравнение $\Delta(x)=x$, которое в силу (2.4) можно переписать в виде

$$\Delta_\lambda \circ f(x) = (\Delta_\mu \circ g)^{-1}(x).$$

В обеих частях равенства отображения действуют с трансверсали Γ_1^- на трансверсаль Γ_2^-. Пользуясь (2.2)–(2.3), (2.5)–(2.6), получаем

$$\Delta_\lambda(\varepsilon - \tilde{f}_{\varepsilon\delta}(x)) = \delta - (\Delta_\mu \circ \tilde{g}_{\varepsilon\delta})^{-1}(x). \tag{6.2}$$

В силу (6.1) и (2.8), производная левой части (6.2) по x равна

$$-\frac{\partial}{\partial y}\Delta_\lambda(y)\Big|_{y=\varepsilon-\tilde{f}_{\varepsilon\delta}(x)} \frac{\partial \tilde{f}_{\varepsilon\delta}(x)}{\partial x} = -\big(\varepsilon - ax(1+o(1))\big)^{\lambda-1} a(\lambda+o(1)) \tag{6.3}$$

при $x, \varepsilon, \delta \to 0$. Эта производная стремится к $-\infty$ при x, стремящемся слева к нулю функции $\varepsilon - ax(1+o(1))$. Производная правой части (6.2) по x равна

$$-\frac{\partial}{\partial y}\tilde{g}_{\varepsilon\delta}^{-1}(y)\Big|_{y=\Delta_\mu^{-1}(x)} \frac{\partial \Delta_\mu^{-1}(x)}{\partial x} = -\frac{(1+o(1))}{b\mu} x^{\frac{1}{\mu}-1} \tag{6.4}$$

при $x, \varepsilon, \delta \to 0$. Она стремится к $-\infty$ при x, стремящемся к нулю справа. Поэтому при достаточно малых ε на отрезке $[0, \varepsilon]$ производная (6.3) убывает, а производная (6.4) возрастает. Следовательно, на этом отрезке левая часть равенства в (6.2) выпукла вверх, а правая — выпукла вниз.

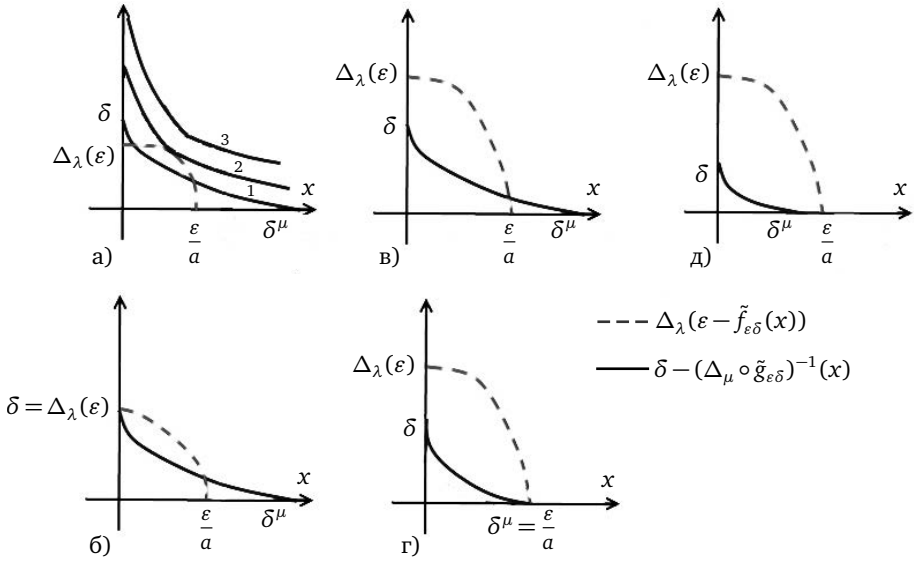


Рис. 6.2

На рис. 6.2 графики двух выпуклых функций слева и справа от знака равенства в уравнении (6.2) в а) нижнем (нет предельных циклов), в) среднем (один цикл), д) верхнем (от нуля до двух циклов) секторе. Графики б) и г) соответствуют моменту образования петель сепаратрис сёдел M и L. По оси абсцисс приведены значения с точностью до множителя $(1+o(1))$ при $\varepsilon, \delta \to 0$. Все пять рисунков демонстрируют появление точек пересечения графиков при переходе от верхнего сектора к нижнему в порядке а–б–в–г–д.

Таким образом, графики функций, стоящих в правой и левой частях уравнения (6.2), могут пересекаться не более чем в двух точках (следует из теоремы Ролля). Если пересечение произошло на оси абсцисс, то это означает, что обе функции отображают некую точку на трансверсали Γ_1^- в нуль на трансверсали Γ_2^- (рис. 6.2г). Следовательно, имеется петля сепаратрисы седла L. Если же пересечение произошло на оси ординат, то получаем, что обе функции переводят нуль на трансверсали Γ_1^- в одну и ту же точку трансверсали Γ_2^- (рис. 6.2б). Следовательно, имеется петля седла M. Таким образом, рис. 6.2а соответствует верхнему сектору, рис. 6.2в среднему, рис. 6.2д нижнему. Поля, соответствующие рис. 6.2а, б, в, г, д, изображены на рис. 5.1а, б, в, г, д соответственно.

Получаем, что в нижнем секторе нет предельных циклов (рис. 6.2д), в среднем секторе ровно один предельный цикл (рис. 6.2в), а в верхнем секторе возможны от нуля до двух предельных циклов (рис. 6.2а). Действительно, если функция в правой части равенства (6.2) ведёт себя так же, как на рис. 6.2а кривая 1, т. е. имеет две точки пересечения с графиком другой функции, то

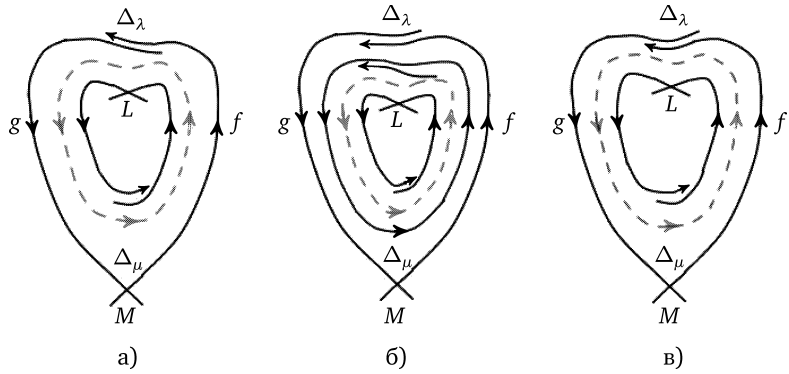


Рис. 6.3. Предельные циклы: а) неустойчивый у поля, соответствующего параметрам из среднего сектора, б) устойчивый и неусточивый у поля, соответствующего параметрам из верхнего сектора, и в) полуустойчивый у поля, соответствующего параметрам из верхнего сектора

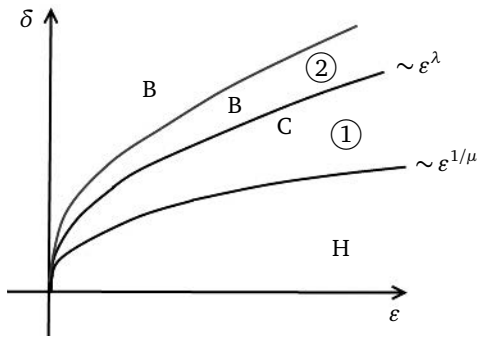


Рис. 6.4. Верхний, средний и нижний сектора на бифуркационной диаграмме (количество предельных циклов соответствующих полей указано в кружке)

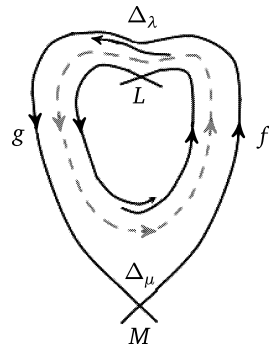


Рис. 6.5. Фазовый портрет векторного поля в случае петли сепаратрисы седла M

поле имеет два предельных цикла. Если как кривая 2, т. е. касается в одной точке, то 1 предельный цикл. Если как кривая 3, т. е. не пересекает график другой функции, то предельных циклов нет. □

Получаем, что при изменении параметра вдоль вертикальной прямой $\varepsilon = \varepsilon_0$ с ростом δ происходит следующая эволюция фазового портрета. В нижнем секторе циклов нет, но после разрушения петли седла L возникает неустойчивый цикл. Затем разрушается петля сепаратрисы седла M и возникает устойчивый предельный цикл. Эти циклы сближаются и в конце концов сливаются, на мгновение образуя полуустойчивый предельный цикл, который исчезает в результате седлоузловой бифуркации.

Замечание. Когда в пункте 4.2 речь шла о петле сепаратрисы седла M, было оставлено без внимания, что поле на рис. 5.1б изображено не полностью.

Следует дорисовать неустойчивый предельный цикл. Поэтому окончательный фазовый портрет будет иметь вид как на рис. 6.5.

6.2. Возникновение мелькающих сепаратрисных связок.

Определение 4. Пусть имеется локальное k-параметрическое семейство векторных полей на сфере. Рассмотрим выходящую сепаратрису одного седла и входящую сепарастрису другого седла и отметим в базе параметров множество точек, при которых эти сепаратрисы образуют сепаратрисную связку. Будем говорить, что в семействе наблюдается *серия мелькающих сепаратрисных связок*, если росток в нуле этого множества распадается на бесконечное число компонент связности.

Для того чтобы описать мелькающие сепаратрисные связки, которые возникают в изучаемом семействе V, докажем следующее предложение.

Предложение 5. *Рассмотрим однопараметрическое семейство*

$$W = \{w_\varepsilon \mid \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)\}.$$

Пусть поле w_0 имеет параболический предельный цикл. Пусть зависящее от параметра отображение Пуанкаре Δ_ε, определённое на трансверсали Γ к этому циклу, при $\varepsilon > 0$ не имеет неподвижных точек. Пусть поле w_0 имеет два седла E и I по разные стороны от цикла, причём выходящая сепаратриса седла E (входящая сепаратриса седла I) наматывается на цикл в положительном (отрицательном) времени (рис. 6.6).

Тогда при малых $\varepsilon > 0$ в семействе W возникают сепаратрисные связки: существует такая последовательность $\varepsilon_n \to 0$, что поле w_{ε_n} имеет общую сепаратрису сёдел $E(\varepsilon_n)$ и $I(\varepsilon_n)$, близких к E и I.

Это предложение более общее, чем теорема Мальта — Палиса [2]: в нём не требуется, чтобы параболический цикл был двукратным.

Доказательство. Пусть точки пересечения цикла, выходящей сепаратрисы седла E и входящей сепаратрисы седла I с трансверсалью Γ имеют координаты на трансверсали 0, $x_1(\varepsilon)$ и $x_2(\varepsilon)$ соответственно, причём $x_1(0) > 0 > x_2(0)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Поскольку неподвижные точки отсутствуют, для любого $x \in [x_2, x_1]$ имеем $\Delta_\varepsilon(x) < x$. Следовательно, существует такое n, что $\Delta_\varepsilon^{\circ n}(x_1(\varepsilon)) < 0$ и $\Delta_\varepsilon^{\circ -n}(x_2(\varepsilon)) > 0$. Но при $\varepsilon = 0$ для любого m выполняются неравенства $\Delta_0^{\circ m}(x_1) > 0$ и $\Delta_0^{\circ -m}(x_2) < 0$. Следовательно, для любого достаточно большого n существует такое ε_n, что $\Delta_{\varepsilon_n}^{\circ n}(x_1(\varepsilon_n)) = \Delta_{\varepsilon_n}^{\circ -n}(x_2(\varepsilon_n))$. □

Предложение 6. *Рассмотрим однопараметрическое семейство*

$$W = \{w_\varepsilon \mid \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)\}.$$

Пусть поле w_0 имеет петлю сепаратрисы седла M и седло I внутри петли, причём выходящая сепаратриса седла I наматывается на петлю изнутри в положительном времени. Пусть точки пересечения выходящей сепаратрисы седла I и входящей сепаратрисы седла M с трансверсалью Γ имеют коорди-

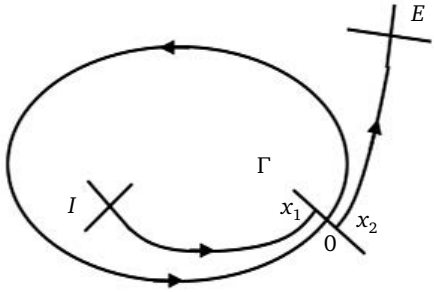


Рис. 6.6. Полуустойчивый предельный цикл

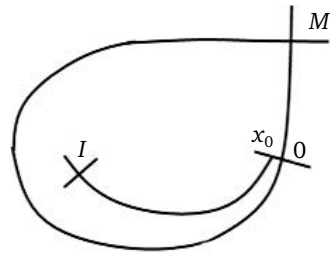


Рис. 6.7. Петля сепаратрисы

наты на трансверсали $x_1(\varepsilon)$ и 0 соответственно, причём $x_1(0)>0$ (рис. 6.7). Пусть зависящее от параметра отображение Пуанкаре Δ_ε, определённое на полутрансверсали Γ к этой петле, при $\varepsilon>0$ не имеет неподвижных точек.

Тогда при малых $\varepsilon>0$ в семействе W возникают сепаратрисные связки: существует такая последовательность $\varepsilon_n\to 0$, что поле w_{ε_n} имеет общую сепаратрису сёдел $I(\varepsilon_n)$ и $M(\varepsilon_n)$, близких к I и M.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно мало. Поскольку неподвижные точки у отображения Пуанкаре Δ_ε отсутствуют при $\varepsilon>0$, для любого $x\in[0,x_1]$ имеем $\Delta_\varepsilon(x)<x$. Следовательно, существует такое n, что $\Delta_\varepsilon^{\circ n}(x_1(\varepsilon))<0$. Но при $\varepsilon=0$ для любого m выполнено неравенство $\Delta_0^{\circ m}(x_1)>0$. Следовательно, для любого достаточно большого n существует такое ε_n, что $\Delta_{\varepsilon_n}^{\circ n}(x_1(\varepsilon_n))=0$. □

Теорема 4. *В типичном семействе, содержащем поле с полициклом «сердце», в случае* (6.1) *возникают две серии мелькающих сепаратрисных связок.*

Доказательство. В среднем секторе седла M и L разделены предельным циклом, поэтому сепаратрисные связки возникнуть не могут. В верхнем секторе при исчезновении полуустойчивого предельного цикла происходит бифуркация Мальта — Палиса [2]. В нижнем секторе мелькающие сепаратрисные связки возникают при разрушении петли сепаратрисы седла L.

Действительно, возьмём любую кривую γ_1 в базе параметров, которая трансверсально пересекает кривую, соответствующую полуустойчивому предельному циклу. Она задаёт однопараметрическое семейство векторных полей. При тех значениях параметра, при которых кривая находится выше кривой, соответствующей полуустойчивому предельному циклу, нет предельных циклов, а следовательно, это семейство удовлетворяет условию предложения 5. Таким образом, при разрушении полицикла «сердце» можно наблюдать бифуркацию Мальта — Палиса (рис. 6.8).

Аналогично проведём кривую γ_2, которая трансверсально пересекает SL_L. Тогда она также будет задавать семейство, удовлетворяющее условию предложения 6.

Поскольку кривые γ_1 и γ_2 можно провести сколь угодно близко к началу координат, то в любой его окрестности существует значение параметра, соот-

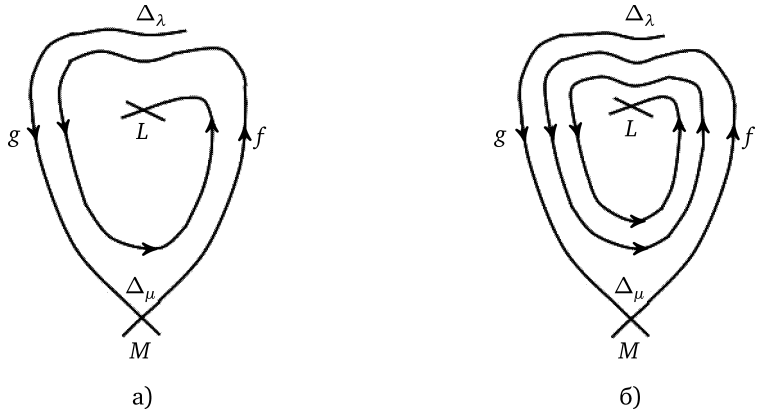


Рис. 6.8. Мелькающие сепаратрисные связки в верхнем секторе. Сепаратриса совершает а) один, б) два витка

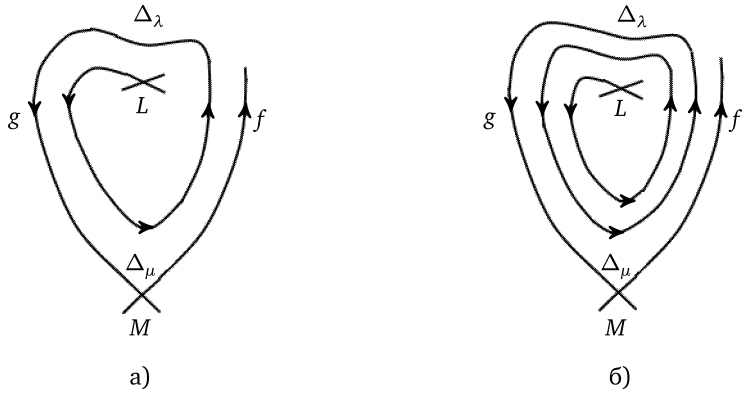


Рис. 6.9. Мелькающие сепаратрисные связки в нижнем секторе. Сепаратриса совершает а) один, б) два витка

ветствующее полю с сепаратрисной связкой, совершающей любое достаточно большое число витков. При малых значениях параметров сепаратрисные связки не выходят за пределы окрестности U, а сёдла M и L — за пределы U_M и U_L. Каждая сепаратрисная связка пересекает любую из трансверсалей несколько раз. Если к отрезку сепаратрисы между точками первого и последнего пересечения с некой трансверсалью добавить соединяющий эти точки участок трансверсали, то получится петля, целиком лежащая в окрестности U. Но U гомеоморфно кольцу и её фундаментальная группа ненулевая. Следовательно, нельзя непрерывным преобразованием, не разрывая сепаратрисную связку, изменить её число оборотов. Следовательно, согласно определению 4, в семействе V возникают две серии мелькающих сепаратрисных связок (рис. 6.9): в верхнем и нижнем секторе соответственно. □

§ 7. Случай двух недиссипативных сёдел. Бифуркационная диаграмма

Рассмотрим теперь случай, в котором седла имеют одинаковую диссипативность. В § 2 было показано, что достаточно провести рассуждения для сёдел, характеристические числа которых удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\mu < 1, \quad \lambda < 1. \tag{7.1}$$

7.1. Предельные циклы.

Предложение 7. *Пусть выполнены неравенства* (7.1). *Тогда поля, соответствующие значениям параметров из верхнего и нижнего секторов, предельных циклов не имеют. Поля, соответствующие значениям параметров из среднего сектора, имеют ровно один предельный цикл.*

Доказательство. Уравнение (6.2) задаёт неподвижные точки отображения Пуанкаре, соответствующие предельным циклам. Если бы в семействе имелся параболический предельный цикл, то существовало бы такое x_0, что уравнение, получающееся из (6.2) дифференцированием по x, имело бы решение. Покажем, что это уравнение решений не имеет. Продифференцировав по x равенство (6.2) и пользуясь формулами для производных (6.3) и (6.4), имеем:

$$a(\lambda+o(1))\big(\varepsilon-ax(1+o(1))\big)^{\lambda-1} = \frac{x^{\frac{1}{\mu}-1}}{b\mu}(1+o(1)) \quad \text{при } x, \varepsilon, \delta \to 0.$$

Откуда получаем

$$\varepsilon = ax(1+o(1)) + \frac{1}{(ab\lambda\mu)^{1/(\lambda-1)}} x^{\frac{1-\mu}{\mu(\lambda-1)}}(1+o(1)) \quad \text{при } x, \varepsilon, \delta \to 0. \tag{7.2}$$

Заметим, что

$$\frac{1-\mu}{\mu(\lambda-1)} < 0$$

в силу (7.1). Левая часть равенства (7.2) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, а правая представляет собой сумму двух положительных функций, но если $x \to 0$, то второе слагаемое стремится к бесконечности. Следовательно, уравнение (7.2) при малых x, ε и δ решения не имеет.

При малых x, ε и δ слева и справа от знака равенства в (6.2) стоят функции, выпуклые вверх (рис. 7.1а). Заметим, что уравнение (6.2) двух решений иметь не может (рис. 7.1б), так как по лемме Ролля, применённой к разности этих функций, отсюда бы следовало наличие точки, в которой совпадают значения их производных. Но это невозможно, так как уравнение на производные (7.2) решений не имеет.

Таким образом, поля, соответствующие значениям параметров из верхнего и нижнего секторов, предельных циклов не имеют. При параметрах из среднего сектора при разрушении одной из петель сепаратрис в силу (7.1)

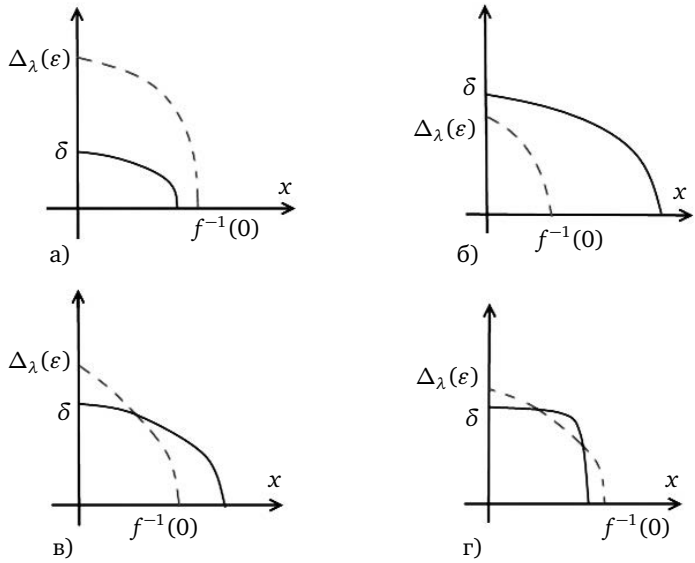


Рис. 7.1. Графики функций из уравнения (6.2): а) в верхнем секторе, б) в нижнем секторе, в) в среднем секторе возможный случай, г) в среднем секторе невозможный случай

рождается неустойчивый предельный цикл, который исчезает, образуя петлю сепаратрисы у другого седла. □

7.2. Возникновение мелькающих сепаратрисных связок. В верхнем и нижнем секторах возникают мелькающие сепаратрисные связки (рис. 6.8 и 6.9). В обоих случаях причиной появления связок служит разрушение петли сепаратрисы. Их возникновение обосновывается теоремой 4 и схожими рассуждениями из предыдущего параграфа.

§ 8. Бифуркационная диаграмма

Докажем теоремы 1 и 2.

Доказательство. Согласно предложению 2 и следствию 1 вне первого квадранта нет точек бифуркационной диаграммы, соответствующих полям с сепаратрисными связками или параболическими предельными циклами, кроме осей координат. Согласно предложению 3 первый квадрант разбивается на три сектора двумя кривыми, которые соответствуют полям с петлями сепаратрис. Согласно предложению 4 в случае диссипативного и недиссипативного сёдел (случай 1) в верхнем секторе имеется исходящая из нуля кривая, соответствующая полям с параболическим предельным циклом. В случае двух недиссипативных сёдел (случай 6) параболические предельные

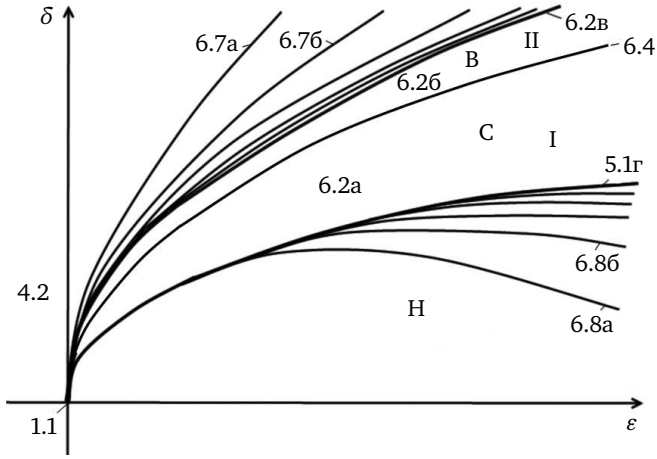


Рис. 8.1. Бифуркационная диаграмма в случае (6.1). Римскими цифрами обозначено количество предельных циклов, арабскими — рисунок, на котором изображено соответствующее поле

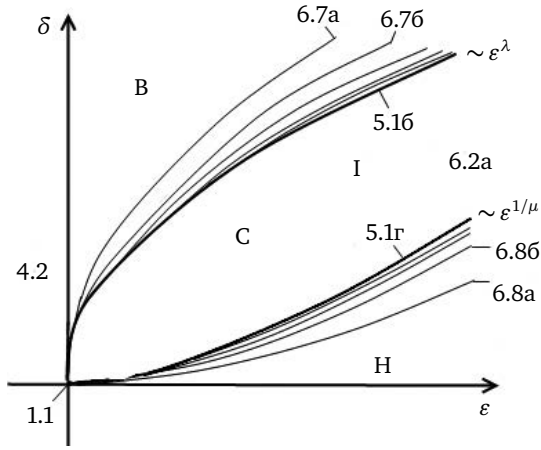


Рис. 8.2. Бифуркационная диаграмма для случая (7.1)

циклы отсутствуют. В силу теоремы 4 и предложений 5 и 6 существуют две серии из бесконечного числа кривых, выходящих из начала координат, соответствующие двум сериям мелькающих сепаратрисных связок. Кривые серии в верхнем секторе накапливаются к кривой, соответствующей полям с параболическим циклом (случай 1) или петлёй сепаратрисы седла M (случай 6). Кривые серии в нижнем секторе накапливаются к кривой, соответствующей полям с петлёй сепаратрисы седла L (оба случая).

Осталось лишь показать, что во всех остальных точках базы параметров поля структурно устойчивы. Действительно, по теореме Андронова —

Понтрягина [6] поле на двумерной сфере структурно неустойчиво тогда и только тогда, когда имеется либо сепаратрисная связка, либо параболический предельный цикл, либо особая точка, имеющая собственное значение с нулевой действительной частью. Сепаратрисные связки и предельные циклы рассмотрены выше. В окрестности U отсутствуют особые точки, кроме M и L, которые невырожденны. Таким образом, теоремы 1 и 2 доказаны. □

В случае 1 бифуркационная диаграмма представлена на рис. 8.1, в случае 6 — на рис. 8.2.

Замечание. В данной статье не затрагивается вопрос о гладкости кривых на бифуркационной диаграмме, соответствующих полям с мелькающими сепаратрисными связками. Этот вопрос, поставленный в более общем случае — для произвольных полициклов, возможно, станет сюжетом будущей статьи.

Список литературы

[1] *Ильяшенко Ю. С.*, *Ли Вейгу.* Нелокальные бифуркации. М.: МЦНМО, 2016. Электронное издание. ISBN 978-5-4439-2322-2. С. 327–335.

[2] *Malta I. P.*, *Palis J.* Families of vector fields with finite modulus of stability. Berlin — New York: Springer, 1981. (Lecture Notes in Math.; Vol. 898). P. 212–229. MR654891 | Zbl0482.58023.

[3] *Sotomayor J.* Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1974. Vol. 43, № 43. P. 5–46. Zbl0279.58008 | MR494039.

[4] *Ilyashenko Yu.*, *Kudryashov Yu.*, *Schurov I.* Global bifurcations in the two-sphere: a new perspective // Invent. Math. 2018. Vol. 213, № 2. P. 461–506. DOI:10.1007/s00222-018-0793-1.

[5] *Kotova A.*, *Stanzo V.* On few-parameter generic families of vector fields on the two-dimensional sphere // Concerning the Hilbert 16th problem. Providence, RI: AMS, 1995. (AMS Transl. Ser. 2; Vol. 165. Adv. Math. Sci.; Vol. 23). P. 155–201.

[6] *Андронов А. А.*, *Понтрягин Л. С.* Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.

Андрей Валерьевич Дуков
Мехмат МГУ им. М. В. Ломоносова,
Матфак НИУ ВШЭ
E-mail: sunts_andrew@mail.ru

Представлено в редакцию 17.04.2018