ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ – БАКАЛАВРИАТ
серия основана в 1996 г.

А.В. МИЩЕНКО

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ В ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

2-е издание, дополненное

*Допущено
УМО по образованию в области логистики
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по направлению «Менеджмент» (специальность
«Логистика и управление цепями поставок»)*

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

Москва
ИНФРА-М
2018

УДК 658.7(075.8)
ББК 65.40я73
М71

Автор:

А.В. Мищенко, доктор экономических наук, профессор Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Технический редактор — *М.А. Коновалова*

Рецензенты:

В.И. Сергеев, доктор экономических наук, профессор, зав. кафедрой Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

М.А. Бендиков, доктор экономических наук, профессор Центрального экономико-математического института РАН

Мищенко А.В.

М71 Методы и модели управления ограниченными ресурсами в логистических системах : учеб. пособие / А.В. Мищенко. — 2-е изд., доп. — М. : ИНФРА-М, 2018. – 185 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). — www.dx.doi.org/10.12737/textbook_5a336be894a629.59184528.

ISBN 978-5-16-013083-5 (print)
ISBN 978-5-16-105868-8 (online)

В предлагаемой работе рассмотрены оптимизационные модели управления ограниченными ресурсами в логистических системах. Такими системами в первую очередь являются промышленные предприятия, транспортные компании, современные системы складирования и др.

Как правило, эффективность функционирования перечисленных объектов во многом зависит от того, насколько рационально использованы ограниченные ресурсы такого вида, как производственный аппарат предприятия, трудовые ресурсы, транспортные средства и т.д. В данной работе рассмотрены различные подходы управления такими ресурсами как для детерминированных моделей, так и для ситуаций, когда ряд параметров моделей не задан точно. В этом случае предлагается оценивать устойчивость моделей как по структуре решения, так и по функционалу.

Книга адресована студентам вузов, обучающимся по направлению подготовки «Менеджмент», а также специалистам в области моделирования логистических систем.

УДК 658.7(075.8)
ББК 65.40я73

ISBN 978-5-16-013083-5 (print)
ISBN 978-5-16-105868-8 (online)

ВВЕДЕНИЕ

Современный уровень развития рыночных отношений в стране характерен широким применением экономико-математических методов и средств компьютерной техники при планировании развития экономических процессов. Основу этого направления составляет возможность формализованного описания моделируемых объектов при разработке планов и оптимизации плановых решений в моделях распределения ограниченных ресурсов как в реальном секторе экономики, так и на финансовых рынках. Эффективное распределение всех видов ресурсов (трудовых, материальных, оборудования, финансов) особенно актуально в период перехода страны к рыночной экономике, что усиливает необходимость применения наиболее эффективных методов планирования и управления.

В настоящее время предприятия, находясь в условиях рынка, сами должны формировать планы, отвечать за их материально-техническое обеспечение, используя конкретную форму доступа к материальным и финансовым ресурсам.

Модели распределения ограниченных ресурсов часто сводятся к решению линейных и нелинейных оптимизационных задач с целочисленными ограничениями на переменные. Большинство целочисленных задач оптимального распределения ресурсов относится к числу так называемых *NP*-полных задач [11], решение которых связано с большим объемом вычислений.

В то же время, после того как решение получено, оно не всегда может быть использовано из-за того, что исходные данные задачи чаще всего заданы неточно.

Эти данные содержат, в частности, информацию о технологических, технических и экономических характеристиках объекта.

Числовые значения перечисленных характеристик нередко определяются либо на основе статистической обработки данных, либо в результате процедур прогноза. Учитывая последнее, используемые в модели численные параметры являются оценками точных значений исходных данных с заданной или неизвестной вероятностной функцией распределения. Таким образом, при моделировании реальных объектов возникает неопределенность, роль которой, по выражению Ст. Бира, в поведении реальных систем поистине огромна [10].

Последнее обстоятельство обусловливает важность расчетов для детерминированных моделей с неточными параметрами.

В тех случаях, когда известны вероятностные характеристики неточно заданных параметров, применимы аппарат теории массового обслуживания, методы математической статистики, теории случайных процессов.

Если же функции распределения неточно заданной входной информации неизвестны, то влияние на результаты моделирования изменения значений исходных данных рассматривается в рамках теории устойчивости, понимая под устойчивостью либо сохранение (малое изменение) значения целевой функции, либо сохранение заданных свойств решения.

Изучением проблем оптимального программирования в условиях неточных исходных данных занимались многие российские и зарубежные ученые.

Однако необходимо отметить, что в работах по исследованию оптимизационных задач при неточных исходных данных в основном рассматриваются задачи непрерывного математического программирования и так называемые траекторные экстремальные задачи.

В то же время остаются мало исследованными дискретные задачи распределения ограниченных ресурсов в условиях неточно заданной исходной информации.

В задачах оптимального распределения ограниченных ресурсов в ситуации с неточными исходными данными возможны следующие подходы при анализе устойчивости:

1. Насколько могут быть изменены значения выбранной группы параметров, чтобы оптимальное решение сохранилось.
2. Найти все решения задачи оптимального распределения ресурсов и области изменения параметров, для которых остаются оптимальными эти решения, если известны интервальные оценки изменения заданной группы параметров.

Необходимо отметить, что исследование на устойчивость этого класса задач возникает не только в промышленности и на транспорте, но и при моделировании работы различного рода информационных систем при планировании обработки большого объема информационных документов, вычислительных центров, специализирующихся на ведении и актуализации банков данных, а также вычислительных систем, осуществляющих обработку информации в реальном времени.

Таким образом, проблема разработки и исследования моделей оптимального распределения ресурсов на устойчивость носит актуальный характер, ее разрешение позволит существенно повысить эффективность экономико-математического моделирования для перечисленного класса производственных и исследовательских объектов.

Книга подготовлена при финансовой поддержке органа РФФИ, проект № 16-06-0043а.

Глава 1. ПРОБЛЕМА НЕПОЛНОТЫ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В последнее время все больше выпускается учебной и научной литературы, касающейся использования количественных методов в логистике и управлении цепями поставок. Как правило, в большинстве случаев предлагается использовать детерминированные методы оптимизации для получения управленческих решений. В то же время во многих случаях их применение ограничено вследствие неполноты и неточности исходной информации, используемой в оптимизационных моделях. В данной главе дан обзор существующих подходов для решения подобной проблемы.

1.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Сложность управления производственными, транспортными и информационными системами приводит к необходимости широкого применения экономико-математических моделей и средств компьютерной техники при планировании развития этих систем. Фундаментом для этого послужило развитие научно-технического прогресса в области вычислительной техники и математических методов, связанных с ее использованием. Этими методами прежде всего являются математическое программирование, исследование операций, методы линейного, нелинейного и целочисленного программирования, системный анализ, теория расписаний, сетевое планирование и управление, теоретическое программирование.

Начало применения математических методов в экономике следует отнести к середине прошлого столетия. В нашей же стране использование этих методов связано с созданием в середине 1930-х годов принципов оптимального планирования в работах Л.В. Канторовича и В.В. Новожилова. Широкое практическое использование этих принципов следует отнести к началу 1950-х годов.

Одним из крупных организаторов экономико-математических исследований того времени был академик В.С. Немчинов, сыгравший значительную роль в пропаганде и внедрении математических методов в экономике. В.С. Немчинов активно выступал против жесткой централизации в экономике [25].

Централизация планирования развития народного хозяйства приводит к полному пренебрежению элементарными экономическими законами, господству администрирования и бюрократизации в хозяйственном аппарате, подавлению инициативы в использовании достижений науки и техники. Такая ситуация в большой мере соответствует и высказыванию академика В.Р. Новожилова: «Примитивное понимание взаимоотношений между большими и малыми экономическими системами может создать лишь такую окостенелую механистическую систему, в которой все параметры управления заданы заранее, а вся система залимитирована сверху донизу на каждый момент времени и в каждом пункте... Такая залимитированная система будет тормозить социальный и технический прогресс и под напором реального процесса хозяйственной жизни рано или поздно будет сломана» [18].

Различные методы оптимального управления, получившие развитие в последние десятилетия, играют важную роль в исследовании логистических систем. Это естественно, так как одной из главных задач логистики и управления цепями поставок является разработка методов наилучшего распределения ограниченных ресурсов (трудовых, информационных, материальных, финансовых, производственных) [28]. В настоящее время существует широкий класс задач планирования и управления, которые требуют упорядочения во времени использования ограниченного объема одного или нескольких видов перечисленных выше ресурсов для выполнения заданной совокупности работ. Появление этого класса задач связано с развитием современного производства, необходимостью управлять деятельностью больших коллективов людей, существенным возрастанием роли организационного управления. В различных областях материального производства в сложных, нередко противоречивых условиях приходится принимать решения, которые оказывают существенное влияние на эффективность функционирования промышленных, транспортных и других логистических систем. Эти решения всегда направлены на достижение каких-либо целей и осуществляются в условиях некоторых ограничений. Чаще всего одни и те же цели могут быть достигнуты различными способами, с различными затратами труда и материальных ресурсов. Для того чтобы решить непростую задачу выбора наиболее рационального пути достижения поставленных целей, необходимо привлечение современных научных методов.

В последние десятилетия эти методы известны как методы решения экстремальных дискретных сетевых задач распределения ресурсов. В общих терминах постановка задач этого класса заключается в следующем. Задана некоторая совокупность действий, которые необходимо выполнить. В процессе выполнения каждого действия загружаются или расходуются определенные средства. Чаще всего общего объема средств недостаточно для одновременного выполнения всех действий. Во время выполнения действий средства могут перераспределяться, т.е. способ их использования является управляемой переменной процесса. Средства для выполнения действий обычно называют ресурсами, которые могут быть двух видов: ресурсы типа «материалы», или складируемые ресурсы и ресурсы, нескладируемого вида типа «мощность». К *первым* относятся топливо, сырье, полуфабрикаты, заготовки, детали и т.д. Складируемые ресурсы непосредственно расходуются в процессе выполнения того или иного действия. Обычно складируемые ресурсы задаются либо общим объемом, либо функцией поставок их во времени.

В качестве ресурсов *второго типа* используются приборы, станки, машины, оборудование, комплексы технических средств и т.п. Ресурсы этого типа, которые также называют ресурсами многоразового использования, не расходуются, а могут перераспределяться по мере выполнения действий. Каждое действие состоит из нескольких элементарных действий, которые называют операциями (работами). Ресурсы, обслуживающие одну операцию, не могут одновременно использоваться на другой. Каждая операция, как правило, имеет свой номер, и ей соответствует вектор, задающий виды и объемы ресурсов, необходимые для ее выполнения. Операция характеризуется длительностью выполнения, которая может зависеть от времени ее начала.

Обычно операции могут выполняться не в произвольном порядке, а при заданных технологических ограничениях на последовательность их выполнения. Порядок, в котором можно реализовать работы при соблюдении ограничений на объем потребляемых ресурсов и технологическую последовательность выполнения работ, называют допустимым расписанием.

Выбор допустимого расписания выполнения работ происходит из соображений минимизации функции потерь. В качестве функции потерь часто используется время, затраченное на реализацию всего комплекса работ, и среднее взвешенное время завершения выполнения работ.

К наиболее известным областям применения задач указанного типа в управлении проектами относятся следующие:

- разработка сложных проектов, в которых принимают участие организации и предприятия различных ведомств, включая научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы;
- государственные, межведомственные и региональные программы, например охрана окружающей среды, развитие региона, ликвидация последствий экологических катастроф и т.д.;
- разработка графиков работы оборудования и выпуска продукции для участков, цехов, предприятий;
- строительство промышленных и гражданских объектов, подготовка и проведение крупных организационных мероприятий, (съездов, конференций, кампаний по предупреждению стихийных бедствии и т.д.).

В практике управления предлагаемый класс задач относится к системам сетевого планирования и управления (СПУ), которые используются для решения организационных задач планирования выполнения комплекса работ. Первые попытки формализации и исследования сетевых задач относятся к середине 1950-х годов. Из множества зарубежных и отечественных публикаций, например [14, 15], известно, что большинство сетевых задач распределения ресурсов относятся к классу задач, для которых в настоящее время не существует эффективных (полиномиальных) алгоритмов решения. В связи с этим представляют интерес приближенные методы решения этого класса задач. Многие из этих методов имеют полиномиальную оценку сложности, поэтому их важной характеристикой является оценка погрешности по функционалу полученного приближенного решения. Для точного решения экстремальных сетевых задач В.С. Михалевичем был предложен метод последовательного анализа вариантов с оценкой трудоемкости алгоритмов в среднем. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при решении практических задач. Ряд общих схем (метод погружения) был предложен в работах В.А. Емеличева [12].

Теория статистических эффективных алгоритмов была в значительной мере создана и обоснована в работах Э.Х. Гимади [4].

Наиболее перспективным направлением практического решения задач оптимального распределения ресурсов в настоящее время является метод ветвей и границ. Этот метод позволяет решать задачи большой размерности, получая точные или приближенные решения. Качество алгоритмов этого класса существенно зависит от того, насколько эффективно вычисляются нижние и верхние оценки (границы) решения.

В последнее время методы сетевого и календарного планирования все шире применяются в производственной логистике в задачах оперативного планирования загрузки металлорежущих станков. Как отмечено в [17], критерием загрузки станков в этом случае являются следующие показатели: соблюдение директивно заданных сроков изготовления деталей; минимизация времени изготовления заданного набора деталей; обеспечение комплектного выпуска деталей. Учитывая многокритериальность и большие размерности реальных задач составления расписания работы оборудования, их решение во многих случаях получают приближенными методами.

Рассматриваемый в работе комплекс задач оптимального распределения ресурсов применим при планировании работы промышленных и транспортных предприятий. Одни из этих моделей отражают деятельность предприятия на короткий интервал времени (распределение ресурсов при выполнении комплекса работ и конвейерные системы), другие — на период год и более (задача выбора оптимального варианта производственной деятельности предприятия).

Последний тип моделей приобретает большое значение при работе промышленных предприятий в условиях рыночной среды с учетом ограничений на все виды материальных, трудовых, производственных и финансовых ресурсов. Одним из основных критериев оптимальности в условиях экономической самостоятельности предприятия является максимизация его прибыли.

В книге рассмотрена задача выбора оптимальной производственной программы предприятия при ограничениях на перечисленные виды ресурсов, а также ограничениях на объемы выпускаемых изделий с учетом сформированного портфеля заказов по каждому виду изделий. Учитывая прогнозный характер цен на выпускаемую продукцию и цен на используемые материальные ресурсы, рассмотрены задачи вычисления интервалов устойчивости по решению и по функционалу при изменении этих показателей.

В книге исследуются также проблемы распределения ресурсов в конвейерных системах обработки заявок, которые характеризуются динамическим характером поступления заявок на вход системы обработки. Весь цикл обработки заявок обычно определяется некоторым орграфом, который отражает последовательность обработки заявок на технологических операциях. Задача оптимального распределения ресурсов (оборудования, станков, транспортных средств) в подобных системах заключается в задании такого графика работы каждой единицы ресурса, чтобы принимали оптимальное значение один или несколько следующих показателей работы системы: объем обработанных заявок каждого вида к концу директивного периода; потери времени заявок на ожидание обслуживания; количество обработанных заявок, время ожидания которых в системе обработки превышает заданное.

1.2. НЕПОЛНОТА И НЕТОЧНОСТЬ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Среди экономико-математических моделей традиционно выделяется класс жестко детерминированных моделей, в основе которых лежит допущение о возможности точного задания всей исходной информации. Однако, как убеждает нас практика, нет абсолютно детерминированных путей развития, невозможно точно предугадать тенденции спроса на выпускаемую продукцию, результаты научно-технических достижений, последствия природных изменений окружающей среды и т.д. Поэтому экономика развивается под воздействием не только полностью определенных законов и связей, и следовательно, проблема заключается в том, чтобы сделать оценку масштабов возможного проявления недетерминированных связей в экономике. Учитывая сказанное, при моделировании конкретного объекта не всегда удается точно определить единственное оптимальное решение.

В задачах оптимального планирования фактор неопределенности выражается, в частности, в том, что множество исходных параметров, множество допустимых решений и критерий оптимальности включают некоторую неточность в их задании.

Исходная информация, как показано в [11], может быть трех типов: заданная точно; вероятностная, т.е. условия и параметры задаются случайными величинами с известными законами распределения; неопределенная, когда характеристика диапазона изменения исходных данных отсутствует и законы распределения их случайного изменения нельзя получить. Для первого типа условий применяются детерминированные модели, для второго — аппарат стохастического программирования и теории массового обслуживания, в третьем случае, если существуют хотя бы верхние и нижние оценки значений неопределенных параметров, используются методы получения такого семейства решений, что для каждого набора значений из области изменения исходных данных существует хотя бы одно приемлемое решение из этого семейства.

Одной из основных причин неопределенности исходной информации является сложность современных производственных систем, а также то, что элементы системы активно взаимодействуют с внешней изменяющейся средой. Цели, поставленные перед производственной системой, часто не совпадают с целями и возможностями исполнителей. В том случае, когда произошли существенные изменения в исходных данных относительно предполагаемой ситуации, расчетный вариант плана становится, как правило, невыполним, и поэтому следует его корректировка.

Как отмечено в [4], у менеджеров и экономистов существуют две полярно противоположные точки зрения на корректировку плана. В одном случае корректировку плана считают недопустимым, негативным явлением, другие признают необходимость корректировок как объективного свойства планирования функционирования тех или иных объектов. На наш взгляд, количественная оценка вариации исходных данных должна служить критерием того, насколько правомерно или неправомерно скорректирован исходный план.

При переходе от жесткого централизованного планирования к экономической самостоятельности предприятий изменится и характер неопределенности. В условиях централизованного планирования наиболее существенным является неопределенность материального и технического обеспечения, а в условиях рыночной экономики неопределенность в первую очередь касается рынков сбыта, технологических процессов, привлечения смежных предприятий на выполнение крупных работ с большой долей риска и т.д.

Адаптивный подход к планированию, развитию и функционированию экономических систем предполагает, что механизм принятия плановых решений в условиях неопределенности исходных данных должен не только распространяться на стадию предпроектных и проектных решений, но и отражать способы анализа и оценки последствий этой неопределенности.

Для решения проблем неопределенности существует ряд подходов. Одни из них предлагают исследовать надежность и гибкость экономических систем, в других развиваются идеи корректности экономико-математического моделирования. Проявление неопределенности можно рассматривать как результат возмущающего воздействия на систему. Априорный анализ возможных последствий этого воздействия в первую очередь должен касаться определения допустимых отклонений в исходной ситуации, которые не приведут к существенному изменению плановых показателей. Для задач линейного программирования аппарат теории двойственности позволяет определять показатели чувствительности оптимального решения относительно достаточно малых возмущающих воздействий.

Необходимым условием эффективного использования экономико-математического моделирования является совершенствование экономического измерения. Неполнота и неточность информации об объективных процессах усиливают неопределенность. Одними из направлений исследования результатов экономико-математического моделирования в условиях неопределенности являются использование моделей жестко детерминированного типа, проведение многократных расчетов при различных значениях неточно заданных параметров, определение областей устойчивости при варьировании значениями исходных параметров, вычисление максимального отклонения значения одного параметра или группы параметров от исходной величины, не изменяющего основные результаты моделирования.

Исследованию неопределенности исходной информации в принятии решений, определяющих экономическое развитие, включая математические методы, посвящена обширная литература. Большое место в ней уделяется стохастическим методам, в которых рассматриваются в основном вероятностные оценки параметров проектируемой системы. Методам решения задач стохастического программирования посвящены работы [14, 19]. Принимаемое решение в этих задачах может быть либо единственным и окончательным, либо в дальнейшем корректироваться по мере поступления дополнительной информации о состоянии объекта или среды. В зависимости от этого модели могут быть одноэтапными и многоэтапными. Выбор той или иной стохастической постановки задачи определяется организационно-экономическим содержанием и целевым назначением рассматриваемой задачи, объемом и содержанием исходной и текущей информации. Ограниченность применения стохастических методов состоит в том, что во многих случаях вероятностные характеристики параметров задачи отсутствуют.

В настоящее время мнение ученых о том, что в основе практики планирования и управления предприятием и его участками должно быть экономико-математическое моделирование с использованием информационных технологий и соответствующие системы оптимизационных расчетов, становится доминирующим. Обычно основным элементом такой системы являются базовая оптимизационная модель или комплекс моделей. Учитывая, что система расчетов, кроме алгоритмического обеспечения, включает информационное, программное и техническое, адекватность модели и производственного объекта определяется, в частности, точностью расчетов. Как указано в [14], то обстоятельство, насколько полно осуществляется согласование базовой модели с реальным объектом моделирования и его специфическими особенностями, способ организации моделирования определяют точность расчетов.

Проверка адекватности оптимизационной модели, как правило, всегда трудоемка. Как отмечает В.С. Немчинов, «в отношении же нормативных (в том числе оптимизационных) моделей положение сложное: в условиях действующего экономического механизма на моделируемый объект оказывают влияние различные управляющие воздействия, не предусмотренные моделью» [25].

Наполнение модели данными является процессом, определяющим во многом результаты расчетов. Данными, отражающими структуру производственного объекта в промышленной логистике, являются матрицы, задающие производительность оборудования, перечень технологических операций, последовательность обработки на технологических операциях, плановые задания, коэффициенты целевой функции, межоперационные заделы. Понятно, что точность оптимизационных расчетов во многом зависит от достоверности значений перечисленных параметров модели. В то же время значения многих исходных данных, как указывалось выше, носят стохастический характер с неизвестными функциями распределения случайных величин, разброс которых в лучшем случае может быть оценен интервально.

Чтобы получить в результате расчетов приемлемый для практического использования вариант оптимизационных плановых расчетов на базе экономико-математических моделей производственного типа, необходимо провести ряд последовательных расчетов. Большую роль в этом процессе играет анализ результатов расчетов. Проводится этот анализ с учетом возможных неформализуемых факторов производственного процесса.

Каждый вариант расчетов должен подвергаться экономическому и углубленному экономико-математическому анализу. Задача экономического анализа состоит в сравнительной оценке эффективности оптимальных решений, связанных с изменением структуры выпускаемых изделий, снижением затрат на производство, повышении рентабельности, выполнении планов по видам выпускаемых изделий. Экономико-математический анализ, как отмечено в [8], осуществляется по трем направлениям: анализ решения, вариантный анализ, послеоптимизационный анализ. При анализе коэффициентов целевой функции, вектора ограничений, границ изменения переменных могут быть использованы программные средства для решения оптимизационных задач линейного программирования.

Анализ коэффициентов целевой функции, как показано в [9], проводится в случае, когда переменная вошла в оптимальный план и когда не вошла. В пределах изменения коэффициентов целевой функции оптимальное решение остается неизменным.

Анализ векторов ограничений показывает изменения правых частей системы ограничений, при которых плановые задания по выпуску продукции переходят из лимитируемых ограничений в нелимитируемые и наоборот. Это позволяет осуществлять процедуру, которая в экономико-математическом анализе получила название «расшивка узких мест».

Среди оптимизационных моделей в логистических системах может быть выделен класс моделей, связанный с распределением ограниченных ресурсов. Это прежде всего задачи выбора оптимальной программы предприятия, модели сетевого планирования и управления, модели конвейерных систем обработки заявок, динамические модели распределения транспортных средств. Оптимальное распределение ограниченных ресурсов в этих моделях сводится к решению линейных и нелинейных задач математического программирования, нередко с целочисленными переменными. Как показано в [11], многие задачи оптимального распределения ресурсов относятся к числу так называемых *NP*-полных задач, методы решения которых имеют экспоненциальную оценку сложности. Еще одной проблемой при решении этого класса задач является то, что исходные данные моделей чаще всего заданы неточно.

Неточность исходных данных (параметров) этих моделей распределения ресурсов, наряду с перечисленными выше причинами, связана еще и со следующими факторами. Входные данные часто определяются в результате накопленной статистики, либо в результате процедур прогноза, либо вычисляются на основе информации, которой принципиально недостаточно, чтобы получить точные значения исходных параметров. В качестве примера последней ситуации можно привести процедуры вычисления корреспонденции пассажиропотоков на основе информации о входе-выходе пассажиров на остановочных пунктах. В соответствии с этим, как отмечает Я. Корнаи, используемые данные в модели являются оценками точных значений рассматриваемых параметров [26]. Один из подходов использования решения задачи оптимального распределения ресурсов при фиксированных исходных данных в случае неточной входной информации заключается в определении области изменения исходных данных, в которой либо сохраняются заданные свойства оптимального решения, либо отклонение значения целой функции при изменении входных данных в этой области не очень велико. Эту область также называют областью устойчивости исходной задачи.

1.3. УСТОЙЧИВОСТЬ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Внедрение экономико-математических методов в практику было всегда сопряжено с рядом проблем, к числу которых, в частности, следует отнести: неоднозначность критерия оптимальности в экономических задачах; трудности, связанные с изменением технологии планирования при использовании математического моделирования с применением информационных технологий; вероятностный и динамический характер экономических процессов, требующий постоянного совершенствования математического аппарата, а также предъявляющий дополнительные требования к техническому и программному обеспечению; трудности получения достоверной информации, описывающей экономические процессы, для использования ее в моделях в качестве исходных данных. Учитывая перечисленные факторы, при использовании экономико-математических моделей в процессе составления плана работы отрасли или предприятия возможны ситуации, в которых после получения планового решения могут произойти существенные отклонения от начального варианта условий и возникают уточненные условия, для которых необходимо рассчитать новое решение. Трудности в этом случае возникают в оперативности проведения расчетов, а также при всевозможных организационных согласованиях по результатам нового расчета.

Один из выходов в создавшемся положении заключается в том, чтобы после решения оптимизационной задачи провести исследование устойчивости, понимая под устойчивостью либо сохранение (малое изменение) значения функционала, либо сохранение заданных свойств решения при изменении значений заданной группы параметров.

Кроме указанной выше причины, исследование устойчивости оптимизационных задач важно проводить еще и в связи со следующими факторами.

1. Во многих практических задачах параметры или входные данные, характеризующие конкретную задачу, определены с некоторой погрешностью, и поэтому важно знать величину погрешности, которая не могла бы повлиять на решение задачи или на значение целевой функции.

2. Решение оптимизационных задач с фиксированным набором входных данных очень часто дает больше информации, чем только оптимальное решение. Это обстоятельство ставит проблему использования полученной дополнительной информации для решения «возмущенных» оптимизационных задач.

3. В ряде практических ситуаций входные данные можно рассматривать как некоторые функции от параметров, характерные для модели, в рамках которой формулируется оптимизационная задача. Тогда возникает проблема распространения решения, т.е. можно ли разбить всю область изменения параметров на множество подобластей, все точки которых приводят к одинаковым решениям исходной задачи.

Проведение анализа всех параметров модели на «чувствительность», т.е. на возможные изменения, оказывающие серьезное влияние на оптимальное решение, имеет большое значение для практики, так как позволяет определить необходимую точность исходной информации, которая дает возможность практически использовать полученные результаты расчетов.

В работе [10] рассматривается устойчивость в линейных дискретных экстремальных задачах как устойчивость в некоторых траекторных задачах, которые могут быть сформулированы следующим образом.

Задана квадратная матрица A порядка n с вещественными элементами и некоторое множество M_n допустимых последовательностей (траекторий), состоящих из n элементов матрицы A. Требуется из множества M_n выделить такую траекторию r, сумма элементов которой минимальна. Содержательный смысл исследований на устойчивость в рассматриваемых задачах состоит в следующем: в каких пределах можно изменять независимо друг от друга все или часть элементов матрицы A так, чтобы множество оптимальных траекторий любой из измененных матриц не содержало траекторий, отличных от оптимальной траектории исходной матрицы. В указанной выше работе дано определение радиуса устойчивости матрицы A и найдено для него аналитическое выражение, приведены оценки радиуса устойчивости.

Изучению устойчивости в линейных и нелинейных задачах оптимизации уделяется значительное место. Некоторые постановки исследуют вариации оптимума функционала при возмущениях параметров задачи, в других — исследуется устойчивость в классическом смысле.

В задачах линейного программирования рассматриваются «возмущения» элементов матрицы ограничений и вектора правых частей, сохраняющие базис, на котором построен оптимальный план исходной задачи [9].

В процессе исследования полученного решения оптимизационной задачи линейного программирования часто анализируется влияние на решение изменения критерия оптимальности и изменения коэффициентов целевой функции. Устойчивость плана к смене критерия оптимальности можно рассматривать как устойчивость при различных возмущениях в управлении производственной системой. Если при смене критерия оптимальности не меняется программа производственно-хозяйственной деятельности предприятия, то в этом случае устойчивость характеризует степень эффективности функционирования самой производственной системы.

Анализ устойчивости оптимального плана может быть произведен по следующим исходным данным:

- изменяются плановые задания на объем выпускаемой продукции по каждому виду;
- изменяются объем и специализация оборудования, которое используется при выпуске изделий;
- изменяются интенсивности поступающих потоков сырья, материальных ресурсов, комплектующих и т.д.

Рассматриваемые в работе задачи оптимального распределения ресурсов условно можно разделить на три класса.

К первому классу задач относятся задачи планирования выполнения комплекса работ. Постановка этих задач заключается в следующем. Пусть задан комплекс работ, которые необходимо выполнить, используя ограниченный объем многократно используемых ресурсов, определенных вектором $b = (b_1, ..., b_m)$. Последовательность выполнения работ задается ориентированным ациклическим графом. Каждая работа может начать выполняться после того, как выполнены все ее работы-предшественники. Выполняться работа i может только в том случае, если ей выделены ресурсы в количестве, заданном вектором $a = (a_{i1}, ..., a_{im})$. После окончания выполнения работы i ресурсы в объеме, заданном вектором a_i, могут быть переданы для выполнения других работ. При этом работы могут допускать прерывание либо прерывание может быть запрещено.

Область применения таких задач — это планирование реализации больших проектов, выполнение комплекса строительных и ремонтных работ, оперативно-производственное планирование работы участка или цеха производственного предприятия, планирование проведения научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок и т.д.

Основными критериями, по которым осуществляется планирование выполнения работ (операций), являются минимизация времени выполнения комплекса работ и среднее взвешенное время прохождения работ.

Необходимо отметить, что данная дискретная оптимизационная задача принадлежит к классу NP-полных задач как для одного, так и для второго критерия оптимальности [9].

В предлагаемой работе исследуется несколько подходов при определении областей устойчивости для заданного класса задач.

В начале рассмотрена ситуация, когда длительности выполняемых работ могут принимать любые значения из области, определенной n-мерным параллелепипедом $P = \prod_{i=1}^{n}[t_i^1; t_i^2]$. В проведенных исследованиях показано, что P может быть разбит на конечное множество выпуклых многогранников, задающих длительность выполняемых работ, на каждом из которых сохраняется одна и та же оптимальная последовательность выполнения работ. Разбиение на многогранники устойчивости может быть осуществлено как для критерия быстродействия расписания, так и для случая, когда целевым функционалом задачи является среднее взвешенное время завершения всего комплекса работ. Рассмотрены свойства полученного разбиения, в частности сформулированы условия, при которых для всех точек параллелепипеда P сохраняется одна и та же оптимальная последовательность выполняемых работ.

Аналогичные исследования проведены для случая, когда изменяется объем ресурсов, участвующих в выполнении работ, а также перечень работ и структура орграфа, задающая последовательность выполнения работ.

Другим подходом для определения области устойчивости расписания является определение максимально возможного увеличения длины всего множества работ (или некоторого его подмножества), которое не нарушает оптимальной последовательности выполнения работ. Показано, что реализация этого алгоритма состоит в двухэтапной схеме решения оптимизационной задачи.

Далее предлагается методика исследования устойчивости по функционалу оптимального по быстродействию расписания для ситуации прерываемых работ, когда объем ресурсов, участвующих в выполнении работ, является переменным.

В книге приводится формула вычисления длины расписания в том случае, когда выполнение работы может осуществляться параллельно несколькими приборами, показана непрерывная зависимость длины расписания от объема используемых при выполнении работ ресурсов.

При планировании выполнения комплекса работ на машиностроительном предприятии кроме приведенных выше критериев при составлении расписаний могут быть еще и следующие показатели эффективности: коэффициент использования сборочного оборудования, оптимизация объема межоперационных заделов, соблюдение директивных сроков обработки, обеспечение комплектности выпуска изделий.

Одним из основных требований, предъявляемых к производственной системе, является устойчивость производственного процесса при наличии различного рода внешних и внутренних отклоняющих воздействий.

Под внешними отклонениями согласно [17] понимается обновление продукции, переподготовка в связи с этим производства и изменение партий запуска, нарушение плана поставок заготовок и комплектующих, требование от служб управления выполнения дополнительных комплектов деталей.

Внутренними отклонениями являются следующие: сбои и поломки оборудования и инструмента, брак, необеспеченность трудовыми ресурсами и т.д.

Для этого класса моделей исследована устойчивость расписаний как по функционалу, так и по решению при возмущении следующих параметров:

1) изменение длительности работ;
2) изменение орграфа, задающего последовательность и множество выполняемых работ;
3) изменение объема ресурсов, участвующих в выполнении работ.

Ко второму классу задач, рассматриваемых в книге, относится задача распределения ресурсов предприятия с целью выбора оптимального варианта его производственно-хозяйственной деятельности.

В этой задаче рассмотрено планирование выпуска конечной продукции промышленным предприятием на длительный период времени (год и более). В качестве критерия, который является одним из самых распространенных [3], выбрана максимизация прибыли предприятия.

В книге исследуется ситуация, когда такие показатели, влияющие на прибыль предприятия, как цена выпускаемых изделий и цена материальных ресурсов, не могут быть определены точно. Исследуются методы определения наибольшего отклонения перечисленных параметров от первоначальных значений, сохраняющие (мало изменяющие) значение целевой функции или решение.

К третьему классу задач, исследуемых в книге, с точки зрения анализа устойчивости решений относятся задачи распределения ресурсов в конвейерных системах обработки заявок.

В отличие от первого класса моделей партии заявок (работы) поступают на вход системы обработки динамически и могут в процессе обработки дробиться на более мелкие партии любого объема, тем самым возможна обработка одной партии заявок одновременно на нескольких последовательных операциях. Технологическая последовательность обработки неоднородных заявок задана орграфом G.

Заявки обрабатываются с помощью ограниченных ресурсов многократного использования. Областью применения таких моделей являются информационные системы, специализирующиеся на актуализации и ведении больших банков данных на основе поступающих первичных информационных документов (заявок), производственные системы, где нет ограничений на объем передаваемых партий деталей от одной операции к другой, транспортные системы, предназначенные для перевозки динамического потока, поступающих пассажиров и грузов по транспортной сети.

Критериями, по которым организуется обработка поступающих заявок, являются: минимизация необработанного суммарного объема заявок на конец директивного периода; минимизация времени пребывания заявок в системе с момента поступления до начала обработки.

В рассматриваемом классе моделей неопределенность в исходных данных, в частности, заключается в следующем: неточно задана интенсивность поступления заявок; объем используемых ресурсов при обслуживании заявок может быть не постоянным, а меняться по неизвестному закону; неточно известны корреспонденции перевозимых городским транспортом пассажиров.

В последующих главах работы (главы 2–6) исследуется устойчивость моделей по решению и по функционалу при изменении исходных данных.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют методы количественного анализа в экономике?
2. В чем заключается проблема управления ограниченными ресурсами в логистике?
3. Какие ресурсы относятся к складируемым, а какие — к нескладируемым?
4. Какие существуют модели управления работами проекта?
5. Какие существуют методы управления работами проекта?
6. В чем заключается проблема неполноты исходной информации?
7. Что принято понимать под устойчивостью в задачах управления работами проекта? Почему так важно проводить исследование устойчивости?

Глава 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСА РАБОТ ПРИ НЕТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИСХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ В ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

2.1. ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСА РАБОТ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОМ ЗАДАНИИ ИХ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Проблемам распределения ограниченных ресурсов посвящены многочисленные отечественные и зарубежные публикации, к числу которых, в частности, принадлежат [7, 4]. К задачам, связанным с оптимальным распределение ресурсов, относятся прежде всего задачи дискретного сетевого планирования. Одна из распространенных постановок этих задач заключается в следующем.

Используя ограниченное множество ресурсов или обслуживающих приборов, необходимо выполнить определенную совокупность работ (заданий). Выполнение работ должно осуществляться с учетом ограничений, наложенных на последовательность их выполнения, и ограничений на используемые ресурсы в каждый момент времени выполнения работ. Критерием, по которому планируется последовательность выполнения работ, является либо минимизация времени, за которое будут выполнены все задания, либо среднее время пребывания заданий в системе. Постановки этих задач могут быть или детерминированными, т.е. все исходные параметры задачи заданы точно, или часть параметров, таких, например, как длительность выполнения заданий, множество выполняемых заданий, могут изменяться в заданных диапазонах.

В последнем случае, как отмечалось выше, для эффективного использования модели необходимо исследование устойчивости задачи при варьировании указанными параметрами.

При исследовании устойчивости задач теории расписаний при переменных длительностях выполнения работ различают два подхода. В первом из них предполагается, что некоторые исходные параметры модели могут принимать любое значение из соответствующего числового интервала.

В этих предположениях ставится задача разбиения выпуклого линейного многогранника на конечное число таких областей, чтобы для всех точек фиксированной области, задающих длительность выполняемых работ, сохранялась последовательность выполнения работ в оптимальном расписании.

Второй подход характеризуется тем, что для составленного расписания необходимо определить окрестность максимального радиуса, при изменении в которой исходных данных задачи будет сохраняться расписание выполнения работ.

Ниже будет рассмотрен первый подход в условиях, когда длительность выполняемых работ может принимать любое заданное значение из соответствующего числового интервала. Формальная постановка этой задачи заключается в следующем.

Пусть есть множество работ $d_1, ..., d_n$, последовательность выполнения которых задана ациклическим орграфом G, у которого отсутствуют транзитивные дуги, поэтому каждой работе d_i может быть поставлено в соответствие множество работ $R_i = \{d_{Ri}\}$ так, что в множество R_i входят те и только те работы, которые должны быть выполнены, прежде чем может быть начато выполнение работы d_i.

Каждая работа характеризуется интервалом длительности выполнения $[t_i^1, t_i^2]$. Длительность работы d_i может быть любым числом из интервала $[t_i^1, t_i^2]$. Ресурсы, необходимые для выполнения работы d_i, задаются вектором $\bar{a}_i = (a_{i1}, ..., a_{im})$, где a_{ij} — количество ресурсов вида j, необходимых для выполнения работы i ($i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., m$). Общий объем ресурсов, который может привлекаться к выполнению работ, задается вектором $b = (b_1, ..., b_m)$.

Ресурсы, используемые для выполнения каждой из работ, являются многократно используемыми, т.е. после завершения выполнения работы могут быть переданы для выполнения работам из множества невыполненных работ. Прерывания в выполнении работ не допускаются, т.е. работа после начала ее выполнения должна выполняться до полного ее завершения. Выполнение работ происходит по допустимому расписанию, которое определяется следующим образом.

Определение 2.1. Допустимым расписанием выполнения работ d_1, ..., d_n назовем набор множеств работ $X_1, ..., X_k$ и набор интервалов времени $[\tau_1^1, \tau_2^1]$, ..., $[\tau_1^k, \tau_2^k]$ длиной $T_1, ..., T_k$ соответственно такой, что в интервале времени $[\tau_1^i, \tau_2^i]$ выполняются работы только из множества X_i ($i = 1, ..., K$; $K \le n$). При этом должны выполняться следующие ограничения:

1) работа d_i может начать выполняться только в том случае, если выполнены все работы R_i.

Отметим, что последовательность выполнения работ может быть задана также матрицей R размерности $n \times n$;

2) общий объем используемых ресурсов в каждый момент времени интервалов $[\tau_1^1, \tau_2^1]$ не должен превышать значения b_j ($j = 1, \ldots, m$);

3) все работы d_i ($i = 1, \ldots, n$) должны непрерывно выполняться в течение времени t_i, где t_i — продолжительность работы d_i.

Задача составления оптимального расписания заключается в том, чтобы для каждого вектора длительности работ $t \in \prod\limits_{t=1}^{n}[t_i^1, t_1^2]$ $(t_i^1 > 0)$ найти расписание минимальной длины. Обозначим через P n-мерный параллелепипед $P \in \prod\limits_{t=1}^{n}[t_i^1, t_1^2]$. Тогда задача отыскания минимального по длительности расписания для каждого $t \in P(t = t_1, \ldots, t_n)$ может быть сформулирована следующим образом.

Для каждого $t \in P$ найти минимум функционала

$$\sum_{l=1}^{k} T_l \tag{2.1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} X_l^i a_{ij} \le b_j \qquad \begin{matrix} j = 1, \ldots, m; \\ l = 1, \ldots, k; \end{matrix} \tag{2.2}$$

$$\sum_{l=1}^{k} X_l^i T_l C_l^i \ge t_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Если $X_l^i \ne 0$, то

$$\sum_{\mu=1}^{l-1} X_\mu^i T_\mu C_\mu^i \ge t_i \tag{2.4}$$

для всех $d_\alpha \in R_i$ ($i = 1, \ldots, n$)

$$T_l \ge 0 \ (l = 1, \ldots, k), \tag{2.5}$$

где T_l — величина интервала времени $[\tau_1^l, \tau_2^l]$.

Пусть $t \in P(t = (t_1, \ldots, t_n))$ задает длительность работ, для которых находится оптимальное расписание.

$$X_l^i = \begin{cases} 1, \text{если в 1-й интервал времени выполняется работа } d_i; \\ 0, \text{если работа } d_i \text{ в этом интервале не выполняется.} \end{cases}$$

C_l^i — равно единице в том случае, если существуют такие K_1, K_2, что $K_1 + K_2 \le l$, $\sum\limits_{j=K_1}^{K_1+K_2} X_j^i T_j \ge t_i$ и при этом $X_{j_i}^i = 1$ для всех $K_1 \le j \le K_1 + K_2$. В остальных случаях $C_l^i = 0$.

Прежде чем перейти к описанию метода решения поставленной задачи, докажем вспомогательное утверждение. Зафиксируем какой-либо вектор $t \in P$, задающий длительность выполнения работ.

Среди всех допустимых расписаний, задачи (2.1)–(2.5), рассмотрим те, которые могут быть получены по следующей схеме. При первом назначении работ на выполнение рассмотрим все подмножества работ, которые могут выполняться на интервале $[\tau_1^1, \tau_2^1]$, не нарушая ограничения на последовательность выполнения работ и ресурсные ограничения. Пусть векторы $\{X_1^1, ..., X_{k_1}^1\}$ соответствуют этим подмножествам работ так, что

$$X_{ji}^1 = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-я работа вошла в подмножество } j; \\ 0, \text{если } i\text{-я работа не вошла в подмножество } j. \end{cases}$$

Введем отношение частичного порядка на множестве векторов $\{X_1^1, ..., X_{k_1}^1\}$. Будем считать, что $X_j^1 \ge X_e^1$, если $X_{ji}^1 \ge X_{ei}^1$ $(i = 1, ..., n)$.

Заданное отношение порядка разбивает множество векторов $\{X_1^1, ..., X_{k_1}^1\}$ на классы, в каждом из которых существует максимальный элемент. Оставим среди множества векторов $\{X_1^1, ..., X_{k_1}^1\}$ только максимальные элементы и выберем какой-либо из них: X_p^1. Среди работ, соответствующих ненулевым координатам вектора X_p^1, выберем такую работу d_{p1}, у которой время выполнения минимально. Положим $T_1 = t_{p1}$ и будем считать, что работа d_{p1} выполнена. После этого перейдем к построению совокупности векторов $\{X_1^1, ..., X_{k_1}^1\}$, соответствующих множеству работ, готовых к выполнению после выполнения работы.

Выполняя процедуру выбора максимальных элементов и выбирая один из таких элементов, найдем минимальную по продолжительности работу d_{p2} с учетом ее возможного выполнения на предыдущем шаге. Будем считать $T_2 = t'_{p2}$, где $t'_{p2} = t_{p2}$, если $X_{pp2}^1 = 0$ и $t'_p = t_{p2} - t_{p1}$, если $X_{pp2} = 1$. Через k $(k \le n)$ шагов мы получим некоторое допустимое расписание задачи (2.1)–(2.5). Рассматривая все возможные варианты выбора максимальных элементов на всех этапах построения допустимого расписания, получим множество допустимых расписаний, которые назовем базовым множеством расписаний.

Каждое базовое расписание, учитывая определение 2.1, может быть представлено следующим образом. Сопоставим каждому вектору X_i, задающему множество выполняемых работ на интервале $[\tau_1^i, \tau_2^i]$, номер N_i самой короткой работы среди работ, соответствующих ненулевым координатам вектора X_i, учитывая при этом время выполнения этих работ на интервалах времени $[\tau_1^1, \tau_2^1]$, ..., $[\tau_1^{i-1}, \tau_2^{i-1}]$. Получим, что множество векторов X_i и номеров работ N_i ($i = 1$, ..., k) однозначно определяет допустимое базовое расписание.

Значение функционала (2.1) подсчитывается по формуле

$$\sum_{i=1}^{k} T_i = \sum_{i=1}^{k} t'_{N_i},$$

где t'_{N_i} — продолжительность работы d_{N_i} с учетом ее возможного выполнения на этапах 1, ..., $i - 1$. Если в задаче (2.1)–(2.5) интервалы времени $[t_i^1, t_i^2]$ таковы, что $t_i^1 = t_i^2$ для всех $i = 1, ..., n$, то получена задача оптимального распределения ресурсов с фиксированным временем выполнения работ. По построению среди базовых расписаний будет хотя бы одно расписание минимальной длины.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2.1. Длина оптимального расписания задачи (2.1)–(2.5) при фиксированном времени исполнения работ может быть представлена как $\sum_{i=1}^{n} X_i t_i$, где $X_i \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Пусть $X_1, ..., X_k$ — векторы оптимального расписания. Построим разбиение всех работ на K классов $L_1, ..., L_k$ следующим образом: $d_i \in L_j$, если $X_{ij} = 1$ ($i = 1, ..., k$). Сопоставим оптимальному расписанию орграф G, заданный следующим образом. Если $d_i \in L_1$, то $R_i = \varnothing$ ($i = 1, ..., n$). Если $d_i \in L_\mu$ и для d_i еще не построено R_i, то проверяем, существует ли K_i:

$$\sum_{j=\mu}^{\mu+k_1} X_{ji} T_j \geq t_i \quad \text{и} \quad X_{ij} = 1 \tag{2.6}$$

$(j = \mu, \mu + 1, ..., \mu + k_1)$.

В случае если (2.6) выполняется, то в множество R_i войдет работа $d_{N_{\mu-1}}$, где $N_{\mu-1}$ — номер кратчайшей работы для вектора $X_{\mu-1}$. Если $\mu - 1 = 1$, то в R_i войдет только работа $d_{N_{\mu-1}}$, в противном случае в R_i войдут еще и все работы $R_{N_{\mu-1}}$. В построенный орграф будет входить исходное множество работ $d_1, ..., d_n$, и длина критического пути будет равна продолжительности соответствующего базового расписания. Лемма доказана.

Рассмотрим свойства допустимых расписаний задачи (2.1)–(2.5) для случая, когда времена выполнения работ d_i заключены в интервалах $[t_i^1, t_i^2]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Выберем какую-либо точку $t \in P$ и построим для нее систему базовых расписаний $\{A_1, \ldots, A_N\}$. Пусть A_k^1 — одно из базовых расписаний, которому соответствует набор векторов $\{X_1^{K_1}, \ldots, X_K^{K_1}\}$ и набор номеров работ $\{N_1^{K_1}, \ldots, N_K^{K_1}\}$. Отметим, что для работы $d_{N_1}^{K'}$ выполняется одно из условий:

1) $t^1_{N_1^{K'}} = \min\limits_{i\,:\,X_{1i}^{K'} \neq 0} \{t_i^1\} = t^1_{\min 1}$;

2) $[t^1_{N_1^{K'}}, t^2_{N_1^{K'}}] \cap [t^1_{\min 1}; t^2_{\min 1}] \neq \varnothing$,

где $\min 1$ — номер работы, удовлетворяющий условию 1).

Выберем все остальные работы:

$$[t^1_{\min 1}; t^2_{\min 1}] \bigcap_{i\,:\,X_{1i}^{K'} \neq 0} [t_i^1; t_i^2] \neq \varnothing. \tag{2.7}$$

Включим в множество M_1 те работы, которые удовлетворяют условию (2.7), и работу $d_{\min 1}$. Нетрудно видеть, что для всех $t \in P$ кратчайшими работами среди работ, соответствующих ненулевым координатам вектора X_1^e, могут быть только те работы, которые принадлежат множеству M_1. Выберем какую-либо работу $d_k \in M_1$ и «назначим» ее самой короткой работой. Тогда очевидно, что длительность остальных работ должна быть такой, что $t_i^1 \geq t_k^1$ для всех $i(1 \leq i \leq n)$ $d_i \in M_1$. Поэтому преобразуем t_i^1 по формуле

$$t_i^{1'} = \max_{d_i \in M_1} \{t_k^1, t_i^1\}.$$

С другой стороны, понятно, что если d_k — кратчайшая работа, то t_k^2 не может быть больше любого из t_i^2 $(d_i \in M_1)$.

$$t_k^{2'} = \min_{d_i \in M_1} \{t_i^2\}; \tag{2.8}$$

$$t_i^{2'} = t_i^2, \;\; d_i \in M_1. \tag{2.9}$$

После того как работа d_k будет выполнена, интервалы, задающие длительность работ d_i, для которых $X_{1i}^e \neq 0$, будут удовлетворять следующим условиям:

$$t_i^{1'} \geq \max_{d_i \in M_1} \{0, t_i^1 - t_k^2\}; \tag{2.10}$$

$$t_i^{2'} \leq t_i^2 - t_k^1; \;\; d_i \in M_1. \tag{2.11}$$

Будем считать t_i^1 и t_i^2 равными правым частям в неравенствах (2.10) и (2.11). Сформируем далее множество максимальных векторов, характеризующих возможность выполнения остальных работ орграфа G, после того как выполнена работа d_k, и выберем один из них: X_2^k. Затем аналогично тому, как это было сделано выше, формируем множество кратчайших работ M_2, назначаем кратчайшую работу и преобразовываем интервалы $[t_i^1, t_i^2]$ $(1 : X_{2i}^k \neq 0)$. Когда все работы будут выполнены, получим допустимое решение для всех точек $t \in P$, удовлетворяющих системе неравенств:

$$t'_{K_e} \leq t'_{i_e} \; (e = 1, 2, ..., n; i_e : X_{i_e}^e = 1), \tag{2.12}$$

где X^e — вектор ($X_{i_e}^e = \{0, 1\}$, $i = 1, ..., n$), у которого ненулевые координаты соответствуют работам, выполняемым после завершения $(l - 1)$-й работы.

$$t'_{K_e} = \begin{cases} t_{K_e}, \text{если работа } d_{K_e} \text{ не выполнялась} \\ \text{на интервале } [\tau_1^{e-1}, \tau_2^{e-1}]; \\ t_{K_e} - \sum\limits_{i=e-1-m_e}^{e-1} t'_{K_i}, \text{если работа } d_{i_e} \text{ не выполнялась} \\ \text{на интервале } [\tau_1^{e-1}, \tau_2^{e-1}]; \end{cases}$$

$$t'_{i_e} = \begin{cases} t_{i_e}, \text{если работа } d_{i_e} \text{ не выполнялась} \\ \text{на интервале } [\tau_1^{e-1}, \tau_2^{e-1}]; \\ t_{i_e} - \sum\limits_{i=e-1-m_i}^{e-1} t'_{e_i}, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь m_e — число интервалов, предшествующих интервалу $[\tau_1^e, \tau_2^e]$, на которых выполнялась работа d_{K_e}; m_i — количество интервалов, предшествующих $[\tau_1^e, \tau_2^e]$, на которых выполнялась работа d_{K_e}; K_i — номер кратчайшей работы, выполняемой на интервале i $(i \leq e - 1)$.

Рассмотрев все возможные варианты назначения кратчайших работ из множества $M_1, ..., M_n$ при фиксированном способе выбора максимальных векторов, получим такое множество базовых расписаний, что каждое из расписаний остается допустимым для всех точек многогранника, полученного из исходного параллелепипеда добавлением системы ограничений (2.12). Этот результат можно сформулировать в виде леммы.

Лемма 2.2. Пусть необходимо выполнить работы, последовательность выполнения которых задана орграфом G и длительность выполнения работ d_i может изменяться в интервалах $[t_i^1, t_i^2]$ $(i = 1, ..., n)$. Тогда существует конечный набор базовых решений $\{A_1, ..., A_N\}$ и разбиение параллелепипеда P системой гиперплоскостей на многогранники $B_1, ..., B_N$:

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_i = P$;

2) для любого B_i существует такое базовое расписание $A_i \subseteq \{A_1, ..., A_N\}$, что оно остается допустимым для всех точек $t \in B_i$.

Непосредственно, используя лемму 2.2, можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 2.1. Для любого орграфа G, задающего последовательность выполнения работ, и любого параллелепипеда P задачи (2.1)–(2.5) существует множество гиперплоскостей, проходящих через начало координат и разбивающих параллелепипед P на конечное число многогранников, и множество таких допустимых расписаний $\{A_1, ..., A_N\}$, что каждому многограннику B_i ($i = 1, ..., N$) взаимно однозначно соответствует некоторое допустимое расписанное $A_i \subseteq \subseteq \{A_1, ..., A_N\}$, которое остается оптимальным для всех точек многогранника B_i.

Доказательство. Как было показано выше, при фиксированном времени выполнения работ для каждого базового расписания можно построить такой орграф G' из работ исходного орграфа G, что длина базового расписания будет равна длине критического пути орграфа G. Построим для базового расписания A_i соответствующий орграф G', отражающий последовательность выполнения работ по расписанию A_i. Пусть $D_1^i, ..., D_{N_i}^i$ — все пути орграфа G_i', соответствующего базовому расписанию A_i. Тогда среди путей $D_1^i, ..., D_{N_i}^i$ существует по крайней мере один критический путь D_K^i такой, что для любой точки $t \in B_i$ длина расписания A_i равна $\sum\limits_{j \in D_K^i} t_j$.

Интервал изменения длины пути D_K^i, а значит, и интервал изменения длины расписания $[T_i^1, T_i^2]$ могут быть оценены, если будут вычислены максимум и минимум функционала:

$$\sum_{j \in D_K^i} t_j \tag{2.13}$$

при ограничениях:

$$c^i t \le V; \tag{2.14}$$

$$t \ge 0, \tag{2.15}$$

где $t = (t_1, ..., t_n)$, c^i — матрица $k \times n$; $V = (V_1, ..., V_k)$; неравенства (2.14), (2.15) задают многогранник B_i.

Пусть $[T_j^1, T_j^2]$ ($j = 1, ..., N$) — верхнее и нижнее значения соответствующего базового расписания A_j на многограннике B_i. Определим для заданного разбиения величины $T_{\min}^1$ и $T_{\min}^2$ по формулам:

$$T^1_{\min} = \min_{j=1,\ldots,N} T^1_j;$$

$$T^2_{\min} = \min_{j=1,\ldots,N} T^2_j.$$

Рассмотрев все возможные разбиения параллелепипеда P на систему многогранников $\{B_1, \ldots, B_{Ni}\}$ ($i = 1, \ldots, L_2$), где L_2 — количество разбиений при всех возможных вариантах выбора максимальных векторов на всех этапах построения допустимого расписания, получим возможность попарно сравнивать значения расписаний на общей части многогранников B_1. На каждом шаге l ($1 \le l \le n$) построения допустимого базового расписания при новом разбиении параллелепипеда P можем оценить снизу значение этого расписания.

Пусть $D_1, \ldots, D_K$ — все пути орграфа G, задающего последовательность выполнения работ. Вычислим минимум следующего выражения:

$$\min \sum_{j \in D^i_j} t_i = T_j \; (j = 1, \ldots, k)$$

при ограничениях:

$$Ct \ge 0; \; t \ge 0; \tag{2.16}$$

где D^i_j — невыполненные работы пути D_j; C — матрица $k \times n$; k — количество ограничений, полученных за l шагов построения базового расписания.

Ограничения (2.16) задают построенный многогранник при составлении базового расписания. Обозначим $T_{\min} = \min\limits_{(j=1,\ldots,K)} T_j$. Если окажется, что $\sum\limits_{i=1}^{l-1} t^1_i + T_{\min} \ge T^2_{\max}$, где t^1_i — нижняя оценка длительности кратчайших работ на этапах $1, 2, \ldots, l-1$, то прекращаем дальнейшее построение допустимого расписания, так как оно заведомо хуже составленного ранее.

После того как построено очередное разбиение, на пересечении многогранников можно оценить длину нового допустимого расписания и составленного ранее, при этом возможны два варианта:

1) интервалы длительности допустимых расписаний не пересекаются;

2) интервалы длительности пересекаются.

В первом случае на пересечении многогранников задается то допустимое расписание, у которого верхняя оценка времени выполнения всех работ ниже.

Во втором случае проводится дополнительная разделяющая гиперплоскость вида

$$\sum_{i \in A_{\text{Н}}} t_i = \sum_{i \in A_{\text{СТ}}} t_i, \tag{2.17}$$

где в левой части равенства (2.17) стоит сумма длительностей работ соответствующего критического пути для нового, а в правой части — критического пути для ранее полученного допустимого расписания. Таким образом, мы разделили гиперплоскостью (2.17) общую часть многогранников для решения $A_{\text{Н}}$ и $A_{\text{СТ}}$ на два многогранника и поставили каждому из них в соответствие решения $A_{\text{Н}}$ и $A_{\text{СТ}}$. После того как будут произведены все возможные выборы максимальных векторов при построении допустимых расписаний, получим такое разбиение параллелепипеда P на многогранники $B_1, ..., B_{N_1}$, что каждому многограннику B_1 будет поставлено в соответствие расписание A_1, которое будет наилучшим среди базовых допустимых расписаний для всех $t \in B_1$, а поэтому оно будет и оптимальным для этих точек.

Далее многогранники, полученные при разбиении, о котором говорится в теореме 2.1, будем называть многогранниками устойчивости оптимальных решений.

Рассмотрим некоторые свойства разбиений, полученных в теореме 2.1.

Лемма 2.3. Пусть для орграфа G и параллелепипеда возможных времен выполнения работ P существует разбиение на такие многогранники B_1 ($i = 1, ..., N$), что каждому многограннику соответствует некоторое оптимальное для всех точек B_1 решение A_1 ($i = 1, ..., N$). Тогда, если $t ⋹ P$, но существует такое $\lambda > 0$, что $\lambda t \in P$, и такое $A_K \subseteq \subseteq \{A_1, ..., A_N\}$, что A_K является оптимальным расписанием для точки λt, то расписание A_K будет оптимальным и для точки t.

Доказательство. Утверждение леммы 2.3 следует из того факта, что если в орграфе G с фиксированной длительностью выполнения работ и оптимальным расписанием A время выполнения всех работ умножить на одну и ту же константу $c > 0$, то расписание A останется оптимальным для орграфа G, продолжительность работ которого ct_i ($i = 1, ..., n$), где t_i — первоначальная продолжительность работ.

Предположим, что для всех работ d_i ($i = 1, ..., n$) продолжительность работ изменяется в интервале $[0, t_i^1]$ ($i = 1, ..., n$), т.е. параллелепипед $P^\circ = [0, t_1^2] \times [0, t_2^2] \times ... \times [0, t_n^2]$ в качестве одной из своих вершин содержит начало координат. Тогда разбиение на многогранники устойчивости оптимальных решений обладает свойствами, описываемыми следующей леммой.

Лемма 2.4. Пусть для некоторого множества работ $d_1, \ldots, d_n$, последовательность выполнения которых задана орграфом G, существует разбиение параллелепипеда $P°$ множеством гиперплоскостей $\{\Gamma_1^\circ, \ldots, \Gamma_M^\circ\}$ на многогранники устойчивости B_i $(i = 1, \ldots, N)$ оптимальных решений $\{A_1, \ldots, A_N\}$. Тогда это решение обладает следующими свойствами.

1. Для любого другого параллелепипеда P' множество гиперплоскостей $\{\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_M\}$, разбивающее параллелепипед на многогранники устойчивости оптимальных решений, таково, что

$$\{\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_{M'}\} \subseteq \{\mathring{\Gamma}_1, \ldots, \mathring{\Gamma}_M\}.$$

2. Для каждого $t \in P°$ $(t_i \geq 0;\ i = 1, \ldots, n)$ существует $A_K \subset \{A_1, \ldots, A_N\}$, которое является оптимальным для точки t.

3. Среди множества оптимальных решений $\{A_1, \ldots, A_N\}$ существуют такие, которые будут оптимальны для всех орграфов работ G', полученных из G удалением любого конечного числа работ.

Доказательство. Утверждение 1 леммы 2.4 следует из того, что:

а) при построении всех возможных разбиений параллелепипеда P на многогранники B_i $(i = 1, \ldots, N_i)$ и соответствующих систем допустимых решений на каждом шаге построения какого-либо допустимого расписания на роль самой короткой работы будут претендовать все работы, выполнявшиеся на соответствующем интервале времени;

б) любые два допустимых расписания A_K и A_e, каждое из которых остается допустимым для всех точек многогранников B_K и B_e, в качестве нижней оценки времени выполнения всех работ имеют нуль.

Докажем утверждение 2 леммы 2.4.

Выберем λ по формуле

$$\lambda = \min_{i=1,\ldots,n} \frac{t_i^2}{t_i}.$$

Тогда точка $\lambda t \in P$. Из леммы 2.3 следует, что в этом случае для t существует оптимальное расписание из системы оптимальных расписаний $\{\mathring{A}_1, \ldots, \mathring{A}_M\}$.

Утверждение 3 леммы является следствием того факта, что при построении разбиения параллелепипеда P на многогранники устойчивости оптимальных решений среди множества расписаний $\{\mathring{A}_1, \ldots, \mathring{A}_M\}$ существуют оптимальные расписания для всех точек параллелепипеда P, в том числе и для его граничных точек.

Пусть в орграф, задающий последовательность выполнения работ $d_1, ..., d_n$, входят пути $S_1, ..., S_K$. Определим понятия параллельно выполняемых работ.

Определение 2.2. Назовем работы d_e и d_q параллельно выполняемыми, если они не входят в один и тот же путь орграфа G.

Следующая лемма описывает свойства оптимальных расписаний при некоторых специальных ограничениях на параллелепипед P, задающий длительность выполняемых работ.

Лемма 2.5. Пусть орграф G работ $d_1, ..., d_n$ задан матрицей R и ресурсы $b = (b_1, ..., b_m)$ таковы, что любые две параллельно выполняемые работы могут выполняться одновременно. Тогда для любой работы d_e ($e = 1, ..., n$) существует параллелепипед P длительности выполнения работ, при этом для всех точек параллелепипеда оптимальным будет любое базовое расписание, на каждом этапе выполнения которого выполняется работа из критического пути орграфа G.

Доказательство. Построим параллелепипед P_e следующим образом. Зададим для всех работ d_i ($i \neq e$) произвольно интервалы выполнения работ $[t_i^1, t_i^2]$. Для работы d_e выберем t_e^1, чтобы выполнялось неравенство

$$t_e^1 > \sum_{\substack{i=1 \\ i=e}}^{n} t_i^2,$$

а $t_i^2 = t_i^1 + \alpha$, где $\alpha > 0$.

Нетрудно видеть, что для всех $t \in P_e$ критическими могут быть только пути, в которые вошла работа d_e. Так как $T_{A_{\text{опт}}} > T_{kp}$, где $T_{A_{\text{опт}}}$ — длина оптимального расписания, если на каждом этапе построения базового расписания выделять ресурсы в первую очередь работам критического пути, то по условию леммы $T_{A_{\text{опт}}} = T_{kp}$, что и доказывает утверждение леммы.

Рассмотрим еще один подход для получения многогранников устойчивости оптимальных решений, когда длительности выполнения работ меняются в параллелепипеде P.

Пусть фиксирована $t \in P$. Рассмотрим некоторое допустимое базовое решение задачи (2.1)–(2.5), когда длины выполнения работ равны $t' = (t'_1, ..., t'_n)$. Как было показано выше, любое базовое решение может быть представлено как набор векторов $\{X_1, ..., X_K\}$, каждому из которых поставлена в соответствие работа d_{e_i} ($i = 1, ..., K$), являющаяся самой короткой работой среди работ, соответствующих ненулевым координатам вектора X_i. Каждому базовому расписанию может быть поставлена в соответствие система неравенств вида

(2.12). Если построить систему неравенств для всех базовых решений точки t' и взять их объединение, то получим многогранник M^*, на котором система базовых решений остается такой же, как и для точки t'. На многограннике M^* могут быть определены интервалы $[T_1^1, T_2^1], \ldots, [T_N^1, T_N^1]$ системы базовых решений, задающие пределы, в которых может меняться длина базовых расписаний $\{A_1, \ldots, A_N\}$.

Выберем среди них

$$T_{\min}^1 = \min_{j=1,\ldots,N} T_j^1.$$

Отбросим все те A_K $(1 \le K \le N)$, для которых $[T_K^1, T_K^1] \cap [T_{\min}^1, T_{\min}^1]$.

Остальные базовые расписания $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ $(N_1 \le N)$ будут принимать оптимальные значения на некоторых точках многогранника M^*.

Пусть многогранник M^* задан системой неравенств

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij} t_i \le b_j^1, \quad j = 1, 2, \ldots, m_1;$$

$$t_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда для решения $A_K \subseteq \{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ многогранник устойчивости оптимального решения A_K задается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij} t_i \le b_j^1 \quad (j = 1, \ldots, m_1; t_i \ge 0; i = 1, \ldots, n);$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{iK} t_i \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} t_i \quad (j = 1, \ldots, N_1; j \ne K),$$

где $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} t_i$ $(j = 1, \ldots, N_1; j \ne K)$ задает линейный функционал базового расписания A_j.

Описанная выше процедура позволяет получить многогранник устойчивости M' оптимального решения по заданной точке $t' \in P$, и расписание A' остается оптимальным для всех точек $t \in M'$. Это позволяет строить многогранники устойчивости оптимальных решений, не делая полного разбиения параллелепипеда на многогранники устойчивости оптимальных решений.

Рассмотрим случай разбиения на многогранники устойчивости оптимальных решений, если время выполнения работ изменяется на множестве, заданном ограничениями вида:

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij} t_i \le B_j, \quad j = 1, \ldots, l; \tag{2.18}$$

$$t_i \ge 0; \ i = 1, \ldots, n. \tag{2.19}$$

Пусть $G_1, \ldots, G_K$ — вершины многогранника, заданного неравенствами (2.18), (2.19), координаты которых соответственно равны $G_1 = (G_1^1, \ldots, G_1^n), \ldots, G_K(G_k^1, \ldots, G_K^n)$. Построим параллелепипед P с вершинами:

$$t_i^1 = \min_{l=1,\ldots,K} \{G_i^1\}, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{2.20}$$

$$t_i^2 = \max_{l=1,\ldots,K} \{G_i^2\}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.21}$$

Этот параллелепипед будет содержать в себе многогранник, заданный неравенствами (2.18)–(2.19). Для решения задачи разбиения на многогранники устойчивости для случая, когда время выполнения работ меняется на множестве, заданном неравенствами (2.18)–(2.19), нужно сделать разбиение на многогранники устойчивости оптимальных решений для параллелепипеда, заданного формулами (2.20)–(2.21), и после этого для каждой системы неравенств, задающих многогранник, добавить ограничения (2.18).

Пусть длина выполнения работ изменяется на многограннике P, заданном неравенствами (2.18)–(2.19). Рассмотрим следующую задачу: среди точек многогранника P найти такую, для которой значение оптимального расписания было бы не больше, чем для всех других точек многогранника P. Назовем эту точку точкой глобального оптимума задачи (2.1)–(2.5). Если многогранник P является параллелепипедом $P = \prod_{i=1}^{n} [t_i^1, t_i^2]$, то решение этой задачи дается следующей леммой.

Лемма 2.6. Вершина параллелепипеда P, удовлетворяющая условию $t_1 = t_i^1$, является точкой глобального оптимума для задачи (2.1)–(2.5) с нефиксированным временем выполнения работ.

Доказательство. Предположим, что существует $t' \neq t$ и $A'_{t'} < A_t$, где A_t и $A'_{t'}$ — значения оптимальных расписаний для точек t и t'. Тогда среди координат точки $t' = (t'_1, \ldots, t'_n)$ существует $t'_j > t_j$ $(1 \leq j \leq n)$, а для всех остальных i $(i = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$ $t'_i > t_i$. Это означает, что, увеличив продолжительность работы d_j, сократим длину оптимального расписания. Полученное противоречие и доказывает утверждение леммы.

В случае если многогранник M, заданный формулами (2.18)–(2.19), не является параллелепипедом, точка глобального оптимума может быть определена следующим образом. Сначала осуществляется разбиение многогранника M на многогранники устойчивости оптимальных решений M_i $(i = 1, \ldots, N)$, где N — количество многогранников, полученных при разбиении, и пусть f_i $(i = 1, \ldots, N)$ — линейные функционалы, соответствующие оптимальному решению A_i для многогранника M_i. Далее решается для каждого M_i задача минимизации функционала f_i на многограннике и затем определяется

$$\min_{(i=1,\ldots,N)} f_i^{\min}, \tag{2.22}$$

где $f_i^{\min}$ — минимум функционала f_i на многограннике M_i.

Точка $t \in M$, на которой будет выполняться (2.22), будет точкой глобального оптимума.

Теорема 2.2. Пусть длина выполнения работ заключена в многограннике M, заданном неравенствами (2.18)–(2.19). Тогда точка глобального оптимума является граничной точкой многогранника M.

Для доказательства теоремы 2.2 покажем справедливость следующих вспомогательных лемм.

Лемма 2.7. Пусть задан орграф, отражающий последовательность выполнения работ орграфа G с фиксированным временем выполнения работ t, и существует базовое оптимальное расписание $A_{\text{опт}}$ для орграфа G. Тогда если длины всех работ умножить на $C > 0$, то оптимальное расписание сохранится и $T'_{A_{\text{опт}}} = CT_{A_{\text{опт}}}$, где $T_{A_{\text{опт}}}$ — длина оптимального расписания для работ длительности t_i, а $T'_{A_{\text{опт}}}$ длина оптимального расписания для работ с временем выполнения ct_i ($i = 1, \ldots, n$).

Доказательство. Утверждение леммы очевидно. Геометрически это означает, что если $A_{\text{опт}}$ является оптимальным расписанием для точки t, то оно будет оптимально и для всех точек прямой, проходящей через начало координат и через точку t.

Лемма 2.8. Если в орграфе G с фиксированными длительностями выполнения работ время выполнения всех работ уменьшить на величину $\varepsilon > 0$, то длина оптимального расписания уменьшится не менее чем на ε.

Доказательство. Выберем среди работ d_i ($i = 1, \ldots, n$) работу с максимальной продолжительностью $d_{\max}$, время выполнения всех работ разделим на величину C, где

$$C = \frac{t_{\max}}{t_{\max} - \varepsilon}; \quad t'_i = \frac{t_i}{c} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Из леммы 1.6 следует, что оптимальное расписание при этом не изменится.

Пусть $\sum\limits_{i \in D_K} t_i$ — время оптимального расписания для орграфа работ с продолжительностью работ t_i и $\sum\limits_{i \in D_K} t'_i$, время выполнения работ, когда длительность выполнения работ t'_i; D_K — критический путь в сети, соответствующей оптимальному расписанию.

Оценим, как изменилась продолжительность работ по сравнению с t_i $(i = 1, ..., n)$:

$$t_i - t'_i = t_i - \frac{t_i(t_{\max} - \varepsilon)}{t_{\max}} = \frac{t_i \varepsilon}{t_{\max}} \leq \varepsilon.$$

Оценим, как изменилось время оптимального расписания:

$$\sum_{i \in D_K} t_i - \sum_{i \in D_K} t'_i \leq \sum_{i \in D_K} t_i - \sum_{i \in D_K} \frac{t_i(t_{\max} - \varepsilon)}{t_{\max}} = \frac{\varepsilon \sum_{i \in D_K} t_i}{t_{\max}} \leq \varepsilon.$$

Так как $\sum_{i \in D_K} t_i \geq t_{\max}$, то $\dfrac{\sum_{i \in D_K} t_i}{t_{\max}} \geq \varepsilon$.

Уменьшим теперь продолжительность всех работ t'_i на величину $\varepsilon(t_{\max} - t_i)/t_{\max} \geq 0$. Получим для всех работ $t'_i = t_i - \varepsilon$.

Так как при сокращении времени выполнения некоторых работ длина оптимального расписания не увеличится, то отсюда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2.2. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и поэтому точка глобального оптимума $t = (t_1, ..., t_n)$ является внутренней. Тогда можно подобрать такое ε, что $t'_i = t_i - \varepsilon \in M$, а следовательно, по лемме длина оптимального расписания для точки $t' = (t'_1, ..., t'_n)$ меньше, чем для точки $t = (t_1, ..., t_n)$, что противоречит первоначальному предположению.

2.2. ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ОБЪЕМЕ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ РЕСУРСОВ

Вернемся к задаче с фиксированным временем выполнения работ и рассмотрим зависимость времени выполнения всего множества работ по оптимальному расписанию от величины вектора ресурсов $b = (b_1, ..., b_m)$ при условии, что для любой работы d_j количество потребляемого ресурса a_{ij} в процессе ее выполнения постоянно. Легко видеть, что для того, чтобы все работы могли быть выполнены, вектор b должен удовлетворять следующим условиям:

$$b_j \geq \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}, \; i = 1, \dots, m. \tag{2.23}$$

С другой стороны, если вектор ресурсов b таков, что можно построить базовое расписание, для которого в каждый момент времени выполняются все работы, удовлетворяющие ограничениям на последовательность выполнения работ, то время выполнения всех работ будет равно длине критического пути в орграфе G. Очевидно, что в этом случае система базовых допустимых расписаний будет состоять из единственного расписания. Вектор $b = (b_1, \ldots, b_m)$ при этом должен удовлетворять условиям:

$$b_j \geq \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{k=1}^{n} X_{1K}^{e} a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.24}$$

где $\{X_1^1, \ldots, X_1^n\}$ — множество векторов единственного в данном случае оптимального расписания.

Обозначим правую часть неравенства (2.24) через $b_j^{\max}$, а правую часть неравенства (2.23) — через $b_j^{\min}$. Очевидно, что $b_j^{\max} \geq b_j^{\min}$ $j = 1, \ldots, m$, и если $b_j^{\max} = b_j^{\min}$, то ограничения на последовательность выполнения работ таковы, что в каждый момент времени можно выполнять только одну работу.

Лемма 2.9. Параллелепипед $P_1 = \prod_{i=1}^{m} [b_j^{\min} \geq b_j^{\max}]$ может быть разбит на конечное число областей так, что каждой точке области может быть поставлено в соответствие допустимое расписание, которое остается оптимальным для всех точек области.

Доказательство. Пусть $\{A_1^1, \ldots, A_{N_1}^1\}$ — система всех базовых расписании для точки $b_j = b_j^{\min}$.

Не уменьшая общности, можно считать, что $T_{A_1^1} \leq T_{A_2^1} \leq \ldots \leq T_{A_{N_1}^1}$, где $T_{A_i^1}$ — длина A_i^1 допустимого расписания. Для каждого вектора X_j^1 ($j = 1, \ldots, n$) проверяем, позволяют ли топологические ограничения на последовательность выполнения работ увеличить в векторах X_j^1 число ненулевых координат, увеличив соответственно вектор ресурсов $b_j^{\min}$. Рассмотрим все возможные варианты добавления новых работ для каждого из векторов и все возможные соответствующие векторы изменения ресурсов $\Delta b_1^1, \ldots, \Delta b_{N_1}^1$, выберем среди них минимальные $\Delta b_K^1 \leq \Delta b_{K_1}^1$ ($K_1 > 0$) по правилу $\Delta b_K^1 \leq \Delta b_e^1$, если $\Delta b_{Kj}^1 \leq \Delta b_{ej}^1$ ($j = 1, \ldots, m$). Проделав эту операцию по всем векторам всех базовых расписаний $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ и выбрав минимальные элементы, получим набор векторов $\{\Delta b_1^1, \ldots, \Delta b_{L_1}^1\}$.

Для каждого Δb_i^1 ($i = 1, \ldots, L_1$), пересчитав соответствующие базовые расписания, получим новую систему базовых расписаний $\{A_1^2, \ldots, A_{N_2}^2\}$, такую, что $T_{A_1^2} \leq T_{A_2^2} \leq \ldots \leq T_{A_{N_2}^2}$. Тогда существует такое $1 \leq K_2 \leq N_2$, что $T_{A_{K_2}^2} < T_{A_1^1}$ и $T_{A_{K_{2+1}}^2} > T_{A_1^1}$. Очевидно, что $\{A_1^2, \ldots, A_{Л_2}^2\} \in$

$\in \{A_1^1, ..., A_K^1\}$. Поэтому для каждого A_i^2 ($i = 1, ..., K_1$) существует соответствующий вектор $\Delta b_{ei} \in \{\Delta b_1^1, ..., \Delta b_{L_1}^1\}$, такой, что решение A_1^2 является оптимальным, если $C_i^2 \geq b_i^2 \geq b + b_{li}^1$, где C_i^2 — вектор, координаты которого будут определены ниже.

Если $T_{A_1^2} = T_{\text{кр}}$, где $T_{\text{кр}}$ — длина критического пути исходного орграфа работ, то для вектора ресурсов b_1^2 построено оптимальное расписание для заданного орграфа G и заданных времен выполнения работ, которое не улучшится, как бы мы ни увеличивали ресурсы. В этом случае положим $C_1^2 = b^{\max}$ ($b^{\max} = (b_1^{\max}, ..., b_m^{\max})$).

Если $T_{A_1^2} > T_{KP}$, то для каждого вектора ресурсов b_i ($i = 1, ..., L_1$) считаем систему минимальных векторов $\{\Delta b_1^2, ..., \Delta b_{L_2}^2\}$, затем строим систему допустимых базовых расписаний $\{A_1^3, ..., A_{N_3}^3\}$ для вектора увеличения ресурсов и производим сравнение $T_{A_1^3} = T_{\text{кр}}$.

Очевидно, что через конечное число шагов получим $T_1^e = T_{\text{кр}}$, при этом расписанию A_1^e соответствует некоторый вектор ресурсов b_1^e. Включаем вектор b_1^l в множество $M_{\text{опт}}$. Далее строим систему минимальных векторов $\{\Delta b_1^e, ..., \Delta b_L^e\}$, положим $C_i^1 = b_i^2 + \Delta b_i^2$ для векторов ресурсов $b_1^e, ..., b_{L_e}^e$ и среди векторов ресурсов $\{b_1^{e+1}, ..., b_{L_{e+1}}^{e+1}\}$ отбрасываем те, для которых существует вектор $b_i \in M_{\text{опт}}$ такой, что $b_i^{e+1} > b_i$. Если среди остальных векторов $\{b_1^{e+1}, ..., b_{L_{e+1}}^{e+1}\}$ есть такие Δb_k^{e+1}, что время соответствующего допустимого решения $A_k^{e+1} = T_{\text{кр}}$, то включаем b_k^{e+1} в множество $M_{\text{опт}}$. Нетрудно видеть, что через конечное число шагов получим такое N, что все векторы $\{b_1^N, ..., b_{L_N}^N\}$ будут либо отброшены, либо будут переведены в множество $M_{\text{опт}}$.

Выше было показано, что каждому базовому решению соответствует некоторый орграф G, при этом длина критического пути в орграфе G равна длине соответствующего оптимального расписания.

Зададим структуру каждого орграфа работ матрицей R так, что каждый элемент строки l равен единице, если выполнение работ b_i должно предшествовать выполнению работы b_e, и нулю в противном случае.

Введем отношение частичного порядка для орграфов, в которые входят одни и те же работы. Будем считать, что $R^1 < R^2$, если $r_{ij}^1 \leq r_{ij}^2$ и существуют l, k для которых $r_{ek}^1 \leq r_{ek}^2$.

Т е о р е м а 2.3. Пусть задан орграф G_1, описываемый структурой R_1 с фиксированными временами выполнения работ. Для того чтобы существовал вектор ресурсов $\bar{b}$ такой, что $T_{A_{\text{опт}}} = T_{\text{кр}}$ и $R_1 < R_2$, необходимо, чтобы существовало K такое, что $c_{\text{кр}} - c_k > t_{\min}$, где R_2 — структура орграфа, соответствующая расписанию $A_{\text{опт}}$; $T_{A_{\text{опт}}}$ — длина расписания $A_{\text{опт}}$; $c_{\text{кр}}$ — длина критического пути в орграфе G_1; c_k — длина K-пути в G_1; $t_{\min}$ — время самой короткой работы в орграфе G_1.

Доказательство. Предположим, что для всех $j = 1, ..., N_1$, где N_1 — количество путей в орграфе G_1, выполняется $c_{\text{кр}} - c_k < t_{\min}$ и $R_1 < R_2$. Тогда в орграфе G_2, соответствующем расписанию $A_{\text{опт}}$, есть такой путь, что

$$c_k^1 \geq c_j + t_k > T_{\text{кр}}, \tag{2.25}$$

где c_k^1 — длина пути в G_2; t_k — продолжительность одной из работ.

Неравенство (2.25) противоречит начальному предположению о том, что $T_{A_{\text{опт}}} = T_{\text{кр}}$.

В лемме 2.1 было показано, что для каждого орграфа G и параллелепипеда P, в котором изменяются длины работ, существует такое разбиение параллелепипеда P (может быть, неединственное) на многогранники B_i:

а) $\bigcup\limits_{i=1}^{k_j} B_i = P, \quad j = 1, \ldots, L,$

где L — число разбиений; k_j — количество многогранников в каждом разбиении;

б) в каждом разбиении для каждого B_i существует такое допустимое расписание A_i, которое остается допустимым для всех точек $t \in B_i$.

Следующая теорема описывает случаи, когда $k_j = 1$ ($j = 1, ..., L$) и $L = 1$.

Теорема 2.3.1. Для каждого орграфа G можно так назначить интервалы длин работ, что в каждом разбиении $k_j = 1$ ($j = 1, ..., L$).

2. Для каждого орграфа G существует такой вектор $b = (b_1, ..., b_m)$, что $L = 1$.

3. Для каждого орграфа G существует такой вектор $b = (b_1, ..., b_m)$ и такие интервалы $[t_i^1, t_i^2]$ ($i = 1, ..., n$), что $L = 1$.

Доказательство. Утверждение 1 теоремы 2.3.1 будет доказано, если интервалы $[t_i^1, t_i^2]$ будут назначены так, что при построении любого базового расписания на каждом шаге построения кратчайшая работа будет определена однозначно. Перенумеруем произвольно все работы сети и назначим первой работе d_1 интервал $[t_i^1, t_i^2]$ произвольным образом; интервал длительности выполнения для работы d_e $(1 < l < n)$ назначаем так, чтобы

$$t_l^1 \geq \sum_{i=1}^{l-1} t_i^2. \tag{2.26}$$

Легко видеть, что при таком назначении интервалов, в которых могут изменяться длительности выполнения всех работ, работа наименьшей продолжительности на каждом этапе построения любого допустимого расписания будет определена однозначно.

Докажем утверждение 2 теоремы. Пусть $\{x_1, \ldots, x_N\}$ — всевозможные векторы с булевыми переменными, такие, что для любого $i = 1, \ldots, N$ и для любого k и j ($k = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$) если $x_{ik} = 1$ и $x_{ij} = 1$, то работы d_j и d_k не принадлежат одному пути, т.е. могут выполняться параллельно. Вектор $b = (b_1, \ldots, b_m)$ выберем следующим образом:

$$b_j \geq \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{k=1}^{n} X_{ik} a_{kj} \quad (j = 1,\ldots,m). \tag{2.27}$$

Легко видеть, что если b_j ($j = 1, \ldots, m$) удовлетворяют условию (2.27), то на каждом шаге построения допустимого базового расписания система максимальных векторов будет состоять из одного вектора, и поэтому разбиение на многогранники, описанное в лемме 1.1, будет единственным.

Утверждение 3 теоремы 2.3.1 будет доказано, если интервалы $[t_i^1, t_i^2]$ ($i = 1, \ldots, n$) построить по формуле (2.26), а вектор $b = (b_1, \ldots, b_m)$ выбрать по формуле (2.27).

Алгоритм разбиения параллелепипеда P на многогранники устойчивости оптимальных расписаний был запрограммирован, при этом программа, осуществляющая данное разбиение, может быть условно разделена на следующие два блока, выполняющиеся последовательно:

1) блок разбиения заданного параллелепипеда P на многогранники устойчивости оптимальных расписаний;

2) поиск оптимального расписания по некоторой точке $t \in P$.

Алгоритм был реализован для множества, состоящего из девяти работ.

В процессе численного эксперимента было установлено, что для некоторых случаев поиск решения и соответствующего ему многогранника по заданному $t = (t_1, \ldots, t_n)$ происходит в несколько раз быстрее, чем построение решения по методу ветвей и границ.

2.3. МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ИЗМЕНЕНИИ ГРАФА, ЗАДАЮЩЕГО СОСТАВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ РАБОТ

На практике достаточно часто складывается ситуация, когда в процессе выполнения исходного множества работ по составленному расписанию на выполнение поступает дополнительное множество работ.

Ниже будет исследован вопрос о том, как зависит оптимальное расписание выполнения всего множества работ от момента поступления дополнительного множества работ. Введем следующее определение.

Определение 2.3. Орграф G_1 называется независимым от работ орграфа G_2, если для выполнения всех работ орграфа G_1 не требуется выполнения ни одной работы орграфа G_2.

Теорема 2.4. Пусть дан орграф G_1, такой, что $A^{G_1}_{\text{опт}}$ — оптимальное расписание задачи (2.1)–(2.5) для орграфа G_1, $t_{\text{опт}}$ — длина оптимального расписания для орграфа G_1 и G_2, независимый от G_1 орграф, работы которого могут поступить на выполнение во время выполнения работ орграфа G_1. Тогда существует разбиение интервала $[0, t_{\text{опт}}]$ на отрезки так, что в любом отрезке сохраняется оптимальное расписание для выполнения всех работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$, где $t_{\text{опт}}$ — длина оптимального расписания выполнения работ орграфа G_1.

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$A^{G_1 \cup G_2}_{T_{\text{опт}}}$ — оптимальное расписание выполнения работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$ для случая, когда работы орграфа G_2 поступают на выполнение в момент завершения всех работ орграфа G_1, т.е. в момент времени $t_{\text{опт}}$;

T_k — длина расписания $A^{G_1 \cup G_2}_{T_{\text{опт}}}$;

$A^{G_1 \cup G_2}_{T_{\text{н}}}$ — такое оптимальное расписание выполнения работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$ для случая, когда работы орграфа G_1 и G_2 поступают на выполнение одновременно, что время начала выполнения работ сети G_2 в нем самое позднее;

$T_{\text{н}}$ — длина расписания $A^{G_1 \cup G_2}_{T_{\text{н}}}$;

$t_{\text{н}}$ — время, когда впервые в расписании $A^{G_1 \cup G_2}_{T_{\text{н}}}$ начала выполняться какая-либо из работ орграфа G_2.

Легко видеть, что $T_{\text{н}} < T_k$ и если $T_{\text{н}} = T_k$, то расписание $A^{G_1 \cup G_2}_{T_{\text{опт}}}$ остается оптимальным, в какой бы момент времени $t \in [0, t_{\text{опт}}]$ ни поступили работы орграфа G_2.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.10. Пусть t_q, t_g — точки из интервала $[t_{\text{н}}, t_{\text{опт}}]$, такие, что $t_q > t_g$, и на интервале $[t_g, t_q]$ не происходит завершения выполнения ни одной работы. Тогда если $T_q - T_g = t_q - t_g$, то для любой точки $t \in [t_g, t_q]$ выполняется равенство $T_p - T_g = t_p - t_g$, где T_p, T_q, T_g — время оптимальных расписаний выполнения работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$, если работы сети G_2 поступают в момент времени t_p, t_q, t_g соответственно.

Доказательство. Предположим, что $T_p - T_g < t_p - t_g$. Тогда если работы орграфа G_2 поступят в момент времени t_q, то расписание A'_q, заключающееся в том, что мы прерываем работы, выполнявшиеся до момента t_q, и начинаем выполнять в оставшееся время работы в такой последовательности, как если бы работы орграфа G_2 поступили в момент времени t_p, обладает следующим свойством:

$$T_{A'_q} - T_g < (t_q - t_p) + (t_p - t_g) = t_q - t_g.$$

Последнее соотношение означает, что длина расписания A'_q меньше длины оптимального расписания.

Учитывая это противоречие, получаем доказательство леммы.

Если работы орграфа G_2 поступают в любой момент времени интервала $(0, t_{\text{н}})$, то оптимальным расписанием выполнения работ будет расписание $A_{T_{\text{н}}}^{G_1 \cup G_2}$. Рассмотрим ситуацию, когда момент поступления работ орграфа G_2 принадлежит интервалу $[t_{\text{н}}, t_{\text{опт}}]$.

В этом случае оптимальное расписание, как было показано выше, содержится в системе базовых расписаний $\{A_1, ..., A_N\}$. Пусть $t^* \in [t_{\text{н}}, t_{\text{опт}}]$.

Обозначим $t^* + \Delta t$ $(\Delta t \geq 0)$ — ближайший к моменту t^* момент времени, в который происходит окончание одной из работ орграфа G_1 при выполнении их по оптимальному расписанию для работ орграфа G_1. Если для оптимального расписания выполнения работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$ при условии поступления работ орграфа G_2 в момент t^* сохраняется до момента $t^* + \Delta t$ выполнение работ только орграфа G_1, то расписание выполнения работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$ сохраняется.

Пусть при поступлении работ орграфа G_2 в момент t^* происходит прерывание выполнения части работ орграфа G_1 и вместо них начинают выполнение работы орграфа G_2. Обозначим через ΔT разность между длиной оптимального расписания для работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$, в случае если работы орграфа G_2 поступили в момент времени t^*, и длиной расписания минимальной продолжительности, в котором перераспределение работ на выполнение происходит в момент времени $t^* + \Delta t$. Очевидно, что $\Delta T \leq \Delta t$. В этом случае также, как следует из леммы 2.9, сохраняется оптимальная последовательность выполнения работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$ для любого момента поступления работ орграфа G_2 на интервале $[t^*, t^* + \Delta T]$. Учитывая конечность системы базовых расписаний выполнения работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$, получим утверждение теоремы.

Доказательство теоремы может быть сильно сокращено, если ввести в рассмотрение орграф $G = G_1 \cup G_2 \cup d^*$, где d^* — дополнительная работа, требующая для выполнения нулевой вектор ресурсов $a = (0, ..., 0)$, предшествующая выполнению любой работы орграфа G_2 и не зависящая от работ орграфа G_1. Длительность работы d^* может принимать любое значение из интервала $[0, t_{\text{опт}}]$. Тогда, используя теорему о конечном числе оптимальных расписаний в зависимости от длины работы d^*, получим доказательство теоремы 2.4.

Рассмотрим случай, когда длины выполнения работ орграфа G_1, G_2 не фиксированы, а могут изменяться в некоторых параллелепипедах P_1, P_2. Как показано выше, для орграфа G_1, существует система многогранников $B_1, ..., B_N$, такая, что:

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_i = P_i$;

2) для каждого B_1 $(i = 1, ..., N)$ существует базовое расписание A_i, такое, что оно остается оптимальным для всех точек многогранника B_i, задающих длительности выполняемых работ;

3) каждому A_i соответствует последовательность работ $d_1^i, d_2^i, ..., d_{N_i}^i$, которые заканчиваются поочередно, и интервалы возможного окончания равны соответственно $[\tau_1^1, \tau_2^1], ..., [\tau_1^{N_i}, \tau_2^{N_i}]$.

Для каждого многогранника B_i предположим, что работы орграфа G_2 поступают только в моменты окончания работ $d_1^i, d_2^i, ..., d_{N_i}^i$. Тогда для каждого многогранника B_i могут быть построены наборы множеств многогранников

$$\{M^1_{d_1^i}, ..., M^{q_1}_{d_1^i}\}, ..., \{M^1_{d_i^{N_i}}, ..., M^{q_{N_i}}_{d_i^{N_i}}\},$$

такие, что в каждом из них сохраняется оптимальное решение для выполнения работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$.

Сравнивая попарно многогранники из разных множеств и выбирая те пары многогранников $M^j_{d_k^i}$, $M^p_{d_e^i}$, у которых

$$M^j_{d_k^i} \cap M^p_{d_e^i} \neq \varnothing \, (k < l),$$

можно вычислить интервалы длин оптимальных расписаний на этих многогранниках $[T^1_{jk}, T^2_{pl}]$ и $[T^1_{pl}, T^2_{pl}]$. При этом возможна одна из ситуаций расположения интервалов относительно друг друга:

1) $[T_{jk}^1, T_{jk}^2] \cap [T_{pl}^1, T_{pl}^2] \neq \varnothing$;

2) $[T_{jk}^1, T_{jk}^2] \cap [T_{pl}^1, T_{pl}^2] = \varnothing$ и существует $0 \le \tau \le \tau_2^k$, такое, что

$$[T_{jk}^1 + \tau, T_{jk}^2 + \tau] \cap [T_{pl}^1, T_{pl}^2] \neq \varnothing; \tag{2.28}$$

3) $[T_j^1, T_j^2] \cap [T_{pl}^1, T_{pl}^2] \neq \varnothing$ и не существует $0 \le \tau \le \tau_2^k$, такого, что $[T_{jk}^1 + \tau, T_{jk}^2 + \tau] \cap [T_{pl}^1, T_{pl}^2] \neq \varnothing$ $(k = 1, ..., N_i)$.

В случае 1) проводим дополнительную разделяющую гиперплоскость вида

$$\sum_{i \in D_k} t_i^k = \sum_{i \in D_l} t_i^l, \tag{2.29}$$

где D_k, D_l — множества работ, сумма продолжительностей времен которых соответствует численным значениям оптимальных решений для случаев, когда работы орграфа G_2 поступили в момент окончания работы d_k^i или d_l^i.

В случае 2) вместе с гиперплоскостью (2.29) проводится еще гиперплоскость вида

$$\sum_{i \in D_k} t_i^k + \tau^{\min} = \sum_{i \in D_l} t_i^l,$$

где $\tau^{\min}$ — минимальное τ, для которого выполняется (2.28).

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2.5. Пусть у орграфа G_1 длительности выполнения работ заключены в параллелепипеде P_1 и во время выполнения работ орграфа G_1 поступают на выполнение работы орграфа G_2, длительности выполнения работ которого заключены в параллелепипеде P_2. Тогда может быть построено разбиение $n_1 + n_2 + 1$-мерного параллелепипеда P на многогранники, такие, что для каждого $t' \in P_1$, $t'' \in P_2$ и для каждого момента поступления работ орграфа G_2 существует многогранник, для всех точек которого сохраняет оптимальность некоторое допустимое расписание выполнения работ орграфа $G = G_1 \cup G_2$, где n_1 — число работ в орграфе G_1, n_2 — число работ в орграфе G_2.

Рассмотрим, как изменяются многогранники устойчивости оптимальных решений задачи (2.1)–(2.5), если изменить структуру орграфа G. Как и ранее, будем считать $R^1 \ge R^2$, если $r_{ij}^1 \ge r_{ij}^2$, где матрица R_1 задает орграф G_1, матрица R_2 задает орграф G_2.

Теорема 2.6. Пусть существует разбиение параллелепипеда P, задающего длительности выполнения работ $d_1, ..., d_n$, на многогранники B_1 $(i = 1, ..., N)$:

1) $\bigcup_{i=1}^{N} B_i = P$;

2) для каждого B_i существует допустимое расписание A_i, которое остается оптимальным для всех точек B_i. Тогда если изменить орграф G так, что $R_{G_1} \geq R_G$ и все расписания орграфа G остаются допустимыми для орграфа G_1, то разбиение на многогранники устойчивости сохраняется.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т.е. для орграфа G_1 существует $t \in B_i$, такое, что решение A_i не является оптимальным. Тогда существует A^*, которое является оптимальным для орграфа G_1 для точки $t \in B_i$, и поэтому для орграфа G_1 $T_{A^*} < T_{A_i}$, где T_{A^*} — длина расписания A^*, T_{A_i} — длина расписания A_i. Тогда и для орграфа G выполняется $T_{A^*} < T_{A_i}$, что противоречит тому, что A_i — оптимальное расписание для $t \in B_i$. Полученное противоречие доказывает теорему 2.6.

Как отмечалось выше, один из подходов при изучении устойчивости расписаний заключается в вычислении максимального увеличения (или уменьшения) длительности заданного подмножества работ, при котором сохраняется исходной их последовательность выполнения в оптимальном расписании.

Решение задачи отыскания максимального ε, на которое могут быть увеличены продолжительности всех работ при сохранении прежней оптимальной последовательности их выполнения, состоит из двух этапов.

Этап 1. На этом этапе определяется максимальное ε, на которое могут быть увеличены все продолжительности выполняемых работ, сохранив при этом последовательность выполнения работ, без нарушения ресурсных ограничений.

Последовательность, в которой заканчивается выполнение работ, заданных расписанием A_l, определяется системой неравенств вида

$$\sum_{\substack{i=1 \\ t_i \geq 0}}^{n} a_{ij} t_i \leq 0 \quad (j = 1, \ldots, k; k \leq n). \tag{2.30}$$

Для системы неравенств (2.30) может быть вычислено максимальное ε_1, на которое могут быть увеличены все длительности работ, чтобы сохранить совместимость системы (2.30). Для этого достаточно решить следующую экстремальную задачу:

$$\max \varepsilon_1; \tag{2.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} (t_i + \varepsilon_1) \leq 0 \quad (j = 1, \ldots, k; k \leq n); \tag{2.32}$$

$t_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$. (2.33)

При увеличении продолжительности выполняемых работ более чем на ε_1, вычисленное в результате решения задачи (2.31)–(2.33), нарушается прежняя последовательность окончания работ при реализации расписания A_l, что приведет к изменению состава множеств работ $X_1, ..., X_k$ $(k \leq n)$, задающих очередность выполнения работ d_1, ..., d_n. Обозначим эти множества $X'_1, ..., X'_k$. Если ресурсные ограничения нарушаются при выполнении работ в последовательности, задаваемой множествами $X'_1, ..., X'_k$, то в качестве ε, являющегося результатом реализации этапа 1, принимаем ε_1. Если ресурсные ограничения выполняются при выполнении работ в последовательности, задаваемой множествами $X'_1, ..., X'_k$, то исследуем, на какое ε_2 могут быть увеличены продолжительности работ, чтобы сохранилась вновь полученная последовательность окончания работ. Это осуществляется повторным решением задачи (2.31)–(2.33) с ограничениями (2.32), отражающими порядок окончания работ при увеличении продолжительностей работ более чем на ε_1.

Учитывая, что число расписаний, претендующих на оптимальность при любых продолжительностях работ, конечно и при последовательном увеличении продолжительностей работ на ε_i не происходит возврата к прежним системам неравенств, задающим очередность окончания работ в оптимальном расписании, получим в итоге одну из ситуаций:

а) начиная с некоторого ε, при дальнейшем увеличении длительностей работ перехода к новым системам неравенств не происходит;

б) при некотором α недостаточно ресурсов, чтобы выполнить работы длительностью $t_i + \sum_{j=1}^{\alpha} \varepsilon_j$ в последовательности, задаваемой орграфом G_l, который соответствует расписанию A_l.

Заметим, что а) происходит, если

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \geq \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

В этом случае последовательность окончания работ для множеств $X_1, ..., X_k$ подчиняется следующему правилу. В множестве выполняемых работ X_i первой заканчивается выполнение той работы, которая была начата раньше. Если выполнение нескольких работ было начато одновременно, то первой заканчивается та работа, которая была короче при исходных длительностях работ.

В случае а) ограничения на ε на втором этапе не накладываются, в случае б) дополнительно ограничиваем ε величиной

$$\varepsilon^* \le \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i.$$

Этап 2. На этом этапе для оптимального расписания находится максимальное ε, на которое можно увеличить длительности выполняемых работ, чтобы сохранялась последовательность выполнения работ в оптимальном расписании.

Для отыскания этого ε необходимо решить следующую экстремальную задачу:

$$\max \varepsilon; \tag{2.34}$$

$$\sum_{i \in S_e^j} (t_i + \varepsilon) \le \min_{p=1,\dots,N} \sum_{j \in S_p^{\text{кр}}} (t_j + \varepsilon); \tag{2.35}$$

$$\text{j} = 1, \dots, m_l;$$

$$0 \le \varepsilon \le \varepsilon^*, \tag{2.36}$$

где S_e^j — путь j орграфа G_l, соответствующего расписанию A_l, которое является оптимальным при длительностях работ, заданных вектором $t = (t_1, \dots, t_n)$; $S_p^{\text{кр}}$ — критический путь в графе G_p, соответствующем расписанию A_p; m_l — число путей в графе G_l; N — число расписаний в базовой системе расписаний.

Экстремальная задача (2.34)–(2.36) может быть сведена к следующей задаче линейного программирования:

$$\max \varepsilon; \tag{2.37}$$

$$\sum_{i \in S_e^j} (t_i + \varepsilon) \le \min_{p=1,\dots,N} \sum_{j \in S_q^{\text{кр}}} (t_j + \varepsilon); \tag{2.38}$$

$$j = 1, \dots, m_e, \quad q = 1, \dots, N;$$

$$0 \le \varepsilon \le \varepsilon^*, \tag{2.39}$$

где $S_q^{\text{кр}}$ — критический путь базового расписания A_q; S_e^j — j-путь в расписании A_l.

Неравенства (2.38) в задаче (2.37)–(2.39) свидетельствуют о том, что длина каждого пути в графе G_l, соответствующем расписанию A_l, должна быть не больше, чем длина любого критического пути в графах G_i; $(i = 1, \dots, N;\ i \ne l)$; ε^* — ограничение на ε, полученное на этапе 1.

Пусть оптимальным расписанием выполнения работ, продолжительности которых заданы вектором t^* $(t_1^* > t_i + \varepsilon^*;\ i = 1, \dots, n)$, будет расписание A^*. Для A^* также путем реализации этапов 1 и 2 можно вычислить максимальное ε^*, при увеличении на которое последовательность выполнения работ, заданная A^*, будет оптимальной.

Рассмотрим среди всех базовых расписаний то, на котором достигается

$$\min_{i=1,\dots,N}\ \max_{j=1,\dots,m_i} \left\{ \left| S_i^j \right| \right\},$$

где $|S_i^j|$ — число работ в j-м пути графа G_i. Обозначим это расписание через $\tilde{A}$. Легко видеть, что при увеличении продолжительностей работ на величину $\varepsilon > \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$ оптимальным будет расписание $\tilde{A}$.

Таким образом, при увеличении ε на полубесконечном интервале $[0, \infty)$ этот интервал можно разбить на конечное число отрезков $[0, \varepsilon_1), \dots, [\varepsilon_l, \infty)$, для каждого из которых существует расписание из множества $\{A_{l_i}\}$ $(i = 1, \dots, L)$, обладающее следующим свойством.

Если продолжительности выполнения работ $t^* = (t_1^*, \dots, t_n^*)$ могут быть представлены как $t_i^* = t_i + \delta$, где $\delta > 0$ и $\delta \in [\varepsilon_j; \varepsilon_{j+1})$, то расписание A_l остается оптимальным для любого $\delta \in [\varepsilon_j; \varepsilon_{j+1})$.

Рассмотрим некоторые условия, при которых ε, на которое увеличиваются длины работ, равно нулю, ограниченно или неограниченно. Назовем величину ε, на которую могут быть увеличены длительности выполняемых работ, сохраняя последовательность выполнения работ в оптимальном расписании, интервалом устойчивости расписания.

Покажем, что $\varepsilon = 0$ для оптимального расписания $A_{\text{опт}}$ при выполнении всех работ в том и только том случае, если существует еще одно оптимальное расписание $A'_{\text{опт}}$, у которого в критическом пути меньшее число работ, чем в $A_{\text{опт}}$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\varepsilon = 0$. Это означает, что для любого ε' существует расписание выполнения работ A', для которого выполняется неравенство

$$\sum_{i \in S_{\text{кр}}^{\text{опт}}} t_i + k\varepsilon' > \sum_{i \in S'_{\text{кр}}} t_i + k_1\varepsilon, \tag{2.40}$$

где $S_{\text{кр}}^{\text{опт}}$ — критический путь в оптимальном расписании; $A_{\text{опт}}$; $S'_{\text{кр}}$ — критический путь в расписании выполнения работ A'. Это, в частности, означает, что A' — оптимальное расписание, так как если $\sum\limits_{i \in S_{\text{кр}}^{\text{опт}}} t_i > \sum\limits_{i \in S'_{\text{кр}}} t_i$, то если взять $\varepsilon = \dfrac{1}{2K_1}\left(\sum\limits_{i \in S'_{\text{кр}}} t_i - \sum\limits_{i \in S_{\text{кр}}^{\text{опт}}} t_i \right)$, то неравенство (2.39) нарушится, что противоречит первоначальному предположению о том, что $\varepsilon = 0$. Далее, учитывая, что $\sum\limits_{i \in S_{\text{кр}}^{\text{опт}}} t_i = \sum\limits_{i \in S'_{\text{кр}}} t_i$, получим $K > K_1$.

Достаточность. Следует из того, что если $A'_{\text{опт}}$ оптимальное расписание, в критический путь которого входит меньшее число работ, то существует такое $\varepsilon'' > 0$, что для всех $\varepsilon < \varepsilon''$ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i \in S'_{\text{кр}}} t_i + k_1\varepsilon < \sum_{i \in S^{\text{опт}}_{\text{кр}}} t_i + k_1\varepsilon.$$

Из предыдущего утверждения следует, что если оптимальное расписание выполнения работ единственно, то существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении длительностей выполнения работ на это ε сохраняется оптимальная последовательность выполнения работ (т.е. сохраняется граф G, соответствующий оптимальному расписанию).

Пусть G_K — орграф, соответствующий базовому расписанию A_k.

Обозначим через δ_l следующую величину:

$$\delta_l = \max|S_j^k|,$$

где $|S_j^k|$ — число работ в пути j орграфа G_K.

Тогда если G_e — орграф, соответствующий оптимальному базовому расписанию, то необходимым условием неограниченности интервала устойчивости является выполнение неравенства

$$\delta_l \leq \delta_k \ (k = 1, \dots, N),$$

где N — число всех базовых расписаний.

Рассмотренные ситуации, связанные с сохранением свойств расписания при увеличении продолжительностей работ, характеризуют случаи, когда множество работ, длительности которых могут изменяться, известны до начала реализации оптимального расписания. На практике нередко возникает необходимость в оценке сохранения структурных свойств расписания, если множество работ, длины которых увеличились, и величины их удлинения становятся известными в процессе реализации оптимального расписания при исходных продолжительностях работ.

Ниже проводятся исследования устойчивости расписания для этого случая.

Предположим, что при первоначальном задании длительностей работ вектором $t = (t_1, \dots, t_n)$ их выполнение происходит согласно расписанию A на временно́м интервале $[0, T]$.

Пусть вектор изменений длительностей выполняемых работ $\Delta t_i = (\Delta t_{i1}, \dots, \Delta t_{in})$ может поступать в интервале времени $[\tau_i^1, \tau_i^2] \subseteq [0, T]$. Не уменьшая общности, будем считать, что на интервале $[\tau_i^1, \tau_i^2]$ не будет окончена ни одна работа, выполняемая по расписанию A.

Рассмотрим множество базовых решений $A_1, \ldots, A_N$ для выполнения оставшихся работ, если увеличение продолжительностей работ произошло в момент времени τ_i^1. Пусть оптимальным расписанием в этой ситуации будет одно из базовых расписаний A_l. Этому расписанию соответствует некоторый орграф G_l, который отражает последовательность выполнения работ. Если в графе G_l последовательность выполнения работ не будет отличаться от оптимальной очередности в случае прежних длительностей работ, то для любого момента времени $\tau \in [\tau_i^1, \tau_i^2]$, в который приходит вектор изменения длительностей работ Δt_i, оптимальная последовательность выполнения работ будет задана графом G_l.

Если это не так, т.е. оптимальная последовательность выполнения работ с увеличенной длительностью отличается от оптимальной последовательности с прежней продолжительностью, то в момент времени $\tau \geq \tau_i^1$ происходит изменение прежней последовательности выполнения работ. При этом возможны два случая:

1) общее время выполнения работ определяется путем в графе G_l, в котором есть хотя бы одна работа, выполнение которой было прервано после того, как пришло сообщение о том, что длительности выполнения работ увеличились на время, задаваемое вектором Δt;

2) общее время выполнения работ определяется критическим путем G_l, в котором нет прерываемых работ.

В случае 1) все множество базовых расписаний разобьем на два множества: $A = A_{Np} \cup A_p$. Здесь A_{Np} — множество расписаний, время выполнения которых определяется критическим путем, в котором нет недовыполненных работ; A_p — множество расписаний, в которых время выполнения всего множества работ определяется критическим путем, в котором есть недовыполненная работа.

Для каждого $A_i \in A_{Np}$ вычислим величину τ_i:

$\tau_i = \min\{S^i_{\text{кр}} - S^i_j\}$.

Здесь S^i_j — множество путей графа G_l, в которых есть недовыполненные работы; m_l — число этих путей в графе G_l; $S^i_{\text{кр}}$ — критический путь в графе G_l.

Выберем среди $A_i \in A_{Np}$ расписания

$S^e_{\text{кр}} + \tau_i > S^i_{\text{кр}}$ $(i = 1, \ldots, L)$.

Если $S^\alpha_{\text{кр}} > S^\beta_{\text{кр}}$, то $\tau_\alpha > \tau_\beta + (S^\alpha_{\text{кр}} - S^\beta_{\text{кр}})$. (2.41)

Если $L > 0$, то обозначим множество A_i, удовлетворяющих неравенству (2.41), через RL.

Упорядочим $A_i \in RL$ по возрастанию величины

$\delta_i = S^i_{\text{кр}} - S^l_{\text{кр}}.$

Тогда расписание $A_i \in RL$ будет оптимальным на следующем интервале:

$[\tau^1_i + (S^\theta_{\text{кр}} - S^l_{\text{кр}}) + \tau_{\theta-1}, \tau^1_i + (S^\theta_{\text{кр}} - S^l_{\text{кр}}) + \tau_\theta].$

В случае 2) разбиение на интервалы, на которых сохраняется оптимальной одна и та же последовательность выполнения работ, проводится аналогично, начиная с момента формирования множества RL.

В предыдущем изложении рассматривались алгоритмы оптимального распределения ресурсов по критерию минимизации длины расписания. Еще одним распространенным критерием организации выполнения работ является минимизация среднего времени окончания работ. Алгоритмы построения оптимальных расписаний по этому критерию рассмотрены в работах [9, 11, 14]. В монографии [13] задача оптимального распределения ресурсов по критерию минимизации среднего времени прохождения работ при фиксированных длинах работ рассмотрена как задача минимизации функции

$$\omega(S) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f_i(S),$$

где ω_i — стоимость пребывания работы d_i в системе; $f_i(S)$ $(1 \le i \le n)$ — время окончания работы d_i.

Пусть, как и ранее, длительность выполнения работы d_i может принимать все значения из интервала $[t^1_i, t^2_i]$. В этом случае задача составления оптимального расписания по выбранному критерию может быть сформулирована следующим образом: для каждого $t \in P$ необходимо минимизировать функционал

$$\omega(S) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(\sum_{i=1}^{k_i} (T_{ji} + t_j) \right) \tag{2.42}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} X^i_e \le b_j \quad (j = 1, \ldots, m; l = 1, \ldots, k); \tag{2.43}$$

$$\sum_{l=1}^{k} X^i_l T_l C^i_l \ge t_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.44}$$

Если $X^i_l \ne 0$, то $\sum_{\mu=1}^{l-1} X^i_\mu T_\mu C^i_l \ge t_j$ для всех j, таких, что

$$d_j \in R_i; \tag{2.45}$$

$T_l \geq 0;\ l = 1, \ldots, k\ (k \leq n)$ (2.46)

Здесь $t = (t_1, \ldots, t_n)$ — вектор продолжительности работ, для которых находится оптимальное расписание; $\sum\limits_{i=1}^{k_i} T_{ji}$ — сумма интервалов времени до начала выполнения работы d_j; k_j — число этих интервалов; T_l — длина интервала времени l.

$$X_{ji}^{1} = \begin{cases} 1, \text{ если 1-й интервал времени выполняется работа } d_i; \\ 0, \text{ если работа } d_i \text{ на этом интервале не выполняется.} \end{cases}$$

C_l^i — равно единице в том случае, если существуют такие K_1, K_2, что $K_1 + K_2 \leq n$, $\sum\limits_{j=k_1}^{K_1+K_2} X_j^i T_j \geq t_i$ и при этом $X_j^i = 1$ для всех $K_1 \leq j \leq K_1 + K_2$. В остальных случаях $C_l^i = 0$.

Рассмотрим систему базовых расписаний $A_1, \ldots, A_N$, алгоритм построения которых был приведен в 2.1. Среди расписаний этой системы, построенной для фиксированных длительностей работ, будет хотя бы одно, являющееся решением задачи (2.43)–(2.46) для заданного $t \in P$.

Рассмотрим формулу, задающую значение целевого функционала

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(\sum_{i=1}^{kj} T_{li} + t_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \sum_{i=1}^{kj} T_{li} + \sum_{j=1}^{n} \omega_j t_j. \tag{2.47}$$

Учитывая тот факт, что величина $\sum\limits_{i=1}^{kj} T_{li}$ есть сумма временных интервалов, длина каждого из которых, как было показано выше, может быть представлена как $\sum\limits_{i=1}^{kj} T_{li} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^j \cdot t_k$, то правая часть формулы (2.47) может быть, очевидно, выражена следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(\sum_{i=1}^{kj} T_{li} + t_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j t_j.$$

Учитывая последнее соотношение и результаты, полученные для задачи оптимизации расписаний по критерию быстродействия, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.7. Для любого орграфа работ G и любого параллелепипеда $P_1 = \prod\limits_{i=1}^{m} [t_i^1; t_i^2]$, задающего длительности работ в задаче (2.43)–(2.46), существует множество гиперплоскостей, разбивающих параллелепипед P на конечное число многогранников, и множество допустимых расписаний $\{A_1, \ldots, A_N\}$, таких, что каждому многограннику B_i ($i = 1, \ldots, N$) взаимно однозначно соответствует некоторое допустимое расписание $A_i \subseteq \{A_1, \ldots, A_N\}$, которое остается оптимальным для всех точек многогранника B_i, задающего длины работ.

Доказательство теоремы 2.7 совпадает с доказательством аналогичной теоремы для расписаний по критерию минимальной длины.

2.4. МИНИМИЗАЦИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ РАСПИСАНИЯ ДЛЯ ПРЕРЫВАЕМЫХ РАБОТ

Одна из наиболее изученных постановок задач для прерываемых работ заключается в следующем. Пусть имеется n независимых работ $d_i, \ldots, d_n$ (отношение частичного порядка пусто [8]), прерывание которых разрешено, т.е. если выполнение работы было прервано до ее завершения, то возобновление выполнения этой работы происходит с того места, где она была прервана. Длительности работ заданы вектором $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Для выполнения каждой работы необходим один вид ресурса, который назовем *прибором*. Количество приборов в системе обработки равно m ($m < n$), и каждая работа может выполняться только одним прибором. Необходимо распределить приборы таким образом, чтобы минимизировать время окончания выполнения всех работ.

В [9] приведен метод решения этой задачи с длиной оптимального расписания, вычисляемой по формуле

$$T = \max_{(i=1,\ldots,n)} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} t_j, t_i \right\}.$$

Если производительности приборов различны и они задаются матрицей (α_{ij}) ($i = 1, \ldots, m$); $j = (1, \ldots, n)$, где α_{ij} — производительность прибора i при выполнении им работы j, то в случае отсутствия отношения предшествования на последовательность выполнения заданий минимальное время T, за которое могут быть выполнены все задания, определяется из решения следующей задачи линейного программирования:

$$\min T \tag{2.48}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \alpha_{ij} \geq t_j \quad (j = 1, \ldots, n); \tag{2.49}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \leq T \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2.50}$$

где X_{ij} — время, в течение которого задание j выполнялось на приборе i.

Рассмотрим ситуацию, когда среди множества всех заданий N есть некоторое подмножество заданий $N_1 \subseteq N$, время выполнения которых может оказаться несколько большим, чем время t_i ($d_i \in N_1$). Необходимо определить максимальное ε, при увеличении длительности заданий на которое значение целевого функционала в задаче (2.48)–(2.50) не изменится. Такое ε определяется из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\max \varepsilon; \tag{2.51}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}\alpha_{ij} \geq t_j + \varepsilon \quad (\varepsilon \geq 0;\ j \in N_1); \tag{2.52}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}\alpha_{ij} \geq t_j \quad (j \in N/N_1); \tag{2.53}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \leq T \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{2.54}$$

Здесь T — значение функционала (2.48) в задаче (2.48)–(2.50).

Ниже будут изучены свойства оптимальных расписаний выполнения n независимых прерываемых работ при изменении длительностей работ и изменение ресурсов, участвующих в их выполнении.

Рассмотрим следующую задачу построения оптимального расписания. Пусть ограничения на последовательность выполнения работ заданы орграфом G, длительности выполнения работ — вектором $t = (t_1, \ldots, t_n)$, ресурсы, при помощи которых выполняются работы, — вектором $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Потребности работы i в ресурсе j задаются величиной a_{ij} ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$).

Необходимо так распределить ресурсы, чтобы, не нарушая ограничений на последовательность выполнения работ и на потребляемые ресурсы, минимизировать время завершения выполнения всех работ. Обозначим через $T_{\text{опт}}(b)$ время завершения работ при оптимальном расписании их выполнения с вектором ресурсов $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Приводимое ниже утверждение описывает случай, когда небольшое увеличение ресурсов, задаваемое вектором b, приводит к изменению минимального времени завершения всех работ.

Утверждение 2.1. Для любого орграфа работ G, для любого вектора $b = (b_1, \ldots, b_m)$, для любого $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ и для любого τ существует вектор $t = (t_1, \ldots, t_n)$ и существует матрица a_{ij} $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$, такие, что $T_{\text{опт}}(b') = T_{\text{опт}}(b) - \tau(\tau > 0; \delta_i \geq 0; i = 1, \ldots, m)$.

Здесь $T_{\text{опт}}(b')$ — минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы для вектора ресурсов $b' = (b_1 + \delta_1, \ldots, b_m + \delta_m)$.

Доказательство. Пусть работы с номерами l и k таковы, что топологические ограничения, накладываемые графом G, не препятствуют их параллельному выполнению. Зададим a_{ij} так, чтобы с вектором ресурсов $\bar{b}$ ни одна пара работ не могла выполняться параллельно, а при векторе ресурсов b' работа l и k могла бы выполняться параллельно. Положив времена выполнения работ l и k равными τ, получим требуемое утверждение.

Перейдем к рассмотрению следующей задачи. Пусть имеется n независимых работ (ни одна работа не требует для своего выполнения предварительного выполнения каких-либо других работ) и есть m приборов, которыми эти работы выполняются. Все приборы идентичны по производительности, и каждая работа может быть выполнена любым прибором. Известны продолжительности выполнения работ $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Необходимо так организовать выполнение работ, чтобы минимизировать время завершения выполнения всех работ.

Расписанием $R(\tau) = (R_1(\tau), \ldots, R_m(\tau))$ назовем совокупность кусочно-постоянных функций $R_1(\tau)$, каждая из которых для всех $\tau \geq 0$ принимает значение $0, 1, \ldots, m$. Равенство $R_1(\tau) = K$ означает, что в момент времени τ прибор i выполняет работу k.

Расписание $R(\tau)$ будем называть допустимым, если суммарная длина интервалов, на которых $R_1(\tau) = k(i = 1, \ldots, m;\ k = \overline{1, n})$, равна t_k. Каждому допустимому расписанию может быть поставлен в соответствие момент времени T, в который заканчивается выполнение последней работы. Расписание, которому соответствует минимальное T, называется оптимальным расписанием.

В рассматриваемом нами случае, как показано в [8], минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы, определяется по формуле

$$T_{\text{опт}} = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} t_j, t_i \right\}. \qquad (2.55)$$

Ниже мы будем исследовать, при каких условиях на изменении длительности выполняемых работ и числа приборов, участвующих в выполнении работ, будет сохраняться длина оптимального расписания. Это свойство оптимизационных дискретных задач принято называть устойчивостью.

Сформулируем более строгие определения устойчивости оптимального расписания для этой задачи.

Определение 2.4. Оптимальное расписание называется устойчивым по продолжительности работ в точке (t, m), если существует такой вектор $\Delta t = (\Delta t_1, ..., \Delta t_n)$, что для всех $\Delta t' = (\Delta t'_1, ..., \Delta t'_n)$, $0 \le \Delta t'_i \le \le \Delta t_i$, $T_{\text{опт}}(t, m) = T_{\text{опт}}(t', m)$.

Здесь $T_{\text{опт}}(t, m)$ минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы при длительности работ $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ и m обрабатывающих приборов; $T_{\text{опт}}(t', m)$ — минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы при длительности работ $t' = = (t_1 + \Delta t'_1, ..., t_n \Delta t'_n)$ и m обрабатывающих приборов.

Определение 2.5. Оптимальное расписание R называется устойчивым по числу приборов в точке (t, m), если существует такое $m_1 < m$, что для всех $m_1 < m' < m$ $T_{\text{опт}}(t, m) = T_{\text{опт}}(t, m')$.

Предположим, что максимум в (2.55) является $m^{-1}\sum_{i=1}^{n} t_i = c$. Опишем все множество точек $t = (t_1, ..., t_n)$, для которых выполняется $T_{\text{опт}} = c$ (здесь $T_{\text{опт}}$ — длина оптимального расписания).

Это означает, что выполняется следующая система неравенств:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} t_i - (m-1)t_j \ge 0.$$

Таким образом, в этом случае многогранник, на котором $T_{\text{опт}} = c$, задается системой линейных неравенств вида:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i - (m-1)t_j \ge 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = cm. \tag{2.56}$$

Предположим, что $\max\limits_{i=1,\dots,n}\left\{m^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_j, t_i\right\} = t_k$. Тогда для того, чтобы $T_{\text{опт}} = c$, необходимо выполнение равенства $t_k = c$. Поэтому в этом случае многогранники, на которых значение $T_{\text{опт}} = c$, задаются следующими системами линейных неравенств:

$$t_k = c;$$

$$t_k \ge t_j \ (k = 1, ..., n); \tag{2.57}$$

$$(m-1)t_k - \sum_{i=1}^{n} t_i \ge 0.$$

Многогранники, заданные системой неравенств (2.56) и (2.57), полностью описывают множества значений вектора $t = (t_1, ..., t_n)$, для которых минимальное время обработки всего множества работ $T_{\text{опт}} = c$.

Рассмотрим случай, когда при изменении числа приборов от m_1 до m_2 значение оптимального расписания не меняется. Обозначим через $T_{\text{опт}}(m_i)$ $(i = 1, 2)$ минимальное время выполнения всех работ, если число обслуживающих приборов равно m_i.

Предположим, что $m_1 < m_2$. Необходимым условием того, чтобы $T_{\text{опт}}(m_1) = T_{\text{опт}}(m_2)$, является выполнение следующего соотношения:

$$\max_{i=1,\dots,n}\left\{m_2^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_j, t_i\right\} = t_k.$$

Поэтому в этом случае система неравенств (2.57) задает еще и область устойчивости по числу приборов.

Аналогично можно доказать следующее утверждение: чтобы при переходе от m_1 приборов к m_2 приборам и от m_2 к m_1 приборам сохранилось $T_{\text{опт}}$, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялась одна из систем — (2.56), (2.57).

Рассмотрим условия сохранения длины оптимального расписания, если количество приборов меняется в процессе выполнения работ.

Пусть при выполнении n работ число приборов может уменьшаться в процессе выполнения от m_2 до m_1. Тогда возможны следующие ситуации:

1) $$\max_{i=1,\dots,n}\left\{m_1^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_i, t_i\right\} = t_k;$$

$$\max_{i=1,\dots,n}\left\{m_2^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_i, t_i\right\} = t_k;$$

2) $$\max_{i=1,\dots,n}\left\{m_1^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_i, t_i\right\} = m_1^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_j;$$

$$\max_{i=1,\dots,n}\left\{m_2^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_i, t_i\right\} = t_k;$$

3) $$\max_{i=1,\dots,n}\left\{m_1^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_i, t_i\right\} = m_1^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_i;$$

$$\max_{i=1,\dots,n}\left\{m_2^{-1}\sum_{j=1}^{n}t_i, t_i\right\} = m_2^{-1}\sum_{j=1}^{n}t_i.$$

В случае 1) если число приборов через время $\tau_1(\tau_1 < \tau_k)$ уменьшается от m_2 до m_1, то время оптимального расписания не изменится. В случае 3), как легко видеть, если через время $\tau_1\left(\tau_1 < m_2^{-1}\sum_{j=1}^{n}t_i\right)$ произойдет уменьшение числа приборов от m_2 до m_1, то время оптимального расписания вычисляется по формуле

$$T_{\text{опт}} = \tau_1 + \left(\frac{1}{m_2}\sum_{i=1}^{n}t_i - \tau_1\right)\cdot\frac{m_2}{m_1}.$$

Пусть выполняется соотношение 2) и известно, что через время τ_1 число приборов уменьшится от m_2 до m_1. Ответ на вопрос о том, каким в этом случае должно быть время τ_1, чтобы $T_{\text{опт}}$ было равно t_k, дает следующее утверждение.

Пусть $\max\limits_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{m_1}\sum\limits_{j=1}^{n}t_i, t_i\right\} = m_1^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}t_j$

и $\max\limits_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{m_2}\sum\limits_{j=1}^{n}t_i, t_i\right\} = t_k$.

Выполнение работ осуществляется в течение всего времени обслуживания различным количеством приборов $m'(m_1 \le m' \le m_2)$. Общее время работы $(m_1 + i)$ приборов равно τ_1 $(i = 0, 1, \dots, m_2 - m_1;$ $\sum\limits_{i=1}^{m_2-m_1}\tau_i = t_k)$.

Тогда необходимым условием того, чтобы $T_{\text{опт}} = t_k$, является выполнение следующего неравенства:

$$\tau_1 m_1 + \tau_2(m_1+1) + \dots + m_2(t_k - \sum_{i=1}^{m_2-m_1}\tau_i) \ge \sum_{i=1}^{n}t_1. \qquad (2.58)$$

Доказательство утверждения следует из того, что суммарное время занятости приборов при выполнении всего множества работ в любом допустимом расписании не может быть меньше, чем сумма продолжительностей всех работ.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть длительности выполнения работ могут принимать все значения из параллелепипеда $P_1 = \prod\limits_{i=1}^{m}[t_i^1, t_i^2]$ и количество приборов, которыми работы выполняются, может быть любым числом от m_1 до m_2.

Тогда, как было показано выше, P может быть разбит на многогранники, в каждом из которых значение $T_{\text{опт}}$ равно либо $m_1^{-1}\sum_{j=1}^{n} t_i$, либо t_k ($k = 1, ..., n$). Аналогично разбиение и для случая, когда количество приборов равно m_2. Учитывая результаты теоремы, получим, что из параллелепипеда P может быть выделено множество точек $B \subseteq P$ (может быть пустое), такое, что при заданных $\tau_1, ..., \tau_{m_2-m_1}$ для всех точек выполняется неравенство (2.58) и, следовательно, длина оптимального расписания задается продолжительностью работы максимальной длины.

Выше была исследована ситуация, когда работы могут выполняться только одним прибором. На практике нередко возможно использовать при выполнении одной работы более чем один прибор. Рассмотрим следующую постановку задачи распределения ограниченных ресурсов.

Пусть необходимо выполнить работы множества $N = \{d_1, ..., d_n\}$ ($n > 1$). Каждой работе для ее выполнения необходим минимум один прибор и максимум m_i^2 приборов, а также она может быть выполнена любым числом приборов m_i ($1 \le m_1 \le m_i^2$).

Время выполнения работы d_i в зависимости от числа приборов, которыми она выполняется, равно

$t_i^j = t_i^1/j$ ($j = 1, ..., m_i^2$),

где t_i^j — время выполнения работы d_i ($i = 1, ..., n$) на j приборах.

Пусть все работы независимы и возможны прерывания работ в процессе их выполнения. Необходимо построить расписание выполнения работ минимальной длительности.

В [55] показано, что если для всех d_i ($i = 1, ..., n$) $m_i^1 = m_i^2 = 1$, то длина оптимального расписания вычисляется по формуле

$$T_{\text{опт}} = \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n} t_i/m, t_i^1\right\}. \tag{2.59}$$

Если существует K, для которого $m_k^2 > 1$, то может быть доказана следующая лемма.

Лемма 2.11. Длина оптимального расписания для независимых прерываемых работ, длительность выполнения которых вычисляется по формуле $t_i^j = t_i^1/j$ ($j = 1, ..., m_i^2$), задается следующей формулой:

$$T_{\text{опт}} = \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n} t_i/m, t_i^1/m_i^2\right\}.$$

Доказательство. Разделим каждую работу d_i на число работ, равное m_i^2, время обслуживания каждой из которых будет t_i^j/m_i^2. Любую из этих работ можно выполнять не более чем на одном приборе. Легко видеть, что время оптимального расписания новых работ будет равно минимальному времени обслуживания предыдущих работ. Применив формулу (2.59) для вычисления минимального времени обслуживания, для заданного числа работ получим требуемое утверждение.

На практике не всегда выполняется то условие, что при увеличении в несколько раз объема ресурсов, выделяемых выполняемой работе, во столько же раз сокращается продолжительность ее выполнения.

Пусть $t_i^j > t_i^1/j$, т.е. сокращение продолжительности работ происходит медленнее, чем прирост выделяемых ресурсов. Рассмотрим задачу оптимального по времени распределения приборов при перечисленных предположениях. Следующая лемма описывает формулу, по которой вычисляется минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы для частного случая.

Лемма 2.12. Если $\max\limits_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} t_i^1/m, t_i^1\right\} = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^1/m$, то $T_{\text{опт}} = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^1/m$.

Доказательство. По формуле (2.59) может быть вычислено время оптимального расписания, если все работы могут выполняться только одним прибором и при этом все приборы заняты на протяжении всего отрезка времени $(0, \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^1/m)$. Если предположить, что в оптимальном расписании существует работа d_i, которая выполняется в течение отрезка времени длиной $\tau_i \le t_i^j$ на j приборах, то это означало бы, что время оптимального расписания можно оценить так:

$$T'_{\text{опт}} \ge \tau_0 + \tau_i + \left(\sum_{j=1}^{n} t_j^1 - m\tau_0 - (m - m_{ij})\tau_i - \frac{\tau_i}{t_i^j} t_i^1\right),$$

где τ_0 — длина начального интервала, на котором каждая работа выполнялась одним прибором.

Так как $t_i^1/t_1^j < m_j$, то $T'_{\text{опт}} > \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^1/m$.

Утверждение леммы 2.11 позволяет строить оптимальное расписание в случае, если

$$\max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n} t_i^1/m, t_i^1\right\} = \sum_{i=1}^{n} t_i^1/m.$$

Алгоритм построения оптимального расписания для этого случая приведен в [8].

Рассмотрим ситуацию, когда выполняется соотношение

$$\max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n} t_i^1 / m, t_i^1\right\} = t_k^1.$$

Пусть $A_{\text{опт}}^1$ — оптимальное расписание выполнения всех работ в классе расписаний, выполняющих каждую работу не более чем одним прибором. Не уменьшая общности, можно считать, что в этом расписании работу d_k выполняет на всем протяжении первый прибор. Суммарное время выполнения работ на остальных приборах не превышает t_k^1. Для каждого прибора j ($j = 2, \ldots, m$) может быть рассчитан интервал τ_j, в течение которого прибор j может быть выделен работе d_k таким образом, чтобы суммарное время выполнения на приборе j не превысило времени выполнения работы t_k^1 с учетом того, что на время τ_j ей выделен второй прибор. Значение τ_j находят из следующего уравнения:

$$\sum_{i\in M_j} t_i^1 + \tau_j = t_k^1 - \tau_j + \tau_j \frac{t_k^2}{t_k^1}, \tag{2.60}$$

где $\sum\limits_{i\in M_j} t_i^1$ — суммарная продолжительность всех работ, выполняемых на приборе j; M_j — множество работ, выполняемых на приборе j.

Не уменьшая общности, можно считать, что приборы пронумерованы по убыванию величины $\sum\limits_{i\in M_j} t_i^1 - \tau_j$. Выделим второй прибор работе d_k на время τ_2, полученное при решении уравнения (2.60). Тем самым общее время выполнения работы d_k сократится на величину $\tau_1 \dfrac{t_k^2}{t_k^1}$. На следующем этапе можно выяснить, на какое время τ_3 третий прибор может быть выделен работе d_k. Для этого еще разрешим уравнение (2.60) с учетом нового значения t_k^1. Определив длину интервала τ_2, на котором можно использовать третий прибор для выполнения работы d_k, мы выделяем это время для выполнения d_k.

Проделав эту процедуру для всех приборов, получим расписание, длина которого меньше, чем длина оптимального расписания в классе расписаний, где каждая заявка может обслуживаться только одним прибором.

Учитывая приведенные выше рассуждения, мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а 2.8. Если $\max\limits_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} t_j^1/m, t_i^1\right\} = t_k^1$ и $m_i^2 > 1$ для всех d_i, то время оптимального расписания $T_{\text{опт}} < t_k^1$.

Рассмотрим случай, когда число приборов, участвующих в выполнении работ, задано на интервале $[0, T]$ кусочно-постоянной функцией $b(t)$ с конечным числом точек разрыва. Функцию $b(t)$ будем называть функцией ресурсов. Будем далее считать, что $b(t) \geq 1$ для всех $t \in [0, T]$, и $T \geq \sum\limits_{j=1}^{n} t_i^1$ — область значений функции $b(t)$ есть множество положительных целых чисел.

Лемма 2.13. Пусть каждая работа может выполняться только одним прибором. Тогда длина оптимального расписания может быть оценена следующим образом:

$$T_{\text{опт}} \geq \sum_{i=1}^{k} \tau_j + \tau, \tag{2.61}$$

где $\tau = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - \sum\limits_{j=1}^{k} m_j \tau_j\right) \Big/ m_{k+1}$, а k таково, что $\sum\limits_{j=1}^{k+1} \tau_j m_j < \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$ и $\sum\limits_{j=1}^{k+1} \tau_j m_j \geq \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$; τ_j — длина интервала, на котором $b(t)$ постоянна; m_i — число приборов на интервале i.

Если при этом выполняется условие

$$\max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n} t_i^1/m, t_i^1\right\} = \sum_{i=1}^{n} t_k^1/m, \tag{2.62}$$

где $m = \max m_i$, то в формуле (2.61) будет знак равенства.

Доказательство. Оптимальное время выполнения всех работ, если все приборы будут работать без простоев, равно правой части неравенства (2.61). При выполнении условия (2.61), которое гарантирует занятость всех приборов в оптимальном расписании, такой алгоритм обслуживания может быть построен, если выделяются приборы сначала работам максимальной продолжительности, а затем, когда все работы станут одинаковой длины в интервале $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, работе d_i прибор выделяется на время $(\tau_{i+1} - \tau_i)\dfrac{m_i}{n}$.

В том случае, когда организовать беспростойную работу всех приборов в оптимальном расписании невозможно, длина оптимального расписания больше правой части неравенства (2.61).

Допустим, что работы могут выполняться разным количеством приборов, т.е. для каждой работы d_i число приборов, которыми они могут выполняться, заключено, как и ранее, в интервале $[m_i^1, m_i^2]$. Время выполнения всех работ может быть оценено в этом случае следующим образом.

Лемма 2.14. Если $\max\limits_{j=1,\dots,k+1} \{m_j\} < m_j^2$ для всех $i \in N$, то в оптимальном расписании все приборы работают без простоев. Если выполнено $m_i^1 = 1$ для всех $i \in N$ и время выполнения работы i на m_{ij} приборах $m_i^1 \le m_{ij} \le m_i^2$ равно t_i^1/m_{ij}, то время выполнения работ в оптимальном расписании равно правой части неравенства (2.61).

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.11.

Если на множестве требований задано отношение частичного порядка, граф редукции которого есть $G(N, U)$, то в указанных выше условиях задача определения оптимального по быстродействию расписания является NP-полной [18]. Это означает, что не существует эффективного алгоритма и могут быть предложены только переборные схемы нахождения оптимального расписания.

В связи с этим представляет интерес следующее. Пусть для работ множества N известно оптимальное расписание выполнения этих работ в случае, если число приборов, при помощи которых происходит выполнение, задано кусочно-постоянной функцией $b_1(t)$. При этом минимальное время выполнения всего множества работ обозначим через $T^1_{\text{опт}}$. Следует определить, как велико будет отклонение времени оптимального расписания того же множества работ, если функция $b_1(t)$ будет изменена. Функцию, значение которой в каждый момент времени показывает, сколько приборов могут выполнять работы, далее будем называть функцией ресурсов. Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 2.9. Время оптимального расписания при фиксированных длительностях работ и фиксированном отношении частичного порядка непрерывно зависит от функции ресурсов $b_1(t)$.

Доказательство. Пусть $b_1(t)$ и $b_2(t)$ — функции ресурсов, заданные на интервале $[0, T]$ так, что $T \ge \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^1$. При этом время выполнения работ множества N при функции ресурсов $b_1(t)$ равно $T^1_{\text{опт}}$. Спроектируем точки разрыва функций $b_1(t)$, $b_2(t)$ на интервал $[0, T]$ и получим разбиение интервала $[0, T]$ на отрезки $[\tau_1, \tau_2], \dots, [\tau_M, \tau_{M+1}]$, где M — суммарное число точек разрыва функций $b_1(t)$, $b_2(t)$. Выберем из полученного множества отрезков те, на которых $b_1(t) > b_2(t)$, и обозначим это множество через D^+, а через D^- обозначим множество отрезков, у которых $b_1(t) < b_2(t)$. Тогда значение оптимального расписания $T_{\text{опт}}$ для функции $b_2(t)$ может быть оценено следующим образом:

$$T^1_{\text{опт}} - \sum_{i \in D^-} (b_2(t) - b_1(t))\Delta\tau_i \le T^2_{\text{опт}} \le T^1_{\text{опт}} - \sum_{i \in D^+} (b_1(t) - b_2(t))\Delta\tau_i, \quad (2.63)$$

где $\Delta\tau_i$ — длина интервала i из множества D^- или D^+.

Из формулы (2.63) следует утверждение теоремы при условии, что $\sum\limits_{i \in D^- \bigcup D^+} \Delta\tau_i$ становится сколь угодно малой величиной.

Рассмотренные в этой главе методы построения областей устойчивости в задачах оптимального распределения ресурсов позволяют осуществить более эффективное их использование при практической реализации конкретных проектов.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют способы задания длительности работ?
2. Как определяется расписание выполнения работ?
3. Каковы особенности построения расписания для параллельно выполняемых работ?
4. Как планировать выполнение работ при переменном объеме ресурсов?
5. Как построить область устойчивости оптимального расписания?
6. Как изменяется расписание при динамическом изменении последовательности выполнения работ?
7. Какие особенности характерны для управления прерываемыми работами?

Глава 3. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛЯХ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛОГИСТИКИ

3.1. ЗАДАЧИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОИЗВОДСТВЕННОМ ПЛАНИРОВАНИИ

Повышение производительности труда и качества продукции, уменьшение производственной себестоимости, точное планирование и управление ресурсами относятся в современной экономической ситуации к числу главных факторов успеха на рынке. Поэтому эффективное **решение задач производственной логистики,** без сомнения, можно назвать приоритетной целью любого предприятия реального сектора экономики.

На практике добиться строго определенного и заранее рассчитанного расписания производства порой очень сложно. Для этого нужно обеспечить полную согласованность действий всех структурных подразделений во времени, постоянно отслеживать возможные сбои согласованного ритма производства и вводить поправки в его ход, если на каком-то участке установленный ритм будет нарушен.

Отклонения ритма производства от запланированного расписания могут приводить к огромным экономическим потерям на предприятии: к простоям цехов и участков, к дополнительным затратам на восстановление нормального графика производства.

В реальной практике, например при планировании работы оборудования на машиностроительном предприятии, размерности задач построения расписаний не позволяют строить расписания, являющиеся точными решениями для выбранного критерия, что приводит к необходимости использовать приближенные решения. В настоящей работе рассматривается задача краткосрочного календарного планирования для производственного подразделения (цех, производственный участок).

В частности, такие задачи возникают при составлении расписания функционирования основного оборудования механосборочных гибких производственных систем (ГПС).

Интервал оперативного планирования составляет обычно несколько смен (до недели). В процессе планирования оборудование распределяется между работами. *Работой* называется транспортная партия с заданным маршрутом обработки.

Под выполнением работы понимается обработка транспортной партии на ряде операций в заданной последовательности. *Операцией* назовем законченный цикл обработки транспортной партии на станке.

Задачей планирования является задание расписания работы каждого станка при выполнении перечня операций, входящих в планируемые работы, при этом кроме требования быстродействия должны выполняться еще некоторые требования на качество расписания. Эти требования реализуются, в частности, в следующих показателях: соблюдение директивных сроков обработки; поддержание оптимального объема незавершенного производства; минимизация длительности производственного цикла; максимизация коэффициента использования основного оборудования; лучшая загрузка сборочного оборудования, обеспечение комплексного выпуска изделий.

Значения перечисленных выше показателей для составленного расписания далее будем называть значениями интегральных показателей расписания.

Введем следующее определение.

Пусть задано конечное множество работ, выполнение каждой из которых заключается в реализации фиксированной последовательности операций. Назовем граф, задающий последовательность выполнения операций для заданного множества работ, сетью π.

С использованием понятия сети π процесс формирования оперативно-производственного плана может быть разбит на следующие этапы.

1. Формирование пооперационной сети π всех работ на производственном участке.

2. Отображение работ исходной сети π в сеть работ π_1 ($\pi_1 \subset \pi$), которые могут быть привлечены для рассмотрения их в конкурсе при построении оперативного плана (формирование портфеля работ).

3. Отображение сети π_1 в сеть π_2 ($\pi_2 \subset \pi_1$), задающую оперативно-производственный план выполнения работ.

Необходимо отметить, что при отображении сети π_1 в сеть π_2 не обязательно в расписании все работы должны закончить свое выполнение. Возможно, что часть работ не будет выполнена до конца и их окончательное выполнение будет планироваться на следующем интервале времени.

Исходными данными при построении сети π служат производственная программа, технологическая информация и информация о текущем состоянии производства, включая данные об имеющихся ресурсах.

Первым шагом при подготовке к планированию является построение «портфеля работ», т.е. выбор работ, готовых к выполнению (планированию) в течение очередного интервала планирования. Часть позиций производственной программы не попадает в портфель работ из-за недостатка ресурсов, отсутствия работоспособного оборудования, недостатка производственных мощностей и по другим причинам.

Расписание (сеть π_2) удобно формировать из позиций, включенных в портфель работ (сеть π) в связи с трудоемкостью задачи, и необходимо сократить объем перебора за счет работ, которые заведомо не попадут в расписание.

Процедуры формирования портфеля работ и планового задания связаны между собой. Чем шире заданы условия при формировании сети π_1, тем больше вариантов генерации сети π_2, и наоборот.

При составлении оперативно-производственного плана не все исходные параметры плана могут быть заданы точно. Это, в частности, происходит из-за неполной определенности при функционировании производственной системы (изменение основных нормативных значений, длительности операций, выход из строя оборудования, изменение перечня выполняемых работ и т.д.).

Службам, осуществляющим оперативно-производственное планирование, часто необходимо иметь информацию о том, как велики могут быть отклонения в производственной системе (производственной ситуации), чтобы при изменении расписания выполнения работ на остаток интервала планирования сохранились определенные свойства исходного расписания.

К таким свойствам в первую очередь относятся:

1) сохранение множества работ в плановом задании;

2) сохранение упорядоченности выполнения операций на каждом станке;

3) сохранение или слабое изменение значений интегральных показателей, характеризующих качество расписаний.

Способность расписания сохранять перечисленные свойства при изменении производственной ситуации далее будем называть *устойчивостью расписания*. Ниже будут даны более строгие определения устойчивости расписания к изменениям в производственной ситуации в зависимости от того, какие из перечисленных выше свойств расписания сохраняются.

Параметрами типичных возмущений производственной ситуации являются следующие: забраковка транспортной партии; забраковка одной или нескольких деталей; выход из строя элементов автоматизированной транспортно-складской системы (АТСС); выход из строя АТСС; запуск в производство срочных работ; обнаружение недостатка ресурсов в процессе реализации расписания; приостановка грузоносителя по инициативе персонала; предшествующая операция в технологическом маршруте выполняется с запаздыванием относительно исходного плана; отказ станка (время восстановления значительно меньше интервала планирования); выход из строя станка (время восстановления соизмеримо с интервалом планирования).

Перечисленным видам возмущений производственной ситуации соответствуют изменения исходных параметров в задаче планирования выполнения работ:

а) полное или частичное исключение работ из плана;

б) увеличение или уменьшение количества выполняемых работ в сети в процессе выполнения оперативно-производственного плана на интервале планирования;

в) уменьшение количества станков, готовых к реализации расписания на начало интервала планирования.

С учетом перечисленных изменений исходных параметров введем следующие определения устойчивости расписаний при оперативно-производственном планировании.

Пусть для заданного интервала планирования составлено расписание полного или частичного выполнения K работ, в результате чего для каждой единицы оборудования задано множество выполняемых операций и задана последовательность, в которой должны выполняться эти операции на каждом станке.

Определение 3.1. Расписание выполнения работ называется структурно устойчивым при изменении исходных параметров, значения которых заданы вектором $\bar{b} = (b_1, ..., b_m)$, если существует такой вектор $\bar{b}' = (b_1', ..., b_m')$ $(b_j' > 0)$, что для каждого вектора $\bar{b}^n = (b_1'', ..., b_m'')$, задающего входные параметры расписания $b_i < b_i'' < b_i + b_i'$ $(i = \overline{1, M})$, на каждом станке сохраняется то же множество и та же последовательность выполняемых операций, как и для входных параметров расписания, заданных вектором $\bar{b} = (b_1, ..., b_m)$.

Исходными параметрами, значения которых задает вектор $\bar{b}$, являются следующие: состав работ, длительность выполнения операций; состав оборудования, готового для реализации оперативно-производственного плана на заданном интервале планирования.

Исходя из данного определения, рассмотрим некоторые частные признаки структурной устойчивости по перечисленным изменениям исходных параметров расписания.

1. Исключение работы из состава сети π_1 до начала реализации оперативно-производственного плана.

Необходимым и достаточным условием структурной устойчивости для данного изменения исходных параметров расписания является отсутствие выполнения всех операций данной работы в исходном расписании.

2. Уменьшение количества станков, готовых к выполнению операций на заданном интервале планирования.

Достаточным условием структурной устойчивости расписания при изменении множества исходных параметров в этом случае будет то, что данная группа станков, неготовых к работе на заданном интервале планирования в первоначальном расписании, не участвовала в выполнении оперативно-производственного плана.

Если расписание не является структурно устойчивым, то меру неустойчивости можно назначить по количеству инверсий на каждом станке при перепланировании в результате возмущений производственной ситуации, а также по числу операций, не вошедших во вновь построенный оперативно-производственный план; иными словами, количественная оценка неустойчивости вычисляется по формуле

$$M_{\text{ст}} = \sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{K_j} \alpha_i^j \mu_i^j + \sum_{e\in\vartheta} \beta_e + \sum_{k\in\Omega_n} \sigma_k,$$

где L — число станков, участвующих в оперативно-производственном плане; K_j — количество различных операций, выполняемых на j-м станке в исходном производственном плане; a_i^j — количество инверсий для i-й операции на j-м станке.

Под инверсией понимается перестановка из n элементов, в которой элемент i не может занимать i-ю позицию. Поэтому количество инверсий для i-й операции j-го станка — абсолютная величина разности между числом, задающим очередность выполнения i-й операции в расписании с исходными значениями параметров, и числом, задающим очередность выполнения операций i при возмущении исходных параметров расписания;

μ_i^j — весовой коэффициент одной инверсии на i-й операции j-го станка; ϑ — множество операций, выполнение которых не вошло в новый производственный план при возмущении в исходной производственной ситуации; β_e — весовой коэффициент e-й операции, не вошедшей в новый оперативно-производственный план; Ω_n — множество дополнительных операций, которых не было в прежнем расписании; σ_k — весовой коэффициент K-й дополнительной операции, вошедшей в новый оперативный план.

Значения весовых коэффициентов β_e, α_i^j, σ_k должны отражать организационно-экономические потери участка, цеха, где произошло перепланирование работ вследствие изменения производственной ситуации.

Выше отмечалось, что качество расписания характеризуется значениями интегральных показателей, таких, как соблюдение директивных сроков обработки, минимизация длительности производственного цикла. В связи с этим достаточно естественно считать два расписания мало отличающимися по качеству, если значения их интегральных показателей отличаются несущественно. С учетом сказанного введем следующее определение.

Определение 3.2. Расписание выполнения работ называется устойчивым по функционалу при изменении исходных параметров расписания, значения которых заданы вектором $\bar{b} = (b_1, ..., b_m)$, если существует такой вектор $\bar{b}' = (b_1', ..., b_m')$, что для каждого вектора $\bar{b}'' = (b_1'', ..., b_m'')$, задающего значения исходных параметров расписания так, что $b_i < b_i'' < b_i + b_i'$, значение интегральных показателей меняется не более, чем на заданное число, т.е. выполняется неравенство

$$|f_i - f_i'| \le \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, P},$$

где P — число интегральных показателей; f_i — значение i-го интегрального показателя, характеризующего расписание при исходных значениях входных параметров расписания; f_i' — значение i-го интегрального показателя при возмущенной производственной ситуации.

Исходными параметрами, значения которых задает вектор $\bar{b} = (b_1, ..., b_m)$, могут быть следующие: состав работ; длительность операций; состав оборудования, которое может быть использовано на заданном интервале планирования.

В отличие от структурной устойчивости расписание, устойчивое по функционалу, допускает перестановку и исключение ранее запланированных на каждом станке операций, сохраняя при этом значения интегральных показателей, близкие к первоначальным. Оценить неустойчивость расписания по функционалу можно следующим образом:

$$M_\text{ф} = \sum_{i \in K'} \delta_i |f_i - f_i'|,$$

где K' — множество интегральных показателей, которые ухудшили значения при возмущении производственной ситуации; δ_i — весовой коэффициент i-го показателя, отражающий изменение производственной ситуации при изменении i-го интегрального показателя; f_i — значение i-го показателя при исходных значениях параметров производственной ситуации; f'_i — значение i-го показателя для возмущенной производственной ситуации.

Необходимо отметить, что в формулах, отражающих неустойчивость расписания по функционалу и по структуре решения, определение весовых коэффициентов должно происходить с привлечением экспертов, оценивающих степень организационно-экономических потерь подразделения (цеха, производственного участка) при изменении исходного оперативного плана выполнения работ, явившегося следствием изменений производственной ситуации. Численное значение количественной оценки неустойчивости расписания может, например, соответствовать экономическим потерям участка, цеха вследствие перепланирования выполнения работ.

Рассмотрим задачу отыскания максимального увеличения длительности операций заданного множества операций, при котором сохраняется устойчивость расписания по структуре.

Пусть A — расписание выполнения работ при начальных значениях исходных параметров. Обозначим через $x_i = (x_{i1}, ..., x_{in})$ вектор, координаты которого задает номер, и последовательность, в которой выполняются операции на i-м станке в процессе реализации расписания, т.е.

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если операция } j \text{ на станке } i \text{ не выполнялась;} \\ e\,(e > 0), \text{если операция } j \text{ на станке } i \text{ выполняется} \\ \text{после выполнения предыдущих } e - 1 \text{ операций.} \end{cases}$$

Длительность операции j обозначим через t_j $(j = \overline{1, N})$, где N — число всех выполняемых операций.

Тогда задачу определения максимального удлинения операций, сохраняющих структурную устойчивость расписания, можно сформулировать следующим образом:

$$\max \Delta t;$$

$$x_{ij} - x_{ij}^{\Delta t} = 0; \Delta t \geq 0\ (i = \overline{1, M};\ j = \overline{1, N}),$$

где $\bar{x}_i^{\Delta t} = (x_{i1}^{\Delta t}, ..., x_{iN}^{\Delta t})$ — вектор, задающий последовательность выполнения операций на станке i в расписании, построенном после того, как для операции $d \in D_{\Delta t}$ длительности операций были увеличены. Здесь $D_{\Delta t}$ — множество операций, у которых длительности увеличились на Δt.

Аналогично может быть сформулирована задача вычисления области устойчивости при уменьшении длительности операций $d \in D'_{\Delta t}$:

$$\max \Delta t'$$

$$x_{ij} - x_{ij}^{\Delta t'} = 0; \Delta t' \geq 0 \; (i = \overline{1, M};\; j = \overline{1, N}),$$

где $\bar{x}_i^{\Delta t'} = (x_{i1}^{\Delta t'}, \ldots, x_{iN}^{\Delta t'})$ — задает последовательность выполнения операций на станке i при уменьшении длительности работ $d \in D'_{\Delta t}$ на $\Delta t'$; $D'_{\Delta t}$ — множество операций, длительности которых уменьшились.

Выше упоминалось о том, что одним из возможных возмущений производственной ситуации является поступление на выполнение дополнительного множества работ для срочного их выполнения в процессе выполнения исходного множества работ. Рассмотрим эту ситуацию более подробно.

Пусть есть составленное по решающим правилам (эвристикам) расписание A выполнения некоторого множества работ $\{R_1\}$. В процессе выполнения заданного множества работ (или до начала выполнения) поступает на выполнение дополнительное множество работ $\{R_2\}$, обладающее более высоким приоритетом на выполнение по сравнению с исходным множеством работ $\{R_1\}$. В данном случае достаточным условием устойчивости расписания по структуре является то, что выполнение работ множества $\{R_1\}$ происходит на станках множества N_1, а работ множества $\{R_2\}$ — на станках множества N_2, таких, что $N_1 \cap N_2 = \varnothing$.

Рассмотрим ситуацию, когда $N_1 \cap N_2 = \varnothing$. В этом случае можно говорить о структурной устойчивости расписания выполнения работ множества $\{R_1\} \cup \{R_2\}$ в зависимости от момента поступления дополнительного множества работ на $\{R_2\}$.

Определение 3.3. Пусть есть исходное множество работ $\{R_1\}$ и в момент t^* поступает на выполнение дополнительное множество работ $\{R_2\}$. Расписание выполнения работ множества $\{R_1\} \cup \{R_2\}$ для указанных исходных данных обозначим через $A_{12}(t^*)$.

Расписание $A_{12}(t^*)$ назовем структурно устойчивым при изменении момента поступления работ множества $\{R_2\}$, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что при поступлении работ множества $\{R_2\}$ в любой момент времени $t' \in [t^*, t^* + \varepsilon']$ количество и последовательность выполнения всех операций на каждом станке в расписании $A_{12}(t^* + \varepsilon')$ совпадают с количеством и последовательностью выполнения всех операций на каждом станке в расписании $A_{12}(t^*)$ $(0 < \varepsilon' \leq \varepsilon)$.

Рассмотрим временной интервал $[0, T]$, на котором планируется выполнение комплекса работ $\{R_1\} \cup \{R_2\}$, при этом $t^* \in [0, T]$. Тогда интервал $[0, T]$ может быть разбит на конечную систему отрезков

$[0; t_1)$, $[t_1; t_2)$, ..., $(t_{L-1}, T]$ так, что момент t_i $(i = \overline{1, L-1})$ соответствует завершению i-й операции. Здесь L — число выполненных операций на отрезке $[0, T]$ для множества работ $\{R_1\} \cup \{R_2\}$. Пусть существует e, для которого выполняется $t^* \in [t_e, t_{e+1}]$.

Алгоритм построения расписания $A_{12}(t^*)$ при поступлении работ множества $\{R_2\}$ в момент t^* реализует одну из альтернатив.

1. В момент t^* прекращается выполнение одной или нескольких операций множества $\{R_1\}$ и начинают выполняться на освободившемся оборудовании операции работ множества $\{R_2\}$.

2. До момента времени t_k $(k \geq e + 1)$ продолжается выполнение работ множества $\{R_1\}$ на всех станках.

Очевидно, что во втором случае расписание структурно устойчиво при изменении момента поступления работ множества $\{R_2\}$.

В первом случае расписание устойчиво только в том случае, если время завершения выполнения всех операций на каждом из станков, на которых в момент времени t^* начали выполняться операции работ множества $\{R_2\}$, меньше, чем T, т.е. выполнение всех операций на этих станках завершается до окончания интервала планирования.

Как и ранее, здесь возможна постановка задачи отыскания максимального ε, такого, что при поступлении множества работ $\{R_2\}$ в момент $t^* + \varepsilon$ сохраняется количество и последовательность выполнения операций на каждом станке та же, как и для ситуации поступления работ $\{R_2\}$ в момент t^*. Формальная задача заключается в следующем:

$$\max \varepsilon$$

$$x_{ij} - x'_{ij} = 0; \Delta t' \geq 0 \, (i = \overline{1, M};\ j = \overline{1, N});$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

Здесь

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если операция } j \text{ на станке } i \text{ не выполнялась;} \\ K, \text{если } j\text{-я операция выполняется } K\text{-й} \\ \text{в последовательности выполнения операций на станке } i. \end{cases}$$

Если момент поступления дополнительного множества работ $\{R_2\}$ может принимать любое значение из интервала планирования $[0, T]$, то, учитывая конечность стратегий перераспределения работ множества $\{R_1\} \cup \{R_2\}$ по станкам, можно сформулировать задачу разбиения интервала $[0, T]$ на такие отрезки $[0; \tau_1)$, ..., $[\tau_1, \tau_2)$, ..., $(\tau_M, T]$, что для любого e $(e = 1, ..., M)$ в любой момент $t' \in [\tau_e, \tau_{e+1}]$ поступления множества работ $\{R_2\}$ сохраняется структура расписания $A_{12}(t')$

выполнения работ множества $\{R_1\} \cup \{R_2\}$, т.е. сохраняется множество и последовательность выполнения операций на каждом станке.

Прежде чем перейти к формулировке задачи вычисления области устойчивости по функционалу, заметим, что структурная устойчивость расписания характеризует сохранение последовательности обработки операций на одном или нескольких станках.

Понятие устойчивости по функционалу предполагает сохранение или небольшое отклонение одного (нескольких) интегрального показателя, характеризующего работу производственного участка, цеха на заданном интервале планирования.

Отметим, что если под расписанием работы станка понимается последовательность выполнения операций в течение интервала планирования на заданном станке с указанием длительности выполнения каждой операции, то под расписанием работы производственного участка, цеха понимается расписание работы всех единиц оборудования, входящих в данный производственный участок, цех.

Задача вычисления максимального удлинения операций, при котором сохраняется устойчивость расписания по функционалу при увеличении (уменьшении) длительности операций, формулируется следующим образом:

$$\max \Delta t$$

$$\left| f_i(t) - f_i(t + \Delta t) \right| \le \varepsilon_j;\ j = \overline{1, P};$$

$$\Delta t \ge 0.$$

Здесь P — число интегральных показателей; $f_j(t)$ — значение j-го интегрального показателя расписания при начальной длительности операций, заданной вектором $t = (t_1, \ldots, t_N)$; $f_j(t + \Delta t)$ — значение j-го интегрального показателя после того, как длительности операций $d \in D_{\Delta t}$ были увеличены (уменьшены) на величину Δt.

Рассмотрим задачу вычисления области устойчивости расписания по функционалу при поступлении заданного дополнительного множества работ в процессе реализации расписания выполнения работ исходного множества. Введем следующее определение.

Определение 3.4. Пусть есть исходное множество работ $\{R_1\}$ и в момент t^* поступает на выполнение дополнительное множество работ $\{R_2\}$. Расписание выполнения работ множества $\{R_1\} \cup \{R_2\}$ для данной ситуации обозначим $A_{12}(t^*)$.

Расписание $A_{12}(t^*)$ назовем устойчивым по функционалу при изменении момента поступления работ множества $\{R_2\}$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при поступлении работ множества $\{R_2\}$ в любой момент времени интервала $(t^*, t^* + \varepsilon')$ значения интегральных показателей расписания удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\left| f_j(t^*) - f_j(t^* + \varepsilon') \right| \leq \varepsilon_j; \quad j = \overline{1; P},$$

где $f_j(t^*)$ — значение j-го интегрального показателя расписания при поступлении множества работ $\{R_2\}$ в момент t^*; $f_j(t^* + \varepsilon')$ — значение j-го интегрального показателя расписания при поступлении множества работ $\{R_2\}$ в момент времени $(t^* + \varepsilon')$ $(0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon)$; P — число интегральных показателей расписания, по которым вычисляется область устойчивости по функционалу.

Если длительности операций множества D изменяются на одно и то же значение и диапазон возможного изменения длительности операций задан интервалом $[\varepsilon_1; \varepsilon_2]$, то можно поставить задачу разбиения интервала $[\varepsilon_1; \varepsilon_2]$ на такие отрезки, чтобы каждому отрезку разбиения соответствовала одна и та же последовательность выполнения операций на каждом станке при построении расписания по исходным решающим правилам при изменении длительности операций на любое число из заданного отрезка.

3.2. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ОПЕРАТИВНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПЛАНОВ

Как было показано выше, постановка задачи определения областей структурной устойчивости расписания при увеличении длительности работ состоит в следующем.

Пусть A — расписание выполнения работ при исходных значениях входных параметров. Обозначим через $\bar{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{iN})$ вектор, координаты которого задают номер и последовательность, в которой выполняются операции на i-м станке в процессе реализации расписания, т.е.

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если операция } j \text{ на станке } i \text{ не выполняется;} \\ e\,(e > 0), \text{если операция } j \text{ на станке } i \text{ выполняется} \\ \text{после выполнения предыдущих } e - 1 \text{ операций.} \end{cases}$$

Длительность операции j обозначим через t_j $(j = \overline{1, N})$, где N — число всех выполняемых операций.

Тогда задачу определения максимального удлинения операций, сохраняющих структурную устойчивость расписания, можно сформулировать следующим образом:

$$\max \Delta t \tag{3.1}$$

$$x_{ij} - x_{ij}^{\Delta t} = 0; \Delta t \geq 0 \; (i = \overline{1, M}; \; j = \overline{1, N}), \tag{3.2}$$

где $\overline{x}_i^{\Delta t} = (x_{i1}^{\Delta t}, ..., x_{iN}^{\Delta t})$ — вектор, задающий последовательность выполнения операций на i-м станке в расписании, построенном после того, как для операций $d \in D_{\Delta t}$ длительности операций были увеличены. Здесь $D_{\Delta t}$ — множество операций, у которых длительность увеличилась на Δt.

Прежде чем приводить описание этого алгоритма, сформулируем условия, выполнение которых является необходимым для обеспечения структурной устойчивости расписания.

Пусть на станке i осуществлялось последовательное выполнение операций $d_1^i, ..., d_{k_i}^i$, где k_i — число операций, выполняемых на станке i в течение интервала планирования. Обозначим через N_j^i — множество операций, которые участвуют в конкурсе за использование станка i, после того как на этом станке выполнена $j - 1$ операция.

Учитывая введенные обозначения, получим следующее:

а) конкурс среди операций на предоставление им станка i проводился k_i раз;

б) в конкурсе принимали участие операции $d_1^i, ..., d_{ki}^i$ $i = \overline{1, M}$, при этом $d_j^i \in N_j^i$;

в) в конкурсе j выиграла операция g_j^i $(j = \overline{1, k_i})$;

г) все предшествующие операции в сети π_2 для операции d_j^i к моменту начала конкурса j за станок i были выполнены.

Зададим ограничения, для которых при увеличении длительности операций будут выполняться условия а) — г).

Обозначим через R_j^i множество операций — предшественников операции d_j^i (это все операции в сети, которые в соответствующем пути сети π_2 должны быть выполнены до начала выполнения операции d_j^i).

Через $\Delta\tau_e^i$ $(e = 0; \overline{j-1})$ обозначим длительности простоя станка i после выполнения операции e ($\Delta\tau_0^i$ — время ожидания станком i первой выполняемой на нем операции).

При данных обозначениях условие г) будет выполняться в том и только в том случае, если выполняется система неравенств:

$$\tau_e + t'_e \le \sum_{k=0}^{j-1} \Delta\tau_k^{i'} + \sum_{k=1}^{j-1} t_k^{i'} \; (i = \overline{1, M};\; j = \overline{1, N};\; e \in R_j^i), \tag{3.3}$$

где τ_e — начало выполнения операции e; $\tau_k^{i'} = t_k^{i'}$, если $d_k^i \overline{\in} D_{\Delta t}$, и $t_k^{i'} = t_k^{i'} + \Delta t$, если $d_k^i \in D_{\Delta t}$; $k = \overline{1; j-1}$; $\Delta\tau_k^{i'}$ — длительность простоя станка i после выполнения операции j при увеличении длительности операций множества $D_{\Delta t}$ на величину Δt.

Пусть для каждого станка i и каждого розыгрыша конкурса на этом станке задана функция выбора ψ_j^i $(i = \overline{1, m};\; j = \overline{1, k_i})$ так, что j-й по счету операцией, выполняемой на станке i, будет операция из множества N_j^i, на которой функция ψ_j^i достигает наибольшего значения.

Тогда условие в) будет выполняться в том случае, если максимум функции выбора ψ_j^i на множестве операций N_j^i будет достигаться на операции d_j^i, т.е. выполняются соотношения:

$$\max \psi_j^i(d_e) = d_j^i; \tag{3.4}$$

$$d_e \in N_j^i \; (i = \overline{1, m};\; j = \overline{1, k_i}),$$

где длительность операций $d_e \in N_j^i$ равна t_e, если $d_e \,\overline{\in}\, D_{\Delta t}$, и $t_e + D_{\Delta t}$, если $d_e \in D_{\Delta t}$.

Необходимо отметить, что при увеличении длительности операций в N_j^i могут войти новые операции, и соотношение (3.4) должно выполняться с учетом расширения множества N_j^i.

Условие а), очевидно, будет выполнено, если выполняется неравенство

$$\sum_{j=0}^{k_i-1} \Delta\tau_j^{i'} + \sum_{j=1}^{k_i} t_j^{i'} \le \Delta T, \tag{3.5}$$

где ΔT — длина интервала планирования; $t_j^{i'}$ — длительность операции d_j^i равна $t_j^{i'}$, если $d_k^i \,\overline{\in}\, D_{\Delta t}$, и равна $t_j^{i'} + t$, если $d_k^i \in D_{\Delta t}$; $\Delta\tau_j^{i'}$ — длительность простоя станка i после выполнения операции j с учетом увеличения длительностей операций.

Очевидно, что выполнение систем неравенств (3.3), (3.5) гарантирует, что $d_j^i \in N_j^i$ для всех $j = \overline{1, k_i}$. Таким образом, алгоритм вычисления области устойчивости при увеличении продолжительности операций множества состоит в следующем.

Шаг 0. Вычисление верхней оценки удлинения операций.

Вычислим максимальное число ε_j, на которое можно увеличить длину операций, входящих в путь j сети π_2, соответствующей расписанию выполнения работ, при котором все операции пути j будут выполнены до окончания интервала планирования. Для этого, как легко видеть, должно выполняться следующее соотношение:

$$\sum_{i \in S_j} t_i^j + \sum_{j \in S_j \cap D_{\Delta t}} \varepsilon_j + \sum_{i \in S_j} \Delta\tau_i^j \le T \quad (j = \overline{1, m}),$$

т.е. $\varepsilon_j \le \left(\Delta T - \sum_{j \in S_j \cap D_{\Delta t}} t_i^j - \sum_{i \in S_j} \tau_i^j \right) \Big/ n_j$, где S_j — множество операций пути j сети π_2, соответствующей составленному расписанию с исходными длительностями работ; n_j — число операций, входящих во множество $S_j \cap D_{\Delta t}$; m — число путей в сети π_2.

Окончательная верхняя оценка увеличения длительности операций, которое не приведет к тому, что длина расписания окажется больше интервала планирования, вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_j\} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Шаг 1. Для каждой операции, которая вошла в расписание, проверяется выполнение системы неравенств (3.3) при увеличении длительностей операций множества $D_{\Delta t}$ на величину ε, вычисленную в результате выполнения шага 0.

Если все неравенства системы (3.3) выполняются, то осуществляется переход к шагу 2, иначе вычисляется максимальное ε^1, при котором выполняется система неравенств (3.3).

Вычисление ε^1 осуществляется путем решения следующей системы неравенств относительно ε^1:

$$\tau_e + t_i' \le \sum_{k=0}^{j-1i} \Delta\tau_k^{i'} + \sum_{i \in M_j^i} t_k^j + \sum_{i \in M_j^i \cap D_{\Delta t}\varepsilon^1} \varepsilon_i \quad (i = \overline{1, M};\ j = \overline{1, K_i};\ e \in R_{ij}), \quad (3.3')$$

где M — число станков, участвующих в обработке; k_i — число операций, выполняемых на станке i; R_j^i — множество операций — предшественников для операции d_j^i; M_j^i — множество операций, выполняемых на станке i до начала операции j; $\Delta\tau_j^{i'}$ — длительность простоя станка i после выполнения на этом станке k-й по счету операции. Заметим, что выполнение системы неравенств (3.3′) сохраняет последовательность окончания операций на всех станках такой же, какой была последовательность окончания операций при исходных продолжительностях операций.

Шаг 2. Выбрать $\varepsilon^2 = \min\{\varepsilon^1, \varepsilon\}$, где ε — максимальное увеличение длительностей операций множества, вычисленное в результате работы шага 0 алгоритма; ε^1 — максимальное увеличение длительности работ множества $D_{\Delta t}$, вычисленное в результате работы шага 1 алгоритма.

Шаг 3. Сравниваются результаты работ функции выбора по правилу (3.4) для исходных длительностей операций и после того, как длительности операций множества $D_{\Delta t}$ были увеличены на величину ε^2. Если результаты работы функции выбора совпадают, ε^2 является интервалом структурной устойчивости при увеличении длительности работ множества $D_{\Delta t}$. В противном случае вычисляется максимальное ε_3, при котором максимум функции выбора будет достигаться на тех же элементах, что и при исходных продолжительностях работ. Положив $t = \varepsilon_3$, получим решение задачи (3.1)–(3.2).

В первом параграфе главы поставлена задача определения области устойчивости расписания по функционалу при изменении длительности выполнения операций. Эта задача заключается в вычислении максимального удлинения операций, при котором сохраняется устойчивость расписания по функционалу при увеличении длительности операций, и формулируется она следующим образом:

$$\max \Delta t; \tag{3.6}$$

$$\left| f_j(t) - f_j(t + \Delta t) \right| \le \varepsilon_j; \tag{3.7}$$

$$\Delta t \ge 0, \quad j = \overline{1, P},$$

где P — число интегральных показателей; $f_j(t)$ — значение j-го интегрального показателя расписания при начальной длительности операций, заданной вектором $t = (t_1, ..., t_N)$; $f_j(t + \Delta t)$ — значение j-го интегрального показателя, после того, как длительности операций $d \in D_{\Delta t}$ были увеличены на величину Δt. Показатели $f_j(t)$, $j = \overline{1, P}$ отражают качество расписания при оценке работы цеха или производственного участка.

Численный алгоритм решения задачи (3.6)–(3.7) заключается в следующем.

Шаг 0. Составление расписания при исходных продолжительностях выполнения работ $t = (t_1, ..., t_N)$. Выбор шага $d \in D_{\Delta t}$ изменения длительностей операций для $d \in D_{\Delta t}$.

Шаг 1. Увеличение длительностей операций $d \in D_{\Delta t}$ на величину Δt.

Шаг 2. Составление расписания для полученных длительностей операций и вычисление значений интегральных показателей $f_j(t + \Delta t)$.

В процессе составления расписания для увеличенных длин операций при назначении очередной операции на каждый станок происходит вычисление нижней оценки выражения

$$\left| f_j(t) - f_j(t + \Delta t) \right|; \quad j = \overline{1, P} \tag{3.8}$$

для вновь составляемого расписания; и если окажется, что существует e $(1 \le e \le P)$, такое, что нижняя оценка выражения $|f_j(t) - f_j(t + \Delta t)|$ больше ε_e, то прерываем построение расписания и выясняем, выполняется ли соотношение

$$\Delta t \le \delta, \tag{3.9}$$

где δ — требуемая точность решения задачи (3.6)–(3.7).

Если (3.9) выполняется, то присваиваем $\Delta t = \dfrac{\Delta t}{2}$, вычитаем из текущих длительностей операций $d_i \in D_{\Delta t}$ величину Δt и считаем, что решением задачи (3.6)–(3.7) является

$\Delta t = t_i^T - t_i$,

где t_i^T — текущая длительность любой операции $d_i \in D_{\Delta t}$, а t_i — начальная длительность любо операции $d_i \in D_{\Delta t}$. Выход из алгоритма.

Если неравенство (3.9) не выполняется, то уменьшить Δt по формуле $\Delta t = \dfrac{\Delta t}{2}$, вычесть Δt из длительностей операций $d_i \in D_{\Delta t}$ и перейти к шагу 2.

Если для вновь построенного расписания с длительностями операций $t_i = t_i^T + \Delta t$ выполняются неравенства $|f_i(t) - f_i(t + \Delta t)|$, $j = \overline{1, P}$, то осуществляется переход на начало шага 1.

Необходимо отметить, что способ вычисления нижней оценки разности $|f_i(t) - f_i(t + \Delta t)|$, $j = \overline{1, P}$ в процессе составления расписания зависит от вида интегральных показателей и для каждого вида этих показателей представляет самостоятельную процедуру.

Так, например, если в качестве интегрального показателя используется быстродействие расписания, то нижняя оценка длины расписания при каждом очередном назначении операции на станок вычисляется по формуле

$w_T^H = T_3 + \min\{|S_i'|\}$, $i = \overline{1, M}$,

где T_3 — время, затраченное на выполнение операций к моменту назначения очередной операции на станок; $|S_i'|$ — длина остатков путей из невыполненных работ сети π_1, которая задает технологическую последовательность выполнения работ.

Сформулируем определение структурной устойчивости расписания при выходе из строя станка i в момент t.

Определение 3.5. Расписание структурно устойчиво при выходе из строя станка i в момент t, если существует такое $\Delta t > 0$, что при выходе из строя станка i в момент t на любое время $(0 \le \Delta t' \le \Delta t)$ на станке i сохраняется последовательность выполнения всех операций, т.е. сохраняется вектор $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{iN})$, задающий последовательность выполнения операций на станке.

Из определения очевидно следующее: если в момент t станок i простаивал, то расписание A всегда структурно устойчиво для данного станка и данного момента времени t.

Необходимым условием устойчивости расписания при выходе станка i из строя в момент t (если в момент t станок i был загружен) является существование на интервале $[t; T]$ отрезка $[t_1, t_1] \subset [t; T]$, на котором станок i простаивал. Здесь T — момент окончания интервала планирования. Сформулируем задачу отыскания максимально возможной длительности выхода станка i из строя в момент t, при которой сохраняется структурная устойчивость расписания A. Эта задача заключается в следующем:

$$\max \Delta\tau_t \tag{3.10}$$

при ограничениях

$$x_{ij} - x_{ij}^{\Delta\tau_t} = 0; \quad i = \overline{1, M}; \; j = \overline{1, N}; \tag{3.11}$$

$$\Delta\tau^t \geq 0. \tag{3.12}$$

Здесь вектор $\bar{x}_{ij} = (x_{i1}, \ldots, x_{iN})$, как и ранее, задает последовательность выполнения операций на станке i при условии исправности станка i; $x_i^{\Delta\tau_t} = (x_{i1}^{\Delta\tau_t}, \ldots, x_{iN}^{\Delta\tau_t})$ — последовательность выполнения операций на станке i, если в момент t произошел выход станка i из строя на время $\Delta\tau_t$. Таким образом, задача отыскания области структурной устойчивости расписания A при выходе из строя станка i в момент t свелась к решению задачи отыскания области структурной устойчивости расписания при увеличении длительности выполнения операции d_t^i, где d_t^i — операция, выполняемая на станке i в момент t. Можно сформулировать более общее утверждение.

Утверждение 3.1. Задача определения области структурной устойчивости расписания при выходе из строя станка i в любой момент t интервала планирования эквивалентна задаче определения области структурной устойчивости при увеличении длительности операции, выполняемой в момент t, если в момент t по исходному расписанию на станке i выполняется какая-либо операция.

Если в момент t выхода станка i из строя он не был загружен, то для определения области структурной устойчивости при выходе из строя станка i в момент t необходимо:

а) решить задачу определения области структурной устойчивости при увеличении длительности операции d_t^i, где d_t^i — операция, которую станок i должен начать выполнять первой, если отсчет времени вести от момента t;

б) решение задачи отыскания области структурной устойчивости расписания при выходе из строя станка i в момент t вычисляется по формуле

$$\Delta\tau^t = \Delta t' + (\tau_{d_t^i} - t),$$

где $\Delta t'$ — длина интервала устойчивости расписания при увеличении длительности операция d_t^i; $\tau_{d_t^i}$ — время начала выполнения операции d_t^i; t — момент выхода из строя станка i.

Рассмотрим более общее определение структурной устойчивости расписания при выходе из строя оборудования.

Определение 3.6. Расписание структурно устойчиво при выходе из строя в моменты $t_1, ..., t_k$ станков $i_1, ..., i_k$, если существует такое Δt, что при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ в моменты $t_1, ..., t_k$ на любое время $\Delta t'(0 \le \Delta t' \le \Delta t)$ на станках $i_1, ..., i_k$ сохраняется последовательность и перечень всех обрабатываемых операций.

Необходимым условием устойчивости расписания по структуре при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ в моменты $t_1, ..., t_k$ является то, что на отрезке времени работы станков $[t_0, T]$ существуют интервалы времени $([t_e^1, t_e^2])([t_e^1, t_e^2]) \in [t_0, T]$, на которых станок e простаивал $(e = \overline{1, K})$. Здесь t_0 — момент начала выполнения первой операции на станке из множества $\{i_1, ..., i_k\}$.

Сформулируем задачу отыскания максимально возможной длительности выхода станков $i_1, ..., i_k$ из строя в моменты $t_1, ..., t_k$, при которой сохраняется структурная устойчивость расписания:

$$\max \Delta\tau$$

при ограничениях

$$x_{ij} - x_{ij}^{\Delta\tau} = 0, \quad j = \overline{1, N}; i = \overline{i_1, i_k};$$

$$\Delta\tau \ge 0.$$

Здесь вектор $\bar{x}_{ij} = (x_{i1}, ..., x_{iN})$ $(i = i_1, ..., i_k)$ задает последовательность выполнения операций на станке i $(i = i_1, ..., i_k)$ при постоянной работоспособности станков; $x_i^{\Delta\tau'} = (x_{i1}^{\Delta\tau'}, ..., x_{iN}^{\Delta\tau'})$ — вектор, задающий последовательность выполнения заданий на станке i при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ в моменты $t_1, ..., t_k$ на время $\Delta\tau$.

Как и для частного случая $k = 1$, может быть сформулировано следующее утверждение. Задача определения области структурной устойчивости расписания при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ в моменты $t_1, ..., t_k$ эквивалентна задаче определения области структурной устойчивости при изменении длительности операций, выполняемых в моменты $t_1, ..., t_k$.

Если существует e $(1 \le e \le k)$, такое, что в момент t_e станок i_e не был загружен, то решение задачи определения области структурной устойчивости осуществляется следующим образом:

а) решить задачу определения области структурной устойчивости при условии, что станок i_e вышел из строя во время выполнения ближайшей операции, которую он должен был бы начать выполнять после простоя в момент t_e.

Решение задачи обозначим $\Delta\tau_1$;

б) решить задачу определения области структурной устойчивости, положив, что станок i_e был исправен в течение всего интервала планирования, а все остальные станки выходили из строя в ранее назначенные моменты времени.

Решение задачи обозначим $\Delta\tau_2$. Очевидно, что $\Delta\tau_2 \geq \Delta\tau_1$;

в) в качестве решения исходной задачи выбрать

$\Delta\tau_3 = \Delta\tau_1 + \min\{\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1; \Delta\tau_e\}$,

где $\Delta\tau_e$ — длина интервала до начала выполнения станком ближайшей по времени операции после простоя в момент t_e. Аналогично можно описать алгоритм для случая, когда несколько станков $i_{e1}, \ldots, i_{em}$ были загружены в моменты $t_{e1}, \ldots, t_{em}$.

На практике часто необходимо знать влияние на результаты выполнения оперативного производственного плана временного выхода из строя одного или несколько станков в неизвестные заранее моменты времени, поэтому нас интересуют характеристики расписания при выходе из строя оборудования в любой момент времени из интервала планирования.

Введем следующее определение.

Определение 3.7. Расписание выполнения работ называется структурно абсолютно устойчивым при выходе из строя станков $i_1, \ldots, i_k$, если в любой момент времени интервала планирования $[0, T]$ существует отрезок времени Δt, такой, что при выходе станков $i_1, \ldots, i_k$ из строя на любой отрезок времени $\Delta t'$ $(0 \leq \Delta t' \leq \Delta t)$ сохраняется последовательность выполнения работ на каждом станке.

Из определения 3.7 получаем, что из структурной абсолютной устойчивости расписания при выходе из строя станков $i_1, \ldots, i_k$ следует структурная устойчивость расписания при выходе из строя станков $i_1, \ldots, i_k$ в любой момент времени t интервала планирования.

Рассмотрим расписание A работы станков $i_1, \ldots, i_k$ при условии их исправности в течение всего интервала планирования $[0, T]$, где T — длительность интервала планирования. Учитывая непрерывность и конечность времени прохождения работ на каждом из станков $i_1, \ldots, i_k$ на интервале планирования $[0, T]$ может быть выбрана конечная система моментов времени $t_1, \ldots, t_\vartheta$ и при этом:

1) в каждый момент времени t_i $(i = 1, \ldots, \vartheta)$ на станках $i_1, \ldots, i_k$ выполняется множество операций N_i $(i = 1, \ldots, \vartheta)$;

2) для любого момента времени t^* $(t^* \neq t_i)$ на станках выполняются операции одного из множества N_i.

Из изложенного выше, в частности, следует, что для построения области абсолютной структурной устойчивости расписания при выходе из строя станков $i_1, \ldots, i_k$ необходимо:

1) построить области структурной устойчивости при выходе из строя станков $i_1, \ldots, i_k$ в моменты $t_1, \ldots, t_\vartheta$. Обозначим соответствующие интервалы через $\Delta\tau_1, \ldots, \Delta\tau_\vartheta$;

2) область абсолютной структурной устойчивости расписания вычислить из соотношения $\Delta\tau^* = \min\{\Delta\tau_i\}$.

Сформулируем определение устойчивости расписания по функционалу при выходе из строя станка i в момент t.

Определение 3.8. Расписание устойчиво по функционалу при выходе из строя станка i в момент t, если существует такое $\Delta t > 0$, что при выходе станка i из строя в момент t на любое время $\Delta t'$ $(0 \le \Delta t' \le \le \Delta t)$ выполняются неравенства

$$\left|f_i - f_i^{\Delta t'}\right| \le \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, P}, \tag{3.13}$$

где f_i — значения интегральных показателей расписания при постоянной исправности станка; $f_i^{\Delta t'}$ — значения интегральных показателей расписания при выходе из строя станка i на время $\Delta t'$.

Задача отыскания максимального Δt, на которое может выйти станок i из строя так, чтобы сохранилось выполнение неравенства (3.13), состоит в следующем:

$$\max \Delta\tau_t; \tag{3.14}$$

$$\left|f_i - f_i^{\Delta t'}\right| \le \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, P; \tag{3.15}$$

$$\Delta\tau_t \ge 0. \tag{3.16}$$

Эта задача сводится к задаче вычисления области устойчивости по функционалу при увеличении длительности операции, выполняемой в момент t выхода из строя станка i, если в момент t станок i был загружен. Если в момент t станок i не был загружен, то задача построения области устойчивости при выходе из строя станка i в момент t сводится к задаче построения области устойчивости расписания при удлинении операции, которая начнет выполняться на станке в момент времени, ближайший к моменту t.

Рассмотрим ситуацию выхода из строя станков $i_1, \ldots, i_k$ в моменты времени $t_1, \ldots, t_k$. Введем следующее определение.

Определение 3.9. Расписание устойчиво по функционалу при выходе из строя станков $i_1, \ldots, i_k$ в моменты времени $t_1, \ldots, t_k$, если существует такое Δt, что при выходе из строя станков $i_1, \ldots, i_k$ в моменты $t_1, \ldots, t_k$ на любое время Dt' $(0 \le \Delta t' \le \Delta t)$ выполняются неравенства:

$$\left|f_i - f_i^{\Delta t'}\right| \le \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, P,$$

где f_i — значения интегральных показателей расписания при исправности станков $i_1, \ldots, i_k$ на всем интервале планирования; $f_i^{\Delta t'}$ — значения интегральных показателей расписания при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ в моменты $t_1, ..., t_k$ на время $\Delta t'$.

Эта задача, так же как и для случая выхода из строя одного станка, сводится к задаче отыскания области устойчивости по функционалу при увеличении длительности операций, если в моменты $t_1, ..., t_k$ станки $i_1, ..., i_k$ были загружены.

Если существует момент времени t_e $(1 \le e \le k)$, в который станок i_e был не загружен, то решение задачи определения области устойчивости по функционалу осуществляется следующим образом.

1. Решить задачу определения области устойчивости по функционалу при условии, что станок i_e в момент t_e был загружен на операции, которую он должен выполнять после текущего простоя в момент t_e. Решение задачи обозначим $\Delta\tau_1$.

2. Решить задачу определения области устойчивости по функционалу, предположив, что станок i_e был исправен в течение всего интервала планирования, а все остальные станки вышли из строя в ранее обозначенные моменты времени. Решение задачи обозначим $\Delta\tau_2$.

3. В качестве решения исходной задачи выбрать

$$\Delta\tau_3 = \Delta\tau_1 + \min\{\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1; \Delta t_e\},$$

где Δt_e — длина интервала времени, начиная с момента t_e до начала выполнения станком i_e ближайшей по времени операции.

Как уже отмечалось выше, моменты выхода оборудования из строя не могут быть точно предсказаны, что приводит к необходимости исследовать устойчивость расписания при выходе оборудования из строя в любой момент времени из интервала планирования. Как и в случае структурной устойчивости расписания, такой вид устойчивости назовем абсолютной устойчивостью.

Введем определение абсолютной устойчивости по функционалу при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$.

Определение 3.10. Расписание выполнения работ называется абсолютно устойчивым по функционалу, если при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ в любой момент времени t интервала планирования существует отрезок времени Δt, такой, что при любой длительности $\Delta t'$ $(0 \le \Delta t' \le \Delta t)$ выхода из строя станков $i_1, ..., i_k$ выполняется система неравенств:

$$\left|f_i - f_i^{\Delta t'}\right| \le \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., P,$$

где f_i — значения интегральных показателей расписания при исправности станков $i_1, ..., i_k$ в течение всего интервала планирования;

$f_i^{\Delta t'}$ — значения интегральных показателей расписания при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ на время $\Delta t'$.

Из определения 3.10 получаем, что из абсолютной устойчивости по функционалу при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ следует устойчивость по функционалу при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ $(k \geq 1)$ в моменты $t_1, ..., t_k$.

Рассмотрев, как и в случае абсолютной структурной устойчивости, расписание работы станков $i_1, ..., i_k$ на интервале планирования $[0; T]$, получим, что существует конечное множество моментов времени $t_j \in [0; T]$ $(j = 1, ..., \vartheta')$, обладающее следующими свойствами.

1. В каждый момент времени t_j $(j = 1, ..., \vartheta')$ на станках $i_1, ..., i_k$ выполняется множество операций N_i $(j = 1, ..., \vartheta')$.

2. Для каждого момента времени t^* $(t^* \neq t_j; j = 1, ..., \vartheta')$ на станках $i_1, ..., i_k$ выполняются операции одного из множеств N_i $(j = 1, ..., \vartheta')$.

Учитывая последнее свойство, для построения области абсолютной устойчивости по функционалу необходимо выполнить следующее.

1. Построить области устойчивости по функционалу при выходе из строя станков $i_1, ..., i_k$ в моменты $t_1, ..., t_k$. Обозначим соответствующие интервалы через $\Delta\tau_1, ..., \Delta\tau_\vartheta$.

2. Область абсолютной структурной устойчивости определится из соотношения

$$\Delta\tau^* = \min\{\Delta\tau_i\} \ (i = 1, ..., \vartheta').$$

Введем следующие определения.

Определение 3.11. Расписание A назовем устойчивым по структуре расписания для станка i при исключении подмножества работ, если существует непустое множество операций D_i, при этом при исключении выполнения любого подмножества операций $D_i \subset D$ сохраняется на станке i перечень и последовательность выполняемых операций.

Определение 3.12. Областью устойчивости расписания A при исключении подмножества операций из числа выполняемых на станке i называется такое множество операций D_m^i, что:

1) исключение операций множества D_m^i из выполнения не приводит к изменению перечня и последовательности выполняемых операций на станке i;

2) добавление к множеству D_m^i любой из операций приводит к тому, что меняется множество выполняемых на станке i операций или их последовательность выполнения.

Опишем алгоритм построения множества D^i_m.

1. Включить в множество D^i_m все операции работы r_k, если ни одна из операций работы не выполняется на станке i.

2. Рассмотрим множество работ $r_{k1}, \ldots, r_{kl}$, среди которых есть операции, выполняемые на станке i. Включим в множество D^i_m все операции работ $r_{k1}, \ldots, r_{kl}$, выполнение которых осуществляется после того, как выполнены все операции на станке i для данной работы. Очевидно, что построенное множество операций будет областью устойчивости по структуре расписания для станка i.

Введем следующие определения.

Определение 3.13. Расписание A назовем устойчивым по функционалу при исключении подмножества выполняемых работ, если существует такое подмножество выполняемых операций D, что при исключении любого множества операций $D' \subset D$ выполняется неравенство

$$\left|f_i - f_i^{D'}\right| \le \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, P, \tag{3.17}$$

где f_i — значение интегрального показателя i при выполнении исходного множества работ; $f_i^{D'}$ — значение интегрального показателя i при исключении из выполнения операций множества D'.

Определение 3.14. Областью устойчивости расписания по функционалу при полном или частичном исключении работ называется совокупность множеств операций $D_1, \ldots, D_e$, обладающих следующими свойствами.

1. При исключении любого множества операций $D_1, \ldots, D_e$ значения интегральных показателей удовлетворяют неравенствам:

$$\left|f_i - f_i^{D_j}\right| \le \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, P;\ j = 1, \ldots, e.$$

Здесь $f_i^{D_j}$ — значение интегрального показателя при исключении операций множества D_j.

2. Добавление к любому из множеств $D_1, \ldots, D_e$ еще одной любой исключенной операции приводит к тому, что существует α $(1 \le \alpha \le e)$ и существует m $(1 \le m \le k)$, такие, что $\left|f_m - f_m^{D\alpha}\right| > \varepsilon_m$ и, следовательно, нарушаются условия устойчивости расписания по функционалу.

Алгоритм определения области устойчивости расписания по функционалу при исключении из выполнения подмножества работ состоит в следующем.

Рассмотрим все возможные варианты исключения (полного или частичного) работ сети π_2, соответствующей расписанию выполняемых работ. Частичное исключение работ осуществляется, начиная с исключения завершающих операций в сети π_2, т.е. операций в сети π_2, у которых нет операций-последователей. Перебираются все возможные варианты исключения этих операций, при которых выполняется система неравенств (3.17). Далее исследуется возможность исключения операций, являющихся непосредственными предшественниками заключительных операций с сохранением выполнения условия (3.17). В результате исследования всех возможностей исключения операций и работ из выполнения будут построены множества операций D_1, ..., D_e, которые введены в определении 3.14.

Рассмотрим процедуру построения сети π_2 и последовательности выполнения операций на интервале планирования по составленному расписанию. Выберем из множества операций, выполненных на интервале планирования, подмножество операций, после окончания выполнения которых нет последующих операций обработки. Обозначим это множество операций $O_{N_1}, \ldots, O_{N_m}$, а множество станков, на которых производятся эти операции, через $S_{N_1}, \ldots, S_{N_m}$. Пусть началу выполнения каждой из операций предшествовал список операций, $O_{N_1}, \ldots, O_{N_m}$, после окончания выполнения которых было начато выполнение операции O_{N_1}. Заметим, что некоторые из операций могут быть пустыми множествами. Отбросив в списке операций O_{N_1} пустые множества, для оставшихся строится множество операций-предшественников $O_{N_1}, \ldots, O_{N_m}$ ($N'_m \le N_m$). Продвигаясь таким образом к моменту начала обработки, через конечное число итераций для каждой операции будет построен полный список операций-предшественников и тем самым построена сеть π_2, отражающая последовательность выполнения операций в процессе выполнения запланированного множества работ.

Рассмотрим верхнюю и нижнюю оценки изменения длины расписания при увеличении длины подмножества выполняемых операций для расписания, построенных по критерию быстродействия.

Обозначим пути построенной сети π_2 через S_1, ..., S_k, в которые входят операции множества $D_{\Delta t}$ с увеличенной продолжительностью выполнения. В этом случае верхняя оценка увеличения длины расписания вычисляется по формуле

$$T_b \le \max_{i=\overline{1,k}}\{T, |S_i'|\},$$

где $|S_i'|$ — длина пути S_i при увеличении длин операций множества $D_{\Delta t}$, входящих в путь $D_{\Delta t}$. Величина $|S_i'|$ вычисляется по формуле

$$|S_i'| = \sum_{j \in S_j} t_j + \sum_{j \in S_i \cap D_{\Delta t}} \Delta t_j,$$

где Δt_j — увеличение продолжительности операций $j \subset S_i \bigcap D_{\Delta t}$; T — длина расписания при исходных длительностях операций.

Нижняя оценка длительности расписания при увеличении длительностей операций множества вычисляется из следующего соотношения:

$$T_{\text{н}} \geq \max\left\{T, \sum_{e=1}^{k_j} t'_e\right\}.$$

Здесь t'_e — длина операции e, выполняемой на станке j с учетом ее возможного удлинения.

Рассмотренные алгоритмы построения областей устойчивости расписания предназначены для определения возможных отклонений в исходных параметрах множества выполняемых работ на заданном директивном периоде, не приводящих к изменению оперативно-производственного плана.

Необходимость вычисления области устойчивости расписания вытекает из того, что перепланирование выполнения работ в процессе реализации оперативного производственного плана может привести к простою оборудования или нерациональному его использованию.

Алгоритмы определения областей устойчивости расписаний выполнения работ приведены для ситуации, когда в исходных значениях входных параметров расписаний возможны следующие отклонения:

- изменяются длительности операций;
- происходит незапланированная остановка в работе оборудования;
- исключается из выполнения (полностью или частично) подмножество работ.

В этой главе приведена процедура сведения алгоритмов построения области устойчивости при заданных или нефиксированных моментах временного выхода из строя оборудования к алгоритмам построения области устойчивости при изменении длительностей операций.

Приведенные выше верхняя и нижняя оценки изменения длительности расписания при увеличении продолжительности операций заданного множества позволяют определить диапазон запаздывания выполнения оперативно-производственного плана при возмущении параметров выполняемых работ.

Использование методов построения областей устойчивости расписания на практике может осуществляться следующим образом.

При выполнении работ согласно составленному расписанию происходит расчет возможного изменения расписания, если возмущение производственной ситуации произойдет через интервал времени Δt относительно текущего момента времени. Величина и характер возможных возмущений определяются исходя из накопленной статистики. Таким образом, заранее определяются области устойчивости расписания при наиболее вероятных отклонениях в исходных данных, использованных при составлении первоначального расписания. Эта процедура позволяет без дополнительных затрат времени в процессе реализации расписания определить, есть ли необходимость в перепланировании выполнения работ, в случае если произошло одно из наиболее вероятных отклонений в производственной ситуации.

Контрольные вопросы

1. Что является задачей производственного планирования?
2. Что такое структурная устойчивость расписания?
3. В каком случае расписание выполнения работ называют устойчивым по функционалу?
4. Какие существуют методы определения устойчивых производственных планов?
5. Как определяется устойчивость расписания при временной неисправности оборудования?
6. Как определяется устойчивость расписания при сокращении множества выполняемых работ?

Глава 4. МОДЕЛИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

4.1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

В условиях перехода страны к рыночной экономике приобретает особое значение необходимость применения наиболее прогрессивных методов планирования и управления предприятием, особо остро ставится проблема интенсивного использования всех видов имеющихся ресурсов.

Предприятия в современных условиях экономической самостоятельности сами должны формировать планы, отвечать за их материально-техническое обеспечение, используя рыночную форму доступа к материальным и техническим ресурсам.

Учитывая, что предприятие должно планировать не только выпуск, но и реализацию произведенной продукции, возрастает роль моделирования при назначении видов и объемов выпускаемых изделий.

Предлагаемая экономико-математическая модель системы управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятия (ПХД) предназначена для организации производства по критерию максимальной прибыли за счет формирования наиболее эффективных вариантов производственной программы.

Выбор производственной программы во многих случаях сводится к решению целочисленной задачи линейного программирования при заданных параметрах модели. В этой главе будет рассмотрено влияние на полученное решение задачи и значение целевого функционала таких входных параметров модели, как цена изделия и цена на материальные ресурсы производства.

В работе [13] сформулирована задача выбора рационального варианта производственно-хозяйственной деятельности (ПХД) машиностроительного предприятия. Критерием, по которому выбирается тот или иной вариант производственно-хозяйственной деятельности предприятия, является прибыль предприятия, полученная от реализации выпущенной продукции.

Обозначим через $\bar{X} = (x_1, ..., x_k)$ вектор производственной программы предприятия на планируемый период, где x_1 — объем выпуска продукции вида i из перечня, включенного в производственную программу (ПП). Значение целевой функции зададим следующим образом:

$$F(x) = \mathrm{Re}\, z(\bar{X}) - Z(\bar{X}), \tag{4.1}$$

где $\mathrm{Re}\, z(\bar{X})$ — стоимостная оценка продукции, задаваемой вектором $\bar{X}$; $z(\bar{X})$ — полные затраты предприятия на выпуск продукции, задаваемой вектором $\bar{X}$.

Обозначим через C_k прогнозируемую цену единицы продукции k-го наименования на планируемый период.

Тогда стоимостная оценка выпущенной предприятием продукции выразится линейной функцией

$$\mathrm{Re}\, z(\bar{X}) = \sum_{k=1}^{K} C_k x_k. \tag{4.2}$$

Рассмотрим функцию полных затрат предприятия на выпуск продукции, задаваемой вектором $\bar{X}$. Эти затраты складываются из материальных затрат на используемые в процессе производства материальные ресурсы $Z_m(\bar{X})$, производственных затрат $Z_p(\bar{X})$ и затрат на освоение и подготовку производства новой номенклатуры изделий, включенной в состав ПП $Z_o(\bar{X})$.

Таким образом, получим

$$Z(\bar{X}) = Z_m(\bar{X}) + Z_p(\bar{X}) + Z_o(\bar{X}). \tag{4.3}$$

Рассмотрим составляющие затрат $Z_m(\bar{X})$ — материальные затраты на выпуск продукции, включающие стоимость основных материалов, сырья и полуфабрикатов $Z_{m1}(\bar{X})$, стоимость покупных и комплектующих изделий $Z_{m2}(\bar{X})$, а также транспортно-заготовительные расходы $Z_{m3}(\bar{X})$.

$$Z_m(\bar{X}) = Z_{m1}(\bar{X}) + Z_{m2}(\bar{X}) + Z_{m3}(\bar{X}); \tag{4.4}$$

$$Z_{m1}(\bar{X}) = \sum_{k=1}^{K} C_{m1_k} \cdot X_k, \tag{4.5}$$

где C_{m1_k} — стоимость ресурсов 1-го вида (основных материалов, сырья и полуфабрикатов) на единицу продукции k-го вида;

$$C_{m1_k} = \sum_{l=1}^{L_2} r1_{lk} \cdot cen1_l, \tag{4.6}$$

где L_1 — количество типов ресурса 1-го вида; $r1_{lk}$ — количество l-го ресурса 1-го вида на единицу продукции k-го наименования; $cen1_l$ — цена единицы l-го ресурса 1-го вида.

Аналогично определим $Z_{m_2}(\bar{X})$:

$$Z_{m_2}(\bar{X}) = \sum_{k=1}^{K} cm2_k x_k, \tag{4.7}$$

где $cm2_k$ — стоимость ресурсов 2-го вида (покупных и комплектующих изделий) на единицу продукции k-го наименования;

$$C_{m2_k} = \sum_{l=1}^{L_2} r2_{lk} \cdot cen2_l, \tag{4.8}$$

где L_2 — количество типов ресурсов 2-го вида; $r2_{lk}$ — количество l-го ресурса 2-го вида на единицу продукции k-го наименования; $cen2_l$ — цена единицы l-го ресурса 2-го вида.

Транспортно-заготовительные расходы вычисляются по формуле

$$Z_{m_3}(\bar{X}) = dt_r(Z_{m_1}(\bar{X}) + Z_{m_2}(\bar{X})), \tag{4.9}$$

где dt_r — норматив транспортно-заготовительных расходов в общем объеме материальных затрат производства.

Производственные затраты $Z_p(\bar{X})$, включающие затраты труда, состоят из затрат $Z_{p_1}(\bar{X})$, связанных с непосредственным выпуском продукции, а также расходов предприятия в течение планируемого периода на эксплуатацию и амортизацию основных производственных фондов и по организации управления производством $Z_{p_2}(\bar{X})$.

$$Z_p(\bar{X}) = Z_{p_1}(\bar{X}) + Z_{p_2}(\bar{X}). \tag{4.10}$$

Затраты, связанные непосредственно с выпуском продукции, включают в себя расходы на заработную плату (основную, дополнительную и отчисления на социальное страхование) основных и вспомогательных рабочих (операторы станков с ЧПУ, наладчики, ремонтники и т.п.), а также расходы по подготовке производства (программы для станков, изготовление оснастки, подготовка инструментов и т.д.).

Представим непосредственные производственные расходы в виде

$$Z_{p_1}(\bar{X}) = \sum_{r=1}^{R} ZP1_r(\bar{X}), \tag{4.11}$$

где R — количество структурных подразделений (участков, линий, отдельных производств) предприятия; $ZP1_r(\bar{X})$ — непосредственные производственные расходы по выпуску продукции, задаваемой вектором $\bar{X}$ по r-му производственному участку;

$$Z_{p_r}(\bar{X}) = \sum_{r=1\,j=1}^{J_r} ZP_{rj}, \tag{4.12}$$

где J_r — количество групп основного технологического оборудования (ОТО) на r-м производственном участке; ZP_{rj} — непосредственные производственные расходы по выпуску продукции по j-й группе ОТО участка r.

$$ZP_{rj} = \frac{T_{rj}(\bar{X})}{\Phi_{rj}\lambda t_{rj}\lambda_{or}}\left(\frac{dZ_r + E_v}{N_{rj}}CZ_r + CR_{rj} + CP_{rj}\right), \tag{4.13}$$

где $T_{rj}(\bar{X})$ — трудоемкость производственной программы, приходящаяся на группу j ОТО участка r; Φ_{rj} — эффективный годовой фонд времени работы оборудования (с учетом коэффициента сменности) группы j ОТО участка r; λt_{rj} — коэффициент технического использования оборудования группы j ОТО участка r; λ_{or} — коэффициент организационного использования оборудования участка r; CZ_r — основная заработная плата станочника производственного участка r (по среднему разряду); dZ_r — норматив основной и дополнительной заработной платы и отчислений по социальному страхованию по участку r; E_v — норматив эффективности трудовых затрат; N_{rj} — норма обслуживания для оборудования группы j ОТО участка r; CR_{rj} — стоимость наладки и текущего ремонта единицы оборудования группы j ОТО участка r; CP_{rj} — стоимость оснастки, спецприспособлений и управляющих программ к единице оборудования группы j ОТО участка r.

Затраты предприятия, связанные с эксплуатацией и амортизацией основных производственных фондов и по организации и управлению производством, включают:

- затраты на установку, капитальный ремонт и реновацию основного технологического оборудования $ZP2_1$;
- затраты на эксплуатацию, ремонт и реновацию подъемно-транспортного и вспомогательного оборудования $ZP2_2$;
- затраты на амортизацию и текущий ремонт рабочих мест, служебно-бытовых помещений и зданий $ZP2_3$;
- затраты на электроэнергию $ZP2_4$;
- цеховые, общезаводские и внепроизводственные расходы, включающие содержание аппарата управления и обслуживания персонала $ZP2_5$.

Следовательно,

$$ZP_2(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{5} ZP2_i. \tag{4.14}$$

Затраты предприятия на установку, капитальный ремонт и реновацию основного технологического оборудования $ZP2_1$ вычисляются по следующей формуле:

$$ZP2_1 = \sum_{r=1}^{R} \sum_{j=1}^{J_r} m_{rj} CS_{rj} (\alpha a_{rj} + \alpha u_{rj}), \tag{4.15}$$

где m_{rj} — количество единиц оборудования в j-й группе ОТО участка r; CS_{rj} — цена единицы оборудования группы j ОТО участка r; αa_{rj} — норматив отчислений на реновацию для группы j ОТО участка r; αu_{rj} — норматив отчислений на установку и капитальный ремонт для группы j ОТО участка r.

$$ZP2_3 = \sum_{r=1}^{R} ZP22_r, \tag{4.16}$$

где $ZP22_r$ — затраты на эксплуатацию, ремонт и реновацию подъемно-транспортного и вспомогательного оборудования участка r; $ZP2_3$ — постоянная составляющая затрат на амортизацию и текущий ремонт рабочих мест и служебных помещений.

$$ZP2_4 = \sum_{r=1}^{R} \sum_{j=1}^{J_r} m_{rj} CE_{rj}, \tag{4.17}$$

где CE_{rj} — стоимость потребляемой электроэнергии единицей оборудования группы j ОТО участка r.

$$ZP2_5(\bar{X}) = \sum_{r=1}^{R} \alpha C_2 ZP1_r(\bar{X}), \tag{4.18}$$

где αC_2 — норматив цеховых, общезаводских и внепроизводственных расходов к непосредственным расходам по участку r.

Затраты $Z_0(X)$ на освоение и подготовку производства новой номенклатуры изделий из перечня включенных в ПП предприятия включают следующие:

- на разработку технологического процесса изготовления нового изделия;
- на проектирование инструментальной оснастки и разработку технологического процесса ее изготовления;
- на изготовление опытного образца и опытной партии нового изделия;

- на перепланировку, перестановку и наладку оборудования для производства нового изделия.

Пусть A — новое изделие из перечня изделий, включенных в ПП, а $B = B(A)$ — код (модель) базового для A изделия из перечня изделий, освоенных предприятием. Считаем, что известны следующие данные: $Z_0(X)$ — затраты на освоение и подготовку производства базового изделия B: $KS(A/B)$ — коэффициент относительной обновляемости деталей изделий A к базовому B:

$$KS(A/B) = 1 - \frac{Det(A, B)}{Det(A)},$$

где $Det(A)$ — общее количество деталей изделия A, проходящих обработку; $Det(A, B)$ — количество деталей изделия A, унифицированных с деталями базового изделия B.

В данных обозначениях затраты на подготовку и освоение производства новой номенклатуры изделий, включенных в ПП, описываемой вектором $\bar{X}$, можно представить в следующем виде:

$$Z_0(\bar{X}) = \sum_{k=1}^{K} X_k Z(B_k)(1 + KS(A_k/B_k)),$$

где

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{если изделие } A_k \text{ не освоено в производстве;} \\ 0, & \text{если изделие } A_k \text{ освоено в производстве;} \end{cases}$$

где B_k — базовое освоенное изделие.

Обозначим через T_{rj} трудоемкость производственной программы, приходящуюся на j-ю группу ОТО производственного участка r ($r = \overline{1, R}$; $j = \overline{1, J_r}$):

$$T_{rj} = \sum_{k=1}^{K} X_k t_{krj}, \tag{4.19}$$

где t_{krj} — трудоемкость единицы изделий наименования k.

Используя введенные обозначения, рассмотрим систему ограничений экономико-математической модели, включающей следующие группы ограничений, характеризующие моделируемый объект:

- ограничения на предельную мощность предприятия и отдельных элементов его производственной структуры с учетом коэффициентов технического и организационного использования групп оборудования и обеспеченности трудовыми ресурсами;
- объем выделяемых материальных ресурсов производства: основных материалов, сырья, полуфабрикатов, покупных и ком-

плектующих изделий; обеспеченный материалами, переносимый на планируемый период, а также специальный (включая госзаказ) заказ на производство определенного объема изделий выделенной части производственной программы;

- прогнозируемая потребность рынка в изделиях, включенных в состав производственной программы.

Рассмотрим отдельно каждую группу ограничений. Первая группа ограничений имеет вид

$$T_{rj}(\bar{X}) \le m'_{rj}\Phi_{rj}\lambda_{rj}\lambda_{or}, \quad r = \overline{1, R}; \; j = \overline{1, J_r},$$

где $T_{rj}(\bar{X})$ — трудоемкость производственной программы, приходящейся на группу j ОТО производственного участка r; m'_{rj} — используемое в варианте количество оборудования группы j участка r; Φ_{rj}, λt_{rj}, λ_{or} — соответственно эффективный годовой фонд времени работы, коэффициенты технического и организационного использования оборудования группы j ОТО участка r.

С учетом формулы (4.19) запишем ограничение на предельную мощность предприятия следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k t_{krj} \le m'_{rj}\Phi_{rj}\lambda t_{rj}\lambda_{or}; \tag{4.20}$$

$$m'_{rj} \le \min(m_{rj}, R_{abrj}, N_{rj}), \tag{4.21}$$

где m_{rj} — установленное на участке r количество оборудования группы j ОТО; R_{abrj} — количество рабочих-станочников, используемых в варианте на j-й технологической позиции (обслуживающих оборудование группы j ОТО) участка r; N_{rj} — норма обслуживания для оборудования группы j ОТО участка r.

Система ограничений (4.21) эквивалентна системе ограничений следующего вида: $m'_{rj} \le m_{rj}$.

$$m'_{rj} \le R_{abrj} N_{rj}, \quad r = \overline{1, R}; \; j = \overline{1, J_r}. \tag{4.22}$$

Для значений величин R_{abrj} справедливо следующее объемное ограничение:

$$\sum_{j=1}^{J_r} R_{abrj} \le TR_r, \quad r = \overline{1, R}, \tag{4.23}$$

где TR_r — количество занятых в производстве рабочих-станочников производственного участка r.

Ограничение на объем материальных ресурсов имеет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{K} X_K r1_{ek} \le mr1_\ell, \quad \ell = \overline{1, L_1}, \tag{4.24}$$

где $r1_{ek}$ — количество ресурсов ℓ 1-го вида (основных материалов, сырья, полуфабрикатов) на единицу продукции наименования k; $mr1_\ell$ — объем рыночных фондов, выделяемых предприятию по ресурсу ℓ первого вида.

$$\sum_{k=1}^{K} X_k r2_{ek} \le mr2_\ell, \quad \ell = \overline{1, L_2}, \tag{4.25}$$

где $r2_{ek}$ — количество ресурсов ℓ 2-го вида (покупных комплектующих изделий) на единицу продукции наименования k; $mr2_\ell$ — объем рыночных фондов, выделяемых предприятию по ресурсу ℓ 2-го вида.

Выпишем ограничения третьей группы:

$$\begin{aligned} &X_{k_1} \ge ZaK1_{k_1}, \quad k_1 \in K_1; \\ &X_{k2_1} \ge ZaK2_{k_2}, \quad k_2 \in K_2; \\ &X_{k_3} \ge 0; \quad k_3 \in K_3, \end{aligned} \tag{4.26}$$

где K_1 — множество индексов изделий, для которых устанавливается минимальный объем выпуска; K_2 — множество индексов наименований изделий, для которых устанавливается фиксированный объем выпуска; $ZaK2_{k_2}$ — объем выпуска изделий вида K_2; K_3 — множество индексов-наименований изделий, невключаемых в заказ.

Последняя группа ограничений определяется следующей системой неравенств:

$$X_k \le Pot_k, \quad k = 1, ..., K, \tag{4.27}$$

где Pot_k — прогнозируемый объем продажи по планируемой цене C_k за единицу изделия продукции наименования k.

Учитывая введенную систему ограничений, сформулируем задачу генерации допустимых и выбора оптимального (рационального) варианта ПХД предприятия.

Допустимым вариантом ПХД предприятия назовем вектор производственной программы $\overline{X} = (X_1, ..., X_k)$ и соответствующее ему распределение трудовых ресурсов $TR_r^{(0)} = (R_{abr1}^{(0)}, ..., R_{abrJ_r}^{(0)})$, удовлетворяющие ограничениям (4.20–4.27) и условиям целочисленности:

X_k — целое неотрицательное $(k = \overline{1, K})$;

R_{abrj} — целое неотрицательное $(r = \overline{1, R};\ j = \overline{1, J_r})$.

Вариант производственной программы $\overline{X}^{(0)} = (X_1^{(0)}, ..., X_K^{(0)})$ и соответствующий ему вектор распределения трудовых ресурсов $TR_r^{(0)} = (R_{abr1}^{(0)}, ..., R_{abrJ_r}^{(0)})$ назовем оптимальным вариантом ПХД предприятия на планируемый период, если $\overline{X}$ обеспечивает максимум целевой функции $F(\overline{X})$ в области допустимых вариантов.

Задача генерации допустимых и выбора оптимального варианта ПХД предприятия на планируемый период формулируется следующим образом:

$$\max[F(\bar{X}) = \mathrm{Re}\,Z(\bar{X}) - Z(\bar{X})] \tag{4.28}$$

при ограничениях:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k t_{krj} \le m'_{rj}\Phi_{rj}\lambda t_{rj}\lambda_{or}; \tag{4.29}$$

$$m'_{rj} \le m_{rj} \qquad m'_{rj} \le R_{abrj}N_{rj}; \tag{4.30}$$

$$\sum_{j=1}^{J_r} R_{abrj} \le TR_r, \quad r = \overline{1, R}; \tag{4.31}$$

$$R_{abrj} \in Z, \quad r = \overline{1, R};\ j = \overline{1, J_r}; \tag{4.32}$$

$$\sum_{k=1}^{K} X_K r1_{ek} \le mr1_{\ell}, \quad \ell = \overline{1, L_1}; \tag{4.33}$$

$$\sum_{k=1}^{K} X_K r2_{ek} \le mr2_{\ell}, \quad \ell = \overline{1, L_2}; \tag{4.34}$$

$$X_{K_1} \ge ZaK1_{K_1}, \quad k_1 \in K_1; \tag{4.35}$$

$$X_{K_2} = ZaK2_{K_2}, \quad k_2 \in K_2; \tag{4.36}$$

$$X_{K_3} \ge 0, \quad k_3 \in K_3; \tag{4.37}$$

$$X_k \le pot_k, \qquad X_k \in Z, \tag{4.38}$$

где Z — множество неотрицательных целых чисел.

Сформулированная задача (4.28)–(4.38) является задачей целочисленного линейного программирования и может быть решена, используя стандартные вычислительные методы, такой, например, как метод ветвей и границ.

В качестве приближенного решения исходной задачи может быть принято решение задачи (4.28)–(4.38) без условий целочисленности решения, в котором отброшены дробные части решения непрерывной задачи.

Пусть $\bar{X}^{(0)} = (X_1^{(0)}, ..., X_k^{(0)})$ — оптимальное решение целочисленной задачи (4.28)–(4.38), а $\bar{X}^{(H)} = (X_1^{(H)}, ..., X_k^{(H)})$ — оптимальное решение соответствующей непрерывной задачи.

Рассмотрим вектор $X = (X_1^{(ц)}, ..., X_k^{(ц)})$,

где

$$X_K^{(ц)} = [X_K^{(H)}], \tag{4.39}$$

где $[X_K^{(ц)}]$ — целая часть числа $X_K^{(H)}$.

Относительная погрешность $\dfrac{\Delta F}{F(X^{(H)})}$ функционала $F(\bar{X})$ при переходе от решения $X^{(H)}$ на решение $\bar{X}^{(ц)}$ приближенной задачи, как показано в [13], оценивается следующим образом:

$$\frac{\Delta F}{F(\bar{X}^{(H)})} \le \frac{1}{\min X_k^{(H)}}, \quad k = \overline{1, K};\ \bar{X}^{(H)} \ne 0. \tag{4.40}$$

Здесь ΔF — разность оптимальных значений целевой функции для непрерывного и целочисленного решений.

Отсюда следует, что при $X_k \ge 10$ ($k = 1, ..., K$), что нередко бывает на практике при выпуске изделий крупными партиями, относительная погрешность приближенного целочисленного решения не превосходит 10%.

4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Рассмотренная задача (4.28)–(4.38) выбора предприятием видов и объемов выпускаемой продукций, как отмечалось выше, может быть решена известными точными или приближенными методами, изложенными, например, в [9].

При использовании полученного решения задачи лицо, принимающее решение (ЛПР), должно учесть неточность исходных данных модели, что приводит к необходимости дополнительного исследования влияния изменений в исходных данных на полученное решение.

Случайный закон, по которому происходят изменения в исходных данных задачи, чаще всего неизвестен, и в лучшем случае удается достаточно точно задать лишь диапазон изменения (доверительный интервал) того или иного входного параметра.

В данной ситуации должны быть исследованы изменения в оптимальной производственной программе при отклонении от первоначальных значений множества входных параметров, заданных вектором

$$b = (b_1, ..., b_\theta),$$

где θ — количество изменяющихся параметров. Эти исследования могут быть проведены по двум направлениям.

Первое из них связано с тем, что оценивается значение каждого параметра доверительным интервалом $[b_q^1, b_q^2]$; $(q = 1, ..., \theta)$. Учитывая целочисленность решений, задающих производственную программу, ставится задача разбиения параллелепипеда $B = \prod [b_q^1, b_q^2]$, на котором принимают значения изменяющиеся параметры, на конечное число таких областей B_p, что $\bigcup_{p=1}^{P} B_p = B$ и для всех точек каждой области B_p $(p = 1, ..., P)$ сохраняется одно и то же оптимальное решение задачи (4.28)–(4.38).

Второе направление исследований связано с вычислением максимально возможного уменьшения (увеличения) значения одного или группы входных параметров задачи (4.28)–(4.38), при котором либо остается неизменным вектор $\bar{X}$, задающий решение задачи (4.28)–(4.38), либо несущественно меняется значение (4.28) целевой функции оптимального варианта производственной программы. Этому направлению при исследовании устойчивости оптимальных решений посвящены работы [9, 14] .

В данной главе подробно будет представлено второе направление при условии, что изменяющимися параметрами являются следующие:

а) прогнозируемая рыночная цена выпускаемых изделий;

б) цена основных материалов, сырья, полуфабрикатов, комплектующих и других материальных ресурсов производства.

Рассмотрим влияние на решение задачи (4.28)–(4.38) изменения рыночных цен на выпускаемые изделия. Для анализа возможных изменений плана предприятия в зависимости от цены выпускаемых изделий введем следующие определения.

Определение 4.1. Задача (4.28)–(4.38) устойчива по функционалу при изменении цены изделий, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении цены изделия не более чем на ε значение функционала (4.28) изменится не более чем на заданное δ.

Определение 4.2. Задача (4.28)–(4.38) устойчива по решению при изменении цены изделий, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении цены изделий не более чем на ε решение задачи сохраняется.

Из данных определений вытекает, что устойчивость исходной задачи по функционалу отражает незначительные изменения в функции результатов производственной деятельности предприятия при малых изменениях в ценах на выпускаемые изделия. При этом состав производственной программы в оптимальном варианте может значительно измениться по сравнению с первоначальным.

Устойчивость по решению характеризует стабильность производственной программы при локальном увеличении цен на планируемые к выпуску изделия.

Сформулируем достаточное условие устойчивости задачи (4.28)–(4.38) по решению.

Утверждение 4.1. Достаточным условием устойчивости задачи (4.28)–(4.38) по решению является единственность решения этой задачи.

Доказательство. Пусть решение задачи (4.28)–(4.38) единственно. Обозначим через $\bar{X}^1$ отличное от оптимального допустимое решение задачи, на котором реализуется минимум выражения $F(\bar{X}_{\text{опт}}) - F(\bar{X}^1)$, где $F(\bar{X}_{\text{опт}})$ — значение функционала (4.28) для оптимального плана; $F(\bar{X}^1)$– значение функционала (4.28) для допустимого решения $\bar{X}^1$.

Обозначим $\Delta = F(\bar{X}_{\text{опт}}) - F(\bar{X}^1)$.

Рассмотрим K производственных программ, таких, что в ПП с номером k планируется выпуск только изделия k и объем выпуска этого изделия максимален при заданных ограничениях задачи (4.28)–(4.38).

Обозначим соответствующие допустимые решения $X_{i1}, \ldots, X_{iK}$, где $\bar{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{iK})$ $(i = 1, \ldots, K)$.

Выберем $X^* = \max\limits_{\substack{i=\overline{1,K}\\ j=\overline{1,K}}} X_{ij}$.

Если в качестве ε в определении устойчивости задачи по решению принять значение Δ/KX^*, то приращение функционала $\Delta F(\bar{X})$ для любого решения $\bar{X}$ при изменении исходных данных не более чем на Δ/KX^* может быть определено следующим образом:

$$\Delta F(\bar{X}) \le \frac{\Delta}{KX^*} \sum_{k=1}^{k} X_k \le \frac{\Delta}{KX^*} \cdot KX^* = \Delta.$$

Это, в частности, означает, что значение функционала (4.28) для любого решения $\bar{X}$ увеличится не более чем на Δ при увеличении цен изделий на Δ/KX^*, откуда следует устойчивость задачи (4.28)–(4.38) по решению.

Необходимое и достаточное условие устойчивости задачи (4.28)–(4.38) по решению формулируется следующим образом.

Утверждение 4.2. Для того чтобы задача (4.28)–(4.38) была устойчивой по решению, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $0 \le \varepsilon' \le \varepsilon$ справедливо:

$$F(\bar{X}_{\varepsilon'}) = F(\bar{X}) + \varepsilon' \sum_{k=1}^{K} X_k, \tag{4.41}$$

где $F(\bar{X}_{\varepsilon'})$ — значение функционала (4.28) для оптимального решения при ценах на изделия, задаваемых вектором $\bar{C}_{\varepsilon'} = (C_1 + \varepsilon', ..., C_k + \varepsilon')$; $F(\bar{X})$ — значение функционала (4.28) для оптимального решения при ценах на изделия, задаваемых вектором C.

Доказательство

Необходимость. Если исходная задача (4.28)–(4.38) устойчива по решению и существует такое ε, что при увеличении цен на изделия не более чем на ε оптимальное решение задачи сохраняется. Отсюда для любого $\varepsilon' \le \varepsilon$ выполняется

$$F(\bar{X}_{\varepsilon'}) - F(\bar{X}) = \operatorname{Re} z(\bar{X}_{\varepsilon'}) - \operatorname{Re} z(\bar{X}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} (C_k + \varepsilon') X_k - \sum_{k=1}^{K} C_k X_k = \varepsilon' \sum_{k=1}^{K} X_k.$$

Отсюда

$$F(\bar{X}_{\varepsilon'}) = F(\bar{X}) + \varepsilon' \sum_{k=1}^{K} X_k.$$

Достаточность. Условие (4.41) обеспечивает оптимальность решения $\bar{X}$ исходной задачи (4.28)–(4.38) при увеличении цен изделий на любое $0 < \varepsilon' \le \varepsilon$, что по определению означает устойчивость решения задачи.

В реальной практике планирования производственной деятельности предприятия важно выделить такие производственные программы, которые оставались бы оптимальными или были близки к оптимальным при достаточно больших изменениях цен на выпускаемые изделия. Сформулируем необходимое условие сохранения решения задачи (4.28)–(4.38) при неограниченном увеличении цен на выпускаемые изделия.

Утверждение 4.3. Для того чтобы оптимальное решение задачи (4.28)–(4.38) было устойчиво по решению при любом увеличении цен на выпускаемую продукцию, необходимо, чтобы оптимальное решение задачи (4.28)–(4.38) при исходных ценах обладало следующим свойством:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k \geq \sum_{k=1}^{K} X'_k,$$

где $\bar{X} = (X_1, ..., X_K)$ — оптимальное, а $\bar{X}' = (X'_1, ..., X'_k)$ — любое допустимое решение задачи.

Доказательство. Пусть решение $\bar{X}$ задачи (4.28)–(4.38) сохраняется при любом увеличении цен на выпускаемые изделия.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$F(\bar{X}_\varepsilon) = F(\bar{X}) + \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k.$$

Предположим, что условие утверждения не выполняется, т.е. существует допустимое решение $X^* = (X_1^*, ..., X_k^*)$, при котором

$$\sum_{k=1}^{K} X_k^* \geq \sum_{k=1}^{K} X_k.$$

Рассмотрим разность

$$F(X_\varepsilon) - F(X_\varepsilon^*) = (F(X) - F(X^*)) + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{K} X_k - \sum_{k=1}^{K} X_k^* \right).$$

Выберем так величину ε_0, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon_0 > \frac{F(X) - F(X^*)}{\sum_{k=1}^{K} (X_k^* - X_k)}.$$

Тогда будет справедливо следующее неравенство:

$$F(\bar{X}_{\varepsilon_0}) < F(\bar{X}_{\varepsilon_0}^*),$$

где $F(\bar{X}_{\varepsilon_0})$ — значение функционала (4.28) при ценах на изделия, заданных вектором $\bar{C}_{\varepsilon_0} = (C_1 + \varepsilon_0, ..., C_k + \varepsilon_0)$ на решении $\bar{X} = (X_1, ..., X_k)$; $F(X_{\varepsilon_0}^*)$ — значение функционала (4.28) при ценах на изделия, задаваемых вектором $\bar{C}_{\varepsilon_0}$. Последнее неравенство противоречит исходным условиям, что и доказывает утверждение.

Учитывая конечность множества допустимых производственных программ, что является, в частности, следствием ограниченности ресурсов всех видов, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 4.4. Пусть увеличение цен на планируемые к выпуску изделия происходит в интервале $[0, \infty)$. Тогда существует такое разбиение интервала $[0, \infty)$ на конечное число отрезков $[0, \varepsilon_1)$, ..., $[\varepsilon_L, \infty)$, что для каждого отрезка $[\varepsilon_\ell, \varepsilon_{\ell+1})$ существует допустимое решение задачи (4.28)–(4.38), которое является оптимальным при изменении цен на изделия в интервале $[C_k + \varepsilon_\ell, C_k + \varepsilon_{\ell+1}]$ ($k = 1, ..., K$; $\ell = 0, ..., L$), где C_k — минимальная прогнозируемая цена на изделие k. Последнее утверждение позволяет получить верхнюю и нижнюю оценки интервала изменения цен на планируемую к выпуску продукцию и среди допустимых вариантов производственной программы выбрать такой, который является оптимальным при наиболее вероятном изменении цен.

Задача определения максимального увеличения цен на выпускаемые предприятием изделия, при котором значение функционала (4.28) отклоняется не более чем на заданное δ, состоит в следующем:

$$\max \varepsilon; \tag{4.42}$$

$$\left|F(\bar{X}_\varepsilon) - F(\bar{X})\right| \leq \delta; \tag{4.43}$$

$$\varepsilon \geq 0, \tag{4.44}$$

где $F(\bar{X}_\varepsilon)$ — значение функционала (4.28) для решения задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия, задаваемых вектором $\bar{C}_\varepsilon = (C_1 + \varepsilon, ..., C_k + \varepsilon) F(\bar{X})$ — значение функционала (4.28) для решения задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия, заданных вектором $\bar{C} = (C_1, ..., C_k)$.

Для того чтобы определить максимальное увеличение цены на выпускаемые изделия, сохраняющее оптимальным первоначальное решение, необходимо решить следующую экстремальную задачу:

$$\max \varepsilon; \tag{4.45}$$

$$X_{\varepsilon k} - X_k = 0, \quad k = 1, ..., K; \tag{4.46}$$

$$\varepsilon \geq 0. \tag{4.47}$$

где $X_\varepsilon = (X_{\varepsilon 1}, ..., X_{\varepsilon K})$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия, задаваемых вектором $\bar{C}_\varepsilon = (C_1 + \varepsilon, ..., C_k + \varepsilon)$; $\bar{X}$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия, задаваемых вектором $\bar{C} = (C_1, ..., C_k)$.

В процессе реализации производственной программы могут изменяться не только цены на выпускаемую продукцию, но и уровень цен на материальные ресурсы производства, такие, как сырье, материалы, комплектующие, покупные полуфабрикаты и т.д.

Рассмотрим, как происходит изменение оптимальной производственной программы в выбранном варианте ПХД предприятия при изменении стоимости материальных ресурсов производства. Введем следующие определения.

Определение 4.3. Задача (4.28)–(4.38) устойчива по функционалу при изменении цен на материальные ресурсы, включаемые в планируемые к выпуску изделия, если существует такое ε, что при увеличении цен на материальные ресурсы не более чем на ε значение функционала (4.28) изменится не более чем на заданное δ.

Определение 4.4. Задача (4.28)–(4.38) устойчива по решению при изменении цен на материальные ресурсы, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении цен на материальные ресурсы не более чем на ε оптимальное решение задачи (4.28)–(4.38) сохраняется.

Если задача (4.28)–(4.38) устойчива по решению при изменении цен на материальные ресурсы или устойчива по функционалу, то ЛПР интересует максимальное увеличение цены на материальные ресурсы, при котором задача устойчива по решению или функционалу.

Задача вычисления максимального увеличения цен на материальные ресурсы производства, при котором значение функционала (4.28) изменится не более чем на заданное δ, состоит в следующем:

$$\max \varepsilon \tag{4.48}$$

при ограничениях:

$$F(\bar{X}_\varepsilon) - F(X) \le \delta; \quad \varepsilon \ge 0, \tag{4.49}$$

где $F(X_\varepsilon)$ значение функционала (4.28) для решения задачи (4.28)–(4.38) при ценах на материальные ресурсы, увеличенных на ε; $F(\bar{X})$ — значение функционала (4.28) для решения задачи (4.28)–(4.38) при первоначальных ценах на материальные ресурсы.

Максимальное увеличение цен на материальные ресурсы, при котором сохраняется решение задачи (4.28)–(4.38), вычисляется при решении следующей экстремальной задачи:

$$\max \varepsilon; \tag{4.50}$$

$$X_{\varepsilon k} - X_k = 0, \qquad k = 1, ..., K; \tag{4.51}$$

$$\varepsilon \ge 0, \tag{4.52}$$

где $X_\varepsilon = (X_{\varepsilon 1}, ..., X_{\varepsilon k})$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при увеличении цен на материальные ресурсы на ε; $\bar{X} = (X_1, ..., X_K)$ — решение задачи при первоначальных ценах на материальные ресурсы.

Рассмотрим проблему определения интервала устойчивости оптимального решения задачи (4.28)–(4.38) при одновременном изменении цен на выпускаемые изделия и на материальные ресурсы производства.

Введем аналогичные вышеприведенным определения.

Определение 4.5. Задача (4.28)–(4.38) устойчива по функционалу при изменении цен на запланированные к выпуску изделия и на материальные ресурсы производства, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении цен на изделия и на материальные ресурсы не более чем на ε значение функционала (4.1) для оптимального решения задачи изменится не более чем на заданное δ.

Определение 4.6. Задача (4.28)–(4.38) устойчива по решению при изменении цен на запланированные к выпуску изделия и на материальные ресурсы производства, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении цен на изделия и на материальные ресурсы не более чем на ε оптимальное решение задачи сохраняется.

Рассмотрим задачу вычисления максимального ε, такого, что при увеличении исходных данных на изделия и материальные ресурсы не более чем на ε значение функционала (4.28) изменяется не более чем на заданное δ:

$$\max \varepsilon; \tag{4.53}$$

$$\left| F(\bar{X}_{\varepsilon}^{\Delta}) - F(\bar{X}) \right| \le \delta; \;\; \varepsilon \ge 0, \tag{4.54}$$

где $(\bar{X}_{\varepsilon}^{\Delta})$ — значение функционала (4.1) для оптимального решения задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия и материальные ресурсы, увеличенных на ε; $F(\bar{X})$ — значение функционала (4.28) для оптимального решения задачи (4.28)–(4.38) при первоначальных (заложенных в модели) ценах.

Задача вычисления максимального увеличения цены на изделия и на материальные ресурсы производства, при котором сохраняется оптимальным решение задачи (4.28)–(4.38), заключается в следующем:

$$\max \varepsilon; \tag{4.55}$$

$$X_{\varepsilon k}^{\Delta} - X_k = 0, \; (k = 1, \ldots, K); \tag{4.56}$$

$$\varepsilon \ge 0,$$

где $\bar{X}_{\varepsilon k}^{\Delta} = (X_{\varepsilon 1}^{\Delta}, \ldots, X_{\varepsilon K}^{\Delta})$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия и материальные ресурсы, увеличенных на ε за каждую единицу; $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_K)$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при первоначальных ценах на изделия и материальные ресурсы.

В рассмотренных постановках задач на вычисление интервала устойчивости оптимального решения задачи (4.28)–(4.38) предполагалось, что одновременно происходит изменение цен всей номенклатуры изделий, включенных в ПП, и (или) цен на все виды материальных ресурсов производства этих изделий.

Аналогично может быть поставлена задача вычисления интервала устойчивости решения исходной оптимизационной задачи при изменении цен только для некоторых видов изделий, включенных в

ПП, и (или) цен на определенные виды материальных ресурсов производства данной номенклатуры изделий или всех изделий производственной программы.

Рассмотрим алгоритм определения области устойчивости задачи (4.28)–(4.38) по функционалу при изменении цен на материальные ресурсы производства. Постановка этой задачи задана формулами (4.48)–(4.49). Из формул (4.5)–(4.8) и соотношения (4.49) получаем, что ε, являющееся решением задачи (4.48)–(4.49), должно удовлетворять следующему неравенству:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k}(cen1_\ell + \varepsilon) + \sum_{\ell=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k}(cen2_\ell + \varepsilon) -$$

$$- \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{k=1}^{L_1} r1_{\ell k} cen1_\ell - \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} cen2_\ell \le \delta,$$

откуда

$$\varepsilon \le \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} + \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k}}. \tag{4.57}$$

Легко понять, что если в качестве ε в решении задачи (4.48)–(4.49) взять правую часть неравенства (4.57), то для любого $\varepsilon' > \varepsilon$ ограничение (4.49) выполняться не будет, т.е. ε, заданное правой частью соотношения (4.57), будет решением задачи (4.48)–(4.49).

Устойчивость решения задачи (4.28)–(4.38) по функционалу может рассматриваться в более широком смысле, т.е. вычисляется такое максимальное ε, на которое могут быть увеличены цены на материальные ресурсы так, чтобы среди всех допустимых программ ПХД предприятия существовала хотя бы одна, у которой значение целевой функции для этой программы с увеличением цен на материальные ресурсы отличалось от значения целевой функции для оптимальной производственной программы при исходных ценах не более чем на заданное δ.

Формальная постановка этой задачи заключается в следующем:

$$\max \varepsilon; \tag{4.48$'$}$$

$$F(X) - F(X_{i\varepsilon}) \le \delta; \quad X_i \in X; \tag{4.49$'$}$$

$$\varepsilon \ge 0, \tag{4.50$'$}$$

где X — множество всех допустимых программ производственно-хозяйственной деятельности предприятия. Докажем следующее утверждение.

Утверждение 4.5. Решение задачи (4.48)–(4.49) совпадает с решением задачи (4.48)–(4.50′) в том случае, если для множества допустимых производственных программ справедливо соотношение

$$\min_{X_i \in X} F(\bar{X}) - F(X_i) \geq \delta. \qquad (4.58')$$

Доказательство утверждения следует из того, что при выполнении условия (4.58) при решении задачи (4.48)–(4.50) анализируется выполнение ограничения (4.49) только для решения $\bar{X}$, и поэтому решение задачи (4.48)–(4.50) сводится к решению задачи (4.48)–(4.49), что и доказывает приводимое утверждение.

Рассмотрим решение задачи (4.48)–(4.50) в том случае, когда условие (4.58) не выполняется. В качестве начального приближения выберем ε_0, равное правой части неравенства (4.57). Если для всех $X_i \in X$ выполняется условие $F(\bar{X}_{i\varepsilon_0}) \leq F(\bar{X}_{\varepsilon_0})$, то ε_0 является решением (4.48)–(4.50). В противном случае существует такое $\bar{X}_p$, что $F(\bar{X}_{i\varepsilon_0}) > F(\bar{X}_{\varepsilon_0})$.

Полагаем $\delta = F(X_{p\varepsilon_0}) > F(X_{\varepsilon_0})$. Вычисляем ε_1, равное правой части неравенства (4.57), заменив в нем координаты вектора $\bar{X}$ на координаты вектора $\bar{X}_p$. Учитывая конечность множества $\bar{X}$ и монотонное убывание функции $F(X_{i\varepsilon})$ по ε для всех $X_i \in \bar{X}$, через конечное число итераций получим:

$$F\left(\bar{X}_p, \sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon_j\right) \leq F\left(\bar{X}_i, \sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon_j\right) \quad (\varepsilon_j > 0),$$

где $F\left(\bar{X}_p, \sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon_j\right)$, $F\left(\bar{X}_i, \sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon_j\right)$ — значения функционала (4.28) при увеличении цен на материальные ресурсы на величину $\sum_{i=0}^{\ell-1} \varepsilon_i$ для векторов $\bar{X}_p$, $\bar{X}_i$, задающих производственную программу предприятия.

Последнее неравенство свидетельствует о том, что при увеличении цены материальных ресурсов на величину $\varepsilon = \sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon_j$ значение функционала $F(\bar{X}_{p\varepsilon})$ не будет отличаться от значения функционала $F(\bar{X})$ более чем на заданное δ из условия (4.49) задачи (4.48)–(4.50) и $\varepsilon = \sum_{i=0}^{\ell-1} \varepsilon_i$ будет решением задачи (4.48)–(4.50).

Рассмотрим алгоритм определения области устойчивости по решению задачи (4.28)–(4.30).

Формулировка задачи отыскания максимального ε, при увеличении стоимости материальных ресурсов на которое сохраняется решение $\bar{X}$ задачи (4.28)–(4.38), состоит в следующем:

$$\max \varepsilon; \tag{4.58}$$

$$X_{\varepsilon K} - X_K = 0; \tag{4.59}$$

$$\varepsilon \geq 0, \tag{4.60}$$

где $X_\varepsilon = (X_{\varepsilon 1}, \ldots, X_{\varepsilon k})$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на материальные ресурсы, увеличенные на ε; $X = (X_1, \ldots, X_k)$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при первоначальных ценах на материальные ресурсы.

Для решения задачи (4.58)–(4.60) возможны два подхода. Первый подход связан с тем, что исходные данные задачи (4.28)–(4.38) таковы, что число допустимых решений задачи (4.28)–(4.38) достаточно невелико и все они известны эксперту, принимающему решение об окончательном выборе варианта ПХД.

В этой ситуации решение задачи (4.58)–(4.60) определяется следующим образом. Пусть $X_1, \ldots, X_L$ — все допустимые решения задачи (4.28) — (4.38). Обозначим множество допустимых решений через X. Пусть $\bar{X}_P \in X$ является оптимальным решением задачи (4.28)–(4.38) $\bar{X}_P = X_{P1}, \ldots, X_{Pk}$. Тогда ε^*, являющееся решением задачи (4.58)–(4.60), определяется следующим образом:

$$\varepsilon^* = \min_{\varepsilon \geq 0} \min_{X_i \in \bar{X}} \left\{ F(X_p) + \varepsilon \sum_{K=1}^{K} X_{pK} \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell K} + \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_{pk} \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell K} - \right.$$

$$\left. - F(\bar{X}_i) - \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_{iK} \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} - \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_{ik} \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} \leq 0 \right\},$$

где $\bar{X}_i \in X$ — любое допустимое решение задачи (4.28)–(4.38).

В случае если число допустимых решений задачи (4.28)–(4.38) достаточно велико и не все допустимые решения известны, алгоритм решения задачи (4.58)–(4.60) следующий.

Шаг 1. Выбираем исходное значение ε_0 из соотношения

$$\varepsilon_0 = \frac{F(X_p) - F(X_\ell)}{\varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_{pk} \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_{pk} \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k}}, \tag{4.61}$$

где $\bar{X}_p$ — оптимальное решение задачи (4.28) — (4.38); $\bar{X}_l$ — одно из известных допустимых решений задачи (4.28)–(4.38), удовлетворяющее условию

$$\left| F(\bar{X}_\ell) - F(\bar{X}_P) \right| = \min_{X_i \in X} \left| F(\bar{X}_i) - F(\bar{X}_P) \right|,$$

где X — множество допустимых решении задачи (4.28)–(4.38), полученных в результате определения оптимального варианта производственно-хозяйственной деятельности предприятия.

Шаг 2. Решаем задачу (4.28)–(4.38) при ценах на материальные ресурсы, увеличенных на выбранное значение ε_i.

Если решение задачи (4.28)–(4.38) сохранилось, то вычисляем новое значение ε по формуле (4.61), заменив $\bar{X}_p$ на оптимальное решение задачи при увеличенных ценах на материальные ресурсы, а $\bar{X}_l$, соответственно, на допустимое решение, ближайшее к $\bar{X}'_p$ по значению функционала (4.28) при увеличенных ценах на материальные ресурсы. Переход на начало шага 2.

Если решение задачи (4.28)–(4.38) изменилось при увеличении цен на материальные ресурсы, то вычисляется

$$\max_{j=1,2} \underline{\max}_{\ell=1,L_j} \{cen_{j\ell} - cen^*_{j\ell}\} = d, \tag{4.62}$$

где $\mathrm{cen}_{j\ell}$ — цены на материальные ресурсы с учетом их последнего повышения на ε_i; $cen^*_{j\ell}$ — цены на материальные ресурсы до их повышения на ε_i. Обозначим через δ требуемую точность решения задачи (4.58)–(4.60).

Если $d \le \delta$, то в качестве решения задачи (4.58)–(4.60) выбираем $\varepsilon = \sum_{i=1}^{L=1} \varepsilon_i$, где L — число итераций алгоритма.

Если $d > \delta$, то последнее значение ε уменьшается вдвое и итерация повторяется с этого значения ε. Сходимость описанного алгоритма следует из конечности всех допустимых решений задачи (4.28)–(4.38).

Задача вычисления области устойчивости по функционалу при изменении цены изделий формулируется следующим образом:

$$\max \varepsilon \tag{4.63}$$

при ограничениях:

$$F(X_\varepsilon) - F(\bar{X}) \le \delta; \tag{4.64}$$

$$\varepsilon \ge 0, \tag{4.65}$$

где $F(X_\varepsilon)$ — значение функционала (4.28) в оптимальном решении задачи (4.28)–(4.38) при увеличении цен на выпускаемые изделия на величину ε; $F(X)$ — значение функционала (4.28) в решении задачи (4.28)–(4.38) при исходных ценах на изделия, заданных вектором $C = (C_1, \ldots, C_k)$. Отметим, что решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия $\bar{C} = (C_1, \ldots, C_K)$ и решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия $\bar{C}_\delta = (C_1 + \varepsilon, ..., C_K + \varepsilon)$, вообще говоря, есть разные векторы $\tilde{X}$ и $\bar{X}$.

Рассмотрим составляющие целевого функционала $F(\bar{X})$. Учитывая (4.1)–(4.2), представим $F(X)$ следующим образом:

$$F(\bar{X}) = \sum_{k=1}^{K} C_k X_k - Z(\bar{X}), \tag{4.66}$$

где первое слагаемое задает программу ПХД предприятия при ценах на изделия, заданных вектором $\bar{C} = (C_1, ..., C_K)$, и объеме выпуска изделий, задаваемом вектором $\bar{X} = (X_1, ..., X_K)$; второе слагаемое задает полные затраты предприятия по выпуску изделий, заданных вектором $\bar{X}$.

Учитывая, что при увеличении рыночной цены на выпускаемые изделия второе слагаемое остается неизменным, получим

$$F(\bar{X}_\varepsilon) - F(\bar{X}) = \sum_{k=1}^{K} (C_k + \varepsilon) X_k - \sum_{k=1}^{K} C_k X_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} C_k X_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k - \sum_{k=1}^{K} C_k X_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k .$$

Следовательно, для того чтобы выполнялось неравенство (4.64), необходимо выполнение соотношения

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k \le \delta.$$

Значение ε находится по формуле

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K} X_k}.$$

Рассмотрим решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия

$$\bar{C} = \left(C_1 + \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K} X_k}, ..., C_k \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K} X_k} \right).$$

Если решением задачи является тот же вектор $\bar{X} = (X_1, ..., X_k)$, что и при ценах, заданных вектором $C = (C_1, ..., C_k)$, то решением задачи (4.63)–(4.65) будет

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sum_{k=1}^{K} X_k}.$$

Пусть решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия

$$C = \left(C_1 + \frac{\delta}{\sum\limits_{k=1}^{K} X_k}, \ldots, C_k + \frac{\delta}{\sum\limits_{k=1}^{K} X_k} \right)$$

задается вектором $\bar{X}^1$, таким, что существует j, такое, что $X_j^1 \neq X_j$.

Вычислим максимальное ε_1 $(\varepsilon_1 \leq \varepsilon)$:

$$\sum_{k=1}^{K} C_k X_k^1 + \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{K} C_k X_k^1 - Z(\bar{X}^1) \leq \sum_{k=1}^{K} C_k X_k + \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{K} X_k - Z(\bar{X}) + \delta.$$

Из последнего неравенства следует

$$\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{K} X_k^1 - \sum_{k=1}^{K} X_k \right) - Z(\bar{X}^1) \leq \sum_{k=1}^{K} C_k (X_k + X_k^1) + Z(\bar{X}^1) - Z(\bar{X}) + \delta,$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{K} C_k (X_k + X_k^1) + Z(\bar{X}^1) - Z(\bar{X}) + \delta}{\sum\limits_{k=1}^{K} (X_k^1 - X_k)}. \tag{4.67}$$

Если для цен на выпускаемые изделия, заданных вектором $C = (C_1 + \varepsilon_1, \ldots, C_K + \varepsilon_1)$, вектор $\bar{X}$ есть решение задачи (4.28)–(4.38), то задача (4.63)–(4.65) решена и решением будет ε_1, вычисленное по формуле (4.67). Если же решением задачи (4.28)–(4.38) при ценах $C = (C_1 + \varepsilon_1, \ldots, C_K + \varepsilon_1)$ является вектор X^2, такой, что существует j, такое, что $X_j^2 = X_j$, то проводим вычисление ε_2 аналогично тому, как было вычислено ε_1.

Учитывая конечность всех допустимых решений задачи, (4.28)–(4.38) через ограниченное число итераций, получим, что решение задачи для цен на изделия, задаваемых вектором $\bar{C} = (C_1, \ldots, C_K)$, совпадает с решением для цен, задаваемых вектором $\bar{C}_\ell = (C_1 + \varepsilon_1, \ldots, C_K + \varepsilon_1)$, а ε_ℓ является решением задачи (4.63)–(4.65).

Задача вычисления области устойчивости по решению при изменении цен на изделия состоит в следующем:

$$\max \varepsilon; \tag{4.68}$$

$$X_{\varepsilon K} - X_\varepsilon = 0; \quad k = 1, \ldots, K; \tag{4.69}$$

$$\varepsilon \geq 0, \tag{4.70}$$

где $X_\varepsilon = (X_{\varepsilon 1}, \ldots, X_{\varepsilon K})$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия, задаваемых вектором $C_\varepsilon = (C_1 + \varepsilon, \ldots, C_K + \varepsilon)$; $X = (X_1, \ldots, X_K)$ —

решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия, задаваемых вектором $C = (C_1, ..., C_K)$.

Выше был получен следующий результат. Если $\bar{X}$, являющийся решением задачи (4.28)–(4.38), таков, что $\sum_{k=1}^{K} X_k \geq \sum_{k=1}^{K} X_k^i$ для всех допустимых X^i решений задачи (4.28)–(4.38), то при сколь угодно большом увеличении цен на изделия вектор $\bar{X} = (X_1, ..., X_K)$ остается решением задачи (4.28)–(4.38).

Пусть существует j, такое, что для допустимого решения $\bar{X}^i$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{K} X_k^j \geq \sum_{k=1}^{K} X_k. \tag{4.71}$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи (4.68)–(4.70) в этом случае.

Если ЛПР получил в процессе исследования модели все допустимые решения X^l ($\ell = 1, ..., L$), для которых выполняется (4.71), то процедура определения решения задачи (4.68)–(4.70) эквивалентна решению следующей задачи:

$$\max \varepsilon;$$

$$\sum_{k=1}^{K} (C_k + \varepsilon) X_k \geq \sum_{k=1}^{K} (C_k + \varepsilon) X_k^{\ell}; \;\; \ell = 1, ..., L;$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

Такое ε находится из соотношения

$$\varepsilon = \min_{\ell = \overline{1, L}} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{K} C_k X_k - \sum_{k=1}^{K} C_k X_k^{\ell}}{\sum_{k=1}^{K} X_k^{\ell} - \sum_{k=1}^{K} X_k} \right\}.$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи (4.28)–(4.38) для случая, когда у ЛПР нет информации о наличии всех допустимых решений задачи (4.28)–(4.38), удовлетворяющих условию (4.71).

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 4.6. Пусть $X^* = (X_1^*, ..., X_K^*)$ является решением задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделия, заданных вектором $C_{\varepsilon_1} = (C_1 + \varepsilon_1, ..., C_k + \varepsilon_1)$ и ценах на изделия, заданных вектором $C_{\varepsilon_2} = (C_1 + \varepsilon_2, ..., C_k + \varepsilon_2)$. Тогда вектор $X^* = (X_1^*, ..., X_K^*)$ будет решением задачи (4.28)–(4.38) при ценах на выпускаемую продукцию, заданных любым вектором $C_\varepsilon = (C_1 + \varepsilon, ..., C_K + \varepsilon)$, при $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$).

Доказательство.

Доказательство от противного. Пусть для $\varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$ существует вектор $\bar{X}'$, такой, что $F(\bar{X}') > F(\bar{X})$ при ценах на изделия, заданных вектором $C = (C_1 + \varepsilon, ..., C_k + \varepsilon)$.

Это, в частности, означает, что

$$\sum_{k=1}^{K}(C_K + \varepsilon)X_k' \ge \sum_{K=1}^{K}(C_K + \varepsilon)X_K^*. \tag{4.72}$$

Следовательно, учитывая условия утверждения,

$$\sum_{i=1}^{K}X_i' \ge \sum_{i=1}^{K}X_i^*. \tag{4.72$'$}$$

Увеличим стоимость выпускаемой продукции на величину $\varepsilon_2 - \varepsilon > 0$. Тогда с учетом (4.72)–(4.72′) получим

$$\sum_{k=1}^{K}(C_K + \varepsilon_2)X_k' > \sum_{k=1}^{K}(C_k + \varepsilon_2)X_k^*.$$

В то же время по условию утверждения

$$\sum_{k=1}^{K}(C_K + \varepsilon_2)X_k^* \ge \sum_{k=1}^{K}(C_k + \varepsilon_2)X_k^i; \quad \forall \bar{X}^i \in \underline{X},$$

где $\underline{X}$ — множество допустимых решений задачи (4.28)–(4.38).

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Утверждение 4.6 позволяет организовать следующий численный алгоритм решения задачи (4.68)–(4.70).

Шаг 0. Определение вектора $\bar{X} = (X_1, ..., X_K)$, являющегося решением задачи (4.28)–(4.38) при ценах на изделие, заданных вектором $C = (C_1, ..., C_K)$. Выбрать $\Delta\varepsilon$ повышения цен на выпускаемую продукцию. Положить $\varepsilon = 0$.

Шаг 1. Найти решение задачи (4.28)–(4.38), приняв цены на изделия $C_\varepsilon = (C_1 + \varepsilon, ..., C_K + \varepsilon)$, где $\varepsilon = \varepsilon + \Delta\varepsilon$.

Если полученное решение $\bar{X}' = (X_1', ..., X_K')$ таково, что $X_k = X_k'$ для всех $k = 1, ..., K$, то переходим к шагу 1.

Если существует l, такое, что $X_K' \ne X_\ell$, то выясняем, выполняется ли неравенство

$$\Delta\varepsilon \le \delta, \tag{4.73}$$

где δ — требуемая точность решения задачи (4.68)–(4.70). Если неравенство (4.73) выполняется, то задача (4.68)–(4.70) решена, ее решением будет последнее значение ε, при увеличении цен на которое решалась задача (4.28)–(4.38).

Если неравенство (4.73) не выполняется, то, положив $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon/2$, переходим к шагу 1.

Задача вычисления области устойчивости по функционалу при изменении цен на изделия и на материальные ресурсы формулируется следующим образом:

$$\max \varepsilon; \tag{4.74}$$

$$F(\bar{X}_\varepsilon) - F(\bar{X}) \le \delta; \tag{4.75}$$

$$\varepsilon \ge 0, \tag{4.76}$$

где $F(\bar{X}_\varepsilon)$ — значение функционала (4.28) при увеличении цен на ε на ресурсы и изделия, если в качестве решения выбрать вектор $\bar{X}$, являющийся оптимальным решением задачи (4.28)–(4.38); $F(\bar{X})$ — значение функционала (4.28) в оптимальном решении задачи (4.28)–(4.38) при исходных ценах на изделия и материальные ресурсы.

Рассмотрим численный алгоритм решения задачи (4.74)–(4.76). Учитывая формулы (4.5)–(4.7), а также формулу (4.57), получим, что при увеличении цен на материальные ресурсы производства на ε значение функционала (4.28) уменьшится на величину

$$\Delta_1 F(\bar{X}_\varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_K \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell K} + \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k}. \tag{4.77}$$

Из формулы (4.2) следует, что при увеличении цен на изделия на ε значение функционала (4.1) увеличится на величину

$$\Delta_2 = F(\bar{X}_\varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k. \tag{4.78}$$

Учитывая формулы (4.77)–(4.78), получим, что при изменении цен на изделия и на материальные ресурсы производства на ε значение функционала (4.1) изменится на величину

$$\Delta_3 F(\bar{X}_\varepsilon) = \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{K} X_k - \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell K} - \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} \right). \tag{4.78′}$$

Следовательно ε, являющееся решением задачи (4.74)–(4.76), вычисляется по следующей формуле:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\left| \sum_{k=1}^{K} X_k - \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} - \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} \right|}. \tag{4.79}$$

Рассмотрим постановку задачи вычисления области устойчивости задачи (4.28)–(4.38) при изменении цен на материальные ресурсы производства и на выпускаемую продукцию. Формальная постановка этой задачи заключается в следующем:

$$\max \varepsilon; \tag{4.80}$$

$$\left|F(\tilde{X}_\varepsilon) - F(\bar{X})\right| \le \delta; \tag{4.81}$$

$$\varepsilon \ge 0, \tag{4.82}$$

где $F(\tilde{X}_\varepsilon)$ — значения функционала (4.1) в оптимальном решении задачи (4.28)–(4.38) при увеличении цен на изделия и материальные ресурсы на ε; $F(\bar{X})$ — значение функционала (4.28) в оптимальном решении задачи (4.28)–(4.38) при исходных ценах на материальные ресурсы и изделия.

Рассмотрим решение задачи (4.80)–(4.82) при увеличении цен на изделия и материальные ресурсы на величину ε, которая вычисляется по формуле (4.79).

Если решением задачи (4.28)–(4.38) будет вектор $\bar{X}$, являющийся оптимальным при исходных ценах на материальные ресурсы и изделия, то задача (4.80)–(4.82) решена, ее решение задается формулой (4.79).

Если решением задачи (4.28)–(4.38) при увеличении цен на материальные ресурсы и на изделия на ε является вектор $\bar{X}^1$, такой, что существует $X_j' \ne X_j$, то вычислим максимальное ε_1 ($\varepsilon_1 < \varepsilon$), для которого выполняется

$$\left|\sum_{k=1}^{K} C_k X_k^1 + \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{K} X_k^1 - \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{K} X_k^1 \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} - \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{K} X_k^1 \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} - \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{K} X_k - \right.$$
$$\left. - \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} + \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} + \sum_{k=1}^{K} C_k X_k \right| \le \delta,$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{\sum_{k=1}^{K} C_k X_k - \sum_{k=1}^{K} C_k X_k^1}{\left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{K} X_k^1 - \sum_{k=1}^{K} X_k^1 \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} - \sum_{k=1}^{K} X_k^1 \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} - \sum_{k=1}^{K} X_k - \\ - \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} + \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} \end{array}\right]}. \tag{4.83}$$

Если при увеличении цен на изделия и материальные ресурсы на ε_1 сохраняется решение $\bar{X}$ задачи (4.28)–(4.38), то задача (4.80)–(4.82) решена. В противном случае, если решением задачи будет вектор $\bar{X}^2$, для которого существует ℓ, такое, что $X_\ell^2 \ne X_\ell$, то вычисляем ε_2 по формуле (4.77), заменив в ней координаты вектора $\bar{X}^1$ на координаты вектора $\bar{X}^2$. Учитывая ограниченность множества допустимых решений задачи (4.28)–(4.38), через конечное число итераций получим, что решение задачи (4.28)–(4.38) для исходных цен на изделия и материальные ресурсы совпадает с решением задачи при увеличении цен на изделия и материальные ресурсы на ε_ℓ ($\varepsilon_\ell < \varepsilon_{\ell-1} < \ldots < \varepsilon_1$). Последнее значение ε будет решением задачи (4.80)–(4.82).

Задача вычисления максимального увеличения цены на изделия и материальные ресурсы производства, при котором сохраняется решение задачи (4.28)–(4.38), заключается в следующем:

$$\max \varepsilon; \tag{4.84}$$

$$X_{\varepsilon K} - X_\varepsilon = 0; \quad k = 1, \ldots, K; \tag{4.85}$$

$$\varepsilon \geq 0, \tag{4.86}$$

где $X_\varepsilon = (X_{\varepsilon 1}, \ldots, X_{\varepsilon K})$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при ценах на материальные ресурсы и изделия, увеличенных на ε по сравнению с первоначальными; $X = (X_1, \ldots, X_K)$ — решение задачи (4.28)–(4.38) при первоначальных ценах на изделия и материальные ресурсы производства.

Рассмотрим алгоритм решения задачи (4.84)–(4.86) для случая, когда ЛПР известны все допустимые решения задачи (4.28)–(4.38). В этом случае решение задачи (4.84)–(4.86) находится исходя из соотношения

$$\varepsilon^* = \min_{\varepsilon \geq 0} \min_{X_i \in \underline{X}} \left\{ F(\bar{X}) - \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} - \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k - \right.$$
$$\left. - F(\bar{X}_i) + \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k^i \sum_{\ell=1}^{L_1} r1_{\ell k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k^i \sum_{\ell=1}^{L_2} r2_{\ell k} - \varepsilon \sum_{k=1}^{K} X_k^i \leq 0 \right\}. \tag{4.87}$$

Здесь $\underline{X}$ — множество всех допустимых решений задачи (4.28)–(4.38).

Рассмотрим алгоритм решения задачи (4.84)–(4.86), в том числе когда ЛПР неизвестны все допустимые решения задачи (4.28)–(4.38).

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 4.7. Пусть $\bar{X}$ является решением задачи (4.28)–(4.38) при увеличении цен на изделия и материальные ресурсы на ε_1 и ε_2 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$). Тогда $\bar{X}$ будет решением задачи (4.28)–(4.38) при увеличении цен на любое число интервала

$\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно.

Пусть $\bar{X}^*$ такое, что $F(X_\varepsilon) < F(\bar{X}_\varepsilon^*)$ для некоторого ε из интервала $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$.

Обозначим $F(X_{\varepsilon_1})$, $F(X_{\varepsilon_2})$ — значение функционала (4.1) задачи (4.28)–(4.38) при увеличении цен на изделия и материальные ресурсы производства на величину ε_1 и ε_2 соответственно.

Учитывая, что $F(\bar{X}_{\varepsilon_1}) > F(\bar{X}_{\varepsilon_2}^*)$, получим, исходя из (4.87),

$$(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k^* - (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k^*\sum_{\ell=1}^{L_1}r1_{\ell k} - (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k^*\sum_{\ell=1}^{L_2}r2_{\ell k} +$$
$$+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k\sum_{\ell=1}^{L_1}r1_{\ell k} + (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k\sum_{\ell=1}^{L_1}r2_{\ell k} - (\varepsilon-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k >$$
$$> (F(X_{\varepsilon_1}) - F(X_{\varepsilon_1}^*) > 0.$$

Умножив обе части последнего неравенства на число $\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon-\varepsilon_1} > 1$, получим

$$(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k^* - (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k^*\sum_{\ell=1}^{L_1}r1_{\ell k} - (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k^*\sum_{\ell=1}^{L_2}r2_{\ell k} +$$
$$+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k\sum_{\ell=1}^{L_1}r1_{\ell k} + (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k\sum_{\ell=1}^{L_1}r2_{\ell k} - (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k >$$
$$> \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon-\varepsilon_1}(F(X_{\varepsilon_1}) - F(X_{\varepsilon_1}^*)).$$

Следовательно,

$$(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k^* - (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k^*\sum_{\ell=1}^{L_1}r1_{\ell k} - (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k^*\sum_{\ell=1}^{L_2}r2_{\ell k} +$$
$$+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k\sum_{\ell=1}^{L_1}r1_{\ell k} + (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k\sum_{\ell=1}^{L_1}r2_{\ell k} - (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sum_{k=1}^{K}X_k >$$
$$>(F(X_{\varepsilon_1}) - F(X_{\varepsilon_1}^*)).$$

Перенеся в последнем неравенстве правую часть влево, получим

$$F(\bar{X}_{\varepsilon_2}) - F(\bar{X}_{\varepsilon_2}^*) > 0,$$

что противоречит условию утверждения. Следовательно, исходная посылка была неверна и утверждение доказано.

Доказанное утверждение позволяет организовать численный алгоритм решения задачи (4.84)–(4.86).

Шаг 0. Определение решения задачи (4.28)–(4.38), которым является вектор $X = (X_1, ..., X_k)$ при исходных ценах на продукцию и на материальные ресурсы производства.

Выбрать $\Delta\varepsilon$, на которое будут повышаться цены на продукцию и материальные ресурсы производства. Положить $\varepsilon = 0$.

Шаг 1. Решить задачу (4.28)–(4.38), приняв цены на изделия и материальные ресурсы производства увеличенными на величину $\varepsilon = \varepsilon + \Delta\varepsilon$.

Если полученное решение $\bar{X}'$ задачи (4.28)–(4.38) такое, что $X'_K = X_K$ $(k = 1, ..., K)$, то перейти на начало шага 1.

Если вектор X' таков, что существует ℓ, для которого $X'_\ell = X_\ell$, то выяснить, верно ли неравенство

$$\Delta\varepsilon \le \delta, \qquad (4.88)$$

где δ — требуемая точность решения задачи (4.84)–(4.86).

Если неравенство (4.88) выполняется, то задача (4.84)–(4.86) решена, ее решением будет ε, при увеличении цен на которое последний раз решалась задача (4.28)–(4.38). Если неравенство (4.88) не выполняется, то, положив $\Delta\varepsilon' = \dfrac{\Delta\varepsilon}{2}$, перейти на начало шага 1.

Представленные в этой главе методы определения диапазона изменения цен на выпускаемую предприятием продукцию были использованы при расчете оптимальной производственной программы завода «Красный пролетарий».

В результате численных экспериментов установлено, что максимальное изменение цен на выпускаемые изделия, при котором сохраняется производственная программа на продукцию, не превышает 10–15% от начальной цены.

Контрольные вопросы

1. Как выбрать оптимальную производственную программу?
2. Каковы критерии оптимальности производственной программы?
3. Какие существуют ограничения при выборе производственной программы?
4. Какие существуют подходы к анализу устойчивости производственной программы?
5. Что является достаточным условием устойчивости производственной программы?
6. Как цены на материальные ресурсы влияют на оптимальность производственной программы?
7. Как цены на конечную продукцию влияют на оптимальность производственной программы?

Глава 5. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ В ПРОМЫШЛЕННОЙ ЛОГИСТИКЕ

В последнее десятилетие во всем мире используются подходы экономико-математического моделирования для оценки эффективности управления цепями поставок и производственного менеджмента. В большинстве случаев для этого используются модели линейного и целочисленного линейного программирования, где в качестве критериев принимают либо прибыль, полученную предприятием при реализации той или иной производственной программы, либо издержки, связанные с производством конечной продукции. Основным недостатком этого подхода является жесткое закрепление производственных ресурсов при выполнении всего комплекса работ на всем временном интервале планирования. В данной работе предпринята попытка преодолеть это ограничение, разрешив перераспределять производственные мощности в процессе реализации производственной программы. Получаемые при этом модели оптимального управления ресурсами предприятия и методы их анализа предлагаются в данной главе.

5.1. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ НА ЗАДАННОМ ПЕРИОДЕ ПЛАНИРОВАНИЯ

Конвейерные системы обработки заявок характеризуются параллельной одновременной обработкой нескольких видов заявок на различных технологических операциях при заданной интенсивности их поступления.

Параллелизм обработки одной партии заявок на нескольких последовательных операциях обработки достигается за счет того, что возможна передача любой части обработанной партии заявок на последующую операцию в отличие от систем календарного планирования, где обработка партии заявок возможна только после того, как на предыдущей операции обработана полностью вся партия заявок.

Под заявками могут пониматься детали, полуфабрикаты и заготовки изделий на промышленных предприятиях, информационные документы в вычислительных и информационных центрах, специализирующихся в области компьютерной обработки, транспортируемые грузы, поступающие на пункты перевозки.

При анализе работы конвейерной системы обработки заявок пользователя могут интересовать прежде всего такие показатели работы, как время ожидания заявок в очереди на обработку, производительность системы по каждому виду обрабатываемых заявок, объем межоперационных заделов на конец директивного периода, общий объем обработанных заявок за директивный период.

Перечисленные показатели работы системы зависят от того, насколько рационально распределены ресурсы системы, участвующие в обработке поступающего потока заявок.

В данной главе рассматриваются методы распределения ограниченных ресурсов по некоторым из перечисленных критериев, а также исследуется устойчивость задачи оптимального распределения ресурсов в зависимости от изменения исходных данных модели.

Рассмотрим основные уравнения, описывающие функционирование конвейерных систем.

Технологическая схема обработки заявок в конвейерной системе может быть представлена в виде орграфа $G(M, N)$, в котором вершины имитируют операции обработки, а дуги задают технологическую последовательность обработки заявок на операциях. Обозначим через $V(t, \tau)$ вектор-функцию компонента i, который представляет очередь заявок, имеющих время ожидания в системе не более чем τ $(\tau \geq 0)$. Введем также векторы-функции $U(t, \tau)$ и $Q(t, \tau)$ так, что $U_i(t, \tau)$ задает интенсивность поступления заявок с временем ожидания в системе не более τ на операцию i в момент времени t. Аналогично определяется интенсивность обработки заявок $Q_i(t, \tau)$ на операции i.

Будем полагать, что $U(t, \tau)$ содержит в качестве аддитивной компоненты вектор-функцию $U_0(t, \tau)$ внешних поступлений, по предположению имеющих нулевой возраст:

$$U_i(t, \tau) = l(\tau) U_i^0(t),$$

где $l(\tau)$ — функция скачка, заданная следующим образом:

$$l(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0; \\ 1, & \tau \geq 0. \end{cases}$$

Для очереди $V_i(t, \tau)$ операции i уравнение баланса имеет вид

$$\frac{\partial V_i(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial V_i(t, \tau)}{\partial \tau} = U_i(t, \tau) - Q_i(t, \tau), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.1}$$

Его можно получить, учитывая, что приращение $V_i(t + \Delta t, \tau) - V_i(t, \tau)$ очереди за время dt складывается из разности $(U_i(t, \tau) -$

$-Q_i(t, \tau)$) и объема заявок, выбывших из очереди вследствие старения. За время dt объем выбывших заявок составит $\dfrac{\partial V_i(t,\tau)}{\partial \tau}dt$.

Интенсивность поступления заявок $U(t, \tau)$ определим следующим образом:

$$U(t,\tau) = U^0(t,\tau) + \tilde{D}(t)Q(t,\tau), \tag{5.2}$$

где матрица $\tilde{D}(t)$ такова, что величина $d_{ij}(t)Q_j(t, \tau)$ задает интенсивность заявок, передаваемых с элемента i на элемент j; $d_{ij}(t)$ — элементы матрицы $\tilde{D}(t)$.

Уравнение (5.2) задает поступление заявок для системы обработки однородных заявок. Если же обрабатываются заявки нескольких видов, то для заявок K видов зададим межэлементные связи в технологическом графе $G(M, N)$, отражающем последовательность обработки заявок на операциях трехмерным матричным оператором $\tilde{D}(t)$, действующим на матрицу $Q(t, \tau)$:

$$U(t,\tau) = U^0(\mathrm{t},\tau) + \tilde{D}(t)Q(t,\tau).$$

Здесь $U_{ij}(t, \tau)$, $Q_{ij}(t, \tau)$, $U_{ij}^0(t, \tau)$ — элементы соответствующих матриц ($i = 1, \ldots, N_i$, $j = 1, \ldots, K$), где N_i — число операций в цикле обработки заявок вида i; $d_{lij}(t)$ — элемент матрицы $\tilde{D}(t)$ ($i = 1, \ldots, N_i$, $j = 1, \ldots, N_i$, $l = 1, \ldots, K$), при этом элемент $d_{lij}(t)Q_{ij}(t, \tau)$ задает интенсивность заявок, передаваемых элементом i на элемент j для вида заявок l.

Динамика изменения очередей заявок на операциях без учета времени ожидания задается следующим соотношением:

$$\frac{\partial V_i(t)}{\partial t} = U^0(t) - (\hat{E} - D_i)Q_i(t) \quad (i = 1,\ldots,K).$$

Здесь $V_i(t)$ — вектор-функция очередей на операциях i-го типа заявок; D_i — матричный оператор межэлементных связей; $Q_i(t)$ — вектор производительностей на операциях по i-му виду заявок; $U_{ij}^0(t, \tau)$ — вектор внешних поступлений; $\hat{E}$ — единичная матрица.

Производительности, с которыми происходит обработка заявок $Q_{ij}(t)$, на технологических операциях обеспечиваются при помощи ресурсов в системе обработки, заданных вектором $C = (C_1, \ldots, C_m)$. Для того чтобы обеспечить на операции i производительность обработки $Q_{ij}(t)$, необходимо выделить на этой операции ресурсы в количестве

$$\overline{r}_{ij}(t) = Q_{ij}(t)\overline{\alpha}_{ij},$$

где $\overline{\alpha}_{ij} = (\alpha_{ij}^1,\ldots,\alpha_{ij}^m)$ — m-мерный вектор трудозатрат на операции j по виду заявок i.

Полагаем, что ресурсы можно мгновенно перебрасывать с одной операции на другую в количестве, не превышающем координаты вектора

$C = (C_1, ..., C_m)$.

Рассмотрим задачу оптимального распределения ресурсов по критерию максимизации суммарного объема обработанных заявок за директивный период в следующей постановке.

Необходимо максимизировать функционал

$$\sum_{i=0}^{K} \int_0^T Q_{iN_i}(t)dt, \tag{5.3}$$

где $Q_{ij}(t) = \lim\limits_{\tau\to\infty} Q_{ij}(t, \tau)$ при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N_i} Q_{ij}(t)\alpha_{ij}^{l} \le C_l, \;\; l = l, ..., m; \forall t \in [0, T]; \tag{5.4}$$

$$\int_0^t Q_{ij}(t')dt' \le V_{ji}(0) + \int_0^t u_{ij}(t')dt' + \sum_{Qpe \in R_{ij}} \int_0^t Q_{pl}(t')dt'; \tag{5.5}$$

$$\int_0^T Q_{iN_i}(t)dt \ge b_i, \;\; i = 1, ..., K. \tag{5.6}$$

Здесь N_i — номер последней операции по i-му типу заявок; R_{ij} — множество операций предшественников для j-й операции по виду заявок i; интервал $(0, T)$ задает длительность периода планирования; $b = (b_1, ..., b_m)$ — вектор, задающий плановый объем заявок, который необходимо обработать к концу директивного периода.

Рассмотрим частный случай задачи (5.3)–(5.6) при условии, что $K = 1$, $m = 1$, $u_{ij}(t)$; $b_1 = 0$, $\exists V_{ij} \ge 0$. Граф, задающий последовательность обработки заявок, является цепью.

Приводимый ниже алгоритм распределения ресурсов максимизирует функционал (5.3) при ограничениях (5.4)–(5.6) для любого интервала $[0, t] \in [0, T]$.

Описание алгоритма.

Шаг 0. Полагаем $i = N_1$; $\Delta t_0 = 0$.

Шаг 1. На все операции, начиная с операции i, ресурсы выделяются в количестве

$$\frac{C_1\alpha_1}{\sum\limits_{k=i}^{N_1} \alpha_{1k}^{1}} \;\; (j = i, i+1, ..., N_1).$$

Будем считать, что ресурсы не выделяются на операции 1, ..., $i-1$. Производительности на операциях для всех

$$t \in [\Delta t_{N_{1-j}}; \Delta t_{N_1-j+1}]$$

задаются следующим образом:

$$q_{1l}(t) = \begin{cases} \dfrac{c_1}{\sum\limits_{k=i}^{N_1} \alpha_{1k}^1}, & \text{если } i \le l \le N_1; \\ 0, & \text{если } 1 \le l \le i. \end{cases}$$

Здесь $\Delta t_{N_1-j+1} = \Delta t_{N_1-j} + V_{1i}(0) \sum\limits_{rl=i}^{N_1} \alpha_{1e}^1 \big/ C_1$.

Шаг 2. Изменяем значение i по формуле $i = i + 1$. Если $i < 1$, то выход из алгоритма, в противном случае перейти к шагу 1.

Докажем, что алгоритм оптимально распределяет ресурсы по критерию максимального объема обработки заявок за любой период $[0, t] \subseteq [0, T]$.

Обозначим $\Delta_i = \Delta t_{N_1-j+1} - \Delta t_{N_1-i}$.

Предположим, что существует распределение ресурсов, обеспечивающее производительности $\tilde{q}_{11}(t), \ldots, \tilde{q}_{1N_1}(t)$, для которых выполняются ограничения (5.4) и существует такой момент времени $t^* \in [0, T]$, что

$$\sum_{i=1}^{N_1} V_{1i}(t^*) > \sum_{i=1}^{N_1} \tilde{V}_{1i}(t^*), \qquad (5.7)$$

где $V_{1i}(t^*)$ — величина очереди на операции i ($i = 1, \ldots, N_1$) в момент времени t^*, если ресурсы распределены согласно приведенному алгоритму; $\tilde{V}_{1i}(t^*)$ — величина очереди среди заявок на операции i ($i = 1, \ldots, N_1$), если производительности на операциях заданы функциями $\tilde{q}_{11}(t), \ldots, \tilde{q}_{1N_1}(t)$.

Не уменьшая общности, можно считать

$$\sum_{ir=1}^{K} \Delta i \le t^* \le \sum_{i=1}^{k+1} \Delta i.$$

В силу соотношения (5.7) имеем

$$\int_0^{t^*} q_{1N_1}(t)dt < \int_0^{t^*} \tilde{q}_{1N_1}(t)dt^1.$$

В свою очередь,

$$\int_0^{t^*} q_{1N_1}(t')dt' = \sum_{j=k+1}^{N_1} V_{1j}(0) + \frac{\left(t^* - \sum_{j=k}^{N_1} \Delta j\right) C_1}{\sum_{j=k}^{N_1} \alpha_{1j}^1}.$$

Тогда объем заявок, обработанный к моменту времени t^* при производительностях $\tilde{q}_{11}(t), \ldots, \tilde{q}_{1N_1}(t)$, может быть представлен так:

$$\int_0^{t^*} \tilde{q}_{1N_1}(t')dt' = \sum_{j=k+1}^{N_1} V_{1j}(0) + \frac{\left(t^* - \sum_{i=k}^{K} \Delta i\right) C_1}{\sum_{j=k}^{N_1} \alpha_{1j}^1} + V_\varepsilon; \;\; V_\varepsilon > 0. \tag{5.8}$$

Оценим время обработки $t_{\text{обр}}$ этого объема заявок при выполнении ограничений (5.4):

$$t_{\text{обр}} \geq \sum_{j=1}^{K} \Delta j + \left(t^* - \sum_{j=1}^{K} \Delta j\right) + V_\varepsilon \frac{\sum_{i=l}^{N_1} \alpha_{1i}}{C_1} > t^*, \tag{5.9}$$

где $l \geq k$.

Неравенство (5.9) противоречит тому, что к моменту времени t^* может быть обработан объем заявок, заданный правой частью равенства (5.8), что означает оптимальность приведенного алгоритма.

Рассмотрим алгоритм распределения ресурсов при обработке одного вида заявок, если на операции обработки поступает поток заявок заданной интенсивности.

Пусть система обработки заявок состоит из N_1 последовательных операций. На каждую операцию поступает поток заявок, интенсивность которого задана интегрируемыми функциями $U_{1j}(t)$ ($i = 1, \ldots, N_1$). Обработка заявок, поступающих на операцию i, заключается в последовательной обработке заявок на операции $i, i + 1, \ldots, N_1$, после чего обработка заявок считается завершенной.

Ограничение на потребляемые ресурсы, как и ранее, задается соотношением (5.4).

Необходимо распределить ресурсы так, чтобы объем обработанных заявок был бы максимален для любого интервала $(0, t) \subseteq \subseteq (0, T)$.

Объем очереди на операции i определяется для каждого момента $t \in (0, T)$ из следующего соотношения:

$$V_{1i}(t) = V_{1i}(0) + \int_0^t (u_{1i}(t') - q_{1i}(t') + q_{1i-1}(t'))dt',$$

где $q_{1,i-1}(t')$ — производительность обработки заявок на $i - 1$ в момент времени t.

Рассмотрим следующий алгоритм распределения ресурсов по указанному выше критерию.

Шаг 0. Положим $i = N_1$; $l = 0$; $\varepsilon_l = 0$; $\Delta C_{N_1+1} = C_1$; $\Delta C_0(t) = 0$.

Шаг 1. Вычислить такое ε_{l+1}, что для всех $t \in (\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1})$ выражение $f_i(t) = u_{1i}(t) - \dfrac{\Delta c_{i+1}}{\sum\limits_{j=1}^{N_1} \alpha_{1j}}$ сохраняет знак.

Если $f_i(t) \geq 0$, то для всех $t \in (\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1})$ производительность на операции определяется по формуле

$$q_{1i}(t) = \frac{\Delta c_{i+1}(t)}{\sum\limits_{j=1}^{N_1} \alpha_{1j}},$$

а на операциях $j = i + 1, ..., N_1$ — по формуле

$$q_{1j} = \sum_{k=i}^{j} u_{1k}(t) + \frac{\Delta c_{i+1}(t)}{\sum\limits_{l=i}^{N_1} \alpha_{1l}},$$

где ε_{l+1} — такое минимальное число из интервала $(0, T)$, что для него выполняется соотношение

$$\int_{\varepsilon_l}^{\varepsilon_{l+1}} u_{1i}(t')dt' \leq \frac{(\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l)\Delta C_{i+1}(t)}{\sum\limits_{j=i}^{N_1} \alpha_{1j}}.$$

Если $\varepsilon_{l+1} \geq T$, то переход к шагу ВЫХ.

Если $\varepsilon_{l+1} < T$, то переход к шагу 3.

Если $f_i(t) < 0$, то для всех $t \in (\varepsilon_e, \varepsilon_{e+1})$.

Шаг 2. Вычисление $\Delta C_i(t)$.

$\Delta C_i(t) = \Delta C_{i+1}(t) - \alpha_{1i+1} q_{1i+1}(t)$.

Положить $i = i - 1$. Если $i < 1$, то перейти к шагу 3, иначе — переход к шагу 1.

Шаг 3. На интервале $(\varepsilon_e, \varepsilon_{e+1})$ распределение ресурсов завершено. Производительности $\tilde{q}_{11}(t), ..., \tilde{q}_{1N_1}(t)$ задаются следующим образом:

$q_{1j} = 0; j = 1, 2, ..., i - 1;$

$$q_{ij}(t) = \sum_{P=i+1}^{N_1} q_{1P}(t) + \frac{\Delta C_{i+1}(t)}{\sum_{j=i}^{N_1} \alpha_{1j}}.$$

Если $\varepsilon_{e+1} > T$, то переход к шагу ВЫХ, иначе положить $l = l + 1$; $i = N_1$; $\Delta C_{N_1+1} = C$. Перейти к шагу 1.

Шаг ВЫХ. Распределение ресурсов на интервале $(0, T)$ завершено. Работа алгоритма закончена.

Покажем, что алгоритм распределяет ресурсы по критерию максимальной производительности системы для любого интервала $(0, t) \subseteq (0, T)$. Не уменьшая общности, проведем доказательство для интервала $(0, t) \subset (0, \varepsilon_1)$.

Если $f_i(t) \geq 0$ $(i = 1, ..., N_1)$, то $\sum_{i=1}^{N_1} V_{1i}(t) = 0$ для всех $t \in (0, \varepsilon_1)$ и в этом случае алгоритм оптимален на отрезке $(0, T)$. Проведем доказательство для случая, когда существует такое K $(1 \leq K \leq N_1)$, что $f_i(t) < 0$ для $i = K + 1, ..., N_1$ и $f_i(t) \geq 0$ для $i = 1, ..., K$. Предположим, что существуют $\tilde{q}_{11}(t), ..., \tilde{q}_{1N_1}(t)$, для которых $t^* \in (0, \varepsilon_1)$, и выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{N_1} \tilde{V}_{1i}(t^*) < \sum_{i=1}^{N_1} V_{1i}(t^*). \tag{5.10}$$

Здесь $\tilde{V}_{1i}(t)$ и $V_{1i}(t^*)$ — очереди для операции i в предположении, что производительности на операциях заданы соответственно функциями $\tilde{q}_{1i}(t)$ и $q_{1i}(t)$, которые были построены в результате работы алгоритма $(i = 1, ..., N_1)$. Из неравенства (5.10) следует, что

$$\int_0^{t^*} \tilde{q}_{1N_1}(t)dt > \int_0^{t^*} q_{1N_1}(t)dt^*. \tag{5.11}$$

Из предположения о существовании K получим

$$\int_0^{t^*} \tilde{q}_{1N_1}(t)dt = \int_0^{t^*} u_{1N_1}(t)dt + \int_0^{t^*} \frac{\Delta C_K(t)}{\sum_{i=k}^{N_1} \alpha_{1i}} dt.$$

Учитывая неравенство (5.11), получим

$$\int_0^{i^*} \tilde{q}_{1N_1}(t)dt = \int_0^{t^*} q_{1N_1}(t)dt + V_\varepsilon.$$

Время обработки объема заявок, стоящего в правой части последнего равенства, может быть оценено следующим образом:

$$t_{\text{обр}} \geq t^* + \frac{V_\varepsilon \alpha_{1N_1}}{C}.$$

Последнее неравенство противоречит тому, что возможно существование производительностей, которые обрабатывают объем заявок, заданный левой частью неравенства (5.11), что и доказывает оптимальность приведенного выше алгоритма.

Рассмотрим алгоритм решения задачи (5.3)–(5.6) для случая обработки K видов заявок, если ориентированный граф $G(M, N)$, задающий технологический маршрут обработки заявок, состоит из K параллельных цепей, каждая из которых задает последовательность обработки для заданного вида заявок.

Ниже приводится описание алгоритма оптимального распределения ресурсов в предположении, что $b_i = 0$ ($i = 1, ..., K$); $u_{ij}(t) = 0$ ($i = 1, ..., K$; $j = 1, ..., N_i$); существует $V_{pq} > 0$ ($1 \leq P \leq K$; $1 \leq q \leq Q$).

Описание алгоритма.

Шаг 0. Положить $\tau = 0$.

Шаг 1. Решаем задачу линейного программирования следующего вида:

$$\max \sum_{i \in P} q_{iN_i};$$

$$\sum_{Oi_j \in S^*} q_{ij} \tilde{\alpha}_{ij} \leq C_\ell; \quad \ell = 1, 2, \ldots, m;$$

$$q_{ij} \geq 0;$$

$$\sum_{Oi_j \in S^*} q_{ij} \geq q_{iN_i},$$

где S^* — множество путей, соединяющих операции, на которых существуют очереди заявок, с конечными операциями обработки по данному виду заявок; $C = (C_1, ..., C_m)$ — вектор ресурсов, участвующих в обработке; P — множество видов заявок, среди операций которых существует хотя бы одна с ненулевой очередью; S^* — множество путей, отражающих последовательность обработки заявок вида i, на начальной операции которых есть ненулевая очередь; O_{ij} — множество операций, входящих в путь i.

Шаг 2. Вычисляем значение выражения

$$\min\left\{\frac{V_{il}}{q_{il}}, T - \tau\right\} = d;$$

$$V_{il} > 0,$$

где q_{il} — производительность обработки заявок на пути, соединяющем операцию O_{ij} с конечной операцией O_{iN_i}.

Если $d = T - \tau$, то распределение ресурсов на интервале $[0, T]$ закончено, выход из алгоритма, иначе пересчитаем длины очередей на операциях с ненулевыми очередями по формуле

$$V_{ij} = V_{ij} - dq_{ij}, \qquad \tau = T + d.$$

Если существует $V_{ij} > 0$, то переход к шагу 1, иначе — выход из алгоритма.

Приведенная процедура разбивает интервал планирования обработки заявок на отрезки $(0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, ..., $[t_{n-1}, T)$, каждый из которых характеризуется одним и тем же множеством операций, на которых существуют неотрицательные очереди необработанных заявок. Правая граница каждого отрезка соответствует моменту завершения обработки очереди на одной из операций.

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 5.1. Приведенный выше алгоритм распределения ресурсов максимизирует общий объем обработанных заявок на временном интервале $(0, t)$ для любого $t \in (0, T)$.

Доказательство. Предположим, что существуют производительности $\tilde{q}_{iN_i}(t)$ $(i = 1, ..., K)$ на конечных операциях обработки и существует $t^* \in (0, T]$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{K} \int_0^{t^*} \tilde{q}_{iN_i}(t)dt > \sum_{i=1}^{K} \int_0^{t^*} q_{iN_i}(t)dt.$$

Очевидно, что $t^* \bar{\in} (0, t_1)$, так как на интервале $(0, t_1)$ алгоритм задает максимально возможную производительность обработки при заданном распределении заявок по операциям.

Предположим, что $t^* \in (t_1, t_{l+1})$.

Производительности $q_{iN_i}(t)$, построенные в алгоритме, очевидно, удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{i=1}^{K} \int_0^{t_1} q_{iN_i}(t)dt \le \sum_{i=1}^{K} \int_0^{t_1} \tilde{q}_{iN_i}(t)dt;$$

$$\sum_{i=1}^{K} \int_0^{t_2} q_{iN_i}(t)dt \le \sum_{i=1}^{K} \int_0^{t_2} \tilde{q}_{iN_i}(t)dt;$$

.....

..... (5.12)

.....

$$\sum_{i=1}^{K}\int_{0}^{t_l} q_{iN_i}(t)dt \le \sum_{i=1}^{K}\int_{0}^{t_l} \tilde{q}_{iN_i}(t)dt.$$

Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{K}\int_{t_l}^{t^*} \tilde{q}_{iN_i}(t)dt > \sum_{i=1}^{K}\int_{t_l}^{t^*} q_{iN_i}(t)dt.$$

Обозначим $\Delta = \sum_{i=1}^{K}\int_{t_l}^{t^*} \tilde{q}_{iN_i}(t)dt - \sum_{i=1}^{K}\int_{t_l}^{t^*} q_{iN_i}(t)dt.$

Тогда существует множество таких отрезков, что для отрезков $(\tau_1, \tau_2), \ldots, (\tau_m, \tau_{m-1})$ выполняется следующее:

а) $(\tau_j, \tau_{j+1}) \subseteq (0, t^*)$ $(j = 1, \ldots, m-1)$; $\sum_{j=1}^{m-1}(t_{j+1} - t_j) = t^* - t_l$;

б) $\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{K}\int_{\tau_j}^{\tau+1} q_{iN_i}(t)dt < \sum_{i=1}^{K}\int_{t_l}^{t^*} q_{iN_i}(t)dt + \Delta.$

Учитывая последнее неравенство, а также систему неравенств (5.12), получим, что

$$\sum_{i=1}^{K}\int_{t_l}^{t^*} \tilde{q}_{iN_i}(t)dt < \sum_{i=1}^{K}\int_{t_l}^{t^*} q_{iN_i}(t)dt,$$

что противоречит первоначальному предположению и, следовательно, доказывает утверждение теоремы 1.

5.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОРУДОВАНИЯ В КОНВЕЙЕРНЫХ СИСТЕМАХ ОБРАБОТКИ ЗАЯВОК ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

Выше были изложены методы распределения непрерывного ресурса типа «мощности» при обработке поступающего потока заявок на различные технологические операции; в данном параграфе рассматриваемыми ресурсами являются приборы и оборудование при заданной специализации по операциям, с помощью которых осуществляется обработка поступающего потока заявок. Постановка задачи планирования обработки заявок в конвейерных системах в этом случае состоит в следующем.

При известной интенсивности входных потоков на заданный директивный период с первого дня по день с номером T необходимо обеспечить обработку m типов заявок в объеме не менее соответствующего координате вектора $b = (b_1, ..., b_m)$, минимизируя к концу периода планирования общий объем необработанных заявок по всем видам. Обработка заявок вида i состоит в последовательном обслуживании заявок этого вида на N_i операциях производственного цикла ($i = 1, ..., m$). Очереди заявок на каждой операции в начале периода обработки задаются величинами $V_{ij}(0)$. Поступление заявок производится ежедневно в объеме u_{ij}^{q}, где u_{ij}^{q} — объем поступления заявок вида i на операцию j в день q ($q = 1, ..., T$) обработки заявок. Все операции обработки выполняются N приборами, специализация которых по операциям обработки задана величинами a_{ij}^{l}, где a_{ij}^{l} — производительность l-го прибора на операции O_{ij}.

В этих условиях задача минимизации объемов очередей заявок к концу директивного периода длительностью T дней при условии выполнения плановых ограничений обработки заявок, заданных вектором $b = (b_1, ..., b_m)$, эквивалентна задаче максимизации общего объема обработанных заявок и может быть сформулирована следующим образом:

$$\max \sum_{rq=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{N} x_{iN_i}^{ql}\alpha_{iN_i}^{l} \qquad (5.13)$$

при ограничениях:

$$V_{ij}(0) + \sum_{q=1}^{P} u_{ij}^{l} - \sum_{q=1}^{P}\sum_{l=1}^{N} x_{ij}^{ql}\alpha_{ij}^{l} \sum_{O_{\beta\gamma}\in R_{ij}} \sum_{l=1}^{P-1}\sum_{l=1}^{N} y_{\beta\gamma}^{ql}x_{\beta\gamma}^{ql}\alpha_{\beta\gamma}^{l} \ge 0. \qquad (5.14)$$

(для любого $O_{ij} \in \theta$; для любого $p = 1, ..., T$);

$$\sum_{q=1}^{T}\sum_{l=1}^{N} x_{iN_i}^{ql}\alpha_{iN_i}^{l} \ge b_i \; (i = 1, \ldots, m); \qquad (5.15)$$

$$\sum_{O_{ij}\in\theta} x_{ij}^{ql} \le 1 \, (q = 1, \ldots, T; l = 1, \ldots, N); \qquad (5.16)$$

($x_{ij}^{ql} \ge 0$; для любых $O_{ij} \in \theta$).

Здесь θ — совокупность всех операций; x_{ij}^{ql} — часть q-го дня, в течение которого прибор l выполняет операцию O_{ij}; R_{ij} — множество операций-предшественников для операции O_{ij}; $y_{\beta\gamma}^{ql}$ — коэффициент ветвления для операций из множества R_{ij} ($i = 1, ..., m$), обработка заявок которых происходит в день q на приборе l. Коэффициент задает долю объема заявок, обработанных на операции множества R_{ij}, которая поступит на операцию O_{ij}.

Сформулированная задача распределения ресурсов является задачей линейного программирования (ЛП). Решение этой задачи может быть осуществлено с использованием соответствующих программных средств.

Легко видеть, что если в качестве критерия оптимального распределения ресурсов принять максимум прибыли от обработанного объема заявок, то показателем эффективности будет значение следующей линейной относительно x_{ij}^{ql} функции:

$$\sum_{rq=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{N} c_i x_{iN_i}^{ql}\alpha_{iN_i}^{l},$$

где c_i — прибыль, получаемая при обработке единицы объема заявок вида i ($i = 1, \ldots, m$).

В реальных производственных системах размерность приведенной задачи ЛП может превышать возможности современной вычислительной техники. Поэтому возникает необходимость в понижении размерности приведенной ЛП задачи. Один из подходов понижения размерности заключается в следующем. Осуществляется распределение ресурсов по заданному критерию на один день, затем полученное распределение переносится на все последующие дни.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 5.1. Пусть есть оптимальное распределение ресурсов на один день и $q_{ij}^{1} = \sum_{l=1}^{N} x_{iN_i}^{ql}\alpha_{iN_i}^{l}$ — объем обработанных заявок на каждой операции O_{ij} за первый день. Если известно, что интенсивность поступления заявок в последующие $P - 1$ день таковы, что выполняется система неравенств:

$$\sum_{l=1}^{N} x_{iN_i}^{ql}\alpha_{iN_i}^{l} \le V_{ij}(0) + \sum_{q=1}^{P} u_{ij}^{q} - P\sum_{l=1}^{N} x_{ij}^{1l}\alpha_{ij}^{l};$$

$$\text{P} = 2, \ldots, T;\ \text{i} = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N_i,$$

то решение задачи распределения ресурсов на один день может быть перенесено на все последующие дни, если объемы обработки заявок по каждому виду w_i ($i = 1, \ldots, m$) для решения на период в один день таковы, что выполняется следующее неравенство:

$$Tw_i \ge b_i,\ i = 1, \ldots, m. \tag{5.17}$$

Доказательство утверждения 5.1 следует из того факта, что предлагаемое решение задачи (5.13)–(5.16) является оптимальным для ситуации, когда вектор $b = (0, \ldots, 0)$.

Учитывая неравенство (5.17), получим, что условия (5.15) также выполнены для заданного вектора $b = (b_1, \ldots, b_m)$, что и доказывает сформулированное утверждение.

Проектировщика системы обработки заявок нередко интересует, в каком диапазоне могут меняться интенсивности поступления заявок производительности приборов, специализация приборов по операциям так, чтобы при изменении перечисленных параметров значение функционала задачи (5.13)–(5.16) не менялось.

Подобный анализ задачи и полученного решения носит название исследования задачи на устойчивость.

Введем следующие определения.

Определение 5.1. Назовем задачу (5.13)–(5.16) устойчивой по специализации приборов, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении всех нулевых элементов матрицы (α_{ij}^{l}) на величину не более чем $\varepsilon > 0$ значение функционала (5.13) в решении задачи (5.13)–(5.16) остается неизменным.

Определение 5.2. Задача (5.13)–(5.16) устойчива по интенсивности поступающего потока заявок, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении потока заявок u_{ij}^{q} на величину не более чем ε значение функционала (5.13) задачи (5.13)–(5.16) остается неизменным.

Определение 5.3. Задача (5.13)–(5.16) устойчива по производительности приборов, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении всех ненулевых элементов матрицы (α_{ij}^{l}) на величину не более чем ε, значение функционала (5.13) при решении задачи (5.13)–(5.16) сохраняется.

Определение 5.4. Задача (5.13)–(5.16) устойчива по числу приборов, участвующих в обработке поступающего потока заявок, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении числа приборов на один с производительностями прибора по всем видам операций не более ε значение функционала (5.13) в решении задачи (5.13)–(5.16) не меняется.

Определение 5.5. Задача (5.13)–(5.16) устойчива по плановым ограничениям, заданным вектором $b = (b_1, \ldots, b_m)$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении координат вектора b на величину не более чем ε значение функционала (5.13) не изменяется.

Докажем следующие утверждения.

Утверждение 5.2. Задача (5.13)–(5.16) устойчива по специализации приборов и по интенсивности потоков заявок, если выполняются следующие соотношения:

а) $\alpha_{iN_i}^{l} > 0, j = 1, \ldots, m; l = 1, \ldots, N;$

б) $\dfrac{V_{iN_i}(0)}{\sum\limits_{l=1}^{N} \alpha_{iN_j}^{l}} > T^{*}\ (i = 1, \ldots, m),$

где T^* — число дней в директивном периоде планирования;

в) $V_{iN_i}(0) \geq b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Доказательство. Устойчивость по интенсивности потока заявок следует из того, что объемы заявок на последних операциях обработки настолько велики, что в оптимальном решении все приборы используются на всем временном периоде только на конечных операциях обработки заявок.

Устойчивость по специализации приборов вытекает из того, что по условию а) увеличение производительности приборов произойдет только на операциях, отличных от операций O_{ij} $(i = 1, \ldots, m)$. Из условий б) и в) следует, что загрузка приборов в оптимальном решении будет только на операциях O_{iN_i}.

Утверждение 5.3. Задача (5.13)–(5.16) устойчива по производительности приборов и по их числу, если для каждой операции обработки выполняются следующие условия:

$V_{ij}(T) = 0$, $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, N_i)$,

где T — день окончания планового периода.

Доказательство. Доказательство утверждения 5.3 следует из того факта, что весь объем поступивших заявок на обработку в систему полностью обработан, поэтому наращивание производительности участвующих в обработке приборов не может увеличить значения функционала (5.13) задачи (5.13)–(5.16).

Утверждение 5.4. Задача (5.13)–(5.16) устойчива по плановым ограничениям тогда и только тогда, когда выполняется следующая система неравенств:

$$\sum_{q=1}^{T}\sum_{l=1}^{N} x_{iN_i}^{ql} \alpha_{iN_i}^{l} > b_i \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{5.18}$$

Доказательство. Достаточность условия (5.18) вытекает из того, что при увеличении координат вектора b значение функционала (5.13) в оптимальном решении может только уменьшиться, поэтому, взяв в качестве ε величину, равную

$$\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,m} \left\{ \sum_{q=1}^{T}\sum_{l=1}^{N} x_{iN_i}^{ql} \alpha_{iN_i}^{l} - b_i \right\},$$

получим по определению устойчивость задачи (5.13)–(5.16) при изменении плановых ограничений.

Необходимость условия (5.18) для устойчивости задачи (5.13)–(5.16) непосредственно вытекает из определения устойчивости по плановым ограничениям.

При анализе решений задачи (5.13)–(5.16) нередко необходимо не только выяснить, устойчива ли задача (5.13)–(5.16) по исходным параметрам, перечисленным в определениях 5.1–5.5, но и в случае, если задача устойчива, вычислить максимальное увеличение (уменьшение) входного параметра, при котором значение функционала (5.13) сохраняется.

Сформулируем задачу вычисления максимального увеличения интенсивности поступающих заявок, при котором значение функционала (5.13) для оптимального решения не меняется.

$\max\varepsilon$;

$$\sum_{rq=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{N} x'^{ql}_{iN_i}\alpha^{l}_{iN_i} \le \sum_{rq=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{N} x^{ql}_{iN_i}\alpha^{l}_{iN_i};$$

$$V_{ij}(0) + \sum_{q=1}^{P-1}(u^{q}_{ij} + \varepsilon) - \sum_{q=1}^{P}\sum_{i=1}^{N} x'^{ql}_{ij}\alpha^{l}_{ij} + \sum_{O_{\beta\gamma}\in Rij}\sum_{q=1}^{P-1}\sum_{l=1}^{N} x'^{ql}_{\beta\gamma}\alpha^{l}_{\beta j} \ge 0,$$

$p = 1, \ldots, T$; для любого $O_{ij} \in \theta$; $\sum_{O_{ij}\in\theta} x'^{ql}_{ij} \le 1$, $q = 1, \ldots, T$, $l = 1, \ldots, N$;

$$\sum_{q=1}^{T}\sum_{l=1}^{N} x'^{ql}_{iN_i}\alpha^{l}_{iN_i} \ge b_i,\ i = 1, \ldots, m;\ x'^{lq}_{ij} \ge 0,\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N_i;$$

$q = 1, .., T$; $l = 1, \ldots, N$,

где x'^{ql}_{ij} — доля времени работы прибора l на операции O_{ij} в день q в решении (5.13)–(5.16) при интенсивностях поступления заявок $u^{q}_{ij} + \varepsilon$; x^{ql}_{ij} — доля времени работы прибора l на операции O_{ij} в день q при прежних интенсивностях поступления заявок

u^{q}_{ij} ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, N_i$; $q = 1, \ldots, T$).

Задача вычисления максимального приращения производительности приборов, при котором сохраняется значение функционала задачи оптимального распределения ресурсов (5.13)–(5.16), формулируется так:

$\max\varepsilon$;

$$\sum_{rq=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{N} x'^{ql}_{iN_i}(\alpha^{l}_{iN_i} + \varepsilon) \le \sum_{rq=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{N} x^{ql}_{iN_i}\alpha^{l}_{iN_i};$$

$$V_{ij}(0) + \sum_{q=1}^{P-1} u^{q}_{ij} - \sum_{q=1}^{P}\sum_{i=1}^{N} x'^{ql}_{ij}(\alpha^{l}_{ij} + \varepsilon) + \sum_{O_{\beta\gamma}\in Rij}\sum_{q=1}^{P-1}\sum_{l=1}^{N} x'^{ql}_{\beta\gamma}(\alpha^{l}_{\beta j} + \varepsilon) \ge 0,$$

$p = 1, \ldots, T$; $\sum_{q=1}^{T}\sum_{l=1}^{N} x'^{ql}_{iN_i}\alpha^{l}_{iN_i} \ge b_i$, $i = 1, \ldots, m$; $\sum_{O_{ij}\in\theta} x'^{ql}_{ij} \le 1$, $q = 1, \ldots, T$,

$l = 1, ..., N;$

$x_{ij}'^{ql} \geq 0,$

где решение $x_{ij}'^{ql}$ — решение задачи (5.13)–(5.16) при производительности приборов $\alpha_{ij}^{q} + \varepsilon$ ($i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., N$; $l = 1, ..., N$); $x_{ij}'^{ql}$ — решение задачи (5.13)–(5.16) при производительности приборов α_{ij}^{q}.

Кроме критерия минимизации объема необработанных заявок к концу директивного периода показателем эффективности работы системы может быть необработанный объем заявок, время ожидания которых в системе превышает заданное время τ^*.

На практике это, в частности, может означать, что заявки с большим чем τ^* временем пребывания в системе выбраковываются и дальнейшая их обработка не производится. Это, естественно, приводит к непроизводительному расходу времени обслуживающего персонала, неокупаемым затратам на материалы, сырье и т.д.

Перечисленные факторы обосновывают распределение ресурсов в системе обработки по выбранному критерию.

Как и ранее, технологию обработки заявок зададим ориентированным ациклическим графом $G(M, N)$ с N вершинами и M дугами, где вершины соответствуют различным операциям обработки, а дуги — последовательности обработки заявок на заданном множестве операций.

Интенсивность поступления заявок на операцию i в день j со временем ожидания не менее Q дней задается величиной $u_{ij}'^{Q}$ ($i = 1, ..., N$; $j = 1, ..., T$; $Q = 1, ..., \tau$), где τ — максимальное число дней, которое заявка может находиться в системе обработки.

Очереди заявок на операциях на начало директивного периода задаются величинами V_i^Q (объем очереди на операции i со временем ожидания не менее Q дней).

Выполнение обработки заявок на всех операциях осуществляется N приборами, производительность которых на операциях задается элементами матрицы α_{qp}.

Здесь α_{qp} — дневная производительность на операции q прибора p.

Задача распределения ресурсов по критерию минимизации необработанного объема заявок, время ожидания которых превышает величину τ^*, может быть сведена к задаче обработки максимального объема заявок на конец директивного периода.

Для этого достаточно рассмотреть при распределении приборов по операциям обработки только те заявки, время пребывания которых в системе к концу директивного периода превысит τ^*. Учитывая последнее, в качестве ежедневного входного потока заявок примем следующий:

$$u_i^j = \sum_{l>\tau^*+j-T} u_{ij}^1;\ i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, T.$$

где u_i^j — объем заявок, поступающий на операцию i в день j.

Объемы очередей на начало директивного периода рассчитываются по формуле

$$V_i(0) = \sum_{l>\tau^*-T} V_i^1.$$

В этих обозначениях задача минимизации объемов необработанных заявок со временем ожидания не менее τ^* на конец директивного периода может быть сформулирована как задача максимизации общего объема обработанных заявок за директивный период:

$$\max \sum_{rq=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{N} x_{Ni}^{ql}\alpha_{N,l};$$

$$V_i(0) + \sum_{l=1}^{j} u_j^l - \sum_{q=1}^{j}\sum_{i=1}^{K} x_i^{ql}\alpha_{ij} + \sum_{O_j\in Ri}\sum_{q=1}^{P-1}\sum_{l=1}^{N} x_j^{ql}\alpha_{il} \geq 0,$$

$$i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, T;\ p = 1, \ldots, T;$$

$$\sum_{l=1}^{K} x_i^{ql} \leq 1;\ x_i^{ql} \geq 0;\ i = 1, \ldots, N;\ q = 1, \ldots, T;$$

Сформулированная задача при введенных обозначениях сведена к задаче распределения ресурсов по критерию максимизации объема обработанных заявок за директивный период, рассмотренной ранее при условии, что вектор плановых ограничений $b = (0, \ldots, 0)$.

Аналогично могут быть введены понятия устойчивости задачи по производительности приборов, числу приборов, специализации приборов и сформулированы постановки задач вычисления области устойчивости.

5.3. ВЫБОР ОБОРУДОВАНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ ПРИ ОБРАБОТКЕ ЗАЯВОК В КОНВЕЙЕРНЫХ СИСТЕМАХ

При проектировании систем обработки заявок конвейерного типа часто необходимо оценить стоимость оборудования при условии выполнения плановых показателей по каждому виду выпускаемой продукции. Этот расчет при фиксированных параметрах модели, как будет показано ниже, сводится к решению задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Под фиксированными параметрами модели в данном случае понимается детерминированная интенсивность поступления сырья, материалов и заготовок на начало обработки, заданные плановые показатели по каждому виду продукции, неизменность технологии обработки на планируемом периоде времени и т.д.

В практической деятельности многие из перечисленных параметров не являются заданными, что приводит к необходимости дополнительных исследований предложенной модели.

Ниже приводится анализ решений задачи минимизации стоимости оборудования при изменении реального входного потока заявок, поступающих на вход системы обработки.

Рассмотрим формальную постановку задачи. Пусть технологическая последовательность обработки заявок задана ориентированным графом $G(M, N)$. Вершины орграфа соответствуют операциям обработки, дуги — последовательности обработки заявок. В графе $G(M, N)$ выделено m начальных вершин, соответствующих начальным операциям обработки каждого вида заявок, у которых нет операций-предшественников, и m конечных операций, у которых нет операций-последователей. Объем заявок, который должен быть обработан к концу директивного периода, задается вектором

$$b = (b_1, \ldots, b_m).$$

Обработка заявок заключается в последовательности их прохождения на заданном множестве операций для каждого вида заявок. Очереди на каждой операции в начале директивного периода задаются величинами $V_i(0) = (i = 0, \ldots, N)$.

Поступление заявок на i-ю операцию в день q директивного периода задается величиной u_i^q ($i = 1, \ldots, N$; $q = 1, \ldots, Q$), которая получена с помощью прогноза. Далее будем считать, что весь объем заявок u_i^q поступает на операцию i в начале q-го дня. В начале дня также поступает весь объем заявок от операций-предшественников операции i, обработанных в день $q - 1$.

Все операции, которые необходимо выполнить над поступающими заявками, реализуются K типами приборов при дневной производительности i-го типа приборов на j-й операции, задаваемой матрицей α_{ij} ($i = 1, \ldots, K$; $j = 1, \ldots, N$). В этих обозначениях задача минимизации стоимости приборов при условии выполнения плановых ограничений сводится к решению следующей задачи ЦЛП:

$$\min \sum_{i=1}^{K} C_i X_i; \qquad (5.19)$$

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{i=1}^{K} x_{iN_l}^{q}\alpha_{iN_l} \geq b_l,\;\; l = 1,\ldots,m; \tag{5.20}$$

$$V_j(0) + \sum_{q=1}^{P} u_j^q - \sum_{q=1}^{P}\sum_{i=1}^{K} x_{ij}^q\alpha_{ij} + \sum_{\lambda\in R_{ij}}\sum_{i=1}^{K}\sum_{q=1}^{P-1} x_{i\lambda}^q\alpha_{i\lambda} \geq 0, \tag{5.21}$$

$j = 1, \ldots, N;\; P = 1, \ldots, Q;$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^q \leq x_i,\;\; q = 1,\ldots,O;\; x_i \in I, \tag{5.22}$$

где R_{ij} — множество операций-предшественников для операции j; x_{ij}^q — часть q-го рабочего дня, которую прибор i-го типа использует для обработки на j-й операции; x_i — число приборов i -го вида; C_i — стоимость одного прибора i-го вида; N_l — номер последней операции для заявки l-го вида ($l = 1, \ldots, m$); b_l — плановые ограничения на объем обработанных заявок l-го типа за директивный период; I — множество целых положительных чисел.

Заметим, что решение задачи (5.19)–(5.22) дает не только количество и состав приборов, используемых для выполнения плановых объемов обработанных заявок, но и ежедневное распределение времени этих приборов по операциям.

Как уже отмечалось выше, реальные поступления входного потока заявок могут отличаться от прогнозируемого, что затрудняет использование решения задачи целочисленного линейного программирования (5.19)–(5.22) для практического применения. Однако в некоторых случаях при отклонении поступающих объемов заявок от прогноза количество и состав приборов сохраняются. Множество, в котором могут уменьшаться интенсивности поступления заявок, сохраняя значение функционала, описывается следующей системой линейных неравенств $\Delta u_{ij}^q, x_{ij}^q$:

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{i=1}^{K} x_{iN_i}^{q}\alpha_{iN_i} \geq b_l,\;\; l = 1,\ldots,m;$$

$$V_j(0) + \sum_{q=1}^{P}(u_j^q - \Delta u_{ij}^q) - \sum_{q=1}^{P}\sum_{i=1}^{K} x_{ij}^q\alpha_{ij} + \sum_{\lambda\in Rij}\sum_{i=1}^{K}\sum_{q=1}^{P-1} x_{i\lambda}^q\alpha_{i\lambda} \geq 0,$$

$j = 1, \ldots, N;\; P = 1, \ldots, Q,$

где Δu_{ij}^q — возможные отклонения в объеме поступающий заявок на операцию j в день q.

В практических ситуациях часто необходимо знать, насколько можно уменьшить либо увеличить интенсивность входных потоков, чтобы минимальная стоимость оборудования осталась неизменной. Введем следующие определения.

Определение 5.6. Задача (5.19)–(5.22) устойчива по входному потоку заявок, если существует такое $\varepsilon > 0$, что значение функционала (5.19) остается неизменным при любых интенсивностях входных потоков u_i^q из интервалов $u_i^q \in [u_i^q + \varepsilon, u_i^q - \varepsilon]$ $(i = 1, ..., N; q = 1, ..., Q)$.

Определение 5.7. Максимальное $\varepsilon > 0$, при котором задача (5.19)–(5.22) устойчива по входному потоку, назовем радиусом устойчивости задачи по входным потокам.

Для того чтобы вычислить радиус устойчивости задачи по входным потокам, необходимо решить две следующие задачи ЦЛП:

$\max \varepsilon_1;$

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{i=1}^{K} x_{iN_i}^q \alpha_{iN_i} \ge b_l, \quad l = 1, \ldots, m;$$

$$V_j(0) + \sum_{q=1}^{P}(u_j^q - \varepsilon_1) - \sum_{q=1}^{P}\sum_{i=1}^{K} x_{ij}^q \alpha_{ij} + \sum_{\lambda \in Rij}\sum_{i=1}^{K}\sum_{q=1}^{P-1} x_{i\lambda}^q \alpha_{i\lambda} \ge 0;$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^q \le x_i, \; q = 1, ..., Q; \; i = 1, ..., K; \; x_i \in I, \; \varepsilon_1 \ge 0;$$

$$\sum_{i=1}^{K} c_i x_i \le \sum_{i=1}^{K} c_i x_i'; \quad x_{ij}^q \ge 0.$$

Здесь x_i' — решение задачи (5.19)–(5.22) для интенсивности поступлений заданных u_i^q;

$\max \varepsilon_2;$

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{i=1}^{K} x_{iN_i}^q \alpha_{iN_i} \ge b_l, \quad l = 1, \ldots, m;$$

$$V_j(0) + \sum_{q=1}^{P}(u_j^q + \varepsilon_2) - \sum_{q=1}^{P}\sum_{i=1}^{K} x_{ij}^q \alpha_{ij} + \sum_{\lambda \in Rij}\sum_{i=1}^{K}\sum_{q=1}^{P-1} x_{i\lambda}^q \alpha_{i\lambda} \ge 0;$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^q \le x_i, \; q = 1, ..., Q; \; i = 1, ..., K; \; x_i \in I, \; \varepsilon_2 \ge 0;$$

$$\sum_{i=1}^{K} c_i x_i \le \sum_{i=1}^{K} c_i x_i'; \quad x_{ij}^q \ge 0.$$

Радиус устойчивости $\rho_{\text{ивп}}$ находится из соотношения:

$\rho_{\text{ивп}} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$

Аналогично может быть вычислен радиус устойчивости задачи (5.19)–(5.22) при изменении очередей заявок на операциях в момент начала обработки и изменении плановых ограничений.

Также необходимо отметить, что предложенные в этой главе методы оптимизации функционирования конвейерных систем являются методами целочисленного и непрерывного линейного программирования. Учитывая широкую практику работы с ними и возможность априорно оценить вычислительную сложность полученной в результате построения модели оптимизационной задачи, пользователь имеет возможность выбрать точный или приближенный метод, наиболее приемлемый в конкретной ситуации.

Методы определения областей устойчивости, как показано выше, сводятся также к решению линейных оптимизационных задач, что гарантирует их эффективное применение в случае неполноты и неточности задания исходных данных моделей.

5.4. МНОГОПРОДУКТОВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНВЕЙЕРНОГО ТИПА

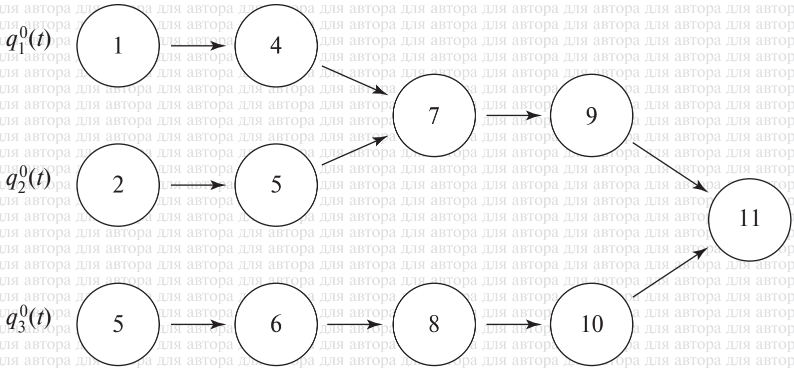
В предыдущих разделах исследовалась ситуация, когда на вход производственной системы, связанный с выпуском одного вида продукции, подавался один вид материальных сырьевых ресурсов, т.е. графически последовательность операций обработки задавалась в виде линейной цепи вида:

Здесь *u(t)* — интенсивность потока материальных ресурсов.

В большинстве случаев число видов материально сырьевых ресурсов (комплектующих, деталей и т.д.) при выпуске одного вида продукции более одного. При этом в процессе обработки происходит сборка (слияние) нескольких видов материально-сырьевых ресурсов в один полуфабрикат, узел или деталь будущего изделия.

В этом случае технологическую последовательность выпуска продукции можно представить, например, в виде дерева следующего вида:

Здесь $q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$, $q_3^0(t)$ — это интенсивности поступления материально-сырьевых ресурсов для выпуска одного вида продукции. Обработка этих видов продукции происходит на операциях 1, 2, ... 11.



При этом на последней (11-й) операции происходит выпуск готовой продукции.

При этом на операциях 7 и 11 происходит слияние материальных потоков. На операции 7 происходит сборка отдельного узла будущего изделия, в состав которого вошли материальные ресурсы первого и второго типа, а на операции 11 происходит сборка всего изделия, в состав которого вошли материально-сырьевые ресурсы первого, второго и третьего видов.

Легко видеть, что на операциях 7 и 11 должно выполняться условие пропорциональности обработки нескольких видов материально-сырьевых ресурсов. Например, при обработке стола, состоящего из четырех ножек и одной столешницы, эта интенсивность должна быть в соотношении 4:1, чтобы выпускать на операции сборки конечную продукцию, а не полуфабрикаты.

Принимая во внимание вышеприведенные замечания, сформируем модель оптимизации прибыли с учетом технологической последовательности обработки материальных ресурсов производства.

Пусть $q_{ij}^0(t)$ $i = 1, 2..., n, j = 1, 2,..., m$ — интенсивность поступления материально-сырьевых ресурсов типа j для выпуска продукции вида i. Тогда с учетом ранее введенных обозначений задача оптимизации использования производственных ресурсов состоит в том, чтобы обеспечить такие производительности $q_{ij}(t)$ как на конечных операциях, связанных с выпуском готовой продукции, так и на промежуточных операциях обработки, чтобы максимизировать валовую прибыль от реализации всех видов продукции, выпущенной в интервале $[0, T]$.

То есть необходимо максимизировать следующий функционал:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \int_0^T q_{iN_i}(t)dt \to \max, \tag{5.23}$$

где δ_i — маржинальный доход, получаемый при выпуске одной единицы продукции вида i ($i = 1, 2..., n$).

При этом должны выполняться следующие ограничения:

- на производственные мощности:

$$\sum_{p=1}^{M}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} q_{ij}^{p}(t)\alpha_{ij}^{l} \le c^{l}, \tag{5.24}$$

$l = 1, 2, ..., m$ для любого $t \in [0, T]$.

Здесь m — число видов материально-сырьевых ресурсов, используемых при выпуске n видов продукции; $q_{ij}^{p}(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$ — интенсивность обработки материально-сырьевого ресурса вида p на операции O_{ij}; c^{l} — количество единиц оборудования вида l;

- балансовые ограничения, связанные с тем, что объем обработки на каждой операции не должен превышать объема материальных ресурсов на эту операцию с учетом межоперационного задела на этой операции на момент времени t.

$$\int_0^t q_{ij}^{p}(t')dt' \le V_{ij}^{p}(0) + \int_0^t q_{\rho\gamma}^{p}(t')dt'. \tag{5.25}$$

для любого $p = 1, 2, ..., M$; для любого $t \in [0, T]$; для любого $O_{\beta\gamma} \in R_{ij}$.

Здесь R_{ij} — множество операций-предшественников для операций O_{ij}.

- отношение пропорциональности производительностей (если число операций-предшественников для операции O_{ij} более одной (т.е. $|R_{ij}| \ge 1$):

$$k_{ij}^{\theta_1} q_{ij}(t) = k_{ij}^{\theta_2} q_{ij}(t) = ... = k_{ij}^{\theta_M} q_{ij}(t). \tag{5.26}$$

Здесь $k_{ij}^{\theta_1}, k_{ij}^{\theta_2}, ..., k_{ij}^{\theta_M}$ — коэффициенты пропорциональности производительностей на операции O_{ij} по материальным ресурсам вида $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{Mij}$, обрабатываемым на операции O_{ij}.

- ограничение на объем производства по каждому виду продукции:

$$\int_0^T q_{iN_i}(t)dt \le b_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.27}$$

Здесь b_i — объем спроса на продукцию вида i, $i = 1, 2, ..., n$.

Рассмотренная оптимизационная модель (5.23)–(5.27) может быть исследована с использованием средств теории оптимального управления, описание которых приводилось в данной работе выше.

В некоторых случаях в динамической производственной модели задаются не интенсивности поступления материально-сырьевых ресурсов $q_{ij}^0(t)$, а интенсивность поступлений оборотного капитала $u(t)$. В этом случае для решения задачи (5.23)–(5.27) необходимо таким образом распределить поток $u(t)$ на составляющие $u_{ij}(t)$

$$\left(\sum_{ir=1}^{n} \sum_{j=1}^{K_i} u_{ij}(t) = u(t) \right),$$

чтобы потоки поступающих материальных ресурсов $q_{ij}^0(t)$, заданные по формуле

$$q_{ij}^0(t) = \frac{u_{ij}(t)}{\beta_{ij}},$$

оптимизировали бы целевую функцию (5.23) при ограничениях (5.24)–(5.27).

Здесь β_{ij} — стоимость одной единицы материального ресурса j, поступающего для выпуска одной единицы продукции вида i.

5.5. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОБОРОТНЫМ КАПИТАЛОМ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Рассмотрим задачу (5.23)–(5.26) в ситуации, когда маржинальный доход по виду i выпускаемой продукции есть случайная величина δ_i с заданным законом распределения, т.е.

$$\delta_i \begin{array}{l} \nearrow \delta_i^1 - \rho_1 \\ \\ \searrow \delta_i^m - \rho_m \end{array}$$

$i = 1, 2, \ldots, m.$

В этом случае можно выполнять математическое ожидание маржинального дохода по формуле

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_i^j \rho_j = \bar{\delta}_i.$$

Тогда, с одной стороны, мы должны максимизировать целевую функцию ожидаемой прибыли

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\delta}_i \int_0^T q_{iN_i}(t)dt \qquad (5.23.1)$$

при ограничениях (5.24)–(5.26).

С другой стороны, необходимо ограничить риск портфеля выпускаемой продукции в объемах $\int_0^T q_{iN_i}(t)dt$.

В качестве количественной оценки риска выпускаемого портфеля примем дисперсию ожидаемой прибыли от реализуемой выпускаемой продукции, взвешенной с долей затрат на материальные ресурсы производства.

Пусть l_{ij} — объем материальных ресурсов вида j ($j = 1, 2, ..., M$), используемых при выпуске одной единицы продукции вида i, а β_i — цена, по которой производится закупка материального ресурса вида j, тогда затраты на единицу продукции вида i составят

$$z_{t_i(1)} = \sum_{j=1}^{M} \beta_j l_{ij}.$$

Если выпуск продукции осуществляется в объеме $\int_0^T q_{iN_i}(t)dt$, то соответственно $z_{t_i(1)}$ необходимо умножить на объем выпуска, чтобы определить затраты на выпуск продукции вида i, соответственно суммарные затраты на ресурсы по всем видам выпускаемой продукции составляют величину

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^T q_{iN_i}(t)dt\right)\left(\sum_{j=1}^{M}\beta_j l_{ij}\right).$$

Тогда доля затрат y_i на покупку материальных ресурсов при выпуске продукции вида i в объеме $\int_0^T q_{iN_i}(t)dt$ составит

$$y_i = \frac{\left(\int_0^T q_{iN_i}(t)dt\right)\left(\sum_{j=1}^{M}\beta_j l_{ij}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^T q_{iN_i}(t)dt\right)\left(\sum_{j=1}^{M}\beta_j l_{ij}\right)}. \tag{5.27.1}$$

Следовательно, величина риска производственной программы может быть выражена следующим образом:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>1} \mathrm{cov}_{ij}\, y_i y_j. \tag{5.28}$$

Здесь σ_i^2 — дисперсия маржинального ожидаемого дохода по виду продукции i; cov_{ij} — ковариации ожидаемой доходности продукции вида i и продукции вида j.

Двухкритериальная задача выборки оптимальной производственной программы состоит в минимизации функционала (5.27.1), максимизации (5.23.1) в условиях ограничений (5.24)–(5.26).

Если лицо, принимающее решение (ЛПР), в качестве главного критерия выберет риск, то тогда речь может идти о минимизации целевой функции (5.28) в условиях ограничений (5.24)–(5.27) и дополнительном ограничении на величину ожидаемой доходности портфеля, заданную выражением (5.23.1).

В условиях же, когда ЛПР в качестве главного критерия выбирает ожидаемую доходность портфеля, то максимизируется функционал (5.23.1) при ограничениях (5.24)–(5.26) и ограничении на величину риска, заданную выражением (5.28).

Рассмотрим ситуации, когда динамика поступления оборотного капитала задана недетерминированно.

Пусть интенсивность поступления оборотного капитала $u(t)$ есть случайный процесс, заданный следующим образом:

$$
\begin{array}{ll}
 & \nearrow u_1(t) \text{ — } p_1 \\
u(t) & \longrightarrow u_2(t) \text{ — } p_2 \\
 & \quad \ldots \\
 & \searrow u_m(t) \text{ — } p_m
\end{array}
$$

$$p_i \geq 0; \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Здесь $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_m(t)$ — возможные интенсивности поступления оборотного капитала; $p_1, p_2, ..., p_m$ — соответствующие вероятности той или иной интенсивности поступления оборотного капитала на вход производственной системы.

Тогда математическое ожидание случайного процесса задается следующим выражением:

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t) p_j.$$

Далее можно решить задачу (5.23)–(5.27) для каждого потока оборотного капитала $u_j(t)$ и получить доходность от производства продукции вида i при финансовом потоке $u_j(t)$:

$$D_j^i = \delta_i \int_0^T q_{iN_i}^j(t) dt.$$

Определим математическое ожидание дохода от продукции вида i:

$$\bar{D}^i = \sum_{j=1}^{m} D_j^i p_j.$$

Определим ожидаемую доходность по всем видам выпускаемой продукции:

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{n} D^i.$$

Цель управления оборотным капиталом состоит в том, чтобы, с одной стороны, ожидаемый доход был бы не менее какого-то известного показателя D_{rp}, т.е.

$$\bar{D} \geq D_{rp}. \tag{5.29}$$

С другой стороны, дисперсия ожидаемого дохода (как показатель риска управления оборотным капиталом) должна быть минимальной.

Учитывая введенные выше обозначения, дисперсия по доходности i-го вида продукции равна

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{m} (\bar{D}^i - D_j^i)^2 p_j.$$

Определим долю затрат по каждому виду выпускаемой продукции y_i по формуле (5.27.1). Тогда риск, как и ранее, может быть оценен суммарной дисперсией доходности по всем видам выпускаемой продукции с учетом затрат на материально-сырьевые ресурсы по следующей формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>1} \mathrm{cov}_{ij}\, y_i y_j. \tag{5.30}$$

Минимизируя выражение (5.30), мы тем самым минимизируем риск производственной программы.

Таким образом, для решения задачи на минимум риска необходимо таким образом задать производительности обработки незавершенного производства $q_{ij}(t)$ ($i = 1, ..., n$; $j = 1, 2, ..., N_i$), чтобы минимизировать риск производственной программы в условиях ограничения снизу на ее доходность, заданную (5.29), и ограничений (5.24)–(5.27).

5.6. ПРИМЕР РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РЕСУРСОВ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Рассмотрим упрощенную схему бизнес-процессов для предприятия, выпускающего три вида продукции: столы, стулья, тумбочки. Выпуск каждого вида изделия требует обработки материальных ресурсов на следующих операциях:

1) изготовление комплектующих из древесины;
2) обработка комплектующих на электрорубанке;
3) сверление крепежных отверстий с использованием электродрели;
4) сборка конечного продукта.

Графически схема бизнес-процессов для трех видов конечной продукции (столы, стулья, тумбочки) может быть изображена следующим образом (рис. 5.1).

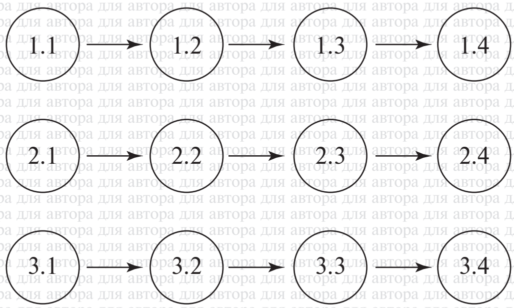


Рис. 5.1. Графическая схема бизнес-процессов для производства трех видов продукции

Будем считать, что в производственном процессе участвуют следующие виды оборудования:

1) электропила — 3 единицы;
2) электрорубанок — 4 единицы;
3) электродрель — 2 единицы.

Кроме того, малое предприятие, которое занимается выпуском мебели, использует труд наемных рабочих в количестве пяти человек. Таким образом, вектор ресурсов $c = (c_1, ..., c_m)$ задан в нашем случае следующим образом:

$c = (3, 4, 2)$.

Объемы незавершенного производства и материальных ресурсов на каждой операции заданы следующим образом:

$V_{11} = 55;$ $V_{12} = 50;$ $V_{13} = 40;$ $V_{14} = 20;$

$V_{21} = 70;$ $V_{22} = 60;$ $V_{23} = 50;$ $V_{24} = 30;$

$V_{31} = 40;$ $V_{32} = 55;$ $V_{33} = 50;$ $V_{34} = 45.$

Маржинальный доход при выпуске одного стола составляет 1,6 тыс. руб., при выпуске одного стула — 1 тыс. руб., при выпуске одной тумбочки — 1,4 тыс. руб. ($\delta_1 = 1{,}6$; $\delta_2 = 1$; $\delta_3 = 1{,}4$). Производительность рабочих на сборочных операциях такова: один рабочий за смену может собрать или 4,4 стола или 6,4 стула или 5,4 тумбочки.

Тогда оптимизационная задача загрузки персонала предприятия на сборочных операциях состоит в следующем:

$1{,}6 \cdot 4{,}4 \cdot x_1 + 1 \cdot 6{,}4 \cdot x_2 + 1{,}4 \cdot 5{,}4 \cdot x_2 \to \max;$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 5;$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

Решим эту оптимизационную задачу симплекс-методом с помощью *Excel*.

При заданных ограничениях значение маржинального дохода будет равно 37,8. При этом все рабочие будут заняты сборкой тумбочки.

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 5.$

Учитывая ограниченность незавершенного производства на операции сборки тумбочки, рассчитаем, в течение какого времени рабочие должны заниматься ее сборкой. Учитывая, что сменная производительность пяти рабочих равна $5{,}4 \cdot 5 = 27$ тумбочек, получим, что на этой сборочной операции они будут задействованы в течение $25/27 \approx 0{,}93$ смены. Далее, для того чтобы осуществлять выпуск тумбочек, необходимо выполнять также операции сверления крепежных отверстий, необходимых для сборки тумбочки. Будем полагать, что для каждой операции рабочий затрачивает определенное количество времени, которое приведено ниже в табл. 5.1.

Например, для сборки одного стола рабочий затрачивает $1/4{,}4 = 0{,}227$ смены. С учетом затрат на сверление отверстий затраты на сборку стола составляют $0{,}227 + 0{,}063 = 0{,}29$ смены. Следовательно, производительность одного рабочего при выпуске столов составит $1/0{,}29 = 3{,}4$ стола за смену.

Данные производительности рабочих на каждом этапе работы приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.1

Номер операции в цепи	Название операции	Время от смены, затрачиваемое на производство одного предмета на соответствующем этапе одним рабочим		
		Стол	Стул	Тумбочка
1	Изготовление комплектующих из древесины	0,800	0,600	0,740
2	Обработка комплектующих на электрорубанке	0,620	0,500	0,570
3	Сверление крепежных отверстий с использованием электродрели	0,063	0,050	0,059
4	Сборка конечного продукта	0,227	0,156	0,185

Таблица 5.2

Номер операции в цепи	Название операции	Производительность рабочих (сколько предметов в день может сделать один рабочий)		
		Стол	Стул	Тумбочка
1	Изготовление комплектующих из древесины	0,585	0,766	0,643
2	Обработка комплектующих на электрорубанке	1,099	1,416	1,228
3	Сверление крепежных отверстий с использованием электродрели	3,451	4,848	4,095
4	Сборка конечного продукта	4,400	6,400	5,400

С учетом вышеприведенных данных оптимальная целевая функция на этом этапе будет выглядеть следующим образом:

$$1{,}6 \cdot 4{,}4 \cdot x_1 + 1 \cdot 6{,}4 \cdot x_2 + 1{,}4 \cdot 4{,}095 \cdot x_2 \to \max \qquad (5.31)$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5; \qquad (5.32)$$

$$0{,}059 \cdot 4{,}095 \cdot x_3 \le 2; \qquad (5.33)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \qquad (5.34)$$

Здесь неравенство (5.33) задает ограничение на производительность электродрели.

Получим оптимальное решение задачи (5.31)–(5.34): $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Таким образом, все рабочие должны заниматься сборкой столов начиная с момента времени $t \ge 0{,}93$. Учитывая, что сменная производительность рабочих при сборке столов составляет 20/4,4 ×

$\times$ 5 = 0,909, через 0,908 + 0,926 = 1,835 смены закончится сборка столов на операции 1.4.

На следующей итерации оптимизационная задача будет выглядеть следующим образом:

$$1{,}6 \cdot 3{,}451 \cdot x_1 + 1 \cdot 6{,}4 \cdot x_2 + 1{,}4 \cdot 4{,}095 \cdot x_2 \to \max; \tag{5.35}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5; \tag{5.36}$$

$$0{,}063 \cdot 3{,}451 \cdot x_1 + 0{,}059 \cdot 4{,}095 \cdot x_3 \leq 2; \tag{5.37}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \tag{5.38}$$

Получим оптимальное решение задачи (5.35)–(5.38): $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$. Таким образом, все рабочие должны заниматься сборкой стульев начиная с момента времени $t \geq 1{,}835$. Учитывая, что сменная производительность рабочих при сборке стульев составляет 30/6,4 $\times$ $\times$ 5 = 0,938, через 1,835 + 0,938 = 2,773 смены закончится сборка столов на операции 2.4.

На следующей итерации оптимизационная задача будет выглядеть следующим образом:

$$1{,}6 \cdot 3{,}451 \cdot x_1 + 1 \cdot 4{,}848 \cdot x_2 + 1{,}4 \cdot 4{,}095 \cdot x_2 \to \max;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5;$$

$$0{,}063 \cdot 3{,}451 \cdot x_1 + 0{,}050 \cdot 4{,}848 \cdot x_2 + 0{,}059 \cdot 4{,}095 \cdot x_3 \leq 2;$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Получаем следующее решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$.

Значение целевой функции на этой итерации равно 32.

Далее повторяем итерационную процедуру до тех пор, пока не будет использован весь объем незавершенного производства.

На каждой итерации получаем следующие решения.

5-я итерация: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Значение целевой функции 27,6. Эта операция будет продолжаться до момента времени $t = 7{,}53$.

6-я итерация: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$. Значение целевой функции 24,2. Эта операция будет продолжаться до момента времени $t = 9{,}59$.

7-я итерация: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Значение целевой функции 8,79. Эта операция будет продолжаться до момента времени $t = 18{,}65$.

8-я итерация: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$. Значение целевой функции 8,6. Эта операция будет продолжаться до момента времени $t = 27{,}65$.

9-я итерация: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$. Значение целевой функции 7,08. Эта операция будет продолжаться до момента времени $t = 36{,}12$.

10-я итерация: на этой итерации оптимизационная задача состоит в следующем:

$$1{,}6 \cdot 0{,}585 \cdot x_1 + 1 \cdot 0{,}766 \cdot x_2 + 1{,}4 \cdot 0{,}643 \cdot x_2 \to \max;$$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5;$

$0{,}063 \cdot 0{,}585 \cdot x_1 + 0{,}050 \cdot 0{,}766 \cdot x_2 + 0{,}059 \cdot 0{,}643 \cdot x_3 \leq 2;$

$0{,}62 \cdot 0{,}858 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot 0{,}766 \cdot x_2 + 0{,}57 \cdot 0{,}643 \cdot x_3 \leq 4;$

$0{,}8 \cdot 0{,}585 \cdot x_1 + 0{,}6 \cdot 0{,}766 \cdot x_2 + 0{,}74 \cdot 0{,}643 \cdot x_3 \leq 3;$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

Оптимальное решение: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Значение целевой функции 4,68. Эта операция будет продолжаться до момента времени $t = 54{,}93$.

11-я итерация: так как на предыдущей операции был израсходован весь объем деталей (незавершенное производство) для столов, на этом этапе оптимизационная задача формулируется следующим образом:

$1 \cdot 0{,}766 \cdot x_2 + 1{,}4 \cdot 0{,}643 \cdot x_2 \to \max;$

$x_2 + x_3 \leq 5;$

$0{,}050 \cdot 0{,}766 \cdot x_2 + 0{,}059 \cdot 0{,}643 \cdot x_3 \leq 2;$

$0{,}5 \cdot 0{,}766 \cdot x_2 + 0{,}57 \cdot 0{,}643 \cdot x_3 \leq 4;$

$0{,}6 \cdot 0{,}766 \cdot x_2 + 0{,}74 \cdot 0{,}643 \cdot x_3 \leq 3;$

$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

Решение этой задачи следующее: $x_2 = 0$, $x_3 = 5$. Значение целевой функции 4,5. Эта операция будет продолжаться до момента времени $t = 67{,}36$.

12-я итерация: так как на предыдущих итерациях был израсходован весь объем незавершенного производства для столов и тумбочек, то на этом этапе будут изготавливаться только стулья: $x_2 = 5$. Значение целевой функции 3,83. Эта операция будет продолжаться до момента времени $t = 85{,}65$.

Величина маржинальной прибыли на временно́м интервале $[0,\ T] = [0;\ 85{,}65]$ равна площади заштрихованного многоугольника, изображенного на рис. 5.2.

Нами рассчитано оптимальное распределение производственных ресурсов для первых 85,65 производственных смен.

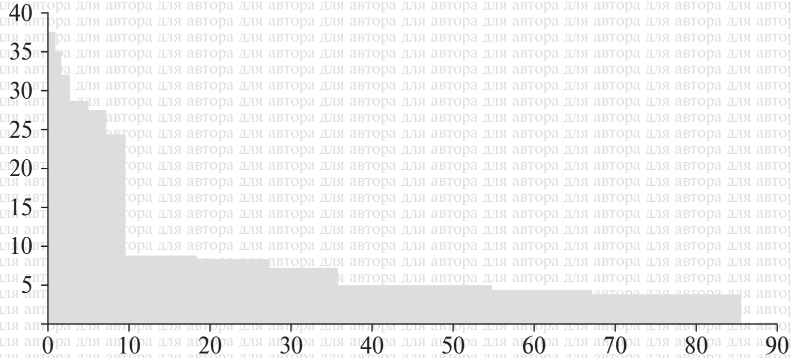


Рис. 5.2. График интенсивности получения маржинальной прибыли $F(t)$

5.7. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНВЕЙЕРНОЙ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ДОКУМЕНТОВ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЦЕНТРЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ

Примером практического использования (5.13)–(5.16) является применение описанной методики построения модели и проведения последующих расчетов при планировании обработки поступающего потока документов в вычислительный центр коллективного пользования (ВЦКП) при решении комплекса задач предбазовой обработки и формирования базы данных (БД).

Орграф $G(M, N)$ — граф технологической схемы обработки информации данного комплекса, соответствующий типовому процессу актуализации БД, изображен на рис. 5.3.

Значение индексов исходных данных следующие:

- рассматриваются восемь укрупненных машинных и внемашинных технологических операций, т.е. $j = 1, 2, ..., 8$;
- период планирования равняется пяти дням, т.е. $q = 1, ..., 5$;
- количество используемых ресурсов равно шести, т.е. $l = 1, ..., 6$;
- $i = 1$.

В качестве ресурсов рассматриваются:

- приемщик информации операционного участка (ОУ) приема, контроля и выпуска информации — 1 человек ($l = 1$);
- группа операторов перфорационно-клавишных вычислительных машин ОУ предварительной обработки и таксировки данных — 3 человека ($l = 2$);

Технологические операции

Прием, регистрация, оформление маршрутных документов	ТО1 (O_{11})
Предварительная обработка/таксировка данных	ТО2 (O_{12})
Перфорация на СПД/подготовка машинных носителей	ТО3 (O_{13})
Ввод и форматный контроль	ТО4 (O_{14})
Обработка форматных ошибок	ТО5 (O_{15})
Логический контроль	ТО6 (O_{16})
Обработка логических ошибок	ТО7 (O_{17})
Загрузка в БД	ТО8 (O_{18})

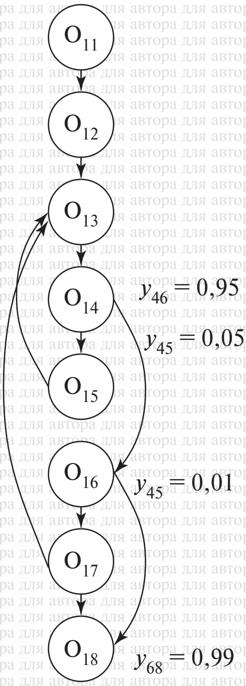


Рис. 5.3. Граф технологической схемы обработки информации

- группа операторов из состава бригады подготовки машинных носителей информации ОУ систем подготовки данных (СПД) на МЛ — 2 человека ($l = 3$);
- один из трех разделов ЭВМ ВК-2Р-60 ОУ обработки данных на данных ЭВМ ($l = 4$);
- группа обработки ведомостей контроля данных (дефектных ведомостей) ОУ внемашинной обработки информации — 2 человека ($l = 5$);
- группа экономического анализа ОУ внемашинной обработки — 2 человека ($l = 6$);

Связь между технологическими операциями отражена на рис. 5.4.

Приняты следующие ограничения на время занятости ресурсов выполнением ТО в рамках рассматриваемого комплекса задач.

Приемщик информации может быть занят работой по данному комплексу не более 4 часов в день, т.е. не более половины дня при 8-часовом рабочем дне, т.е. $\bar{M}_1^q = 0{,}5$.

Ресурсы с индексами $l = 2, 3, 5, 6$ могут использоваться в течение всего рабочего дня, т.е. $\bar{M}_l^q = 1$ для $l = 2, 3, 5, 6$. При этом ресурсы с индексами $l = 2, 5, 6$ характеризуются 8-часовым рабочим днем, бригада операторов СПД ($l = 3$) характеризуется полуторасменной работой (12 часов в сутки).

Для ресурса с индексом 1–4 $\bar{M}_4^q = 0{,}5$ при 20-часовой загрузке ЭВМ.

В качестве единицы измерения объемов данных принята тысяча документо-строк (записей) средней длины в 100 байт.

При определении производительностей ресурсов использовались: для ресурсов типа $l = 1, 2, 3, 5$ — «Временные нормативы трудоемкости выполнения операций по сопровождению задач», разработанные в ВЦКП; для ресурса $l = 4$ — статистические данные о скорости обработки данных применяемых пакетов прикладных программ (ППП). Так, на операциях $О_{14}$, $О_{16}$ использован ППП ВКИ/3, на операции $О_{18}$ — СУБД СПЕКТР.

Значения производительностей используемых ресурсов $l = 1, ..., 6$ с учетом длительности их функционирования в течение дня приведены на рис. 5.4. Ресурсы с индексами $l = 1, 2, 3, 5$ являются групповыми, т.е. $\alpha^l_{ij(r)} = \alpha^l_{ij(\text{ед})}n$, где $\alpha^l_{ij(\text{ед})}$ — производительность единичного ресурса (одного человека), n — число единичных ресурсов в составе группового.

Общая матрица специализации и производительностей всех ресурсов ВЦКП формируется заранее в виде таблицы.

План обработки в рассматриваемом примере составляют документы в объеме 2,5 тыс. док.-строк, т.е. $b_1 = 2{,}5$. Перед началом расчетов существуют очереди на операциях: $О_{11}$ в объеме $V_{11} = 1$; $О_{17}$ в объеме $V_{17} = 0{,}1$. Объемы поступления документов в обработку следующие:

$u^2_{11} = 1$; $u^1_{14} = 0{,}5$; $u^4_{18} = 0{,}5$; $u^5_{18} = 2$.

Остальные b_i, V_{ij}, u^q_{ij} равны нулю.

В качестве источников информации о значениях этих величин рекомендуется использовать следующие технологические документы: паспорт на задачу, график поступления данных в обработку, ведомость незавершенного производства. В результате анализа статистики ошибок, возникающих в процессе, определяются значения коэффициентов ветвления:

$Y_{45} = 0{,}05$; $Y_{46} = 0{,}95$; $Y_{67} = 0{,}01$; $Y_{68} = 0{,}99$ (см. рис. 5.3).

Физический смысл данных коэффициентов следующий. В результате ввода и контроля данных на операции $О_{14}$ на операцию $О_{16}$ поступает 0,95% записей, не содержащих ошибок, в то время как 0,05% данных содержат ошибки форматного контроля и поступают на опе-

Рис. 5.4. Схема связи между технологическими операциями, операционными участками и ресурсами

рацию обработки ошибок O_{15}. Аналогичный смысл имеют коэффициенты Y_{67}, Y_{68}. Для остальных операций коэффициенты ветвления равны единице.

С целью сбора и анализа статистики ошибок в процессе обработки данных на ВЦКП целесообразно использовать информацию маршрутных листов на задачу.

Других ограничений на параметры модели не накладывается.

Следует отметить, что значения производительностей ресурсов на операциях машинной обработки данных выбраны с учетом проведения сервисных работ: копирование введенных данных в 2 экземплярах, а также с учетом сбоев технических средств (коэффициента готовности оборудования). Объемы обработки взяты условно.

Таблица 5.3

Результаты расчетов контрольного примера после интерпретации
Единицы измерения — часть дня/часы

Ресурсы	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$			$l = 5$	$l = 6$
ТО / Дни	Прием	Таксировка	Подготовка	Ввод	Логический контроль	Загрузка в БД	Обработка ошибок	Экономический анализ
1	0,18/1,44	–	–	–	–	–	–	1,00/ 8,00
2	–	1,00/ 8,00	0,09/1,08	0,025/0,50	–	–	–	–
3	0,12/0,76	0,43/ 3,44	0,64/7,68	0,005/0,10	0,012/0,24	–	0,25/2,00	–
4	0,05/0,40	1,00/ 8,00	0,29/3,48	0,035/0,70	0,002/0,04	0,023/ 0,46	0,05/0,40	0,24/ 1,92
5	–	0,42/ 3,36	0,66/7,92	0,02/0,40	0,02/0,40	0,04/ 0,80	0,35/2,80	0,05/ 0,40

Применительно к рассматриваемой задаче контрольный пример и с учетом значений индексов исходных данных, приведенных в предыдущем разделе, управления модели будут иметь вид:

$$\max \sum_{q=1}^{5}\sum_{l=1}^{6} x_{18}^{ql}\alpha_{18}^{l};$$

$$\sum_{q=1}^{p}\sum_{l=1}^{6} x_{1j}^{ql}\alpha_{1j}^{l} - \sum_{O_{1j}\in R_{1j}} \sum_{q=1}^{5}\sum_{l=1}^{6} Y_{1j} x_{18}^{ql}\alpha_{18}^{l} \le V_{1j} + \sum_{q=1}^{p-1} u_{1j}^{q};$$

$$j = 1, ..., 8;\ p = 1, ..., 5;$$

$$\sum_{q=1}^{5}\sum_{l=1}^{6} x_{18}^{ql}\alpha_{18}^{l} \ge 2{,}5;\quad \sum_{q=1}^{5} x_{1j}^{ql} \le 1;$$

$$l = 2, 3, 5, 6;$$

$$\sum_{q=1}^{5} x_{1j}^{ql} \le 0{,}5;$$

$$l = 1, ..., 4;$$

$$q = 1, ..., 5.$$

Результаты расчетов по рассматриваемой задаче на контрольном примере в составе значения целевой функции, неизвестных x_{ij}^{ql}, предоставляющие оптимальный план распределения ресурсов, могут быть получены с использованием пакета *Excel*.

Интерпретация результатов расчетов заключается в получении их в более удобных единицах измерения и привязке к конкретным типам (наименованиям) ресурсов. Так, умножив значения x_{ij}^{ql} на продолжительность (в часах) функционирования соответствующего ресурса в течение дня (суток), получим занятость ресурсов в часах.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют динамические модели производственного планирования?
2. Что характерно для конвейерных систем обработки заявок?
3. Что такое многопродуктовая модель конвейерного типа?
4. Как реализуется динамическая модель управления оборотным капиталом?
5. Что является критерием оптимальности в динамической модели управления производственным предприятием?
6. Какие ограничения присутствуют в динамической модели управления производственными ресурсами?
7. Какие существуют модели минимизации стоимости оборудования?

Глава 6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКЕ

6.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ В УСЛОВИЯХ ВНУТРИГОРОДСКИХ ПАССАЖИРСКИХ ПЕРЕВОЗОК

Рассматриваемые в этой главе динамические транспортные модели во многом имеют сходство с предложенными в предыдущей главе конвейерными моделями распределения ограниченных ресурсов.

Это сходство заключается прежде всего в том, что как в первом, так и во втором случае поток заявок, поступающий на обслуживание, является динамическим, а маршрут обслуживания заявок каждого вида может быть задан ориентированным графом. Основным отличием транспортных моделей является зависимость интенсивности обслуживания поступающего потока пассажиров на каждый остановочный пункт от заполненности транспортного средства, т.е. от интенсивности поступления пассажиров на предыдущих остановочных пунктах и от корреспонденции пассажиров на транспортной сети. Это приводит, в частности, к тому, что рассмотренные в этой главе модели являются нелинейными.

В отличие от известных моделей городского пассажирского транспорта, которые носят статический характер, предлагаемые задачи учитывают динамику поступления пассажиров на остановочные пункты городской транспортной сети.

Ниже будет рассмотрена задача оптимального распределения транспортных ресурсов при выделении средств перевозки пассажиров по маршрутам городского транспорта и задача перераспределения транспортных средств в экстремальных ситуациях, связанных с запланированным или незапланированным прекращением движения на участке метрополитена. При решении этих задач такие исходные параметры, как интенсивность корреспонденций пассажиров, объем существующих транспортных ресурсов, длительность перекрытия транспортной магистрали и некоторые другие, заданы неточно, и в лучшем случае существуют интервальные оценки перечисленных параметров. Это обстоятельство приводит к необходимости исследовать устойчивость решений при варьировании перечисленными исходными данными.

Рассмотрим задачу распределения n автобусов по m городским маршрутам ($n > m$). Обозначим интенсивность поступления пассажиров на остановку α, следующих до остановки β на маршруте ℓ через $U^{\ell}_{\alpha\beta}(t)$.

($\ell = 1, ..., m$; $\alpha = 1, ..., m_{\ell}$; $\beta = 1, ..., m_{\ell}$; $\alpha \neq \beta$),

где m_{ℓ} — число остановок на маршруте.

Через $q^{\ell}_{\alpha}(t)$ обозначим интенсивность обслуживания пассажиров на остановке α маршрута ℓ в момент времени t.

Здесь и далее под интенсивностью транспортного обслуживания будем понимать интенсивность поступления пассажиров в транспортное средство в заданный момент времени t.

Определим $q^{\ell}_{\alpha}(t)$ следующим образом:

$$q^{\ell}_{\alpha}(t) = \begin{cases} 0, \text{если } t \notin [t^{j1}_{\alpha\ell}, t^{j2}_{\alpha\ell}],\ j = 1, ..., M; \\ \dfrac{1}{t^{j2}_{\alpha\ell} - t^{j1}_{\alpha\ell}} \min\{V^{\ell}_{\alpha}(t^{j2}_{\alpha\ell}), B^{\ell}_{\alpha}({}^{j2}_{\alpha\ell})\}, \text{если } t \in [t^{j1}_{\alpha\ell}, t^{j2}_{\alpha\ell}]. \end{cases}$$

Здесь $t^{j1}_{\alpha\ell}$ — момент прибытия автобуса j на остановку α маршрута ℓ; $t^{j2}_{\alpha\ell}$ — момент отправления автобуса j от остановки α маршрута ℓ; M — число автобусов, проходящих через остановку α маршрута ℓ.

Для введенных обозначений очереди на автобусных остановках вычисляются исходя из уравнения

$$\frac{dV^{\ell}_{\alpha}(t)}{dt} = U^{\ell}_{\alpha}(t) - q^{\ell}_{\alpha}(t); \alpha = 1, ..., K_{\ell}; \ell = 1, ..., m,$$

где $U^{\ell}_{\alpha}(t)$ — интенсивность поступления пассажиров на остановку α маршрута ℓ, вычисляемая из соотношения

$$U^{\ell}_{\alpha}(t) = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{m_{\ell}} U^{\ell}_{\alpha\beta}(t);$$

$V^{\ell}_{\alpha}(t)$ — очередь пассажиров на остановке α маршрута ℓ в момент t; $B^{\ell}_{\alpha}(t^{j2}_{\alpha\ell})$ — количество свободных мест в автобусе j маршрута ℓ, прибывшего на остановку α, после выхода пассажиров на этой остановке.

$$B^{\ell}_{\alpha}(t^{j2}_{\alpha\ell}) = W_{\text{авт}} - \sum_{K=1}^{\alpha-1} \frac{V^{*\ell}_{K}(t^{j1}_{K\ell})}{V^{\ell}_{K}(t^{j2}_{K\ell})} \int_{t^{j1}_{K\ell}}^{t^{j2}_{K\ell}} q^{\ell}_{K}(t)dt.$$

Здесь $V^{*\ell}_{K}(t^{j1}_{K\ell})$ — объем очереди пассажиров на остановке K маршрута ℓ, маршрут которых заканчивается за остановкой α, в момент прибытия автобуса j на эту остановку; $V^{*\ell}_{K}(t^{j1}_{K\ell})$ — объем пассажиров на остановке K маршрута ℓ в момент прибытия автобуса j на эту остановку; $W_{авт}$ — вместимость автобуса; $t_{K\ell}^{j1}$, $t_{K\ell}^{j2}$ — соответственно моменты прибытия и отправления автобуса j с остановки K маршрута ℓ.

Будем обозначать время, которое пассажир, поступивший на остановку α маршрута ℓ в момент t, тратит на ожидание транспортного средства, через $T_\alpha^\ell(t)$.

Вычисляется $T_\alpha^\ell(t)$ исходя из следующего соотношения:

$$V_\alpha^\ell(t) = \int\limits_t^{t+T_\alpha^\ell(t)} q_\alpha^\ell(t)dt, \ell = 1, \ldots, m; \alpha = 1, \ldots, m_\ell,$$

где m_ℓ — число остановок на маршруте ℓ.

Задача оптимального распределения транспортных средств при заданных корреспонденциях пассажиров состоит в том, чтобы осуществить такое распределение автобусов по маршрутам, которое минимизирует общие потери времени пассажиров на ожидание транспортных средств. Этот критерий равнозначен критерию минимизации затрат времени пассажиров на транспортное обслуживание, если предположить, что скорость перевозки пассажиров постоянна на всех маршрутах и в течение всего времени перевозки. Естественным ограничением этой задачи является то, что все пассажиры, прибывшие на остановки, должны быть перевезены. Иными словами, необходимо минимизировать функционал

$$\min_{a \in A} \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{K_t} \int\limits_{t_0}^{T} T_\alpha^\ell(a_\ell, t) U_\alpha^\ell(a_\ell, t) dt \qquad (6.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell = m; a_\ell \geq 1; \ell = 1, \ldots, m; \qquad (6.2)$$

$$\int\limits_{t_0}^{T} q_\alpha^\ell(a_l, t)dt = \int\limits_{t_0}^{T} U_\alpha^\ell(t)dt, \ell = 1, \ldots, m; \alpha = 1, \ldots, m_\ell. \qquad (6.3)$$

Здесь $T_\alpha^\ell(a_\ell, t)$ потери времени пассажиров, прибывших на остановку α маршрута ℓ в момент t, при условии, что на маршрут ℓ выделено a_l автобусов; A — число всех возможных вариантов распределения автобусов; $q_\alpha^\ell(a_\ell, t)$ — интенсивность транспортного обслуживания пассажиров на остановке α маршрута ℓ, если на маршрут ℓ выделено a_l автобусов. Интервал времени (t_0, T) — это интервал, в течение которого планируется распределение транспортных средств для перевозки пассажиров.

Рассмотрим алгоритм решения полученной нелинейной задачи дискретной оптимизации, используя схему метода ветвей и границ.

1. Выбирается начальное допустимое распределение автобусов, заданное вектором $a = (a_1, \ldots, a_m)$, задающее распределение автобусов по маршрутам $\left(\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \le n \right)$, и вычисляется значение функционала (6.1) при заданном распределении автобусов по маршрутам. Получена верхняя оценка оптимального решения. Значение функционала (6.1) при начальном распределении транспортных средств далее будем называть «рекордом».

2. Вычисление нижней оценки конструируемого решения для любого момента t' производится по формуле

$$W_{\text{н}}(a) = W_{\text{н}}(a,t) + \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{a=1}^{K_t} \int_{t_0}^{T} F_a^{\ell}(a_\ell, t) U_a^{\ell}(a_\ell, t) dt. \tag{6.4}$$

Первое слагаемое правой части формулы (6.4) задает фактические потери времени пассажиров на ожидание транспортного средства до момента времени t'.

Второе слагаемое задает предполагаемые потери времени пассажиров на ожидание транспортного средства, перевозка которых будет осуществлена в период времени (t', T), при условии неограниченной вместимости транспортных средств. Уточнение нижней оценки производится через интервалы времени, кратные периоду следования автобусов на маршрутах, и сравнивается с «рекордом», пока не будет реализована одна из альтернатив:

а) получено решение, у которого значение функционала (6.1) меньше, чем у «рекорда». В этом случае значение функционала (6.1) для нового решения назначается «рекордом» и осуществляется переход к пункту 2, если не все варианты распределения транспортных средств по маршрутам исследованы, и выход из алгоритма, если исследованы все варианты распределения транспортных средств;

б) нижняя оценка исследуемого решения на момент времени t' оказалась выше значения «рекорда». В этом случае осуществляется выбор нового варианта распределения транспортных средств и переход к пункту 2.

Одной из проблем, возникающих при распределении транспортных средств по маршрутам, является неточность исходных данных, в частности неточная информация о корреспонденциях пассажиров, перевозимых городским пассажирским транспортом. Причина этого состоит в том, что корреспонденции пассажиров вычисляются, как правило, на основе информации о входе-выходе пассажиров на остановочных пунктах. Этих данных недостаточно, чтобы точно вычислить интенсивность корреспонденции пассажиров на заданном временном интервале, и возможна только интервальная оценка корреспонденций пассажиропотоков.

Рассмотрим способ построения интервального задания корреспонденций пассажиров по остановочным пунктам в предположении стационарности поступающих пассажиропотоков на остановочные пункты в интервале между двумя любыми приходами автобусов.

Введем следующие обозначения:

U_α^ℓ — объем пассажиров, прибывших на остановку α маршрута ℓ;

$U_{\alpha\beta}^\ell$ — объем пассажиров, прибывших на остановку α маршрута ℓ, следующих до остановки β.

Очевидно, выполняется соотношение

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{m_\ell} U_{\alpha\beta}^\ell = U_\alpha^\ell.$$

Обозначим через $U_{\alpha\beta}^{\ell 1}$ и $U_{\alpha\beta}^{\ell 2}$ соответственно нижнюю и верхнюю границы величины $U_{\alpha\beta}^\ell$; B_α^ℓ — объем выхода пассажиров из транспортного средства на остановке α маршрута ℓ.

Ниже приводятся формулы вычисления верхних и нижних оценок величины $U_{\alpha\beta}^\ell$ на основе информации о входе-выходе пассажиров:

$(\ell = 1, \ldots, m;\ \beta = 1, \ldots, m_\ell)$

$$U_{12}^{\ell 1} = B_2^\ell;\ U_{12}^{\ell 2} = B_2^\ell$$

$$U_{13}^{\ell 1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum\limits_{\substack{i=2 \\ i\neq 3}}^{m_\ell} B_i^\ell \geq U_1^\ell; \\ U_1^\ell - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{m_\ell} B_i^\ell, & \text{если } \sum\limits_{\substack{i=2 \\ i\neq 3}}^{m_\ell} B_i^\ell < U_1^\ell; \end{cases}$$

$$U_{13}^{\ell 2} = \begin{cases} B_3^\ell, & \text{если } U_1^\ell - B_2^\ell \geq B_3^\ell; \\ U_1^\ell - B_2^\ell, & \text{если } U_1^\ell - B_2^\ell < B_3^\ell; \end{cases}$$

$$U_{1j}^{\ell 1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum\limits_{\substack{i=2 \\ i \neq 3}}^{m_\ell} B_K^\ell \geq U_i^\ell; \\ U_1^\ell - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^{m_\ell} B_i^\ell, & \text{если } \sum\limits_{\substack{i=2 \\ i \neq 3}}^{m_\ell} B_i^\ell < U_i^\ell; \end{cases}$$

$$U_{1j}^{\ell 2} = \begin{cases} B_j^\ell, & \text{если } U_1^\ell - B_2^\ell \geq B_j^\ell; \\ U_1^\ell - B_2^\ell, & U_1^\ell - B_2^\ell < B_j^\ell; \end{cases}$$

$$U_{ij}^{\ell 1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum\limits_{\substack{K=i \\ K \neq j}}^{m_\ell} B_i^\ell \geq U_1^\ell; \\ U_1^\ell - \sum\limits_{\substack{K=i \\ K \neq j}}^{m_\ell} B_K^\ell, & \text{если } \sum\limits_{\substack{K=i \\ K \neq j}}^{m_\ell} B_K^\ell < U_1^\ell; \end{cases}$$

$$U_{ij}^{\ell 2} = \begin{cases} B_j^\ell, & \text{если } U_1^\ell \geq B_j^\ell; \\ U_1^\ell, & \text{если } U_1^\ell < B_j^\ell. \end{cases}$$

Рассмотрим, как может быть использована информация об интервальном задании корреспонденций для решения задачи о распределении транспортных средств по маршрутам. Введем следующие определения.

Определение 6.1. Задача (6.1)–(6.3) устойчива при изменении корреспонденции пассажиропотоков на маршруте ℓ, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при уменьшении $U_{\alpha\beta}^\ell$ не более чем на ε для всех α, β, за исключением $U_{\alpha m_\ell}^\ell$ ($\ell = 1, ..., m$; $\alpha = 1, ..., m_\ell$; $\alpha = 1, ..., m_\ell$; $\beta = 1, ..., m_\ell$; $\alpha \neq \beta$) и сохранении соотношения $\sum\limits_{\beta=1}^{m_\ell} U_{\alpha\beta}^\ell = U_\alpha^\ell$ (т.е. увеличении $U_{\alpha m_\ell}^\ell$ на величину $\varepsilon(m_\ell - \alpha + 1)$) сохраняется вектор $a = a_1^*, ..., a_m^*$, задающий оптимальное распределение автобусов по маршрутам и значение функционала (6.1).

Определение 6.2. Задача (6.1)–(6.3) устойчива по структуре решения при изменении корреспонденции пассажиропотоков на маршруте ℓ, если существует такое ε, что при уменьшении $U_{\alpha\beta}^\ell$ не более чем на ε для всех α, β, за исключением $U_{\alpha m_\ell}^\ell$, сохраняется вектор $a = a_1^*, ..., a_m^*$, задающий оптимальное решение задачи. Очевидно, что для устойчивости решения на маршруте ℓ необходимо и достаточно выполнения следующего соотношения:

$$\varepsilon_{\text{инт}} = \min_{j=1,L} \min_{\alpha=2,\ldots,m_{\ell-1}} \left\{ \frac{B_{\alpha j}^{\ell}}{\alpha - 1} \right\}, \quad \ell = 1, \ldots, m,$$

где $B_{\alpha j}^{\ell}$ — количество свободных мест в транспортном средстве для рейса j на остановке α маршрута ℓ; L — число рейсов; m_{ℓ} — число остановок.

Величину $\varepsilon_{\text{инт}}$ далее будем называть интервалом устойчивости задачи (6.1)–(6.3).

Для того чтобы определить интервал устойчивости по структуре решения при изменении корреспонденции пассажиропотоков, необходимо решить следующую задачу нелинейной оптимизации:

$$\max \varepsilon_{\text{ст}}; \tag{6.5}$$

$$W(a^*, \varepsilon_{\text{ст}}) \le W(a_i, \varepsilon_{\text{ст}}), \quad i = 1, \ldots, M; \tag{6.6}$$

$$\varepsilon_{\text{ст}} \ge 0. \tag{6.7}$$

Здесь M — число всех возможных вариантов распределения транспортных средств по маршрутам; $W(a^*, \varepsilon_{\text{ст}})$ — значение функционала (6.1) для оптимального распределения транспортных средств по маршрутам при уменьшении $U_{\alpha\beta}^{\ell}$ на всех остановках, за исключением последней, на величину $\varepsilon_{\text{ст}}$ при сохранении соотношения

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \ne \alpha}}^{m_{\ell}} U_{\alpha\beta}^{\ell} = U_{\alpha}^{\ell};$$

$W(a_i, \varepsilon_{\text{ст}})$ — значение функционала (6.1) для варианта a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) распределения автобусов по маршрутам.

Очевидно, что если задача (6.1)–(6.3) устойчива, то она устойчива и по структуре решения.

Учитывая монотонное неубывание функционала (6.1) при возрастании $\varepsilon_{\text{ст}}$, легко видеть, что достаточным условием того, чтобы $\varepsilon_{\text{ст}} \ge 0$, является единственность решения a^*, минимизирующего значение функционала (6.1). Отсюда, в частности, следует, что необходимым условием того, чтобы $\varepsilon_{\text{ст}} = 0$, в задаче (6.5)–(6.7) будет неединственность решения задачи (6.1)–(6.3). Легко понять, что решение задачи (6.5)–(6.7) при изменении корреспонденции пассажиропотоков в смысле определения 6.2 не может быть больше $\min\limits_{\alpha=1,\ldots,m_{\ell}} U_{\alpha}^{\ell}$.

Исходя из определения необходимым условием того, чтобы $\varepsilon_{ст} = \min\limits_{\alpha=1,\dots,m_\ell} U_\alpha^\ell$, является совпадение решения задачи (6.1)–(6.3) для корреспонденции $U_{\alpha\beta}^\ell$ с решением для корреспонденции, у которого $U_\alpha^\ell = U_{\alpha m\ell}^\ell$ $\ell = 1, \dots, m$ и $U_{\alpha\beta}^\ell = 0$ для всех $\beta = 1, \dots, m_\ell$; $\beta \neq \alpha$.

Учитывая конечное число всех вариантов распределения автобусов по маршрутам и монотонное возрастание функционала (6.1) при изменении корреспонденции пассажиров, получим следующее утверждение.

При изменении корреспонденции пассажиров от 0 до $\min U_\alpha^\ell$ интервал изменения корреспонденции может быть разбит на конечное число отрезков так, что каждому отрезку, в котором изменяется $\varepsilon_{ст}$, будет соответствовать один и тот же вектор a_i, задающий оптимальное распределение автобусов по маршрутам.

6.2. ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ ПРЕКРАЩЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА УЧАСТКЕ МЕТРОПОЛИТЕНА

В этом параграфе будет рассмотрена задача перераспределения автобусов, обслуживающих прилежащие к сбойному участку метрополитена городские автобусные маршруты, для перевозки пассажиров на участке метрополитена, который временно перекрыт. В специальной литературе [27] ситуация временного перекрытия участка радиуса метрополитена называется сбоем, а сам участок — сбойным.

В существующей технологии организации ликвидации сбоев на метрополитене общегородской диспетчерский центр (ОГДЦ) в зависимости от того, на каком участке произошел сбой, перераспределяет часть автобусов с маршрутов, прилежащих к сбойному радиусу метрополитена, для организации дополнительного маршрута, на котором осуществляется перевозка пассажиров, поступающих на станции сбойного участка метрополитена.

Выделяя автобусы, диспетчер, как правило, не может достаточно полно учесть и использовать информацию о продолжительности сбоя, моменте начала сбоя, интенсивности пассажиропотоков, количестве автобусов на маршрутах, что не позволяет ему ликвидировать сбой, минимизируя дополнительные потери времени пассажиров на передвижение в транспорте и ожидание транспортного обслуживания.

Ниже приводится математическая модель сбойной ситуации на метрополитене и ставится задача выбора наиболее эффективного варианта выделения автобусов для ее ликвидации.

Введем следующие обозначения:

$U_{ij}(t)$ — интенсивность поступления пассажиров на станцию метро i, следующих до станции метро j ($i = p, \ldots, q$);

p, q — начальная и конечная станции на участке метрополитена, где произошел сбой;

$U^{\ell}_{\alpha\beta}(t)$ — интенсивность поступления пассажиров на автобусном маршруте ℓ на остановку α, следующих до остановки β ($\ell = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, \ldots, m_\ell$; $\beta \neq \alpha$),

где m — число маршрутов автобусов, с которых снимают транспортные единицы во время сбоя; m_ℓ — число остановок на маршруте ℓ.

Рассмотрим ситуацию сбоя на линии метрополитена на временном интервале $[t_1, t_2]$.

При бессбойной работе метрополитена интенсивность перевозки пассажиров с i-й станции метро определяется из следующего соотношения:

$$q_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin [t^2_{ji} - t^1_{ji}];\ j = 1, \ldots, L; \\ \dfrac{1}{t^2_{ji} - t^1_{ji}} \min\{V_i(t^2_{ji}), B(t^1_{ji})\}, & \text{если } t \in [t^2_{ji} - t^1_{ji}], \end{cases} \tag{6.8}$$

где L — число поездов, проходящих через участок метрополитена; $V_i(t)$ — очередь пассажиров на станции метро в момент времени t, определяется из уравнения, приведенного в [27]:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = U_i(t) - q_i(t), \quad i = p, \ldots, q, \tag{6.9}$$

решение которого записывается в виде:

$$V_i(t) = V_i(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} (U_i(t') - q_i(t'))dt'. \tag{6.10}$$

Здесь $U_i(t) = \sum\limits_{j=p}^{q} U_{ij}(t)$;

$B_i(t^1_{ji})$ — количество свободных мест в электропоезде, прибывшем на станцию i в момент времени t^1_{ji}, вычисляемое по следующей формуле:

$$B_i(t^1_{ji}) = W - \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{V^*_\ell(t^1_{j\ell})}{V_\ell(t^1_{j\ell})} \int\limits_{t^1_{j\ell}}^{t^2_{j\ell}} q_\ell(t)dt,$$

где $V^*_\ell(t^1_{j\ell})$ — объем пассажиров на станции ℓ в момент прибытия поезда j на эту станцию, маршрут которых заканчивается за станцией ℓ;

$V_\ell(t^1_{j\ell})$ — объем пассажиров на станции ℓ в момент прибытия поезда j на станцию ℓ; W — вместимость электропоезда; L — число поездов, проходящих на сбойном участке за время сбоя $[t_1, t_2]$ (6.8).

Обозначим время ожидания пассажиров, обслуживаемых в момент t на станции i при работе метрополитена в обычном режиме, через $T_i(t)$.

Вычисляется $T_i(t)$ из следующего соотношения:

$$V_i(t) = \int\limits_{t-T_i(t)}^{t} U_i(t')dt'.$$

Если на интервале $[t_1, t_2]$ произошел сбой в работе метрополитена, то частично функции по перевозке пассажиров в метрополитене будут перенесены на маршруты наземного транспорта, проходящего вблизи сбойного участка метрополитена. Учитывая ограниченные возможности городского транспорта по обслуживанию дополнительного потока пассажиров в час пик, будет, очевидно, выполняться следующее соотношение:

$$\int\limits_{t_1}^{t} q_i^{ab}(t')dt' \ll \int\limits_{t_1}^{t} q_i(t')dt' \ \forall t \in [t_1, t_2], \ \ i = p, \ldots, q,$$

где $q_i^{ab}(t)$ — интенсивность перевозок наземным транспортом в сбойной ситуации пассажиропотока, который в штатной ситуации обслуживает метрополитен.

Необходимо отметить, что определение $q_i^{ab}(t)$ представляет собой самостоятельную задачу и зависит от того, насколько загружены наземные транспортные средства, дублирующие маршрут метро на сбойном участке.

Учитывая (6.8), (6.10), а также увеличение интенсивности пассажиропотока на конечных станциях сбойного участка метрополитена, получим:

$$V_i^{ab}(t) \gg V_i(t);$$

$$V_i^{ab}(t) = V_i(t_0) + \int\limits_{t_1}^{t} (U_i^{ab}(t') - q_i^{ab}(t'))dt', \ \ i = p, \ldots, q.$$

Здесь $U_i^{ab}(t) = U_i(t) + U_i^{\text{Н}}(t)$,
где $U_i^{\text{Н}}(t) = 0$ на всех станциях сбойного участка метро, кроме конечных, а на конечных он соответствует интенсивности провоза пассажиров через станцию в ситуации безотказной работы метрополитена.

Время ожидания пассажиров, поступивших в момент t на станцию i в сбойной ситуации $T_i^{ab}(t)$, вычисляется из соотношения

$$V_i^{ab}(t) = \int\limits_{t-T_i^{ab}(t)}^{t} U_i^{ab}(t')dt'.$$

В приведенных выше обозначениях дополнительные потери времени пассажиров, перевозимых на сбойном радиусе метро, составят

$$W_0 = \sum_{i=p}^{q}\left[\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta_i(t_1,t_2)} q_i^{ab}(t)T_i^{ab}(t)dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} q_i(t)T_i(t)dt\right]. \qquad (6.11)$$

Здесь $\Delta(t_1, t_2)$ — дополнительное время на перевозку пассажиров со станции i из-за возникшего сбоя, вычисляется из соотношения

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} q_i(t)dt = \alpha_i \int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta_i(t_1,t_2)} q_i^{ab}(t)dt, \quad i = p,\ldots,q,$$

где α_i — коэффициент уменьшения объема перевозки пассажиров со сбойного участка за счет того, что в сбойной ситуации часть пассажиров изменит маршрут следования. На практике α_i принимает значение в зависимости от времени суток от 0,5 до 0,8.

Величина W_0 из соотношения (6.11) есть дополнительные потери времени пассажиров, перевозимых метрополитеном при наличии сбоя на участке со станции P до станции q, при условиях, что на участок сбоя не будут выделены дополнительные транспортные средства для дублирования сбойного участка метрополитена.

В практической деятельности, как указывалось выше, чтобы уменьшить величину потерь времени пассажиров на транспортное обслуживание во время сбоя метрополитена, диспетчер выделяет автобусы с прилежащих к данному сбойному радиусу метро маршрутов. В условиях отсутствия оперативной информации об интенсивности пассажиропотоков, длительности сбоя, количестве автобусов на каждом маршруте диспетчер выделяет автобусы, исходя из накопленного в прошлом опыта о подобных сбойных ситуациях и принятых мерах для их ликвидации (расчет необходимого количества автобусов осуществляется по эмпирическим формулам).

Используя введенные выше обозначения, задача минимизации суммарных транспортных потерь может быть сформулирована следующим образом.

Пусть для ликвидации сбоя на метрополитене могут быть использованы автобусы m прилегающих к сбойному радиусу маршрутов. Количество автобусов, обслуживающих каждый маршрут, задается вектором $a = a_1, \ldots, a_m$, где a_i — число автобусов на маршруте $i = 1, \ldots, m$.

Учитывая, что интенсивность поступления пассажиров на остановку α, следующих до остановки β маршрута ℓ, задается величиной $U^{\ell}_{\alpha\beta}$ $\alpha = 1, \ldots, m_\ell$; $\beta = 1, \ldots, m_\ell$; $\ell = 1, \ldots, m$), получим интенсивность поступления пассажиров на остановку α маршрута ℓ:

$$U^{\ell}_{a}(t) = \sum_{\beta=1}^{m_\ell} U^{\ell}_{\alpha\beta}(t).$$

Производительность $q^{\ell}_{\alpha}(t)$, с которой обслуживаются пассажиры на остановке α маршрута ℓ, определяется по формуле, аналогичной (6.8).

Время ожидания $T^{\ell}_{\alpha}(t)$ пассажиров, обслуживаемых в момент t на остановке α маршрута ℓ, вычисляется из соотношения

$$V^{\ell}_{\alpha}(t) = \int\limits_{t - T^{\ell}_{\alpha i}(t)}^{t} U^{\ell}_{\alpha}(t')dt'.$$

Учитывая, что при увеличении числа автобусов на маршруте и сохранении равенства временных интервалов между прибытием автобусов на остановки при одних и тех же интенсивностях поступления пассажиров на остановки, получим следующее соотношение:

$$T^{\ell}_{\alpha}(b^1, t) > T^{\ell}_{\alpha}(b^2, t)(b^2 > b^1); \qquad \alpha = 1, \ldots, m_\ell,$$

где b^1, b^2 — число автобусов на маршруте ℓ.

Поэтому при уменьшении числа автобусов на маршруте ℓ с a_ℓ до b_ℓ дополнительные потери на ожидание автобусов составят величину, вычисляемую из следующего выражения:

$$W_{\alpha}(b_\ell) = \sum_{\alpha=1}^{m_\ell} \left[\int\limits_{t_1}^{t_2 + \Delta_\alpha(b_\ell)} T^{\ell}_{\alpha}(b_\ell, t) q^{\ell}_{\alpha}(b_\ell, t)dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} T^{\ell}_{\alpha}(a_\ell, t) q^{\ell}_{\alpha}(a_\ell, t)dt \right],$$

где $\Delta_\alpha(b_\ell)$ — дополнительное время для транспортировки пассажиров с остановки α, связанное с уменьшением числа автобусов с a_ℓ до b_ℓ.

Таким образом, задачу минимизации дополнительных потерь времени пассажиров на транспортное обслуживание в условиях сбоя на метрополитене можно сформулировать следующим образом.

Для ликвидации сбоя необходимо на каждом автобусном маршруте ℓ ($\ell = 1, \ldots, m$) оставить b_ℓ автобусов ($b_\ell \le a_\ell$), а $a_\ell - b_\ell$ автобусов переправить на дополнительный автобусный маршрут, дублирующий сбойный участок метрополитена, для перевозки пассажиров. При этом необходимо минимизировать функционал

$$\min_{b\in B} W = \sum_{j=p}^{q}\left[\int_{t_1}^{t_2+\Delta_j(a-b)} T_j(a-b,t)dt - \int_{t_1}^{t_2} T_j(t)q_j(t)dt\right] +$$

$$+\sum\left[\int_{t_1}^{\Delta T} T_\alpha^b(b,t)dt - \int_{t_1}^{\Delta T t_2} T_\alpha^\ell(t)q_\alpha^\ell(t)dt\right], \qquad (6.12)$$

где ΔT — момент окончания перевозки пассажиров на автобусных маршрутах; $T_j(a-b, t)$ — время ожидания пассажиров на станции j в момент t при условии, что для дублирования метрополитена на сбойном радиусе выделены автобусы, заданные вектором $a - b =$ $= (a_1 - b_1, ..., a_m - b_m)$; $q_j(a-b, t)$ — производительность обслуживания пассажиров на станции j при выделенном числе автобусов, заданных вектором $a - b$; B — множество всех вариантов перераспределения автобусов по маршрутам.

Ограничения на объем перевезенных пассажиров на маршруте, дублирующем сбойный участок метрополитена, таковы:

$$\alpha_j\int_{t_1}^{t_2} q_j(t)dt \le \int_{t_1}^{t_2+\Delta_j(a-b)} q_j(t)dt; \quad j = p,...,q, \qquad (6.13)$$

т.е. объем пассажиров, перевезенных с каждой станции метро в сбойной ситуации и в случае отсутствия сбоя, должен сохраниться.

Ограничения на число автобусов, перераспределяемых с автобусных маршрутов на дополнительный маршрут, имеют вид

$$1 \le b_i \le a_i; \quad i = 1, ..., m, \qquad (6.14)$$

т.е. на каждом автобусном маршруте должен быть оставлен хотя бы один автобус.

Учитывая, что в соотношении (6.12) слагаемые $\int_{t_1}^{t_2} T_j(t)q_j(t)dt$ и $\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m_\ell}\int_{t_1}^{\Delta T t_2} T_\alpha^\ell(t)q_\alpha^\ell(t)dt$ являются постоянными, минимизация целевого функционала (6.12) эквивалентна минимизации следующего функционала:

$$\sum_{j=p}^{q}\int_{t_1}^{t_2+\Delta_j(a-b)} T_j(a-b,t)q_j(a-b,t)dt + \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m_\ell}\int_{t_1}^{\Delta T} T_\alpha^b(b,t)q_\alpha^\ell(b,t)dt. \qquad (6.15)$$

Задача (6.12)–(6.14) является задачей дискретной оптимизации с нелинейным целевым функционалом. Для решения этой задачи разработан алгоритм типа метода ветвей и границ, заключающийся в следующем.

Шаг 1. Получение допустимого решения (вычисление «рекорда»). На этом этапе выбирается некоторое допустимое с точки зрения ограничений (6.13)–(6.14) перераспределение автобусов по маршрутам и вычисляется значение целевого функционала (6.15) для выбранного варианта перераспределения транспортных средств. Это значение функционала (6.15) в дальнейшем будем называть «рекордом».

Шаг 2. Вычисление нижней оценки для нового решения для любого момента $t' \in [t_1, \Delta T]$. Нижняя оценка любого допустимого решения для любого момента $t' \in [t_1, \Delta T]$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$W_{\text{н}}^{i}(a-b,t') = W_{\text{нр}}^{i}(a-b,t') + \sum_{j=p}^{q} \int_{t_1}^{t_2+\Delta_j(a-b)} \tilde{T}_j(a-b,t)\tilde{q}_j(a-b,t)dt +$$

$$+\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m_\ell}\int_{t_1}^{\Delta T}\tilde{T}_{\alpha}^{b}(b,t)\tilde{q}_{\alpha}^{\ell}(b,t)dt. \qquad (6.16)$$

В формуле (6.16) первое слагаемое задает реальные потери времени пассажиров на ожидание, перевезенных к моменту времени t', если количество автобусов, оставленных на автобусных маршрутах, задано вектором $b_i = b_{i1}, \ldots, b_{im}$. Второе и третье слагаемые дают нижнюю оценку потерь времени пассажиров на ожидание на дополнительном маршруте и автобусных маршрутах для объема пассажиров, который необходимо перевезти за период времени начиная с момента t' до окончания времени перевозки пассажиров при условии неограниченной вместимости транспортных средств. Уточнение нижней оценки по формуле (6.16) производится через интервалы времени, кратные периоду следования автобусов на дополнительном маршруте, дублирующем перевозку пассажиров на сбойном участке метрополитена, и сравниваются с рекордом, пока не будет получена одна из альтернатив.

У полученного решения значение целевого функционала ниже, чем у рекорда. В этом случае новое решение назначается рекордом, и если не все варианты перераспределения исследованы, то переходим к пункту 2. Если все варианты перераспределения автобусов исследованы, то последнее допустимое решение является решением задачи (6.13)–(6.15).

Нижняя оценка конструируемого решения оказалась выше, чем у рекорда, для момента времени $t^* \in [t_1, \Delta T]$. В этом случае выбранный вариант перераспределения хуже, чем вариант, соответствующий рекорду. Выбирается новый вариант перераспределения транспортных средств. Переход к шагу 2.

Необходимо отметить, что представленный комбинаторный алгоритм не всегда приемлем при моделировании возникающих на практике сбоев в работе метрополитена из-за большой размерности задачи, когда длительность сбоя превышает несколько часов, а перечень автобусных маршрутов, с которых автобусы привлекаются на сбойный участок, составляет многие десятки.

В этой ситуации целесообразно использовать различные эвристические методы получения приближенных решений, предлагаемые, например, в [18].

Еще одной проблемой выработки управляющего решения в сбойной ситуации является то, что реальные условия, в которых осуществляется перераспределение транспортных средств в сбойной ситуации, часто таковы, что многие исходное данные в силу ряда объективных причин носят приближенный характер.

Такими данными, в частности, являются: интенсивности пассажиропотоков; продолжительность сбоя; перечень станций, входящих в сбойный участок метрополитена; количество автобусов на маршрутах, с которых выделяются транспортные единицы на дополнительный маршрут.

Неточность исходных данных приводит к необходимости исследования влияния изменения входной информации на решение задачи (6.12)–(6.14). Ниже исследуется влияние на решение задачи малого изменения интенсивностей пассажиропотоков, поступающих на станции сбойного участка метрополитена.

Для оценки этого влияния на решение задачи (6.12)–(6.14) введем следующие определения.

Задача (6.12)–(6.14) называется устойчивой по решению, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при изменении интенсивностей пассажиропотоков в окрестности $U_i(t) + \varepsilon$ в оптимальном решении сохранятся вектор b и количество рейсов, которое должен осуществить каждый автобус на дополнительном маршруте.

Задача (6.12)–(6.14) устойчива по структуре решения, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при изменении интенсивностей пассажиропотоков в окрестности $U_i(t) + \varepsilon$ в оптимальном решении сохраняется вектор b.

Очевидно, что из устойчивости по решению следует структурная устойчивость. Ниже будет исследоваться структурная устойчивость решения задачи (6.12)–(6.14) при изменении интенсивностей пассажиропотоков.

Вычислим максимальную величину ε, на которую могут быть увеличены интенсивности поступления пассажиропотоков на станции сбойного участка метрополитена, оставив без изменения вектор $\overline{a - b_1}$, задающий множество автобусов на дополнительный маршрут в решении задачи (6.12)–(6.14). Для этого необходимо решить следующую задачу нелинейной оптимизации:

$$\max \varepsilon; \tag{6.17}$$

$$W(\bar{b}_1 \varepsilon) \le W(b_i, \varepsilon) b_i \in B; \tag{6.18}$$

$$\varepsilon \ge 0. \tag{6.19}$$

Здесь $W(\bar{b}_1 \varepsilon)$ — значение функционала (6.15) при интенсивностях пассажиропотоков на станциях метрополитена, заданных функциями $U_j(t) + \varepsilon$, $j = P, \ldots, q$.

Учитывая, что для каждого $\varepsilon \in [0, \infty)$ существует оптимальное перераспределение транспортных средств при интенсивностях пассажиропотоков $U_j(t) + \varepsilon$ на станции сбойного участка метрополитена, может быть сформулировано следующее утверждение.

При увеличении интенсивности поступления пассажиропотоков $U_j(t) + \varepsilon$ при $\varepsilon \in [0, \infty)$ полубесконечный интервал $[0, \infty)$ может быть разбит на конечное число подынтервалов, на каждом из которых сохраняется один и тот же вектор $\overline{a_\ell - b_\ell}$, $\ell = 1, \ldots, K$, выделенных автобусов на дополнительный маршрут, оптимизирующий функционал (6.12).

При решении задачи (6.17)–(6.19) возможно получение одного из результатов: $\varepsilon = 0$; $\varepsilon = C$ $(0 < C < \infty)$; $\varepsilon = \infty$.

Рассмотрим достаточные и необходимые условия получения перечисленных выше значений ε.

Учитывая монотонное возрастание функционала $W(\bar{b}, \varepsilon)$, $\bar{b} \in B$ при возрастании ε, может быть доказано, что достаточным условием того, что $\varepsilon > 0$ в решении задачи (6.17)–(6.19) является единственность решения задачи (6.12)–(6.14). Поэтому необходимым условием того, чтобы $\varepsilon = 0$ при решении задачи (6.17)–(6.19), является неединственность решения задачи (6.12)–(6.14).

Необходимым условием для $\varepsilon = \infty$ в решении задачи (6.17)–(6.19) является выполнение равенства $\bar{b}_1 = (1, \ldots, 1)$, где $\bar{b}_1$ — вектор, задающий перераспределение автобусов в решении задачи (6.12)–(6.14).

Рассмотрим ситуацию, когда для заданных входных параметров задачи существует два оптимальных решения $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$. Исследуем приращение функционала (6.12) при увеличении интенсивностей пассажиропотоков на малое ε для решения $\bar{b}_1$:

$$W(\bar{b}_1 \varepsilon) = \sum_{O_{ij}^{\ell} \in O_2} \left[\left(\sum_{K=i-K_1}^{i} \alpha_{kj} \Delta t_{kj} \varepsilon + \Delta t_{ij} \varepsilon \right) \sum_{\ell=j}^{j+K_2} \Delta t_{i\ell} \right] + \sum_{O_{ij}^{\ell} \in O_1} \left(\frac{\Delta t_{ij}}{2} \right) \varepsilon, \quad (6.20)$$

где O_2 — это множество остановок i маршрута ℓ, на которых автобус j обслужил не всех пассажиров, находящихся на остановке; O_1 — множество остановок i маршрута ℓ, на которых рейс автобуса j обслужил всех пассажиров, находящихся на остановке; $i = K_1$ — ближайшая предшествующая остановке i остановка, на которой транспортное средство обслужило всех пассажиров; $j = K_2$ — номер ближайшего после j-го рейса, которым обслуживаются все пассажиры на i-й остановке; Δt_{ij} — время ожидания j-го рейса транспортного средства на остановке i; $\alpha_{ij} \Delta t_{ij} \varepsilon$ — дополнительный объем пассажиров, которые были обслужены при увеличении интенсивностей пассажиропотоков на ε и выход которых из транспортного средства осуществляется за остановкой i.

Исходя из формулы (6.20), получим, что если есть два оптимальных решения, задаваемых векторами $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$, то задача (6.12)–(6.14) устойчива по решению $\bar{b}_1$ в том случае, если существует такое ε', что выполняется неравенство

$$\Delta W(\bar{b}_1 \varepsilon) \le \Delta W(\bar{b}_2, \varepsilon)$$

для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon'$.

Следующие два утверждения характеризуют диапазон изменения структуры оптимального решения в зависимости от интенсивностей пассажиропотоков и длительности сбоя.

Утверждение 6.1. Если интенсивности пассажиропотоков на автобусные маршруты таковы, что все пассажиры на каждом маршруте могут быть перевезены одним автобусом в течение суточного интервала времени перевозки пассажиров, то число выделенных на дополнительный маршрут автобусов в оптимальном решении при достаточно малых пассажиропотоках на сбойном участке будет при возрастании пассажиропотоков на сбойном участке метрополитена меняться от 0 до $n - m$.

Доказательство. Учитывая ограниченность потерь на автобусных маршрутах, при достаточно большой интенсивности пассажиропотоков, поступающих на станции сбойного участка метрополитена, получим следующее неравенство:

$$\sum_{j=p}^{q} \int_{t_1}^{t_2+\Delta_K} q_i(K,t) T_i(K,t) dt - \sum_{j=p}^{q} \int_{t_1}^{t_2+\Delta_{K+1}} q_i(K+1,t) T_i(K+1,t) dt \ge C,$$

где $t_2 + \Delta_K$, $t_2 + \Delta_{K+1}$ — моменты окончания перевозки пассажиров на сбойном участке при выделении на дополнительный маршрут соответственно K и $K + 1$ автобусов; $q_i(j, t)$ — интенсивность перевозки пассажиров на i-й станции метрополитена при выделении на дополнительный маршрут j автобусов ($j = K$, $K + 1$); C — любое положительное число.

Из неравенства (6.20) следует утверждение 6.1.

Аналогично может быть доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.2. Существуют такие интенсивности пассажиропотоков на станциях сбойного участка метрополитена и остановках автобусных маршрутов, с которых перераспределяются автобусы на дополнительный маршрут, что количество выделенных автобусов на дополнительный маршрут меняется от 0 до $(L - m)$ при возрастании длительности сбоя.

Рассмотренные алгоритмы были использованы при моделировании сбойной ситуации на участке метрополитена, состоящего из четырех станций. Продолжительность сбоя составляла один час. Для дублирования перевозки на этом участке привлекались автобусы с десяти прилежащих маршрутов.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют динамические модели транспортного типа?
2. Что является критерием оптимальности динамической транспортной модели?
3. Что собой представляет модель перераспределения транспортных средств в ситуации перекрытия движения на участке метрополитена?
4. Какие ограничения присутствуют в динамической транспортной модели?
5. Что характерно для метода распределения транспортных средств по маршрутам?
6. Как достигается устойчивость в динамических моделях транспортного типа?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проведенных в работе исследований можно сделать следующие выводы.

1. Разработка методов исследования устойчивости моделей распределения ограниченных ресурсов применительно к производственной и транспортной логистике — необходимое условие их эффективного использования в практике планирования. Предложенные способы построения областей устойчивости в задачах оптимального распределения ресурсов позволяют оценивать изменения как в целевой функции, так и в решении при варьировании исходными параметрами.

Вследствие того что транспортные и производственные объекты относятся к числу сложных систем, моделирование различных возмущений в процессе их функционирования позволяет не перепланировать работу объекта, если возникшие отклонения слабо влияют на конечные результаты его деятельности.

2. Разработанные в книге методы построения областей устойчивости при выполнении комплекса работ с неточными исходными данными ориентированы на применение в практике оперативно-производственного планирования в машиностроении и других отраслях народного хозяйства для оптимизации управлений технологическими процессами при реализации крупных народнохозяйственных проектов, при планировании проведения научных исследований.

3. В процессе реализации процедуры построения многогранников устойчивости при интервальном задании длительности работ для ряда случаев установлено, что процедура поиска многогранника устойчивости оптимального расписания для измененных длительностей работ более эффективна, чем построение заново оптимальной по быстродействию последовательности выполнения работ.

4. Учитывая вычислительную сложность задачи выбора оптимального плана при выполнении комплекса работ, область устойчивости может вычисляться для любого из множества не оптимальных, а допустимых расписаний выполнения работ, для всех значений параметров которых это допустимое расписание будет мажорировать любое из первоначального множества расписаний.

5. Предложенные в книге модели конвейерного типа используются при автоматизации плановых диспетчерских функций, позволяют повысить обоснованность производственного планирования и эффективность использования производственных ресурсов при

обработке потока поступающих документов в условиях крупного вычислительного центра. Повышение производительности вычислительного центра для этого вида работ достигает 10%.

6. Разработаны методы построения областей устойчивости в задачах планирования использования оборудования не только для критерия быстродействия выполнения комплекса работ, но и для других критериев оптимального использования оборудования, таких, например, как коэффициент использования сборочного оборудования, минимизация незавершенного производства и др.

7. Показано, что вычислительная сложность задачи построения интервала устойчивости по функционалу для конвейерной системы, максимизирующей общий объем обработанных заявок за директивный период, сравнима со сложностью исходной оптимизационной задачи. Аналогичный результат получен для модели выбора оборудования минимальной стоимости для обработки неоднородного потока заявок в конвейерной системе.

8. Предложенная модель выбора оптимальной производственной программы предприятия использовалась на машиностроительном объединении «Красный Октябрь», основной выпускаемой продукцией которого являются около 10 видов металлорежущих станков и пять видов продукции широкого потребления.

В результате перехода от непрерывного решения к дискретному в задаче целочисленного программирования верхняя оценка погрешности приближенного решения не превысила 3%, что позволяет рекомендовать применение разработанной модели для предприятий с крупносерийным и среднесерийным характерами выпускаемой продукции и номенклатурой выпускаемых изделий, не превышающей 10 наименований изделий.

Устойчивость модели по решению сохраняется при изменении реальных цен на 15%.

9. Предложенные в книге динамические транспортные модели целесообразно применять как для оптимизации внутригородских пассажирских перевозок, так и для различных видов междугородних перевозок с целью наиболее обоснованного распределения транспортных ресурсов в этих видах перевозок. Учитывая неточность исходных данных, в частности по интенсивностям перевозимого пассажиропотока, целесообразно, установив интервальные оценки по неточно заданным параметрам, получить все возможные варианты использования транспортных средств, представив ЛПР результаты расчетов для окончательного анализа и выбора варианта с учетом неформализуемых факторов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Афанасьев М.Ю.* Исследование операций в экономике [Текст] / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. — М.: ИНФРА-М, 2003.
2. *Балабанов И.М.* Основы финансового менеджмента [Текст] / И.М. Балабанов. — М.: Финансы и статистика, 2001.
3. *Бритхэм Ю.* Энциклопедия финансового менеджмента [Текст] / Ю. Бритхэм. — М.: Экономика, 1999.
4. *Вагнер Г.* Основы исследования операций [Текст] / Г. Вагнер. — М.: Мир, 1973.
5. *Ван Хорн Дж.К.* Основы управления финансами [Текст] / Дж.К. Ван Хорн. — М.: Финансы и статистика, 2001.
6. *Васильева Е.М.* Формирование оценок эффективности естественно-монопольных производственных систем [Текст] / Е.М. Васильева. — М.: ЛИБРОКОМ, 2008.
7. *Вентдель Е.С.* Исследование операций [Текст] / Е.С. Вентдель // Советское радио, 1982.
8. *Виллисов В.Я.* Методы выбора экономических решений. Адаптивные модели [Текст] / В.Я. Виллисов. — М.: Финансы и статистика, 2006.
9. *Гермейер Ю.Б.* Введение в исследование операций [Текст] / Ю.Б. Гермейер. — М.: Наука, 1971.
10. *Гордеев Э.Н.* Дискретные параметрические задачи [Текст] / Э.Н. Гордеев, В.К. Леонтьев. — М.: Наука, 1979.
11. *Гэри М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи [Текст] / М. Гэри, Д. Джонсон. — М.: Мир, 1982.
12. *Данилин В.И.* Экономико-математические модели планирования на предприятии [Текст] / В.И. Данилин. — М.: Наука, 1999.
13. *Долматов А.С.* Математические методы риск-менеджмента [Текст] / А.С. Долматов. — М.: Экзамен, 2007.
14. *Дубров А.М.* Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе [Текст] / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев. — М.: Финансы и статистика, 2003.
15. *Еремин И.И.* Противоречивые модели оптимального планирования [Текст] / И.И. Еремин. — М.: Наука, 1988.
16. *Ермолаев Ю.М.* Методы стохастического программирования [Текст] / Ю.М. Ермолаев. — М.: Наука, 1976.
17. *Канторович Л.В.* Оптимальные решения в экономике [Текст] / Л.В. Канторович. — М.: Наука, 1972.
18. Корпоративная логистика [Текст] / под ред. В.И. Сергеева. — М.: ИНФРА-М, 2004.
19. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр [Текст] / Дж. Мак-Кинси. — М.: Физматиздат, 1966.
20. *Мауэргауз Е.Ю.* Продвинутое планирование и расписания в производстве и цепочках поставок [Текст] / Е.Ю. Мауэргауз. — М.: Экономика 2012.

21. *Мищенко А.В.* Методы и модели управления инвестициями в логистике [Текст] / А.В. Мищенко. — М.: ИНФРА-М, 2016.
22. *Мищенко А.В.* Оптимизационные модели управления финансовыми ресурсами предприятия [Текст] / А.В. Мищенко, Е.В. Виноградова. — М.: РИОР: ИНФРА-М, 2015.
23. *Нейман Дж.* Теория игр и экономическое поведение [Текст] / Дж. Нейман. — М.: Наука, 1970.
24. *Нелогинов В.С.* Экономико-математические модели и методы [Текст] / В.С. Нелогинов. — М.: Мысль, 1965.
25. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях [Текст] / А.И. Орлов. — М.: Наука, 1979.
26. *Сток Дж.Р.* Стратегическое управление логистикой [Текст] / Дж.Р. Сток, Д.М. Ламберт. — М.: ИНФРА-М, 2014.
27. *Шапиро Дж.* Моделирование цепи поставок [Текст] / Дж. Шапиро. — СПб.: Питер, 2006.
28. *Ярушкина Н.Г.* Основы теории нечетких и гибридных систем [Текст] / Н.Г. Ярушкина. — М.: Финансы и статистика, 2004.

СОДЕРЖАНИЕ

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр.1
Тел. (495) 280-15-96; факс (495) 280-36-29
E-mail: books@infra-m.ru

•

Отдел «Книга—почтой»:
тел. (495) 280-15-96 (доб. 246)

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

Учебное издание

Мищенко Александр Владимирович

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ В ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Оригинал-макет подготовлен в НИЦ ИНФРА-М

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29
E-mail: books@infra-m.ru http://www.infra-m.ru

Подписано в печать 15.12.2017.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,56.
Тираж 500 экз. (I — 40). Заказ № 00000

ТК 151150-911255-151217

Отпечатано в типографии ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29