ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю. Н. Миронкина, Н. В. Звездина,
М. А. Скорик, Л. В. Иванова

АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ
Часть 2

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ БАКАЛАВРИАТА И МАГИСТРАТУРЫ

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2018

УДК 33(075.8)
ББК 65я73
М64

Авторы:

Миронкина Юлия Николаевна — кандидат технических наук, доцент кафедры статистических методов Департамента статистики и анализа данных факультета экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Звездина Наталья Валерьевна — кандидат экономических наук, доцент кафедры статистических методов Департамента статистики и анализа данных факультета экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Скорик Марина Анатольевна — кандидат экономических наук, доцент кафедры математических методов в экономике Естественнонаучного-технологического Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова;

Иванова Лариса Валерьевна — кандидат экономических наук, аналитик компании ООО «ФРАНКЕ НЕВА».

Рецензенты:

Мхитарян В. С. — доктор экономических наук, профессор, заведующий отделением статистики, анализа данных и демографии Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Цыганов А. А. — доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой страхового дела Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

Миронкина, Ю. Н.

А43 Актуарные расчеты. В 2 ч. Часть 2 : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Ю. Н. Миронкина, Н. В. Звездина, М. А. Скорик, Л. В. Иванова. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 250 с. — Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс.

ISBN 978-5-534-03550-6 (ч. 2)
ISBN 978-5-534-03549-0

Учебник представляет собой вводный курс в актуарные расчеты. Книга призвана заинтересовать читателя актуарной профессией, расширить сферу его возможной профессиональной деятельности, дать основные представления о проблемах и задачах актуарных расчетов и привлечь в актуарную науку.

Учебник состоит из двух частей. Первая часть посвящена актуарным расчетам в страховании ином, чем страхование жизни (страховании не-жизни) (*non-life insurance*). В ней приводятся основные понятия и определения страхования и актуарных расчетов, принципы и подходы к формированию страховых премий и резервов, построению различных актуарных моделей, ключевые вопросы сострахования и перестрахования. Вторая часть, посвященная страхованию жизни и пенсий (*life insurance*), содержит основные понятия финансовой математики, демографические основы страхования жизни и пенсий, принципы формирования тарифных ставок и оценки резервов.

Теоретический материал иллюстрирован большим количеством примеров и решенных задач, что значительно облегчает процесс детального изучения и глубокого понимания предмета. Учебник также содержит контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Содержание учебника соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Учебник ориентирован на широкий круг читателей, в частности студентов экономических специальностей высших учебных заведений, специалистов страховых компаний и негосударственных пенсионных фондов, а также всех читателей, интересующихся актуарными расчетами и страхованием.

УДК 33(075.8)
ББК 65я73

ISBN 978-5-534-03550-6 (ч. 2)
ISBN 978-5-534-03549-0

Оглавление

Раздел II
АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ В СТРАХОВАНИИ ЖИЗНИ И ПЕНСИЙ

Да, человек смертен, но это было бы еще полбеды. Плохо то, что он иногда внезапно смертен, вот в чем фокус!

Михаил Булгаков
«Мастер и Маргарита»

Глава 6
ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

В результате изучения главы 6 студент должен:

знать

- теоретические принципы, лежащие в основе финансового анализа;
- основные понятия и категории, используемые в практике финансовых вычислений;
- методы оценки конечных результатов финансовых операций для каждой из участвующих в ней сторон;
- виды и характеристики финансовых рент;
- основы количественного анализа последовательностей платежей;

уметь

- оценивать параметры, производить расчеты и анализировать инвестиционные, кредитные и коммерческие сделки;
- устанавливать эквивалентную связь между основными финансовыми показателями: эффективными и номинальными процентными и учетными ставками, коэффициентами дисконтирования и интенсивностью процентов;
- определять авансовый процентный доход, приведенную стоимость денежных средств к любому моменту времени;
- оценивать серии платежей, определять обобщающие характеристики рент и их отдельные параметры, рассчитывать приведенную стоимость детерминированных, возрастающих и убывающих финансовых рент любой продолжительности и частоты;
- сравнивать эффективность финансовых операций;
- выявлять зависимость конечных результатов расчетов от основных параметров контракта;

владеть

- основами финансовой математики;
- принципами наращения, дисконтирования платежей и учета по формулам простых и сложных процентов;
- методикой расчетов, разработанной для анализа различных видов финансовых рент;
- методами современной практики выполнения финансовых вычислений.

6.1. Основные понятия и финансовые показатели

В финансовых вычислениях фактор времени обязательно учитывается в качестве одного из важнейших элементов. Необходимость учета фактора времени определяется ***принципом неравноценности*** денег, относящихся к разным моментам времени. Неравноценность определяется тем, что теоретически любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход, а поступившие доходы, в свою очередь, могут быть реинвестированы.

Очевидным следствием принципа «неравноценности» является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Подобного рода суммирование допустимо лишь там, где фактор времени не имеет значения — например, в бухгалтерском учете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле.

Учет фактора времени в финансовых расчетах осуществляется с помощью начисления процентов. Под ***процентами*** (*процентными деньгами*) понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, при внесении денег на сберегательный счет, учете векселя, покупке сберегательного сертификата или облигаций и т.д.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере ***процентной ставки*** — отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют ***периодом начисления***. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т.е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени — ***дискретные проценты***. При этом в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять ***непрерывные проценты***. Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга.

6.1.1. Эффективная процентная ставка и принципы начисления процентов

Рассмотрим понятие процентов на капитал.

Предположим, что в момент t некто взял в долг на некоторое время h определенную сумму (C) руб. Тогда, как правило, в момент $t + h$ возврата долга он должен будет вернуть большую сумму ($C + C'$). Сумма C' является наградой владельцу основного капитала C за то, что его средства использовались другим лицом. Принято выражать ее в относительных единицах, т.е. посредством соотношения C'/C. Величина $i = C'/C$ называется *эффективной процентной ставкой* (*effective rate of interest*) за рассматриваемый промежуток времени.

Временной период, в течение которого приходуется процентный доход, называют *периодом начисления процентов (периодом конверсии)*. Процентная ставка относится ко всему периоду действия кредитного соглашения. Для сравнения условий различных кредитов процентную ставку задают по отношению к некоторому базовому периоду. Наиболее распространен годовой базовый период — в этом случае используют *годовую процентную* ставку.

Таким образом, при предоставлении в долг некоторой суммы C (например, если мы размещаем средства на счете в банке, вносим плату за страховку или взнос в пенсионный фонд и т.д.), то по прошествии времени h мы можем рассчитывать на определенный доход $C' = C \cdot i$ от инвестирования принадлежащего нам капитала C.

На практике процентная ставка i зависит от ряда факторов: момента t заключения договора, величины основного капитала C, длительности промежутка h, на который даются в долг деньги:

$$i = i(t, C, h).$$

Для простоты изложения, мы будем предполагать, что i не зависит от t и C[1].

В случае, когда сумма C инвестируется на два последовательных промежутка времени с эффективной процентной ставкой i_k (где $k = 1, 2$), приняты две схемы исчисления дохода C' на объединенном интервале:

1) *принцип простых процентов* (*simple interest*) предполагает, что проценты начисляются только на основной капитал, вложенные деньги. Поэтому

$$C = C' \cdot i_1 + C' \cdot i_2.$$

Соответственно, итоговая процентная ставка

$$i = \frac{C'}{C} = i_1 + i_2.$$

Рассмотрим одну и ту же процентную ставку i, действующую на временном интервале $[t_1; t_2]$.

В этом случае величина начисленных процентов будет пропорциональна сроку вложения

$$C(t_2) = C(t_1) \cdot [1 + i \cdot (t_2 - t_1)],$$

где $C(t)$ — величина капитала в момент времени t; i — эффективная процентная ставка; t_1 и t_2 — моменты времени начала и конца вложения средств соответственно.

Из формулы видно, что величина $C(t)$ при этом растет с течением времени *линейно*.

2) *принцип сложных процентов* (*compound interest*) предполагает, что проценты начисляются не только на основной капитал, но и на уже заработанные проценты. Поэтому в конце второго интервала времени основной капитал C вырастет до величины

$$C + C' = C\left(1 + i_1\right) \cdot \left(1 + i_2\right).$$

Соответственно, итоговая процентная ставка определяется из условия

$$1 + i = \left(1 + i_1\right) \cdot \left(1 + i_2\right),$$

$$\text{т.е. } i = i_1 + i_2 + i_1 \cdot i_2.$$

Рассмотрим i на временном интервале $[t_1; t_2]$.

В этом случае начисляемый процент увеличивается тем быстрее, чем больший срок прошел. Формула сложных процентов имеет вид:

$$C(t_2) = C(t_1) \cdot (1 + i)^{t_2 - t_1}.$$

Здесь величина $C(t)$ растет *в геометрической прогрессии.*

---

[1] *Фалин Г. И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем.

Если инвестор может свободно распоряжаться своими средствами, принцип простых процентов может легко быть нарушен: в конце первого промежутка времени инвестор получает сумму

$$C(1 + i_1)$$

и немедленно инвестирует ее как новый капитал на второй промежуток времени. Тогда в конце второго промежутка инвестор будет располагать суммой, определяемой по формуле сложных процентов, а именно:

$$C(1 + i_1)(1 + i_2).$$

В этой ситуации использование банком или другим финансовым учреждением принципа простых процентов будет доставлять неудобства клиентам, которые будут вынуждены периодически закрывать и тут же открывать свои счета. Кроме того, существует опасность, что они будут инвестировать свои средства на очередной промежуток времени в другой проект. Поэтому в настоящее время общепринято использовать принцип сложных процентов при определении дохода от вложения средств. Именно этот принцип используется и в актуарных расчетах.

6.1.2. Накопления. Интенсивность процентов

Выберем некоторый промежуток времени в качестве единичного (как правило, это один год) и предположим, что процентная ставка за этот промежуток равна i. Допустим, что в момент $t_0 = 0$ сумма C инвестируется на n единиц времени. Принцип сложных процентов означает, что в момент $(t_0 + n)$ капитал C превратится в сумму

$$C(n) = C \cdot (1+i)^n. \tag{6.1}$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как справедливым образом определить доход на капитал, который инвестирован на время n/p.

Обозначим *эффективную процентную ставку для промежутка* $1/p$ через $i_*^{(p)}$. Поскольку на единичный отрезок можно смотреть как на p последовательных отрезков длиной $1/p$ каждый, применяя формулу (6.1) мы получим, что

$$C \cdot (1+i) = C \cdot (1+i_*^{(p)})^p$$

и поэтому

$$i_*^{(p)} = \left(1+i\right)^{\frac{1}{p}} - 1. \tag{6.2}$$

Рассматривая отрезок $[0, n/p]$ как n последовательных отрезков длиной $1/p$ каждый и применяя формулы (6.1) и (6.2), мы получим для суммы $C(t)$, накопленной к моменту $t = n/p$, следующее выражение:

$$C\left(t\right) = C \cdot \left(1+i_*^{(p)}\right)^n = C \cdot \left(\left(1+i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^n = C \cdot \left(1+i\right)^{\frac{n}{p}} = C \cdot \left(1+i\right)^t.$$

Предполагая непрерывность функции $C(t)$, мы получим, что формула

$$C\left(t\right) = C \cdot (1+i)^t \tag{6.3}$$

верна для любого действительного числа $t > 0$.

Формула (6.3) описывает процесс накопления средств в ситуации, когда принят принцип сложных процентов, и является одной из основных формул финансовой математики.

Из формулы (6.3) следует, что относительная скорость накопления средств задается формулой

$$\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{C(t)\Delta t}=\frac{(1+i)^{\Delta t}-1}{\Delta t}.$$

Соответственно, мгновенная относительная скорость накопления есть (согласно следствию из 2-го замечательного предела):

$$\delta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(1+i)^{\Delta t}-1}{\Delta t}=\ln(1+i). \tag{6.4}$$

Величина δ в финансовой математике называется *интенсивностью процентов* (*force of interest*).

Поскольку

$$i=e^{\delta}-1, \tag{6.5}$$

формулу (6.3) для накоплений за время t можно переписать в виде:

$$C(t)=C\cdot e^{\delta t}. \tag{6.6}$$

В общем случае, когда условие $\delta(t)$ = const не выполняется, интенсивность процентов и накопления капитала связаны между собой соотношениями:

$$\delta(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{C(t)\Delta t}=\frac{C'(t)}{C(t)}=(\ln C(t))'\Rightarrow (\ln C(t))\Big|_0^t=\int_0^t\delta(t)dt;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t)=C(0)\exp\left(\int_0^t\delta(t)dt\right).$$

Таким образом, накопление суммы C, которую надо будет выплатить через время t составит:

$$C(t)=\begin{cases}Ce^{\delta t}=C(1+i)^{-t} & \text{при } \delta(t)=\text{const};\\ Ce^{\left(\int_0^t\delta(t)dt\right)} & \text{при } \delta(t)\neq\text{const}.\end{cases}$$

Обозначим через $A(t_1, t_2)$ отношение величины вклада в момент t_2 к величине вклада в момент t_1. Эту величину называют *коэффициентом накопления* за промежуток времени $[t_1, t_2]$.

$$A(t_1,t_2)=\frac{C(t_2)}{C(t_1)}.$$

Поскольку (по определению)

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\frac{A(t,t+h)-1}{h},$$

верно равенство

$$A(t_1,t_2)=\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\right\}.$$

ПРИМЕР 6.1[1]

Банк начисляет проценты по вкладам, используя коэффициенты накопления, основанные на переменной интенсивности процентов. 1 июля 1983 г. клиент положил £ 50 000 в банк. На 1 июля 1985 г. его вклад вырос до £ 59 102. Предполагая, что интенсивность процентов являлась линейной функцией времени в течение всего периода с 1 июля 1983 г. по 1 июля 1985 г., найдите интенсивность процентов 1 июля 1984 г.

Решение

Примем 1 июля 1983 г. в качестве начального момента времени, а один год — в качестве единицы измерения времени. Тогда 1 июля 1985 г. — это момент $t = 2$, а 1 июля 1984 г. — момент $t = 1$.

Поскольку (по условию) $\delta(t)$ — линейная функция от t, она дается формулой

$$\delta(t) = a + bt,$$

где a и b — некоторые параметры.

Тогда для коэффициента накопления за промежуток $(0, t)$ имеем:

$$A(0,t)=\exp\left(\int_0^t\delta(u)du\right)=\exp\left(\int_0^t(a+bu)du\right)=\exp\left(au+\frac{bu^2}{2}\Bigg|_0^t\right)=\exp\left(at+\frac{bt^2}{2}\right).$$

Известно, что $A(0, 2) = 59\,102/50\,000 = 1{,}18204$.

С другой стороны, из полученной выше формулы для $A(0, t)$ следует, что $A(0, 2) = \exp(2a + 2b)$.

Нас интересует $\delta(1) = a + b \cdot 1 = a + b$. Сумма $a + b$ фигурирует в вышеприведенной формуле для $A(0, 2)$, откуда ее легко найти:

$$a + b = \frac{1}{2}\ln A(0, 2) = \frac{1}{2}\ln 1{,}18204 \approx 0{,}083621.$$

Значит, интенсивность процентов на 1 июля 1984 г. была равна $\delta(1) = 0{,}083621$.

6.1.3. Номинальные процентные ставки

Рассмотрим промежуток времени длиной $1/p$. Если в качестве единицы измерения принят один год, то наиболее важными являются случаи: $p=12$ (рассматриваемый промежуток времени равен одному месяцу), $p=4$ (для промежутка времени один квартал), $p = 2$ (рассматриваемый промежуток времени равен полугодию). Эффективная процентная ставка $i_*^{(p)}$ за этот промежуток времени составляет

$$i_*^{(p)}=(1+i)^{1/p}-1=e^{\delta/p}-1.$$

При этом в финансовой математике принято характеризовать доходность вложения средств на промежутке $1/p$ не эффективной (т.е. реаль-

[1] *McCutcheon J. J., Scott W. F.* An Introduction to the Mathematics of Finance. Butterworth-Heinemann, 1986.

ной) процентной ставкой $i_*^{(p)}$, а так называемой *номинальной процентной ставкой* $i^{(p)}$ (*nominal rate of interest*):

$$i^{(p)} = p \cdot i_*^{(p)}. \qquad (6.7)$$

Следует отметить, что номинальная процентная ставка служит лишь удобным способом описания реально применяемой эффективной ставки $i_*^{(p)} = i^{(p)}/p$.

Из формул (6.2) и (6.5) мы имеем:

$$i^{(p)} = p((1+i)^{1/p} - 1) = p(e^{\delta/p} - 1). \qquad (6.8)$$

ПРИМЕР 6.2

Пусть эффективная годовая процентная ставка $i = 12\%$.

Найдите ежемесячные, квартальные и полугодовые эффективные и номинальные процентные ставки.

Решение

Согласно формуле (6.2):

$$i_*^{(p)} = (1+i)^{1/p} - 1.$$

Тогда эффективные процентные ставки равны:

месячная $i_*^{(12)} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1{,}12)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}95\%$,

квартальная $i_*^{(4)} = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1{,}12)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 2{,}87\%$,

полугодовая $i_*^{(2)} = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1{,}12)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 5{,}83\%$.

Они показывают, как реально начисляются проценты каждый период времени $1/p$.

Соответствующие номинальные процентные ставки находятся по формуле (6.7):

$$i^{(p)} = p \cdot i_*^{(p)}.$$

Таким образом, расчетные значения номинальных процентных ставок равны:

месячная $i^{(12)} = 12 \cdot i_*^{(12)} = 12 \cdot 0{,}95 = 11{,}39\%$,

квартальная $i^{(4)} = 4 \cdot i_*^{(4)} = 4 \cdot 2{,}87 = 11{,}49\%$,

полугодовая $i^{(2)} = 2 \cdot i_*^{(2)} = 2 \cdot 5{,}83 = 11{,}68\%$.

Как видим, номинальные процентные ставки отличаются от годовой эффективной.

Иногда величину $i^{(p)}$ называют *номинальной процентной ставкой, выплачиваемой* (*начисляемой*) *с частотой p* (*nominal rate of interest payable (convertible) pthly*). Понятие номинальной процентной ставки, а также формулы (6.7) и (6.2) очень важны при расчете рент, страховых премий, пенсий.

6.1.4. Приведенная ценность денег. Коэффициент дисконтирования

Предположим, что в момент времени $t > 0$ в будущем мы должны будем выплатить некоторую сумму C. Возникает вопрос, какую сумму $C(-t)$

необходимо вложить сейчас (в момент $t_0 = 0$), чтобы к моменту t иметь в точности требуемую сумму C? Как следует из параграфа 6.1.3, для этой суммы выполняется соотношение:

$$C(-t)\cdot(1+i)^t = C;$$

$$C(-t) = C\cdot(1+i)^{-t} = C\cdot e^{-\delta t}. \tag{6.9}$$

Формулы (6.3) и (6.9) означают, что ценность денег постоянно меняется с течением времени.

ПРИМЕР 6.3[1]

Пусть эффективная годовая процентная ставка $i = 12\%$, тогда сумма $C = 1000$ руб. в настоящий момент превратится в сумму $1000(1 + i) = 1120$ руб. спустя один год. В то же время, $C = 1000$ руб. в настоящий момент может быть получено инвестированием $1000\,(1+ i)^{-1} = 892{,}86$ руб. годом раньше. Если, например, в момент $t_0 = 0$ нам должны вернуть 1000 руб, то мы можем согласиться на возврат 892,86 руб. в момент $t = -1$ (поместив их в банк, мы все равно получим в момент $t_0 = 0$ сумму 1000 руб.). Однако, в момент $t = 1$ мы должны требовать возврата 1120 руб. Ведь если бы в момент $t_0 = 0$ нам вернули 1000 руб, то поместив их в банк, к моменту $t = 1$ мы бы имели 1120 руб.

Таким образом, суммы

892,86 руб. в момент $t = -1$,

1000 руб. в момент $t = 0$,

1120 руб. в момент $t = +1$ в сущности, эквивалентны (при фиксированной процентной ставке $i = 12\%$). Это означает, что ценность денег постоянно меняется с течением времени.

Поэтому производить любые сравнения, сложения и т.п. над денежными суммами можно только при условии, что все эти суммы рассматриваются в один и тот же момент времени.

Как следует из (6.9) ценность суммы C в момент $t > 0$ есть

$$C\cdot(1+i)^{-t} = C\cdot e^{-\delta t}.$$

Если $t < 0$, то стоимость в момент $t_0 = 0$ суммы C в момент t равна сумме, накопленной за время $t' = -t$. Как следует из раздела 6.1.3, эта сумма равна

$$C\cdot(1+i)^{t'} = C\cdot(1+i)^{-t}.$$

Таким образом, вне зависимости от знака t, ценность в момент $t_0 = 0$ суммы C в момент t есть

$$P(t) = C\cdot(1+i)^{-t} = C\cdot e^{-\delta t}. \tag{6.10}$$

Величина $P(t)$ называется *современной ценностью* (*present value, PV*) суммы C в момент t. В литературе встречаются термины *современная стоимость*, *приведенная стоимость* и т.д.

Приведенная ценность единичной суммы ($C = 1$) обозначается $\nu(t)$:

$$\nu(t) = (1+i)^{-t} = e^{-\delta t}. \tag{6.10a}$$

[1] *Фалин Г. И.* Указ. соч.

Величину

$$\nu = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta} \tag{6.10б}$$

называют *коэффициентом дисконтирования* (*учета*) (*discount factor*). Тогда формула приведенной стоимости (6.10) примет вид:

$$P(t) = C\nu^{t}. \tag{6.11}$$

Коэффициент дисконтирования показывает, какую величину ν нужно вложить сейчас при процентной ставке i, чтобы через год получить единичную сумму $C = 1$.

Поскольку начальный момент времени может быть выбран произвольно, ценность C_1 в момент t_1 суммы C_2 в момент t_2 дается формулой:

$$C_1 = C_2\nu^{t_2 - t_1}.$$

Отсюда следует, что $C_1\nu^{t_1} = C_2\nu^{t_2}$ — эта формула выражает одинаковую ценность обеих сумм в момент $t_0 = 0$.

ПРИМЕР 6.4[1]

Пенсионный фонд должен выплатить участнику 26 000 руб.:

- 5000 руб. 1 июня 2009 г.;
- 6000 руб. 1 февраля 2012 г.;
- 7000 руб. 1 ноября 2013 г.;
- 8000 руб. 1 мая 2015 г.

Найдите величину обязательств фонда по отношению к этому участнику на 1 января 2008 г. Техническая процентная ставка, используемая фондом для оценки своих обязательств, $i = 5\%$.

Решение

Пусть время измеряется в годах, начиная с 1 января 2008 г., а один месяц равен 1/12 года. Тогда:

- 1 июня 2009 г. — это момент $t_1 = 1\frac{5}{12} = \frac{17}{12}$;
- 1 февраля 2012 г. — это момент $t_2 = 4\frac{1}{12} = \frac{49}{12}$;
- 1 ноября 2013 г.— это момент $t_3 = 5\frac{10}{12} = \frac{70}{12}$;
- 1 мая 2015 г. — это момент $t_4 = 7\frac{4}{12} = \frac{88}{12}$.

Коэффициент дисконтирования ν дается формулой

$$\nu = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1{,}05} \approx 0{,}95238,$$

поэтому величина обязательств фонда на 1 января 2008 г. равна

$$5000\,\nu^{17/12} + 6000\,\nu^{49/12} + 7000\,\nu^{70/12} + 8000\,\nu^{88/12} = 20\,442{,}16 \text{ руб.}$$

[1] Прообраз задачи см.: *Фалин Г. И.* Указ. соч.

6.1.5. Эффективная и номинальная учетная ставка, связь с другими финансовыми показателями

Предположим, что в момент $t_0 = 0$ мы даем взаймы сумму C. В таком случае в момент $t = 1$ нам должны вернуть сумму $C \cdot (1 + i)$, которая состоит из двух частей: возврата основного капитала C и процентов на капитал $C' = C \cdot i$.

Сумма $C \cdot i$ в момент $t = 1$, будучи приведенной к моменту $t_0 = 0$, имеет ценность

$$C \cdot i \cdot (1+i)^{-1}.$$

Поэтому проценты на капитал могут быть выплачены и заранее, в момент $t_0 = 0$ получения займа. Тогда, из полученных выше формул, эти проценты, выплачиваемые вперед, составляют $d = i/(i + 1)$ от первоначальной суммы займа C.

Величина d называется *эффективной учетной ставкой* (*effective rate of discount)* за единицу времени.

Учетная ставка d может быть выражена как через интенсивность процентов δ, так и через коэффициент дисконтирования ν:

$$d = 1 - \nu = 1 - e^{-\delta}. \tag{6.12}$$

Предположим, что теперь сумма $C = 1$ дается в долг на время $1/p$ с предварительной выплатой процентов. При этом эффективная процентная ставка за период $1/p$ есть

$$i_*^{(p)} = \frac{i^{(p)}}{p} = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1.$$

Именно эта сумма должна быть выплачена в момент $t = 1/p$ в виде процентов. Если ее привести к моменту $t_0 = 0$, то согласно (6.10) она будет иметь ценность

$$i_*^{(p)} \cdot (1+i)^{-\frac{1}{p}} = 1 - (1+i)^{-\frac{1}{p}}.$$

Так как $i = d(1 - d)$, то для эффективной учетной ставки $d_*^{(p)}$ за время $1/p$ получим формулу:

$$d_*^{(p)} = 1 - (1-d)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.13}$$

Однако в финансовой математике, как уже отмечалось, принято работать не с эффективными (т.е. реальными) учетными ставками за время $1/p$, а с так называемыми номинальными (т.е. условными, не существующими реально) *учетными ставками (nominal rate of discount)*:

$$d^{(p)} = p \cdot d_*^{(p)}. \tag{6.14}$$

Из формулы (6.13) получим:

$$d^{(p)} = p\left(1 - (1-d)^{\frac{1}{p}}\right). \tag{6.15}$$

Величину $d^{(p)}$ называют *номинальной учетной ставкой, начисляемой с частотой p* (*nominal rate of discount convertible pthly*).

Понятие номинальной учетной ставки, а также формулы (6.14) и (6.15) очень важны при расчете рент, страховых премий и пенсий.

ПРИМЕР 6.5[1]

Проценты по определенному банковскому счету начисляются в соответствии с переменной интенсивностью процентов:

$$\delta(t) = \frac{t^2}{100},\ t > 0.$$

В момент $t_0 = 0$ на счет кладется сумма 100 у.е., а в момент $t = 3$ вносится дополнительная сумма X. Найдите эту сумму, если известно, что она равна процентам, начисленным за промежуток времени $3 \le t \le 6$.

Решение

Предположим, что в момент t_1 сделан вклад в размере 1.

Введенный выше коэффициент накопления

$$A(t_1,t_2) = \frac{C(t_2)}{C(t_1)} = \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\,dt\right\}.$$

В нашем случае

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^2}{100}dt = \left.\frac{t^3}{300}\right|_{t_1}^{t_2} = \frac{t_2^3 - t_1^3}{300},$$

так что

$$A(t_1,t_2) = \exp\left\{\frac{t_2^3 - t_1^3}{300}\right\}.$$

В момент $t = 3 + 0$ на счете будет сумма

$$100 \cdot A(0, 3) + X = 100 \cdot e^{0,09} + X,$$

а в момент $t = 6$ она вырастет до

$$(100 \cdot e^{0,09} + X) \cdot A(3, 6) = (100 \cdot e^{0,09} + X) \cdot e^{0,63}.$$

Поэтому проценты за промежуток $3 \le t \le 6$ равны $(100 \cdot e^{0,09} + X) \cdot (e^{0,63} - 1)$.

С другой стороны, по условию эти проценты равны X. Решая получившееся уравнение, получаем:

$$X = \frac{100 \cdot e^{0,09} \cdot \left(e^{0,63} - 1\right)}{2 - e^{0,63}} \approx 784{,}59 \text{ у.е.}$$

6.2. Финансовые ренты

6.2.1. Оценивание серии платежей. Понятие ренты

В финансовых расчетах часто возникает задача перерасчета сумм для возврата в условиях изменения договора между сторонами по обоюдному согласию — погашение кредита и т.п.

---

[1] *Course/Exam 2 – Economics, Finance and Interest Theory*. The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2001.

ПРИМЕР 6.6[1]

Предположим, что должник обязан вернуть два долга: 1000 руб. через год и 2000 руб. через три года. Однако он хотел бы вернуть оба долга немедленно, и его кредиторы согласны пойти на это. Какую сумму он должен выплатить в этой ситуации?

Пусть должнику предлагают выплатить просто сумму 1000 + 2000 = 3000 руб. и допустим, что в течение рассматриваемого промежутка времени банки дают $i = 10\%$ годовых по вкладам. Если он просто поместит 3000 руб. в банк, то через год будет иметь 3300 руб., из которых он выплатит 1000 руб. первого долга; оставшиеся 2300 руб. через год превратятся в 2530 руб., а еще через год — в 2783 руб., из которых он выплатит 2000 руб. второго долга и будет иметь остаток 783 руб.

Значит, выплачивая немедленно простую алгебраическую сумму долгов, должник значительно переплачивает.

Имея ввиду эти рассуждения, попробуем определить какую сумму x он должен вернуть в настоящий момент, для того, чтобы эта финансовая операция была справедливой.

Через год сумма x руб. превратится в $x(1 + i)$ руб., из которых он выплатит первый долг $C_1 = 1000$ руб. Остаток $x(1 + i) - C_1$ через два года превратится в $[(x(1 + i) - C_1)(1 + i)](1 + i) = x(1 + i)^3 - C_1(1 + i)^2$ руб., из которых мы выплатим второй долг $C_2 = 2000$ руб.

Если остаток $x(1 + i)^3 - C_1(1 + i)^2$ положителен, то эта операция несправедлива по отношению к должнику; если же остаток отрицателен, то эта операция несправедлива по отношению к кредиторам. Итак, сумма x должна определяться из условия:

$$x(1 + i)^3 - C_1(1 + i)^2 - C_2 = 0,$$

что дает $x = C_1(1 + i)^{-1} + C_2(1 + i)^{-3}$.

Суммы $C_1(1 + i)^{-1} = C_1\nu$ и $C_2(1 + i)^{-3} = C_2\nu^3$ являются приведенными к настоящему моменту величинами долгов C_1, C_2, которые подлежат оплате в заданные моменты в будущем.

Итак, для того, чтобы рассматриваемая финансовая операция была справедливой, мы должны сначала привести оба долга к настоящему моменту:

1000 руб. через год сейчас имеют ценность $1000(1 + i)^{-1} = 909{,}09$ руб.;

2000 руб. через три года сейчас имеют ценность $2000(1 + i)^{-3} = 1502{,}63$ руб.

После этого мы можем подсчитать суммарный долг; в настоящий момент он равен 2411,72 руб. (909,09 + 1502,63). Именно эту сумму должник обязан вернуть своим кредиторам — это будет справедливое решение проблемы.

Действительно, если кредиторы просто поместят эту сумму в банк под 10% годовых, то через год они будут иметь 2652,89 руб. (2411,72 · 1,10). За вычетом 1000 руб. в счет погашения первого долга остается 1652,89 руб., которые через два года превратятся в 2000 руб. (1652,89 · 1,10), что точно позволит погасить и второй долг.

Рассмотренный пример показывает, что если мы хотим оценить серию выплат, которые должны быть сделаны в разные моменты времени, то все эти выплаты должны быть приведены к некоторому финансовому моменту $t_0 = 0$, после чего их можно складывать, сравнивать и т.д.

С точки зрения приложений к страхованию и пенсионным схемам наиболее важной является задача определения современной стоимости α серии из n выплат величиной $b_1, b_2, ..., b_n$ соответственно, которые будут сделаны в некоторые моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ в будущем. Величина α может

[1] Прообраз задачи см.: *Фалин Г. И.* Указ. соч.

рассматриваться, например, как сумма, которую человек должен внести в пенсионный фонд в момент заключения договора (этот момент обычно принимают за начальный) с тем, чтобы в будущем, в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$, получать пенсию величиной $b_1, b_2, ..., b_n$. Это означает, что

$$\alpha = b_1 \nu^{t_1} + b_2 \nu^{t_2} + \ldots + b_n \nu^{t_n}. \tag{6.16}$$

Если величина α будет рассчитана по этой формуле, то к моменту t_1 мы будем располагать накопленной суммой

$$\alpha(1+i)^{t_1} = \alpha\nu^{-t_1} = b_1 + b_2 \nu^{t_2 - t_1} + \ldots + b_n \nu^{t_n - t_1}.$$

Это позволит в момент t_1 выплатить первую пенсию величиной b_1. Оставшаяся сумма

$$\alpha_1 = b_2 \nu^{t_2 - t_1} + \ldots + b_n \nu^{t_n - t_1}$$

к моменту t_2, т.е. спустя время $t_2 - t_1$ возрастет до

$$\alpha_1 (1+i)^{t_2 - t_1} = \alpha_1 \nu^{t_1 - t_2} = b_2 + b_3 \nu^{t_3 - t_2} + \ldots + b_n \nu^{t_n - t_2}.$$

Это позволит в момент t_2 выплатить вторую пенсию величиной b_2 и т.д. После выплаты $(n - 1)$-й пенсии в момент t_{n-1} мы будем иметь капитал $b_n \nu^{t_n - t_{n-1}}$. К моменту t_n, т.е. спустя время $t_n - t_{n-1}$ после момента t_{n-1}, эта сумма вырастет до b_n, что позволит нам успешно выплатить и последнюю пенсию. Оставшаяся после этого сумма будет равна нулю, что означает справедливость расчета по формуле (6.16) по отношению к человеку, который купил в момент $t_0 = 0$ пенсию.

Выше рассмотрена ситуация, когда плата за пенсии производилась в виде разового взноса в момент заключения договора. Однако часто эта плата производится в виде нескольких (k) платежей (периодические премии) величиной $c_1, ..., c_k$ сделанных в моменты $\tau_1, ..., \tau_k$. Справедливое соотношение между взносами c_i и пенсионными выплатами b_i дается формулой

$$c_1 \nu^{\tau_1} + \ldots + c_k \nu^{\tau_k} = b_1 \nu^{t_1} + \ldots + b_n \nu^{t_n}. \tag{6.17}$$

Левая часть формулы (6.17) выражает современную ценность всех взносов в пенсионный фонд или страховую компанию, а правая — современную стоимость всех пенсионных выплат страхователю.

Кроме того, обоснование формулы (6.17) можно получить следующим образом.

Рассмотрим последовательность моментов времени $T_1, T_2, ..., T_{n+k}$ в которые происходит движение денежных потоков — осуществляется взнос в пенсионный фонд или выплата пенсии. Иными словами, объединим последовательности $t_1, t_2, ..., t_n$ и $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ в одну. Обозначим u_i величину платежа из фонда в момент T_i. Это означает, что если момент T_i является некоторым моментом t_j, когда выплачивалась пенсия b_j, то $u_i = b_j$; если же T_i является некоторым моментом τ_j, когда вносился взнос c_j в фонд, то $u_i = -c_j$. С учетом этих обозначений уравнение (6.17) можно переписать в виде

$$u_1 \nu^{T_1} + \ldots + u_{n+k} \nu^{T_{n+k}} = 0, \tag{6.18}$$

что полностью соответствует уравнению (6.16). Рассуждения, проведенные при обосновании уравнения (6.16), как нетрудно видеть, применимы и в случае, когда некоторые из величин b_i отрицательны (в этом случае мы рассматриваем их как взносы в фонд и изменение капитала в момент t_i от величины $b_i + b_{i+1}\nu^{t_{i+1}-t_i} + ...$ до величины $b_{i+1}\nu^{t_{i+1}-t_i} + ...$ на самом деле означает его увеличение). Поэтому уравнение (6.18) выражает тот факт, что окончательный баланс по рассматриваемому счету будет нулевым. В некоторые моменты возможен временный отрицательный баланс; на этих промежутках долг клиента растет в соответствии с формулой сложных процентов и гасится будущими увеличенными взносами. Если же выплаты пенсий начинаются только после выплаты всех взносов, то эта ситуация невозможна.

Описанная выше общая модель детерминированной пенсионной схемы на практике обычно не применяется. Реально используются схемы, обладающие той или иной формой регулярности как по величине взносов и выплат, так и по моментам осуществления этих платежей. Особо важным является случай серии платежей фиксированной величины, которые производятся через равные промежутки времени фиксированное число раз. Такие серии платежей обычно называют постоянными рентами (аннуитетами) (*level annuity*). В обозначениях модели (6.16) постоянная рента может быть определена следующим образом:

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n;$$

$$t_1 = t,\ t_2 = 2t,\ \ldots,\ t_n = nt.$$

Еще один важный случай — это *возрастающие ренты* (*increasing annuity*), когда

$$b_1 = b,\quad b_2 = 2b,\ \ldots,\ b_n = nb;$$

$$t_1 = t,\ t_2 = 2t,\ \ldots,\ t_n = nt.$$

6.2.2. Детерминированные постоянные ренты

Рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени (0, 1), ..., (n − 1, n). Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год (можно применять полученные формулы к неделе, месяцу, кварталу и т.д.).

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в конце этих промежутков, т.е. в моменты 1, 2, ..., n, называется *запаздывающей рентой* (*annuity payable in arrear* или *immediate annuity*) или *рентой постнумерандо* (рис. 6.1).

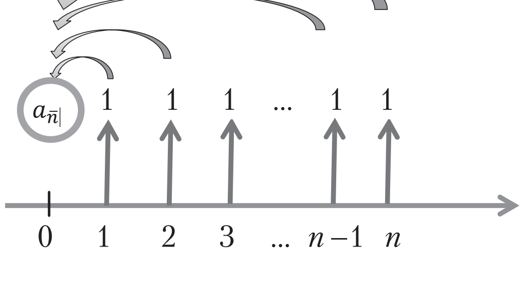

Рис. 6.1. **Приведенная (современная) стоимость постоянной запаздывающей ренты (постнумерандо)**

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в начале этих промежутков, т.е. в моменты 0, 1, 2, ..., $n - 1$, именуется *упреждающей рентой* (*annuity payable in advance* или *annuity-due*) или *рентой пренумерандо* (рис. 6.2).

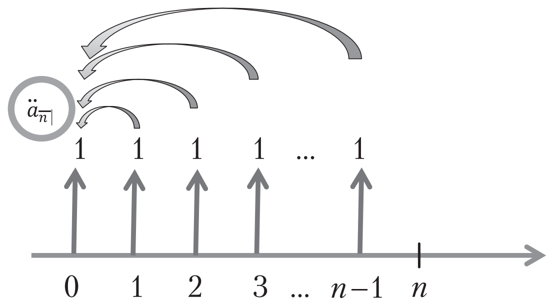

Рис. 6.2. **Приведенная (современная) стоимость постоянной упреждающей ренты (пренумерандо)**

Различие между запаздывающей и упреждающей рентой условное и связано с выбором начала отсчета. Ясно, что если в качестве начального момента выбрать момент $t = 1$, то запаздывающая рента может рассматриваться как упреждающая.

Приведенная ценность запаздывающей (упреждающей) ренты в момент $t_0=0$ в финансовой математике обозначается $a_{\overline{n}|}$ (соответственно, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$). Иными словами, $a_{\overline{n}|}$ (соответственно, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$) — это современная стоимость серии из n платежей величины 1, производимых через единичные интервалы, на единицу времени раньше, чем момент первого платежа (соответственно, в момент первого платежа).

Чтобы подсчитать эти величины, приведем каждый из n платежей к начальному моменту времени $t_0=0$, затем сложим полученные значения:

$$a_{\overline{n}|} = \nu + \nu^2 + \ldots + \nu^n; \tag{6.19}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + \nu + \nu^2 + \ldots + \nu^{n-1}. \tag{6.20}$$

Суммируя эти геометрические прогрессии с показателем $q=\nu$, получим:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{\nu - \nu^{n+1}}{1-\nu} = \frac{\nu\left(1-\nu^n\right)}{1-\nu} = \frac{1-\nu^n}{\frac{1}{\nu}-1} = \frac{1-\nu^n}{i}; \tag{6.21}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-\nu^n}{1-\nu} = \frac{1-\nu^n}{d}. \tag{6.22}$$

ПРИМЕР 6.7[1]

Эксперты негосударственного пенсионного фонда предполагают, что на протяжении ближайших пяти лет эффективная годовая процентная ставка будет равна i_1 = 10%. На протяжении следующего пятилетия ожидается годовая процентная ставка i_2 = 6%. Человек покупает десятилетнюю ренту с выплатой в конце каждого года 1000 руб. Подсчитайте ее стоимость.

[1] *Фалин Г. И.* Указ. соч.

Решение

Приведенная ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ пяти годовых платежей в моменты 1, 2, 3, 4, 5 равна $1000 \cdot a_{\overline{5|}@i_1}$, где символ $@i_1$ указывает эффективную годовую процентную ставку на промежутке, который рассматривается в качестве единичного, т.е.

$$1000\frac{1-\nu_1^5}{i_1} \approx 3791 \text{ руб.}$$

Приведенная ценность в момент $t_5 = 5$ пяти годовых платежей в моменты 6, 7, 8, 9, 10 равна

$$1000 \cdot a_{\overline{5|}@i_2} = 1000\frac{1-\nu_2^5}{i_2} \approx 4212 \text{ руб.}$$

Чтобы привести эту сумму к моменту $t_0 = 0$, умножим ее на ν_1^5, что даст ≈ 2616 руб.

Итак, стоимость ренты равна:

$$X = 1000 \cdot \frac{1-\nu_1^5}{i_1} + \nu_1^5\left(1000 \cdot \frac{1-\nu_2^5}{i_2}\right) \approx 3791 + 2616 = 6407 \text{ руб.}$$

В тривиальном случае $i = 0$, когда ценность денег не меняется с течением времени, очевидно, $a_{\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} = n$.

Кроме того, удобно положить $a_{\overline{0|}} = \ddot{a}_{\overline{0|}} = 0$. Это согласуется с общепринятым принципом считать суммы из нулевого количества слагаемых равными нулю.

Величины $a_{\overline{n|}}$ и $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ позволяют подсчитать величину суммы, которую нужно инвестировать в данный момент для того, чтобы получать фиксированный регулярный доход в будущем (например, пенсию). С их помощью также можно определить величину регулярных выплат в случае, когда долг возвращается не одним платежом, а серией одинаковых платежей.

Бывает важно знать ценность ренты не в начальный момент времени, а в конце последнего платежного периода. Эту ценность можно интерпретировать как общую сумму, накопленную на банковском счете после серии регулярных взносов. Ее обозначают так же, как и соответствующую приведенную стоимость в начальный момент, но с заменой буквы *a* на букву *s*.

Итак, $s_{\overline{n|}}$ — это приведенная стоимость запаздывающей ренты (постнумерандо) в момент $t_n = n$ последнего платежа,

$\ddot{s}_{\overline{n|}}$ — приведенная стоимость упреждающей ренты (пренумерандо) в момент $t_n = n$, т.е. спустя единицу времени после последнего платежа.

Формулы для приведенных к концу платежного периода стоимостей $s_{\overline{n|}}$, $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ можно получить непосредственно, приведя каждый из n платежей к моменту времени $t_n = n$ и затем суммируя полученные значения:

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i};$$

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^n + \ldots + (1+i) = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i/(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

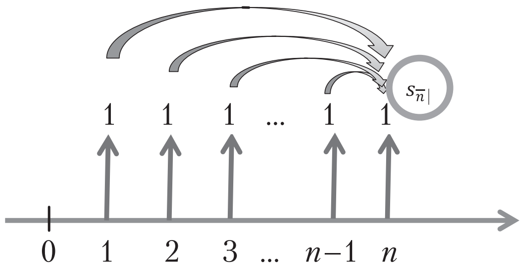

Рис. 6.3. **Приведенная к концу платежного периода стоимость постоянной запаздывающей ренты (постнумерандо)**

Эти же формулы можно получить, приводя к моменту $t_n = n$ значение стоимости соответствующей ренты, приведенной к моменту времени $t_0 = 0$:

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{1-(1+i)^n}{i}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \qquad (6.23)$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{1-(1+i)^n}{d}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \qquad (6.24)$$

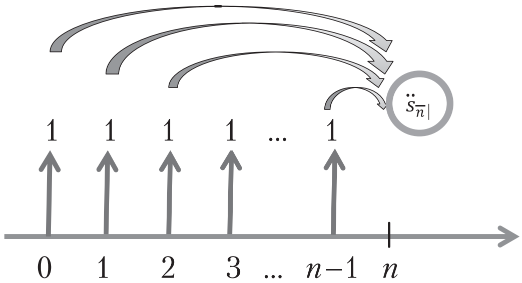

Рис. 6.4. **Приведенная к концу платежного периода стоимость постоянной упреждающей ренты (пренумерандо)**

Введенные выше величины связаны между собой различными тождествами. Часть из них уже приведена. Интересными с точки зрения финансовой интерпретации являются следующие формулы[1]:

$$ia_{\overline{n}|} + \nu^n = 1; \qquad (6.25)$$

$$d\ddot{a}_{\overline{n}|} + \nu^n = 1; \qquad (6.26)$$

$$is_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n; \qquad (6.27)$$

$$d\,\ddot{s}_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n. \qquad (6.28)$$

Они легко доказываются алгебраическими преобразованиями. Например, для формулы (6.25) эта интерпретация выглядит следующим образом.

Поместим в момент $t_0 = 0$ на счет сумму $C = 1$. В момент $t_1 = 1$ мы получим в виде процентов сумму i и неизменный исходный капитал $C = 1$. Снимем сумму i со счета, а капитал инвестируем еще на один промежуток вре-

[1] *Фалин Г. И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М. : Анкил, 2007.