Ю. Н. Черемных
П. Н. Клюкин

Математический анализ в экономике

Учебное пособие

Palmarium Academic Publishing

Imprint
Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:
Palmarium Academic Publishing
is a trademark of
International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group
17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page
ISBN: 978-3-659-72452-7

Черемных Ю.Н., Клюкин П.Н.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЭКОНОМИКЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают искреннюю и глубокую благодарность сотруднику кафедры математических методов анализа экономики экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова Загайновой И.А.

Автор

ГЛАВА ПЕРВАЯ. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе в кратком (предварительном) виде приведены некоторые понятия и результаты курса математического анализа, которые активно используются в экономической теории и некоторых ее приложениях.

1.1. ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ ФИРМЫ

1.1.1. Под *фирмой* понимается элемент хозяйственной системы (элемент реального сектора). Фирма затрачивает *ресурсы* и выпускает готовую *продукцию*, например, валенки. Издержки C фирмы — это оплата затрачиваемых ресурсов. Свой *доход* (*выручку*) R фирма получает от реализации на рынке произведенной ею продукции. Разность между доходом R и ее издержками C равна *прибыли* PR фирмы, т.е. $PR = R - C$. Доход, издержки и прибыль привязаны к одному *периоду времени*, который называется *производственным периодом фирмы* (далее, для конкретности,— периодом). Производственный период может равняться одному году, одному кварталу, одному месяцу, одной декаде, одной неделе, одним суткам.

Если фирма реализовала в течение периода y пар валенок по *рыночной цене* p_0 за одну пару (цена p_0 постоянна в течение одного периода), то доход R фирмы равен $R = p_0 y$. В течение периода фирма затратила K единиц капитала (число K принимают равным объему износа специальных машин; например, если на фирме работает S штук специальных машин, то $K = \gamma S$, где число γ может равняться, скажем, 0,1, т.е. объем износа здесь равен 10%), L единиц труда (например, L единиц человеко-дней) и M единиц материалов (например, тюков с шерстью). Если p_K — рыночная цена одной единицы капитала, p_L — рыночная цена одной единицы труда, p_M — рыночная цена одной единицы материалов, то издержки фирмы равны $C = p_K K + p_L L + p_M M$. Для прибыли фирмы имеем выражение

$$PR = R - C = p_0 y - \left(p_K K + p_K L + p_M M\right)$$

(эта формула отражает следующую достаточно естественную ситуацию: получил доход — сначала оплати издержки, то, что останется после этого от дохода, и есть прибыль).

Классическая задача теории фирмы — это задача максимизации прибыли фирмы: $PR\,(\max)$.

1.1.2. Рассмотрим вариант задачи максимизаци приьбыли фирмы, когда производственная деятельность фирмы описывается с помощью *производственной функции*, аргументами которой являются объемы K, L, M затрачиваемых фирмой ресурсов, а значением производственной функции является объем y выпускаемой фирмой продукции. Таким образом, производственная функция (ПФ) фирмы имеет вид $y = f(K, L, M)$. Тройка объемов (т.е. трехмерный вектор) (K, L, M) называется *конфигурацией ресурсов*. В рассматриваемом варианте задача максимизации прибыли фирмы имеет вид

$$p_0 f(K, L, M) - p_K K - p_L L - p_M M = PR\,(\max), \tag{1}$$

т.е. сколько и каких ресурсов фирма должна приобрести, чтобы ее прибыль была максимальной.

1.1.3. Метод решения задач максимизации типа задачи (1) (см. раздел 1.1.2) описан позже (в разделе 1.4.1). Сейчас рассмотрим упрощенный вариант этой задачи.

Предположим, что фирма располагает фиксированным объемом $\overline{K}$ капитала и фиксированным объемом $\overline{M}$ материалов. Спрашивается, сколько единиц труда $\hat{L}$ фирма должна приобрести на рынке труда для того, чтобы максимизировать свою прибыль?

В рассматриваемом варианте прибыль $PR(L)$ имеет вид

$$PR(L) = p_0 f(\overline{K}, L, \overline{M}) - p_K \overline{K} - p_L L - p_M \overline{M}.$$

Пусть для определенности $f(\overline{K}, L, \overline{M}) = b_0 L^\beta$ (скалярные параметры b_0 и β положительны, и $\beta < 1$). Полагая $p_K \overline{K} + p_M \overline{M} = q$, получим задачу максимизации прибыли фирмы (1) в следующей форме (2):

$$PR(L) = p_0 b_0 L^\beta - p_L L - q\,(\max), \tag{2}$$

где $p_0 b_0 L^\beta = R$, и $p_L L + q = C$.

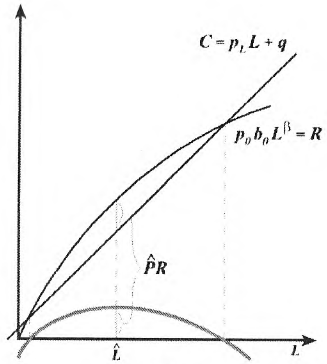

Рис. 1.1.

На Рис. 1.1 представлены графики функции дохода $R = p_0 b_0 L^\beta$, издержек $C = p_L L + q$ и прибыли $PR = R - C$. Очевидно, график прибыли PR есть линия, похожая на «шапочку», у которой есть «макушка» $\hat{P}R$, абсцисса $\hat{L}$, показывающая объем труда $\hat{L}$, который необъодимо приобрести фирме на рынке труда в целях максимизации прибыли PR. Таким образом, на Рис. 1.1 дано графическое (геометрическое) решение задачи (2) максимизации прибыли фирмы как функции одного ресурса (труда).

К сожалению, геометрическое решение (когда оно возможно, как в рассматриваемом варианте) может иметь невысокую точность и поэтому не годится в качестве ответа.

В принципе возможная геометрическая интерпретация может быть очень сложной в реализации и поэтому мало полезной для получения решения задачи с приемлемой точностью. Экономические задачи, как правило, имеют достаточно высокую размерность и не допускают наглядной геометрической интерпретации (например, для геометрического решения задачи (1) (см. раздел 1.1.2) следует использовать четырехмерное пространство, которое не имеет наглядного геометрического представления).

Отмеченные обстоятельства (невысокая точность геометрических решений, возможный высокий уровень сложности геометрических построений, невозмодждность получения геометрического решения в случае высокой размерности экономической задачи) представляют собой серьезное основания для использования аналитических и компьютерных методов для решения экономических задач.

Отметим также, что геометрическая интрепретация решения экономической задачи (если она возможна) может оказаться полезным дополнением аналитического (или компьютерного) решения этой задачи.

Для аналитического решения задачи (2) используем *условие первого порядка*, т.е. найдем производную прибыли $PR(L)$ по переменной L и приравняем эту производную к нулю:

$$PR'_L = p_0 b_0 \beta L^{\beta-1} - p_L = 0\,,$$

откуда вытекает, что

$$p_0 b_0 \beta L^{\beta-1} = p_L\,,$$

или (учитывая, что $0 < \beta < 1$)

$$L^{1-\beta} = \frac{p_0 b_0 \beta}{p_L}\,,$$

что позволяет получить явное выражения для $\hat{L}$:

$$\hat{L} = \left(\frac{p_0 b_0 \beta}{p_L}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

1.1.4. Строго говоря, условие первого порядка (равенство нулю первой производной PR'_L прибыли $PR(L)$ по переменной L) есть необходимое условие, но недостаточное условие максимизации функции $PR(L)$ по переменной L. Достаточным условием того, что при $L = \hat{L}$ функция $PR(L)$ достигает своего максимума, является *условие второго порядка*: если вторая производная PR''_L функции $PR(L)$ по переменной L в точке $\hat{L}$ отрицательна, то точка $\hat{L}$ — точка максимума функции $PR(L)$. Покажем, что в рассматриваемом случае это действительно так:

$$PR''_L(L) = p_0 b_0 \beta(\beta-1)L^{\beta-2} < 0$$

(ибо $0 < \beta < 1$) и, следовательно,

$$PR''_L(\hat{L}) = p_0 b_0 \beta(\beta-1)\left(\hat{L}\right)^{\beta-2} < 0\,.$$

Таким образом, при $L = \hat{L}$ функция $PR(L)$ имеет максимум

$$\hat{PR} = PR(\hat{L}) = p_0 b_0 \left(\hat{L}\right)^{\beta} - p_L \hat{L} - q = p_L \frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{p_0 q_0 \beta}{p_L}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} - q\,.$$

Максимальная прибыль $\hat{PR}$ может быть положительной, отрицательной или нулевой. На Рис. 1 представлен случай, когда $\hat{PR} > 0$.

1.1.5. $\boxed{P}$ Дать геометрическую интерпретацию случаям а) $\hat{PR} = 0$ и б) $\hat{PR} < 0$.

1.1.6. Замечание. Символ $\boxed{P}$ означает обязательную задачу или обязательные задачи (в разделе 1.1.5 две обязательные задачи: а) и б)). Обязательные задачи (наряду с прочитанным на лекции материалом и с материалом для самостоятельного чтения) входят в теоретические блоки контрольных и экзаменационных работ.

1.1.7. Материал разделов 1.1.3—1.1.4 показывает, что даже для решения достаточно простых экономических задач требуется привлечение разнообразного понятийного математического аппарата и широкого круга математических методов.

1.1.8 В разделе 1.1.2 речь шла о производственной функции (ПФ) $y = f(K, L, M)$, зависящей от трех ресурсов (от трех факторов производства: капитала, труда и материалов). Такие ПФ называются трехфакторными. ПФ, зависящая от двух ресурсов (факторов) (обычно это капитал и труд), называется *двухфакторными*. ПФ: $y = f(K, L)$. ПФ, зависящая от одного ресурса (фактора) (как это было в разделе 1.1.3), называется *однофакторной*. Далее, в качестве иллюстрации будут использоваться в основном двухфакторные производственные функции $y = f(x_1, x_2)$, где символом x_1 обозначается количество капитала, символом x_2 — количество труда.

Приведем примеры двухфакторных производственных функций ПФ.

ПФ линейная (ЛПФ)

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2\,,$$

параметры a_0, a_1, a_2 — неотрицательные числа, $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 > 0$, переменные x_1 и x_2 по экономическому смыслу неотрицательны.

ПФ Кобба-Дугласа (ПФ КД)

$$y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\,,$$

параметр $a_0 > 0$, параметры α_1 и α_2 неотрицательны, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, часто (но не всегда) $\alpha_1 + \alpha_2 \le 1$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

ПФ затраты-выпуск (ПФ Леонтьева)

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}; \frac{x_2}{a_2}\right),$$

параметры a_1 и a_2 — положительные числа, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

ПФ с постоянной эластичностью замены одного ресурса другим (ПФ ПЭЗР)

$$y = a_0\left(a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha}\right)^{-\frac{h}{\alpha}},$$

параметры a_0, a_1, a_2 — положительные числа, параметры α и h — обычно положительные числа, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

1.2. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.2.1. Множество (всех) действительных чисел обозначается символом $\mathbf{E}_1$ (или $\mathbf{R}_1$). Из курса школьной математики известно, что каждому действительному числу x соответствует точка M на числовой прямой (на числовой оси). Верно и обратное, т.е. каждой точке M' на числовой прямой соответствует действительное число x'. Поэтому действительное число называют точкой (более точно — *одномерной* точкой), а точку (одномерную точку) называют числом. Для множества всех действительных чисел и для числовой прямой (числовой оси) используют единый символ $\mathbf{E}_1$ (или $\mathbf{R}_1$).

Если множество A действительных чисел (например, отзезок $[a,b]$) есть подмножество множества $\mathbf{E}_1$, то пишут $A \subseteq \mathbf{E}_1$ (имеем в случае отрезка $[a,b] \subseteq \mathbf{E}_1$). Множество A ($A \subseteq \mathbf{E}_1$) называется числовым множеством или точечным множеством прямой $\mathbf{E}_1$.

Если множество не содержит ни одного элемента, оно называется *пустым*. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

Из курса школьной математики изветсно, что каждой упорядоченной паре (x, y) действительных чисел x и y соответствует точка (более точно — двумерная точка) M на плоскости Oxy (см. Рис. 1.2). Верно и обратное, т.е. каждой точке (двумерной точке) M' плоскости Oxy соответствует упорядоченная пара (x', y') действительных чисел x' и y'. Поэтому упорядоченную пару действительных чисел называют (двумерной) точкой, а (двумерную) точку называют упорядоченной парой действительных чисел.

Напомним, что упорядоченную пару (x, y) действительных чисел x и y называют *двумерным вектором*. Этот термин в главе первой будет часто использоваться. Наряду с термином двумерный вектор будет также использоваться термин (двумерная) точка.

Действительные числа x и y называются *координатами* (двумерного) вектора, (двумерной) точки.

Для множества всех двумерных векторов и для множества всех точек плоскости Oxy (т.е. для самой плоскости Oxy) используют один и тот же символ $\mathbf{E}_2$ (или $\mathbf{R}_2$). Символ $A \subseteq \mathbf{E}_2$ означает, что множество A есть подмножество множества $\mathbf{E}_2$. Множество A ($A \subseteq \mathbf{E}_2$) называется также точечным множеством плоскости $\mathbf{E}_2$.

1.2.2. Пусть A и B — непустые числовые множества (т.е. $\varnothing \neq A \subseteq \mathbf{E}_1$, $\varnothing \neq B \subseteq \mathbf{E}_1$). Говорят, что задана *функция* f, если по определенному правилу каждому числу x из множества $A \subseteq \mathbf{E}_1$ ставится *в соответсивие* единственное (для каждого числа x, вообще говоря, свое) число y из множества B.

1.2.3. Число y, которое функция f (см. раздел 1.2.2) ставит в соответствие числу x, обозначается символом $f(x)$ и называется *частным значением* (или просто — *значением*) функции f на числе x, т.е. $y = f(x)$. Число y называется также *образом* числа x, а число x — *прообразом* числа $y = f(x)$. Множество A называется *областью определения* функции f (символика: $A = Domf$). Множество всех значений функции f обозначается символом $f(A)$ (или Imf) и называется *областью значений* функции f. Таким образом, $f(A) \subseteq B$ ($Imf \subseteq B$).

Итак, функция f полностью задана (определена), если

1) задано множество $A \subseteq \mathbf{E}_1$, элементам которого ставятся в соответствие элементы, вообще говоря, другого множества $B \subseteq \mathbf{E}_1$,

2) задано множество B, элементы которого ставятся в соответствие числам из множества A,

3) задано правило (закон) f, по которому для каждого числа $x \in A$ задается определенное число $y \in B$. Однако вместо длинной (но правильной) терминологии: «...функция f из множества A в B...» — применяют краткую (не совсем правильную) терминологию: «...функция f...», не называя явно множества A и B. Используемая в литературе для записи функции символика $f : A \to B$ включает все три составные части (f, A, B) понятия функции. Символика $x \to f(x), x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$ (или $f : x \to f(x), x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$) предпочтительнее, ибо здесь прямо показано, что число $x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$ отображается в свой образ $f(x) \in B$. Наиболее употребительнам являются такие (укороченные) обозначения функции: $f(x), x \in A$ или $y = f(x)$, которые и будут дальше применяться.

1.2.4. Замечания.

а) Функцию f (см. раздел 1.2.2) естественно назвать скалярной функцией скалярного аргумента, ибо ее область определения $A = Domf$ и область значений $f(A) = Imf$ — это числовые множества ($A \subseteq \mathbf{E}_1$ и $f(A) \subseteq \mathbf{E}_1$). (Напомним, что *скаляром* называется величина, все значения которой выражаются (как правило. действительными) числами). Однако, далее будет использоваться более краткий термин: *функция одной переменной*.

б) Общее понятие функции определяется и обсуждается в главе второй (см. разделы 2.4.10, 2.4.1, 2.4.11).

1.2.5. Функция одной переменной может быть задана в *аналитической*, *графической* и *табличной* формах.

Говорят, что функция $f(x)$ задана в *аналитической форме* (аналитическим способом), если она задана в виде формулы (или формул) достаточно хорошо известных операций. Приведем примеры основных элементарных функций: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^{\alpha} (\alpha \in \mathbf{E}_1)$, $y = 2^x$, $y = a^x$, $y = \log_2 x$, $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Приведем еще ряд функций: $y = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$; $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$; $y = [x]$, $y = \{x\}$ ($\{x\} = x - [x]$). Здесь символ $[x]$ означает целую часть числа x ($[2] = 2$, $[3{,}14] = 3$, $[-2] = -2$, $[-5{,}14] = -6$, $[0] = 0$). Символ $[x]$ по-русски читатся так: «антье x».

Говорят, что функция $f(x)$ с областью определения $A \subseteq \mathbf{E}_1$ задана в *графической форме*, если функция $f(x)$ задана в виде *графика* Γ_f: $\Gamma_f \overset{(def)}{=} \{(x, y) | (x, y) \in \mathbf{E}_2;\ y = f(x), x \in A \subseteq \mathbf{E}_1\}$. Компактное определение графика Γ_f функции $f(x)$ в развернутом виде формулируется так: графиком Γ_f функции $y = f(x)$ с областью определения $A \subseteq \mathbf{E}_1$ называется множество точек $M = (x, y)$ плоскости $\mathbf{E}_2$ таких, что $x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$, а $y = f(x)$ (см. Рис. 1.2).

Обратим внимание на то, что вертикальная линия L, проходящая через *любую* точку x области определения A функции $y = f(x)$, обязательно «протыкает» график Γ_f функции $y = f(x)$ только в одной точке (для каждого x существует своя точка $(x, f(x)) \in \Gamma_f$) (см. Рис. 1.2).

Графики всех перечисленных выше основных элементарных функций, а также функций $y = |x|$, $y = \operatorname{sgn} x$, $y = [x]$, $y = \{x\}$ следует знать, как таблицу умножения.

Если линия S на плоскости $\mathbf{E}_2$ такова, что есть хотя бы одна вертикальная прямая, которая «протыкает» линию S более, чем в одной точке, то такая линия S не является графиком какой-либо функции $y = f(x)$ (см. Рис. 1.3). Линия S может изображать некоторое уравнения $F(x, y) = 0$, которое формально не эквивалентно функции $y = f(x)$, ибо при фиксированном x это уравнение имеем *два* решения y_1 и y_2 (см. Рис. 1.3), а не одно, как должно быть в случае, если уравнение $F(x, y) = 0$ эквивалентно функции $y = f(x)$.

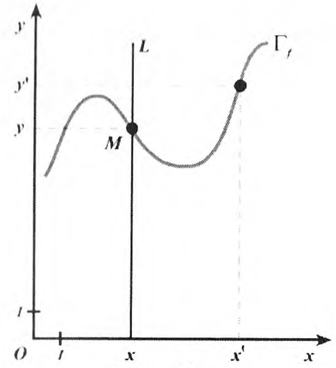

Рис. 1.2.

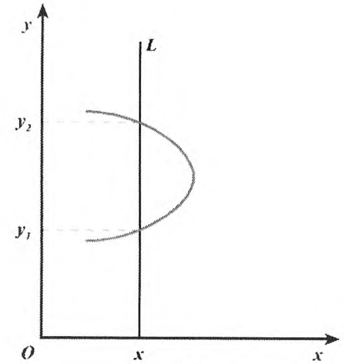

Рис. 1.3.

Говорят, что функция $f(x), x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$ задана в *табличной форме*, если она задана в виде таблицы

x	x_1	x_2	…	x_k
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_k)$

Упорядоченные пары чисел $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_k, f(x_k))$ можно изобразить точками $M_1, M_2, \ldots, M_k$ плоскости Oxy (см. Рис. 1.4).

Соединяя точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$, получим линию S на плоскости Oxy (см. Рис. 1.5), которая приближенно изображает график Γ_f функции $y = f(x)$. Однако, имея только таблицу, нельзя, вообще говоря, более точно нарисовать график Γ_f функции $y = f(x)$ в точках оси Ox, которые находятся между точками $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

На Рис. 1.5 представлены два варианта соединения соседних точек M_1 и M_2, M_2 и M_3: в виде прямых отрезков и в виде криволинейных отрезков.

Табличный способ задания функции часто встречается в прикладных задачах, когда в отдельные моменты времени фиксируются результаты налюдений. Например, значения $x_1, x_2, \dots$ переменной x могут быть равны погодовым объемам используемого основного капитала (основным производственных фондов), а частные значения $f(x_1), f(x_2)\dots$ функции $f(x)$ могут быть равны соответствующим величинам национального дохода. Числовые значения погодовых объемов основного капитала и национального дохода используются, в частности для их *экстраполяции* на перспективу. Результаты такой экстраполяции могут оказаться полезными для решения аналитических и прогнозных задач.

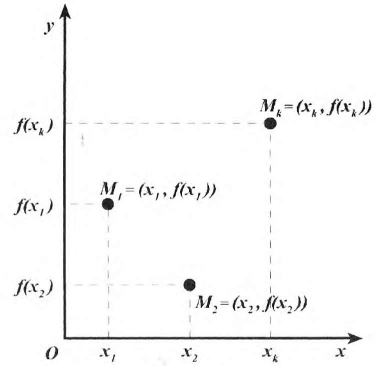

Рис. 1.4.

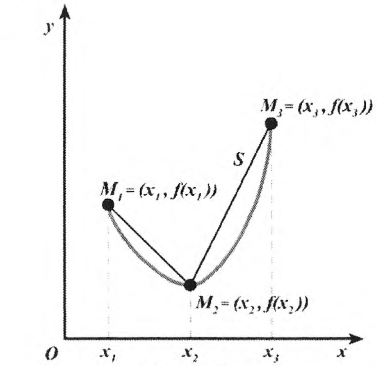

Рис. 1.5.

1.2.6. Если функция $f(x), x \in (a,b) \subseteq \mathbf{E}_1$ имеет в точке $x^0 \in (a,b)$ конечную производную $f'(x^0)$ (символика: $f(x) \in D^{(1)}(x^0)$), то график Γ_f функции $f(x)$ имеет в точке $P_0 = (x^0, f(x^0))$ невертикальную касательную K и тангенс $\operatorname{tg}\varphi$ угла φ наклона

касательной K равен производной $f'(x^0)$, т.е. $\operatorname{tg}\varphi = f'(x^0)$ (см. Рис. 1.6). В дальнейшем вместо термина «конечная производная» будет обычно использоваться термин «производная». Случаи бесконечной производной будут специально оговариваться. Для производной $f'(x^0)$ используется также символ $\dfrac{df(x^0)}{dx}$.

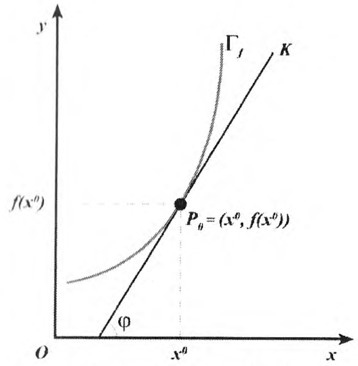

Рис. 1.6 (случай, когда $f'(x^0) > 0$).

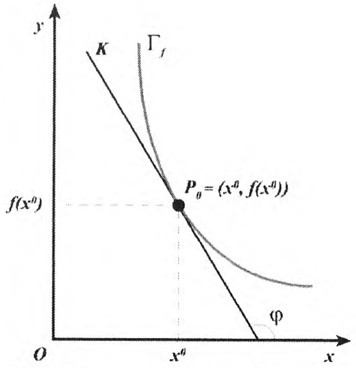

Рис. 1.6 (случай, когда $f'(x^0) < 0$).

(Невертикальная) Касательная K к графику Γ_f функции $f(x)$ в точке $(x^0, f(x^0))$ имеет уравнение

$$y - f(x^0) = f'(x^0)(x - x^0), \tag{1}$$

это уравнение $y = kx + b$ прямой, имеющей угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\varphi = f(x^0)$ и проходящей через точку $(x^0, f(x^0))$:

$$y = f'(x^0)x + b. \tag{2}$$

Подставив координаты точки $P_0 = \left(x^0,\, f(x^0)\right)$ в уравнение (2), получим равенство

$$y^0 = f'(x^0)x^0 + b. \tag{3}$$

Вычитая из уравнения (2) равенство (3), получим уравнение (1). Уравнение (1) можно переписать так:

$$y - f'(x^0)x = f(x^0) - f'(x^0)x^0. \tag{4}$$

В уравнении (4) переменные x и y содержатся только в левой части.

Производную $f'(x^0)$ функции $f(x)$ в точке x^0 в экономической литературе принято называть маргинальным значением функции $f(x)$ в точке x^0 и обозначать символом $Mf(x^0)$.

1.2.7. Свойства (конечно) производной и Таблица 1 производных позволяют находить (конечные) производные функций одной переменной (без явного использования строгого понятия (конечной) производной).

Приведем Таблицу 1 производных (в этой таблице точка x принадлежит области определения функций):

$C' = 0$ ($f(x) \equiv C$ — постоянная), $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\left(e^x\right)' = e^x$ ($e = 2{,}718281828\ldots$, 1828 — год рождения Л. Н. Толстого и Н. Г. Чернышевского), $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ ($a > 0$), $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$,

$\left(\log_a|x|\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ $(0 < a \neq 1)$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Свойства (конечной) производной имеюд вид: пусть точка x принадлежит области определения функций f и g — промежутку (a,b), и пусть эти функции имеют в точке x конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$. Тогда функции $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$) в точке x имеют конечные производные, которые соответственно равны $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$, $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0).$$

1.2.8. Если функция $u = g(x)$ имеет (конечную) производную в точке x^0 ($g(x) \in D^{(1)}(x^0)$), а функция $y = f(u)$ имеет (конечную) производную в точке $u^0 = g(x^0)$ ($f(u) \in D^{(1)}(u^0)$), то сложная функция $y = h(x) = f(g(x))$ имеет (конечную) производную $h'(x^0)$ в точке x^0, и эта производная равна $h'(x^0) = f'_u(u^0)\cdot g'_x(x^0)$ (теорема о производной сложной функции).

1.2.9. Примеры

а) $y = ax^{\alpha}$,

$y' = \left(ax^{\alpha}\right)' = a\alpha x^{\alpha-1}$.

б) $y = \sin(x^2 + b)$,

$$y'_x = \left(\sin(x^2+b)\right)' = \left\{\begin{matrix} u = x^2 + b \\ u'_x = 2x \end{matrix}\right\} = (\sin u)'_x \overset{(1.2.8)}{=} (\sin u)'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot u'_x =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2 + b \\ u'_x = 2x \end{matrix}\right\} = \cos(x^2+b)\cdot 2x\cdot$$

1.2.10. Функция $y = g(x)$ называется *обратимой* (*взаимно однозначной*) в области $A \subseteq \mathbf{E}_1$ ее определения, если из того, что $x' \neq x''$ ($x' \in A$, $x'' \in A$) следует, что $g(x') \neq g(x'')$, т.е. каждый образ $g(x)$ ($g(x) \in g(A)$)имеет единственный *свой* прообраз $x \in A$. Функция $h(y)$, которая ставит в соответствия каждому образу $y = g(x)$ ($g(x) = y \in g(A)$) его прообраз x, называется *обратной для функции* $g(x)$ (символика: $h: g(x) \to x \in A$). Область значений $g(A)$ функции $y = g(x)$ есть область определения функции $x = h(y)$, а область определения A функции $g(x)$ есть область значений функции $x = h(y)$.

Если функция $g(x)$ не является обратимой в области ее определения, то понятие обратной для нее функции не определяется.

Графики Γ_g и Γ_h функции $y = g(x)$ и обратной для нее функции $x = h(y)$ представляют собой одну и ту же линию Γ, которая однозначно проектируется как на ось Ox, так и на ось Oy (см. Рис. 1.7). если на линию Γ смотреть снизу вверх, то эта линия Γ есть график Γ_g функции $y = g(x)$. Если на линию Γ смотреть слева направо, то эта линия Γ есть график Γ_h функции $x = h(y)$.

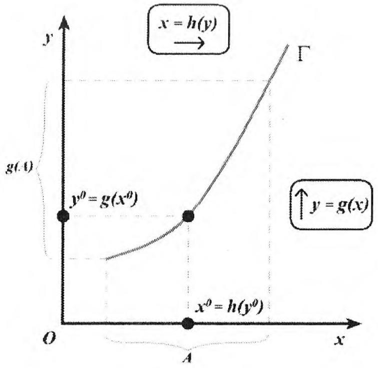

Рис. 1.7.

Если в функции $x = h(y)$ переменные x и y поменять местами, т.е. от функции $x = h(y)$ перейти к функции $y = h(x)$ (которая также называется обратной для функции $y = g(x)$), то график $\overline{\Gamma}$ функции $y = h(x)$ получается из графика Γ путем его зеркального отражения относительно прямой $y = x$ — биссектрисы первого и третьего координатных углов плоскости Oxy (см. Рис. 1.8).

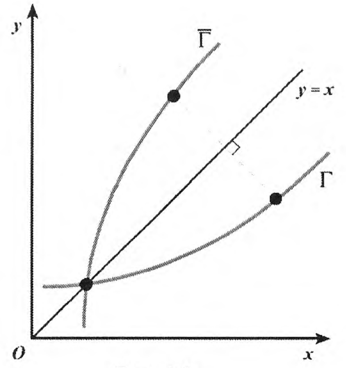

Рис. 1.8.

1.2.11. Пусть функция $g(x)$ определена и обратима в промежутке $(a,b) \subseteq \mathbf{E}_1$, и пусть функция $h(x)$ — обратная для функции $g(x)$. Пусть $x^0 \in (a,b)$ (тогда $g(x^0) = y^0$), и пусть $g(x) \in D^{(1)}(x^0)$ (т.е. пусть функция $g(x)$ в точке x^0 имеет конечную производную), и $g'(x^0) \neq 0$. Тогда функция $h(y) \in D^{(1)}(y^0)$, $h'(y^0) \neq 0$, и $h'(y^0) = \dfrac{1}{g'(x^0)}$ (теорема о производной обратной функции). На Рис. 1.9 $\operatorname{tg}\varphi = g'(x^0)$, $\operatorname{tg}\psi = h'(y^0)$, $\varphi + \psi = \dfrac{\pi}{2}$, и поэтому $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$.

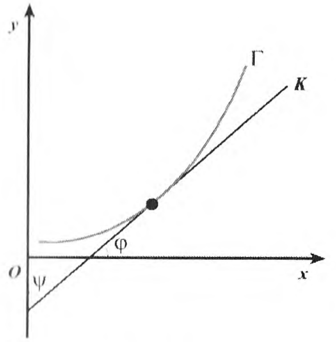

Рис. 1.9.

1.2.12. Понятие производной является полезным для раскрытия неопределеннойстей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ в *теории пределов*.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные в общей для них области определения. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$) (символ a может быть числом, равняться $-\infty$, или $+\infty$, или ∞). Пусть существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, и эти пределы равны $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$). Для раскрытия других неопределенностей ((1^∞), $(\infty - \infty)$, $(0 \cdot \infty)$, (∞^0), (0^∞) и т.п.) првило Лопиталя применяется после выполнения ряда вспомогательных преобразований.

1.2.13. Пусть $x > 0$, дробь $\dfrac{f(x)}{x}$ в экономической литературе называется средним значением функции $f(x)$ в точке x (см. Рис. 1.10, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(x)}{x}$). Среднее значение функции $f(x)$ в точке x принято обозначать так: $Af(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Понятие среднего значения функции в точке играет важную роль в экономической теории.