Ю. Н. Черемных
П. Н. Клюкин

Математический анализ в экономике

Учебное пособие

Palmarium Academic Publishing

Imprint
Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:
Palmarium Academic Publishing
is a trademark of
International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group
17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page
ISBN: 978-3-659-72452-7

Copyright © Ю. Н. Черемных, П. Н. Клюкин
Copyright © 2017 International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group
All rights reserved. Beau Bassin 2017

Черемных Ю.Н., Клюкин П.Н.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЭКОНОМИКЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают искреннюю и глубокую благодарность сотруднику кафедры математических методов анализа экономики экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова Загайновой И.А.

Автор

ГЛАВА ПЕРВАЯ. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе в кратком (предварительном) виде приведены некоторые понятия и результаты курса математического анализа, которые активно используются в экономической теории и некоторых ее приложениях.

1.1. ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ ФИРМЫ

1.1.1. Под *фирмой* понимается элемент хозяйственной системы (элемент реального сектора). Фирма затрачивает *ресурсы* и выпускает готовую *продукцию*, например, валенки. Издержки C фирмы — это оплата затрачиваемых ресурсов. Свой *доход* (*выручку*) R фирма получает от реализации на рынке произведенной ею продукции. Разность между доходом R и ее издержками C равна *прибыли* PR фирмы, т.е. $PR = R - C$. Доход, издержки и прибыль привязаны к одному *периоду времени*, который называется *производственным периодом фирмы* (далее, для конкретности,— периодом). Производственный период может равняться одному году, одному кварталу, одному месяцу, одной декаде, одной неделе, одним суткам.

Если фирма реализовала в течение периода y пар валенок по *рыночной цене* p_0 за одну пару (цена p_0 постоянна в течение одного периода), то доход R фирмы равен $R = p_0 y$. В течение периода фирма затратила K единиц капитала (число K принимают равным объему износа специальных машин; например, если на фирме работает S штук специальных машин, то $K = \gamma S$, где число γ может равняться, скажем, 0,1, т.е. объем износа здесь равен 10%), L единиц труда (например, L единиц человеко-дней) и M единиц материалов (например, тюков с шерстью). Если p_K — рыночная цена одной единицы капитала, p_L — рыночная цена одной единицы труда, p_M — рыночная цена одной единицы материалов, то издержки фирмы равны $C = p_K K + p_L L + p_M M$. Для прибыли фирмы имеем выражение

$$PR = R - C = p_0 y - (p_K K + p_K L + p_M M)$$

(эта формула отражает следующую достаточно естественную ситуацию: получил доход — сначала оплати издержки, то, что останется после этого от дохода, и есть прибыль).

Классическая задача теории фирмы — это задача максимизации прибыли фирмы: $PR\ (\max)$.

1.1.2. Рассмотрим вариант задачи максимизаци приьбыли фирмы, когда производственная деятельность фирмы описывается с помощью *производственной функции*, аргументами которой являются объемы K, L, M затрачиваемых фирмой ресурсов, а значением производственной функции является объем y выпускаемой фирмой продукции. Таким образом, производственная функция (ПФ) фирмы имеет вид $y = f(K, L, M)$. Тройка объемов (т.е. трехмерный вектор) (K, L, M) называется *конфигурацией ресурсов*. В рассматриваемом варианте задача максимизации прибыли фирмы имеет вид

$$p_0 f(K, L, M) - p_K K - p_L L - p_M M = PR\ (\max), \qquad (1)$$

т.е. сколько и каких ресурсов фирма должна приобрести, чтобы ее прибыль была максимальной.

1.1.3. Метод решения задач максимизации типа задачи (1) (см. раздел 1.1.2) описан позже (в разделе 1.4.1). Сейчас рассмотрим упрощенный вариант этой задачи.

Предположим, что фирма располагает фиксированным объемом $\overline{K}$ капитала и фиксированным объемом $\overline{M}$ материалов. Спрашивается, сколько единиц труда $\hat{L}$ фирма должна приобрести на рынке труда для того, чтобы максимизировать свою прибыль?

В рассматриваемом варианте прибыль $PR(L)$ имеет вид

$$PR(L) = p_0 f(\overline{K}, L, \overline{M}) - p_K \overline{K} - p_L L - p_M \overline{M}.$$

Пусть для определенности $f(\overline{K}, L, \overline{M}) = b_0 L^\beta$ (скалярные параметры b_0 и β положительны, и $\beta < 1$). Полагая $p_K \overline{K} + p_M \overline{M} = q$, получим задачу максимизации прибыли фирмы (1) в следующей форме (2):

$$PR(L) = p_0 b_0 L^\beta - p_L L - q\ (\max), \qquad (2)$$

где $p_0 b_0 L^\beta = R$, и $p_L L + q = C$.

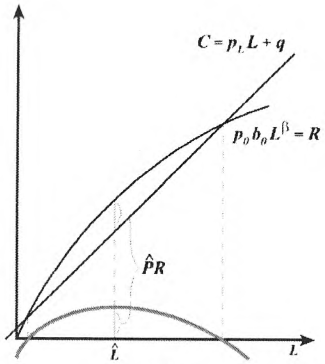

Рис. 1.1.

На Рис. 1.1 представлены графики функции дохода $R = p_0 b_0 L^\beta$, издержек $C = p_L L + q$ и прибыли $PR = R - C$. Очевидно, график прибыли PR есть линия, похожая на «шапочку», у которой есть «макушка» $\hat{PR}$, абсцисса $\hat{L}$, показывающая объем труда $\hat{L}$, который необьодимо приобрести фирме на рынке труда в целях максимизации прибыли PR. Таким образом, на Рис. 1.1 дано графическое (геометрическое) решение задачи (2) максимизации прибыли фирмы как функции одного ресурса (труда).

К сожалению, геометрическое решение (когда оно возможно, как в рассматриваемом варианте) может иметь невысокую точность и поэтому не годится в качестве ответа.

В принципе возможная геометрическая интерпретация может быть очень сложной в реализации и поэтому мало полезной для получения решения задачи с приемлемой точностью. Экономические задачи, как правило, имеют достаточно высокую размерность и не допускают наглядной геометрической интерпретации (например, для геометрического решения задачи (1) (см. раздел 1.1.2) следует использовать четырехмерное пространство, которое не имеет наглядного геометрического представления).

Отмеченные обстоятельства (невысокая точность геометрических решений, возможный высокий уровень сложности геометрических построений, невозмоджность получения геометрического решения в случае высокой размерности экономической задачи) представляют собой серьезное основания для использования аналитических и компьютерных методов для решения экономических задач.

Отметим также, что геометрическая интрепретация решения экономической задачи (если она возможна) может оказаться полезным дополнением аналитического (или компьютерного) решения этой задачи.

Для аналитического решения задачи (2) используем *условие первого порядка*, т.е. найдем производную прибыли $PR(L)$ по переменной L и приравняем эту производную к нулю:

$$PR'_L = p_0 b_0 \beta L^{\beta-1} - p_L = 0\,,$$

откуда вытекает, что

$$p_0 b_0 \beta L^{\beta-1} = p_L\,,$$

или (учитывая, что $0 < \beta < 1$)

$$L^{1-\beta} = \frac{p_0 b_0 \beta}{p_L}\,,$$

что позволяет получить явное выражения для $\hat{L}$:

$$L = \left(\frac{p_0 b_0 \beta}{p_L}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

1.1.4. Строго говоря, условие первого порядка (равенство нулю первой производной PR'_L прибыли $PR(L)$ по переменной L) есть необходимое условие, но недостаточное условие максимизации функции $PR(L)$ по переменной L. Достаточным условием того, что при $L = \hat{L}$ функция $PR(L)$ достигает своего максимума, является *условие второго порядка*: если вторая производная PR''_L функции $PR(L)$ по переменной L в точке $\hat{L}$ отрицательна, то точка $\hat{L}$ — точка максимума функции $PR(L)$. Покажем, что в рассматриваемом случае это действительно так:

$$PR''_L(L) = p_0 b_0 \beta(\beta-1)L^{\beta-2} < 0$$

(ибо $0 < \beta < 1$) и, следовательно,

$$PR''_L(\hat{L}) = p_0 b_0 \beta(\beta-1)\left(\hat{L}\right)^{\beta-2} < 0\,.$$

Таким образом, при $L = \hat{L}$ функция $PR(L)$ имеет максимум

$$\hat{P}R = PR(\hat{L}) = p_0 b_0 \left(\hat{L}\right)^{\beta} - p_L \hat{L} - q = p_L \frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{p_0 q_0 \beta}{p_L}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} - q\,.$$

Максимальная прибыль $\hat{P}R$ может быть положительной, отрицательной или нулевой. На Рис. 1 представлен случай, когда $\hat{P}R > 0$.

1.1.5. $\boxed{P}$ Дать геометрическую интерпретацию случаям а) $\hat{P}R = 0$ и б) $\hat{P}R < 0$.

1.1.6. Замечание. Символ $\boxed{P}$ означает обязательную задачу или обязательные задачи (в разделе 1.1.5 две обязательные задачи: а) и б)). Обязательные задачи (наряду с прочитанным на лекции материалом и с материалом для самостоятельного чтения) входят в теоретические блоки контрольных и экзаменационных работ.

1.1.7. Материал разделов 1.1.3—1.1.4 показывает, что даже для решения достаточно простых экономических задач требуется привлечение разнообразного понятийного математического аппарата и широкого круга математических методов.

1.1.8 В разделе 1.1.2 речь шла о производственной функции (ПФ) $y = f(K, L, M)$, зависящей от трех ресурсов (от трех факторов производства: капитала, труда и материалов). Такие ПФ называются трехфакторными. ПФ, зависящая от двух ресурсов (факторов) (обычно это капитал и труд), называется *двухфакторными.* ПФ: $y = f(K, L)$. ПФ, зависящая от одного ресурса (фактора) (как это было в разделе 1.1.3), называется *однофакторной.* Далее, в качестве иллюстрации будут использоваться в основном двухфакторные производственные функции $y = f(x_1, x_2)$, где символом x_1 обозначается количество капитала, символом x_2 — количество труда.

Приведем примеры двухфакторных производственных функций ПФ.

ПФ линейная (ЛПФ)

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2\,,$$

параметры a_0, a_1, a_2 — неотрицательные числа, $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 > 0$, переменные x_1 и x_2 по экономическому смыслу неотрицательны.

ПФ Кобба-Дугласа (ПФ КД)

$$y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\,,$$

параметр $a_0 > 0$, параметры α_1 и α_2 неотрицательны, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, часто (но не всегда) $\alpha_1 + \alpha_2 \le 1$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

ПФ затраты-выпуск (ПФ Леонтьева)

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}; \frac{x_2}{a_2}\right),$$

параметры a_1 и a_2 — положительные числа, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

ПФ с постоянной эластичностью замены одного ресурса другим (ПФ ПЭЗР)

$$y = a_0\left(a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha}\right)^{-\frac{h}{\alpha}},$$

параметры a_0, a_1, a_2 — положительные числа, параметры α и h — обычно положительные числа, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

1.2. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.2.1. Множество (всех) действительных чисел обозначается символом $\mathbf{E}_1$ (или $\mathbf{R}_1$). Из курса школьной математики известно, что каждому действительному числу x соответствует точка M на числовой прямой (на числовой оси). Верно и обратное, т.е. каждой точке M' на числовой прямой соответствует действительное число x'. Поэтому действительное число называют точкой (более точно — *одномерной* точкой), а точку (одномерную точку) называют числом. Для множества всех действительных чисел и для числовой прямой (числовой оси) используют единый символ $\mathbf{E}_1$ (или $\mathbf{R}_1$).

Если множество A действительных чисел (например, отзезок $[a,b]$) есть подмножество множества $\mathbf{E}_1$, то пишут $A \subseteq \mathbf{E}_1$ (имеем в случае отрезка $[a,b] \subseteq \mathbf{E}_1$). Множество A ($A \subseteq \mathbf{E}_1$) называется числовым множеством или точечным множеством прямой $\mathbf{E}_1$.

Если множество не содержит ни одного элемента, оно называется *пустым*. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

Из курса школьной математики изветсно, что каждой упорядоченной паре (x, y) действительных чисел x и y соответствует точка (более точно — двумерная точка) M на плоскости Oxy (см. Рис. 1.2). Верно и обратное, т.е. каждой точке (двумерной точке) M' плоскости Oxy соответствует упорядоченная пара (x', y') действительных чисел x' и y'. Поэтому упорядоченную пару действительных чисел называют (двумерной) точкой, а (двумерную) точку называют упорядоченной парой действительных чисел.

Напомним, что упорядоченную пару (x, y) действительных чисел x и y называют *двумерным вектором*. Этот термин в главе первой будет часто использоваться. Наряду с термином двумерный вектор будет также использоваться термин (двумерная) точка.

Действительные числа x и y называются *координатами* (двумерного) вектора, (двумерной) точки.

Для множества всех двумерных векторов и для множества всех точек плоскости Oxy (т.е. для самой плоскости Oxy) используют один и тот же символ $\mathbf{E}_2$ (или $\mathbf{R}_2$). Символ $A \subseteq \mathbf{E}_2$ означает, что множество A есть подмножество множества $\mathbf{E}_2$. Множество A ($A \subseteq \mathbf{E}_2$) называется также точечным множеством плоскости $\mathbf{E}_2$.

1.2.2. Пусть A и B — непустые числовые множества (т.е. $\varnothing \neq A \subseteq \mathbf{E}_1$, $\varnothing \neq B \subseteq \mathbf{E}_1$). Говорят, что задана *функция* f, если по определенному правилу каждому числу x из множества $A \subseteq \mathbf{E}_1$ ставится *в соответсивие* единственное (для каждого числа x, вообще говоря, свое) число y из множества B.

1.2.3. Число y, которое функция f (см. раздел 1.2.2) ставит в соответствие числу x, обозначается символом $f(x)$ и называется *частным значением* (или просто — *значением*) функции f на числе x, т.е. $y = f(x)$. Число y называется также *образом* числа x, а число x — *прообразом* числа $y = f(x)$. Множество A называется *областью определения* функции f (символика: $A = Domf$). Множество всех значений функции f обозначается символом $f(A)$ (или Imf) и называется *областью значений* функции f. Таким образом, $f(A) \subseteq B$ ($Imf \subseteq B$).

Итак, функция f полностью задана (определена), если

1) задано множество $A \subseteq \mathbf{E}_1$, элементам которого ставятся в соответствие элементы, вообще говоря, другого множества $B \subseteq \mathbf{E}_1$,

2) задано множество B, элементы которого ставятся в соответствие числам из множества A,

3) задано правило (закон) f, по которому для каждого числа $x \in A$ задается определенное число $y \in B$. Однако вместо длинной (но правильной) терминологии: «...функция f из множества A в B ...» — применяют краткую (не совсем правильную) терминологию: «...функция f ...», не называя явно множества A и B. Используемая в литературе для записи функции символика $f : A \to B$ включает все три составные части (f, A, B) понятия функции. Символика $x \to f(x), x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$ (или $f : x \to f(x), x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$) предпочтительнее, ибо здесь прямо показано, что число $x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$ отображается в свой образ $f(x) \in B$. Наиболее употребительнам являются такие (укороченные) обозначения функции: $f(x), x \in A$ или $y = f(x)$, которые и будут дальше применяться.

1.2.4. Замечания.

а) Функцию f (см. раздел 1.2.2) естественно назвать скалярной функцией скалярного аргумента, ибо ее область определения $A = Domf$ и область значений $f(A) = Imf$ — это числовые множества ($A \subseteq \mathbf{E}_1$ и $f(A) \subseteq \mathbf{E}_1$). (Напомним, что *скаляром* называется величина, все значения которой выражаются (как правило. действительными) числами). Однако, далее будет использоваться более краткий термин: *функция одной переменной*.

б) Общее понятие функции определяется и обсуждается в главе второй (см. разделы 2.4.10, 2.4.1, 2.4.11).

1.2.5. Функция одной переменной может быть задана в *аналитической*, *графической* и *табличной* формах.

Говорят, что функция $f(x)$ задана в *аналитической форме* (аналитическим способом), если она задана в виде формулы (или формул) достаточно хорошо известных операций. Приведем примеры основных элементарных функций: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^{\alpha}(\alpha \in \mathbf{E}_1)$, $y = 2^x$, $y = a^x$, $y = \log_2 x$, $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Приведем еще ряд функций: $y = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$; $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$; $y = [x]$, $y = \{x\}$

($\{x\} = x - [x]$). Здесь символ $[x]$ означает целую часть числа x ($[2] = 2$, $[3{,}14] = 3$, $[-2] = -2$, $[-5{,}14] = -6$, $[0] = 0$). Символ $[x]$ по-русски читатся так: «антье x».

Говорят, что функция $f(x)$ с областью определения $A \subseteq \mathbf{E}_1$ задана в *графической форме*, если функция $f(x)$ задана в виде *графика* Γ_f: $\Gamma_f \overset{(def)}{=} \{(x, y) | (x, y) \in \mathbf{E}_2;\ y = f(x), x \in A \subseteq \mathbf{E}_1\}$. Компактное определение графика Γ_f функции $f(x)$ в развернутом виде формулируется так: графиком Γ_f функции $y = f(x)$ с областью определения $A \subseteq \mathbf{E}_1$ называется множество точек $M = (x, y)$ плоскости $\mathbf{E}_2$ таких, что $x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$, а $y = f(x)$ (см. Рис. 1.2).

Обратим внимание на то, что вертикальная линия L, проходящая через *любую* точку x области определения A функции $y = f(x)$, обязательно «протыкает» график Γ_f функции $y = f(x)$ только в одной точке (для каждого x существует своя точка $(x, f(x)) \in \Gamma_f$) (см. Рис. 1.2).

Графики всех перечисленных выше основных элементарных функций, а также функций $y = |x|$, $y = \operatorname{sgn} x$, $y = [x]$, $y = \{x\}$ следует знать, как таблицу умножения.

Если линия S на плоскости $\mathbf{E}_2$ такова, что есть хотя бы одна вертикальная прямая, которая «протыкает» линию S более, чем в одной точке, то такая линия S не является графиком какой-либо функции $y = f(x)$ (см. Рис. 1.3). Линия S может изображать некоторое уравнения $F(x, y) = 0$, которое формально не эквивалентно функции $y = f(x)$, ибо при фиксированном x это уравнение имеем *два* решения y_1 и y_2 (см. Рис. 1.3), а не одно, как должно быть в случае, если уравнение $F(x, y) = 0$ эквивалентно функции $y = f(x)$.

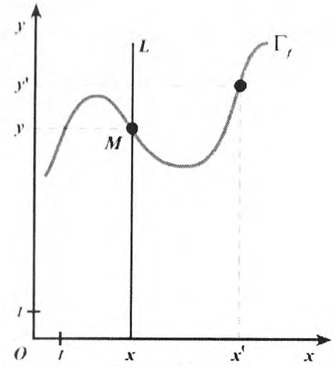

Рис. 1.2.

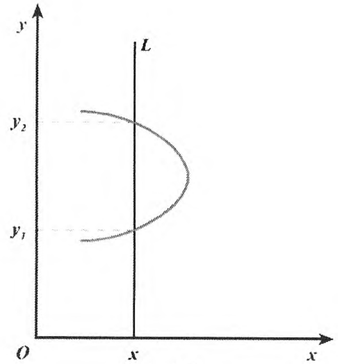

Рис. 1.3.

Говорят, что функция $f(x), x \in A \subseteq \mathbf{E}_1$ задана в *табличной форме*, если она задана в виде таблицы

x	x_1	x_2	...	x_k
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_k)$

Упорядоченные пары чисел $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_k, f(x_k))$ можно изобразить точками $M_1, M_2, \ldots, M_k$ плоскости Oxy (см. Рис. 1.4).

Соединяя точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$, получим линию S на плоскости Oxy (см. Рис. 1.5), которая приближенно изображает график Γ_f функции $y = f(x)$. Однако, имея только таблицу, нельзя, вообще говоря, более точно нарисовать график Γ_f функции $y = f(x)$ в точках оси Ox, которые находятся между точками $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

На Рис. 1.5 представлены два варианта соединения соседних точек M_1 и M_2, M_2 и M_3: в виде прямых отрезков и в виде криволинейных отрезков.

Табличный способ задания функции часто встречается в прикладных задачах, когда в отдельные моменты времени фиксируются результаты налюдений. Например, значения $x_1, x_2, \ldots$ переменной x могут быть равны погодовым объемам используемого основного капитала (основным производственных фондов), а частные значения $f(x_1), f(x_2)\ldots$ функции $f(x)$ могут быть равны соответствующим величинам национального дохода. Числовые значения погодовых объемов основного капитала и национального дохода используются, в частности для их *экстраполяции* на перспективу. Результаты такой экстраполяции могут оказаться полезными для решения аналитических и прогнозных задач.

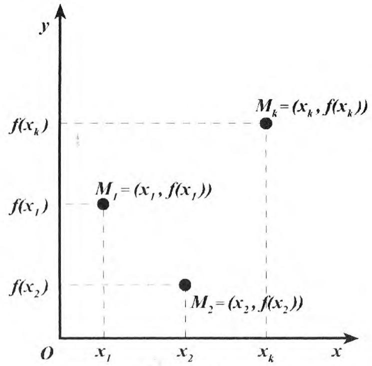

Рис. 1.4.

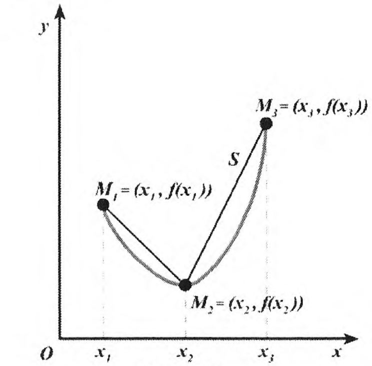

Рис. 1.5.

1.2.6. Если функция $f(x), x \in (a,b) \subseteq \mathbf{E}_1$ имеет в точке $x^0 \in (a,b)$ конечную производную $f'(x^0)$ (символика: $f(x) \in D^{(1)}(x^0)$), то график Γ_f функции $f(x)$ имеет в точке $P_0 = (x^0, f(x^0))$ невертикальную касательную K и тангенс $\operatorname{tg}\varphi$ угла φ наклона

касательной K равен производной $f'(x^0)$, т.е. $\operatorname{tg}\varphi = f'(x^0)$ (см. Рис. 1.6). В дальнейшем вместо термина «конечная производная» будет обычно использоваться термин «производная». Случаи бесконечной производной будут специально оговариваться. Для производной $f'(x^0)$ используется также символ $\dfrac{df(x^0)}{dx}$.

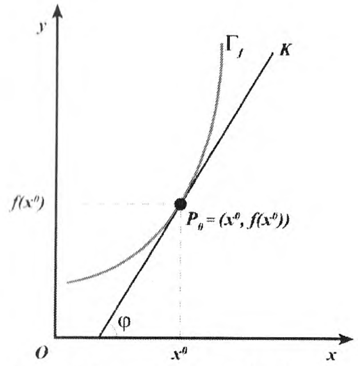

Рис. 1.6 (случай, когда $f'(x^0) > 0$).

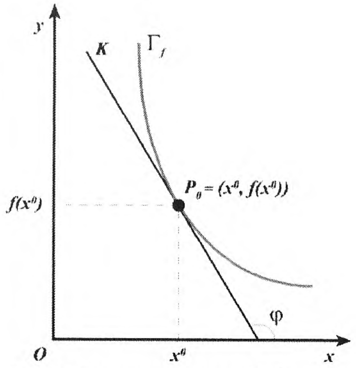

Рис. 1.6 (случай, когда $f'(x^0) < 0$).

(Невертикальная) Касательная K к графику Γ_f функции $f(x)$ в точке $(x^0, f(x^0))$ имеет уравнение

$$y - f(x^0) = f'(x^0)(x - x^0), \tag{1}$$

это уравнение $y = kx + b$ прямой, имеющей угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\varphi = f(x^0)$ и проходящей через точку $(x^0, f(x^0))$:

$$y = f'(x^0)x + b. \qquad (2)$$

Подставив координаты точки $P_0 = (x^0, f(x^0))$ в уравнение (2), получим равенство

$$y^0 = f'(x^0)x^0 + b. \qquad (3)$$

Вычитая из уравнения (2) равенство (3), получим уравнение (1). Уравнение (1) можно переписать так:

$$y - f'(x^0)x = f(x^0) - f'(x^0)x^0. \qquad (4)$$

В уравнении (4) переменные x и y содержатся только в левой части.

Производную $f'(x^0)$ функции $f(x)$ в точке x^0 в экономической литературе принято называть маргинальным значением функции $f(x)$ в точке x^0 и обозначать символом $Mf(x^0)$.

1.2.7. Свойства (конечно) производной и Таблица 1 производных позволяют находить (конечные) производные функций одной переменной (без явного использования строгого понятия (конечной) производной).

Приведем Таблицу 1 производных (в этой таблице точка x принадлежит области определения функций):

$C' = 0$ ($f(x) \equiv C$ — постоянная), $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(e^x)' = e^x$ ($e = 2{,}718281828\ldots$, 1828 — год рождения Л. Н. Толстого и Н. Г. Чернышевского), $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0$), $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$,

$(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ ($0 < a \neq 1$), $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Свойства (конечной) производной имеюд вид: пусть точка x принадлежит области определения функций f и g — промежутку (a,b), и пусть эти функции имеют в точке x конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$. Тогда функции $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$) в точке x имеют конечные производные, которые соответственно равны $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$, $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0).$$

1.2.8. Если функция $u = g(x)$ имеет (конечную) производную в точке x^0 ($g(x) \in D^{(1)}(x^0)$), а функция $y = f(u)$ имеет (конечную) производную в точке $u^0 = g(x^0)$ ($f(u) \in D^{(1)}(u^0)$), то сложная функция $y = h(x) = f(g(x))$ имеет (конечную) производную $h'(x^0)$ в точке x^0, и эта производная равна $h'(x^0) = f'_u(u^0) \cdot g'_x(x^0)$ (теорема о производной сложной функции).

1.2.9. Примеры

а) $y = ax^n$,

$y' = (ax^n)' = anx^{n-1}$.

б) $y = \sin(x^2 + b)$,

$$y'_x = (\sin(x^2+b))' = \left\{\begin{matrix} u = x^2 + b \\ u'_x = 2x \end{matrix}\right\} = (\sin u)'_x \overset{(1.2.8)}{=} (\sin u)'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot u'_x =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2 + b \\ u'_x = 2x \end{matrix}\right\} = \cos(x^2 + b) \cdot 2x.$$

1.2.10. Функция $y = g(x)$ называется *обратимой* (*взаимно однозначной*) в области $A \subseteq \mathbf{E}_1$ ее определения, если из того, что $x' \neq x''$ ($x' \in A, x'' \in A$) следует, что $g(x') \neq g(x'')$, т.е. каждый образ $g(x)$ ($g(x) \in g(A)$) имеет единственный *свой прообраз* $x \in A$. Функция $h(y)$, которая ставит в соответствия каждому образу $y = g(x)$ ($g(x) = y \in g(A)$) его прообраз x, называется *обратной для функции* $g(x)$ (символика: $h: g(x) \to x \in A$). Область значений $g(A)$ функции $y = g(x)$ есть область определения функции $x = h(y)$, а область определения A функции $g(x)$ есть область значений функции $x = h(y)$.

Если функция $g(x)$ не является обратимой в области ее определения, то понятие обратной для нее функции не определяется.

Графики Γ_g и Γ_h функции $y = g(x)$ и обратной для нее функции $x = h(y)$ представляют собой одну и ту же линию Γ, которая однозначно проектируется как на ось Ox, так и на ось Oy (см. Рис. 1.7). если на линию Γ смотреть снизу вверх, то эта линия Γ есть график Γ_g функции $y = g(x)$. Если на линию Γ смотреть слева направо, то эта линия Γ есть график Γ_h функции $x = h(y)$.

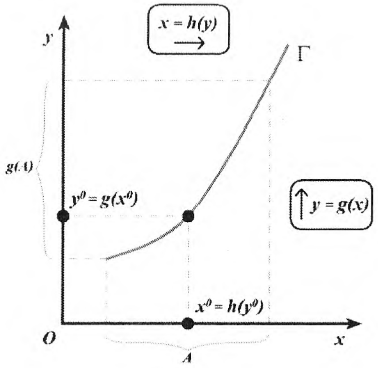

Рис. 1.7.

Если в функции $x = h(y)$ переменные x и y поменять местами, т.е. от функции $x = h(y)$ перейти к функции $y = h(x)$ (которая также называется обратной для функции $y = g(x)$), то график $\overline{\Gamma}$ функции $y = h(x)$ получается из графика Γ путем его зеркального отражения относительно прямой $y = x$ — биссектрисы первого и третьего координатных углов плоскости Oxy (см. Рис. 1.8).

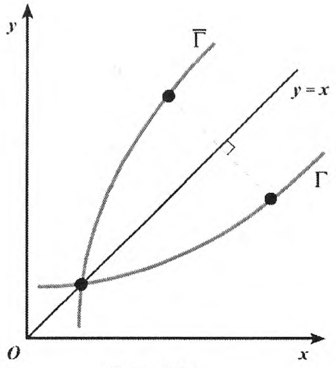

Рис. 1.8.

1.2.11. Пусть функция $g(x)$ определена и обратима в промежутке $(a,b) \subseteq \mathbf{E}_1$, и пусть функция $h(x)$ — обратная для функции $g(x)$. Пусть $x^0 \in (a,b)$ (тогда $g(x^0) = y^0$), и пусть $g(x) \in D^{(1)}(x^0)$ (т.е. пусть функция $g(x)$ в точке x^0 имеет конечную производную), и $g'(x^0) \neq 0$. Тогда функция $h(y) \in D^{(1)}(y^0)$, $h'(y^0) \neq 0$, и $h'(y^0) = \dfrac{1}{g'(x^0)}$ (теорема о производной обратной функции). На Рис. 1.9 $\operatorname{tg}\varphi = g'(x^0)$, $\operatorname{tg}\psi = h'(y^0)$, $\varphi + \psi = \dfrac{\pi}{2}$, и поэтому $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$.

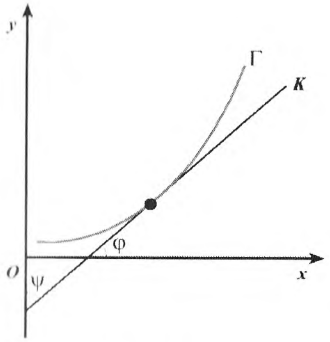

Рис. 1.9.

1.2.12. Понятие производной является полезным для раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ в *теории пределов*.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные в общей для них области определения. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$) (символ a может быть числом, равняться $-\infty$, или $+\infty$, или ∞). Пусть существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, и эти пределы равны $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$). Для раскрытия других неопределенностей $\left((1^\infty), (\infty - \infty), (0 \cdot \infty), (\infty^0), (0^\infty)\right.$ и т.п.) првило Лопиталя применяется после выполнения ряда вспомогательных преобразований.

1.2.13. Пусть $x > 0$, дробь $\dfrac{f(x)}{x}$ в экономической литературе называется средним значением функции $f(x)$ в точке x (см. Рис. 1.10, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(x)}{x}$). Среднее значение функции $f(x)$ в точке x принято обозначать так: $Af(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Понятие среднего значения функции в точке играет важную роль в экономической теории.

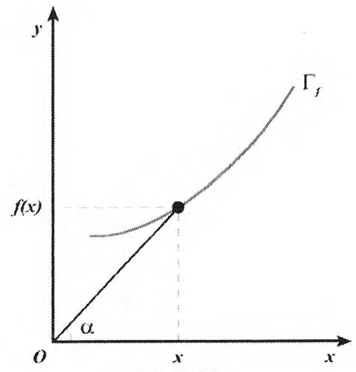

Рис. 1.10.

1.2.14. По графику Γ функции $f(x)$ можно определить поведение функции $Af(x)$ (см. Рис. 1.11, на котором представлен случай, когда с ростом x функция $Af(x)$ возрастает, и Рис. 1.12, на котором представлен случай, когда с ростом x функция $Af(x)$ убывает).

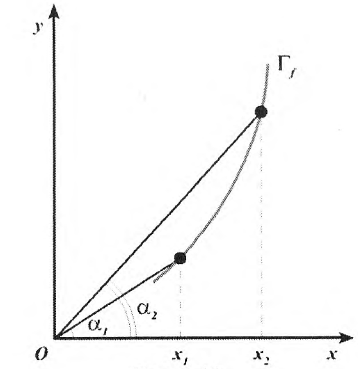

Рис. 1.11.

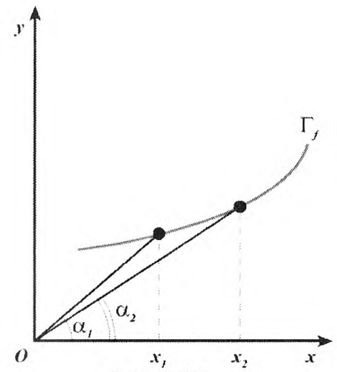

Рис. 1.12.

1.2.15. По графику функции $Af(x)$ можно определить характер поведения функции $f(x)$, ибо $f(x) = Af(x)\cdot x$, и, следовательно, частное значение функции $f(x)$ равно площади прямоугольника со сторонами x и $Af(x)$ (см. Рис. 1.3).

1.2.16. а) Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $(a,b)\subseteq \mathbf{E}_1$ ($a>0$, $b>0$) и в каждой точке промежутка (a,b) имеет конечную производную, т.е. $f(x)\in D^{(1)}(x^0)$. Для того, чтобы $(Af(x))'_x < 0$ ($(Af(x))'_x > 0$) в каждой точке промежутка (a,b), необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке промежутка (a,b) выполнялось неравенство $Af(x) > M f(x)$ ($Af(x) > M f(x)$). (Напоминаем, что $Af(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $Mf(x) = f'(x)$, $x\in(a,b)$).

б) Для того, чтобы $x^0\in(a,b)\subseteq \mathbf{E}_1$ была критической точкой функции $Af(x)$ (т.е., чтобы $(Af(x^0))' = 0$), необходимо и достаточно, чтобы $Af(x^0) = M f(x^0)$.

Утверждения а) и б) будут доказаны позже. Эти утверждения активно используются в экономической теории.

1.2.17. Рисунки 1.14 и 1.15 иллюстрируют утверждения а) и б) раздела 1.2.16.

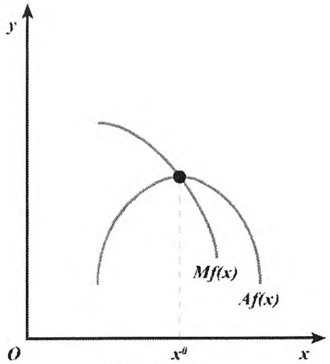

Рис. 1.14.

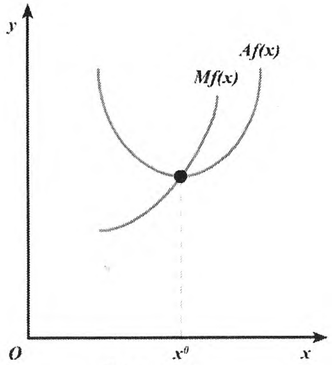

Рис. 1.15.

1.2.18. *Эластичностью* функции $f(x)$ по переменной x в точке $x^0 \in (a,b) \subseteq \mathbf{E}_1$ ($a > 0$, $b > 0$) (символика: $E_x f(x^0)$) называется отношение $\dfrac{M f(x^0)}{A f(x^0)}$, т.е.

$$E_x f(x^0) = \frac{M f(x^0)}{A f(x^0)}.$$

В развернутом виде выражение для эластичности $E_x f(x^0)$ можно переписать так:

$$E_x f(x^0) = \frac{x^0}{f(x^0)} \cdot f'(x^0) = \frac{x^0}{f(x^0)} \cdot \frac{df(x^0)}{dx}.$$

Рис. 1.16 и 1.17 иллюстрируют понятие эластичности $E_x f(x^0)$.

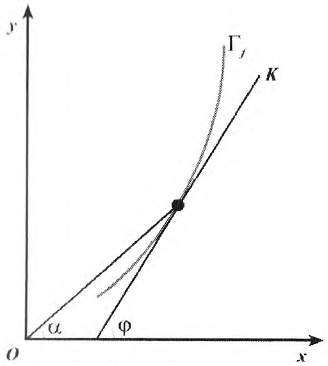

Рис. 1.16.

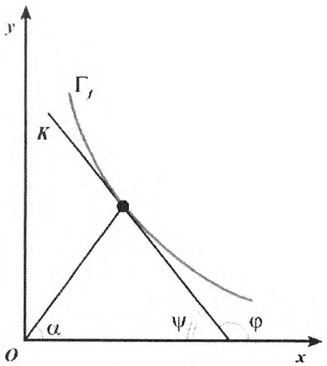

Рис. 1.17.

В случае Рис. 1.16 имеем

$$E_x f(x^0) = \frac{M f(x^0)}{A f(x^0)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

В случае Рис. 1.17 имеем

$$E_x f(x^0) = \frac{M f(x^0)}{A f(x^0)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{-\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Эластичность функции $y = a_0 x^\alpha$ равна показателю степени α, ибо

$$E_x\left(a_0 x^\alpha\right) = \frac{\left(a_0 x^\alpha\right)'_x}{a_0 x^\alpha / x} = \frac{a_0 \alpha x^{\alpha-1}}{a_0 x^{\alpha-1}} = \alpha .$$

Понятие эластичности $E_x f(x^0)$ широко используется в экономической теории и в прикладных экономических исследованиях.

1.2.19. В экономической теории и в ее приложениях активно используются функции спроса и предложения.

Функция спроса $y = f(x)$ показывает, какое максимальное количество $y(=Q)$ продукта (товара) готов (рельно желает) приобрести потребитель (потребители), если цена одной единицы этого продукта равна $x(=P)$.

По экономическому смыслу переменные x и y неотрицательны. Если речь идет об одном покупателе, то имеем *функцию индивидуального спроса*, если о всех покупателях данного продукта (товара), то имеем *функцию* совокупного, или *рыночного спроса*.

В рамках экономической теории действует *закон спроса*, согласно которому с ростом цены $x(=P)$ уменьшается количество $y(=Q)$ продукта (товара), которое готов приобрести потребитель (потребители), т.е. согласно закону спроса функция спроса есть убывающая (не обязательно строго) функция.

График функции спроса (индивидуального, рыночного) называется *линией спроса*. Линия спроса DD представлена на Рис. 1.18. Движение по линии спроса DD называется *изменением величины спроса*. Движение (не обязательно «параллельно») самой линии спроса (вверх, вниз) называется *изменением спроса*.

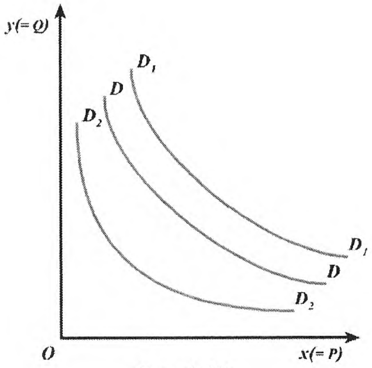

Рис. 1.18.

1.2.20. *Функция предложения* $y = g(x)$ показывает, какое максимальное количество $y(=Q)$ продукта (товара) готов (рельно) желает предложить продавец (продавцы), если цена одной единицы этого продукта равна $x(=P)$.

По экономическому смыслу переменные x и y неотрицательны. Если речь идет об одном продавце, то имеем *функцию индивидуального предложения*, если о всех продавцах данного продукта (товара), то имеем *функцию* совокупного, или *рыночного предложения*.

В рамках экономической теории действует *закон предложения*, согласно которому с ростом цены $x(=P)$ увеличивается количество продукта (товара), которое готов предложить продавец (продавцы), т.е. согласно закону предложения функция предложения есть возрастающая (не обязательно строго) функция.

График функции предложения (индивидуального, рыночного) называется *линией предложения*. Линия спроса SS представлена на Рис. 1.19. Движение по линии предложения SS называется *изменением величины предложения*. Движение (не обязательно «параллельно») самой линии предложения (вверх, вниз) называется *изменением предложения*.

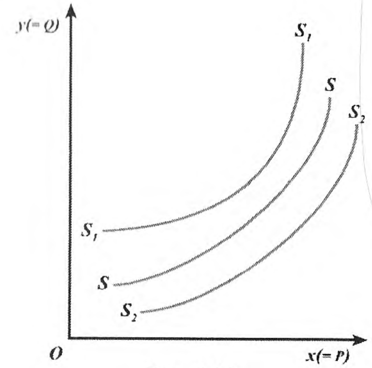

Рис. 1.19.

1.2.21. Перенесем линии спроса и предложения на одну и ту же плоскость Oxy (см. Рис. 1.20). Точка E пересечения линий рыночного спроса (DD) и рыночного предложения SS изображает *рыночное равновесие*, в котором величина (рыночного) спроса равна величина (рыночного) предложения. Абсцисса $x_e(=P_e)$ точки E называется *ценой равновесия*, ордината $y_e(=Q_e)$ точки E называется *объемом* (величиной) *равновесия* (равновесным объемом).

Понятие рыночного равновесия является фундаментальным в экономической теории. Мы только что видели, как оно наглядно геометрическо иллюстрируется в виде точки пересечения линий спроса и предложения. Отметим, что геометрические построения в экономической теории играют большую роль. С помощью геометрических построений наглядно иллюстрируются важные экономические положения. Например, с ростом рыночного предложения (линия SS перемещается вверх и занимает положение S_1S_1) и при неизменном рыночном спросе точка пересечения E переходит в точку пересечения E_1 (см. Рис. 1.20). Этой точке воответствует меньшая цена равновесия

($x_{e_1} < x_e$) и больший объем равновесия ($y_{e_1} > y_e$), т.е. с ростом рыночного предложения цена равновесия падает, аобъем равновесия растет. Аналогично легко можно показать на графике, что с сокращением рыночного предложения цена равновесия растет, а объем равновесия падает.

С ростом рыночного спроса (линия DD перемещается вверх и занимает положение D_1D_1) и при неизменном рыночном предложении точка пересечения E переходит в точку пересечения E_2 (см. Рис. 1.20). Этой точке воответствует большая цена равновесия ($x_{e_2} > x_e$) и больший объем равновесия, т.е. с ростом рыночного спроса цена равновесия и объем равновеси растут. Аналогично легко можно показать на графике, что с сокращением рыночного спроса цена равновесия и объем равновесия падают.

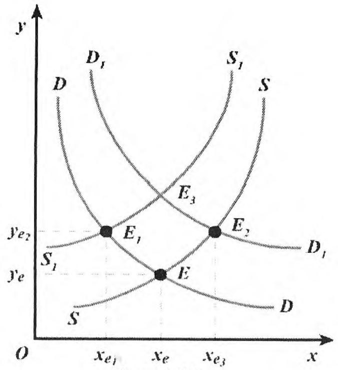

Рис. 1.20.

1.2.22. В экономической теории важную роль играет понятие функции полезности $y = u(x)$. Частное значение $u(x_0)$ функции полезности равно уровню (степени) удовлетворения потребностей индивидуума («уровню кайфа» индивидуума), если он приобретает (или потребляет) некоторый продукт (товар) в количестве x_0 единиц. Понятно, что разные индивидуумы могут иметь разные функции полезности. График Γ функции полезности $y = u(x)$ — возрастающая (не обязательно строго) линия (см. Рис. 1.21), что означает, что с увеличением числа единиц приобретаемого (потребляемого) продукта уровень (степень) удовлетворения потребностей индивидуума растет. Таким образом, рост графика Γ отражает факт ненасыщаемости потребностей индивидуума (модель «жадного» индивидуума: чем больше продукта, тем индивидууму лучше). График Γ обладает еще одним свойством: пусть пары точек на оси абсцисс таковы, что

$$x_1 - x_0 = x_3 - x_2 \ (x_0 < x_1 < x_2 < x_3),$$

тогда

$$u(x_1) - u(x_0) > u(x_3) - u(x_2)$$

(см. Рис. 1.21). Это свойство можно проиллюстрировать следующим наглядным примером: с ростом числа поедаемых яблок каждое дополнительное яблоко для индивидуума становится все менее относительно полезным. Если разность $x_1 - x_0 = 1$ ($x_3 - x_2 = 1$), или относительно мала, то дробь

$$\frac{u(x_1) - u(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \left(\frac{u(x_3) - u(x_2)}{x_3 - x_2} \right)$$

называется предельной полезностью продукта (товара) в точке x_0 (в точке x_2). Из неравенства $u(x_1) - u(x_0) > u(x_3) - u(x_2)$ следует, что сростом числа единиц приобретаемого (потребляемого) продукта его предельная полезность падает (закон убывающей предельной полезности).

Этот закон имеет следующую естественную геометрическую интерпретацию: график Γ функции $y = u(x)$ имеет вид «горки» (см. Рис. 1.21), крутизна которой уменьшается с ростом x.

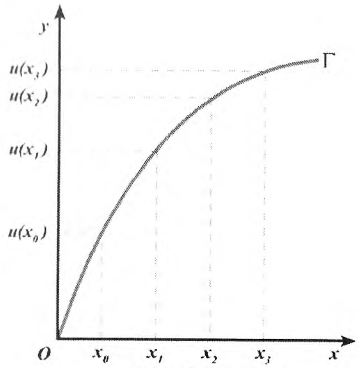

Рис. 1.21.

Предельная полезность обозначается символом $Mu(x)$, ее график показан на Рис. 1.22.

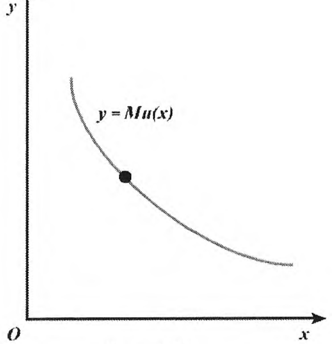

Рис. 1.22.

Более точно предельной полезностью продукта (товара) в точке x_0 называется производная

$$\frac{du(x_0)}{dx}$$

функции полезности $u(x)$ в точке x_0. К сожалению, в экономической теории используется один термин (предельная полезность) для разных математических выражений

$$\frac{u(x_1)-u(x_0)}{x_1-x_0}, \quad \frac{du(x_0)}{dx}.$$

Однако из контекста всегда бывает ясно, о каком из этих математических выражений идет речь.

1.2.23. В экономической теории и в ее приложениях важную роль играет понятие производственной функции $y = f(x)$. Частное значение $f(x_0)$ производственной функции равно максимально возможному объему выпускаемой фирмой продукции, если ресурс фирмой затрачивается (используется) в количестве x_0 единиц. Например, затрачиваемым ресурсом может быть труд (см. также раздел 1.1.3), измеряемый в человеко-часах или в виде фонда заработной платы (месячного, годовго), а выпускаемой продукцией — холодильники (число холодильников, выпускаемых в месяц, в год). В теории принято считать, что вся выпускаемая фирмой продукция реализуется на рынке по рыночной цене.

Разные фирмы имеют, вообще говоря, разные производственные функции. Производственная функция $y = f(x)$ формально отражает уровень технологии фирмы. График Γ производственной функции $y = f(x)$ — возрастающая (не обязательно строго) линия (см. Рис. 1.23), что означает, что с ростом числа единиц затрачиваемого (используемого) ресурса объем выпускаемой фирмой продукции растет. Однако при

этом каждая дополнительная единица затрачиваемого (используемого) ресурса дает все меньший прирост объема выпускаемой продукции (если $x_1 - x_0 = x_3 - x_2$ ($x_0 < x_1 < x_2 < x_3$), то $f(x_1) - f(x_0) > f(x_3) - f(x_2)$). Если разность $x_1 - x_0 = 1$ ($x_3 - x_2 = 1$), или относительно мала, то дробь

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad \left(\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\right)$$

называется *предельной производительностью ресурса* в точке x_0 (в точке x_2). Из неравенства $f(x_1) - f(x_0) > f(x_3) - f(x_2)$ следует, что с ростом числа единиц затрачиваемого ресурса его предельная производительность падает (закон убывающей предельной производительности). С содержательной точки зрения форма графика Γ (см. Рис. 1.23)

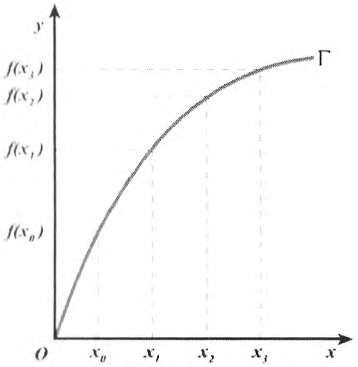

Рис. 1.23.

и, следовательно, закон убывающей предельной производительности могут быть обоснованы следующим образом. Производственная функция $y = f(x)$ на самом деле есть функция не одного ресурса, а, вооще говоря, ряда ресурсов. То, что они в функции $f(x)$ явно не показаны, означает, что их количество не меняется. А тогда с ростом затрат одного ресурса объем выпускаемой продукции также растет, но относительно все более медленнее из-за того, например, что при значительном увеличении рабочей силы и неизменном объеме используемого капитала объем выпускаемой продукции будет расти, но не столь активно, как это имело бы место при одинаковом росте труда и капитала.

Закон убывающей предельной производительности имеет естественную геометрическую интерпретацию (аналогично геометической интерпретации закона убывающей предельной полезности): график Γ производственной функции $y = f(x)$ имеет вид «горки» (см. Рис. 1.23), крутизна которой уменьшается с ростом x. Если предельная производительность труда остается постоянной, то график Γ производственной функции $y = f(x)$ есть прямая, выходящая из точки O под острым углом с осью Ox углом. Если предельная производительность растет, то график Γ

производственной функции $y = f(x)$ напоминает «горку», кутизна которой растет с ростом x.

Отношение $\frac{f(x_0)}{x_0}$ называется *средней производительностью ресурса* в точке x_0.

Если ресурсом является труд, то отношение $\frac{f(x_0)}{x_0}$ называется (средней) производительностью труда. В экономической теории (в микроэкономическом анализе) используется следующая символика и терминология:

общий объем y выпускаемой фирмой продукции называется *общим продуктом* и обозначается символом TQ;

средняя производительность русурса называется *средним продуктом* и обозначается символом

$$AQ = \frac{TQ}{x}$$

(напоминаем, что ресурс «затрачивается», продукт «выпускается»);

предельная производительность ресурса называется *предельным продуктом* и обозначается символом

$$MQ = \frac{TQ(x_1) - TQ(x_0)}{x_1 - x_0}$$

(разность $x_1 - x_0$ относительна мала или равна единице).

Как и в случае предельной полезности облее точно предельной производительностью ресурса (предельным продуктом) в точке x_0 называется производная

$$\frac{df(x_0)}{dx} \left(\frac{dTQ(x_0)}{dx}\right)$$

производственной функции $f(x)$ (общего продукта $TQ(x)$) в точке x_0. Из контекста бывает ясно, о каком из математических выражений предельной производительности труда ресурса (предельного продукта) идет речь.

1.2.24. $\boxed{P}$

а) Привести конкретные примеры функций спроса и линий спроса.

б) Привести конкретные примеры функций предложения и линий предложения

в) Пусть рыночный спрос и рыночное предложения выросли, и пусть точка пересечения E перешла в точку пересечения E_3 (см. Рис. 1.19). Какие возможны варианты изменения цены равновесия и объема равновесия?

1.3. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ ДВУХ (НЕСКОЛЬКИХ) ПЕРЕМЕННЫХ

1.3.1. Как уже отмечалось в разделе 1.2.1, множество всех двумерных векторов $x = (x_1, x_2)$ и множество всех (двумерных) точек $M = (x_1, x_2)$ (т.е. сама плоскость Ox_1x_2) (см. Рис. 1.24а) обозначаются единым символом $\mathbf{E}_2$ (или $\mathbf{R}_2$).

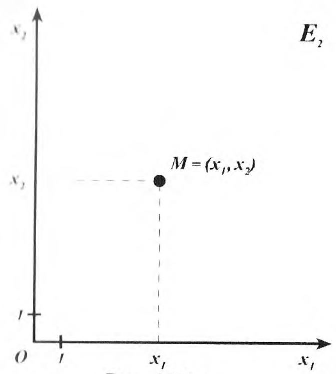

Рис. 1.24а.

По аналогии с двумерным вектором определяется *трехмерный вектор* x как упорядоченная тройка (x_1, x_2, x_3) действительных чисел x_1, x_2, x_3, т.е. $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Трехмерному вектору (x_1, x_2, x_3) соответствует точка (более правильно — трехмерная точка) M пространства $Ox_1x_2x_3$ (см. Рис. 1.24б и Рис. 1.24в). Верно и обратное, т.е. каждой точке M' пространства $Ox_1x_2x_3$ соответствует упорядоченная тройка (x'_1, x'_2, x'_3) действительных чисел x'_1, x'_2, x'_3 (см. Рис. 1.24в). Действительные числа x_1, x_2, x_3 называются *координатами* трехмерного вектора x (трехмерной точки M). Множество всех трехмерных векторов и множество всех (трехмерных) точек $M = (x_1, x_2, x_3)$ (т.е. трехмерное пространство $Ox_1x_2x_3$) обозначаются символом $\mathbf{E}_3$ (или $\mathbf{R}_3$).

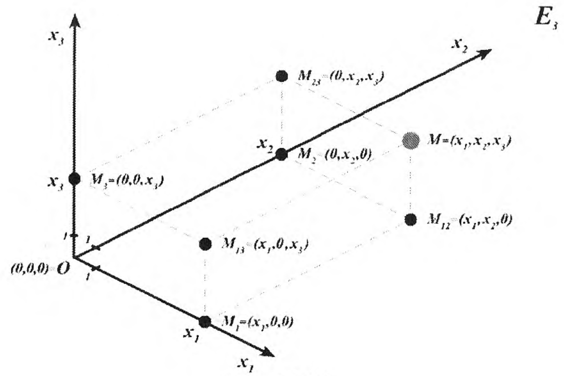

Рис. 1.24б.

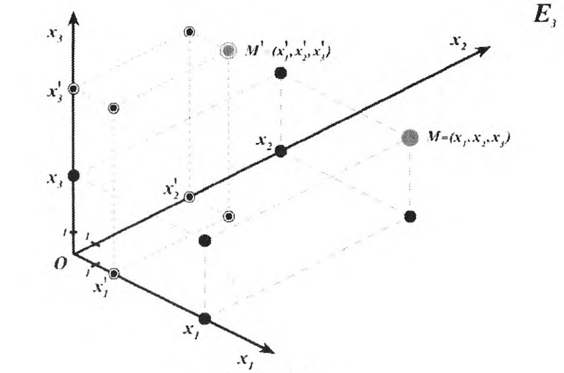

Рис. 1.24в.

Аналогично можно продолжить дальше и определить *четырехмерный вектор* x как упорядоченную четверку (x_1,x_2,x_3,x_4) действительных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, т.е. $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Числа x_1, x_2, x_3, x_4 называются *координатами* четырехмерного вектора.

К сожалению, четырехмерные векторы не имеют наглядной геометрической интерпретации в отличие от одномерных векторов (действительных чисел), двумерных векторов и трехмерных векторов (см. Рис. 1.24). Однако (опять же по аналогии) наряду с термином «четырехмерный вектор» используется геометрический термин «четырехмерная точка», т.е. термины «вектор» и «точка» используются как синонимы не только при $n=1,2,3$, но и при $n=4$, и далее по аналогии при $n=5$, $n=6$ и т.д.

Далее естественно определить *n-мерный вектор* (n — натуральное число) x как упорядоченный набор $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ из n штук действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n, т.е. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Действительные числа x_1, x_2, ..., x_n называются координатами n-мерного вектора x. Как только что было отмечено, при $n\geq 4$ n-мерные векторы не имеют наглядной геометрической интерпретации, аналогичной той, которые имеют одномерные, двумерные и трехмерные векторы (см. Рис. 1.24). Однако по аналогии со случаями $n=1$, $n=2$, $n=3$ наряду с термином «n-мерный вектор» используется

геометрический термин «n-мерная точка», т.е. термин «n-мерный вектор» и «n-мерная точка» используются как синонимы. По аналогии $n=1$, $n=2$, $n=3$ множество всех n-мерных векторов обозначается символом $\mathbf{E}_n$.

1.3.2. Примеры

а) Двумерный вектор $x=(x_1,x_2)$ можно экономически интерпретировать как конфигурацию (комбинацию) ресурсов, которые фирма затрачивает для того, чтобы обеспечить выпуск своего (фирменного) продукта (изделия). Координата x_1 равна количеству первого ресурса (например, капитала), координата x_2 равна количеству второго ресурса (например, труда).

б) Набор ресурсов, которые фирма затрачивает для выпуска своего продукта может быть достаточно дробным: x_1 — число станков марки 1, x_2 — число станков марки 2, x_3 — число человеко-часов труда высокой квалификации, x_4 — число человеко-часов труд средней квалификации, x_5 — человеко-часов труда невысокой квалификации. Для описания такой конфигурации (номенклатуры) ресурсов полезен пятимерный вектор $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$. Если конфигурация включает n видов ресурсов, то для ее описания понадобится n-мерный вектор.

в) Потребительский набор из двух продуктов можно описать с помощью двумерного вектора $x=(x_1,x_2)$, где первая координтана равна количеству первого продукта (например, 2 кг хлеба, т.е. $x_1=2$), а вторая координата x_2 — количеству второго продукта (например, 7 кг картофеля, т.е. $x_2=7$).

г) Потребительский набор из продуктов n наименований описывается n-мерным вектором $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, где первая координата x_1 равна количеству первого продукта, ..., координата x_n с номером n равна количеству продукта с номером n.

д) Вектор цен на продукты потребительского набора, например, имеет вид $p=(p_1,p_2,p_n)$, где координата p_1 — цена одной единицы первого продукта, например, хлеба, координата p_2 — цена одной единицы второго продукта, например, молока, координата p_3 — цена одной единицы третьего продукта, например, чая.

1.3.3. Пусть A и B — непустые числовые множества ($A\subseteq\mathbf{E}_2$, $B\subseteq\mathbf{E}_1$). Говорят, что задана *функция* f, если по определенному правилу каждому двумерному вектору (точке) $x=(x_1,x_2)$ из множества $A\subseteq\mathbf{E}_2$ ставится *в соответствие* единственное (для каждого вектора (точки) $x=(x_1,x_2)$, вообще говоря, свое) число $y\in B\subseteq\mathbf{E}_1$.

1.3.4. Число y, которое функция f ставит в соответствие двумерному числу (точке) $x=(x_1,x_2)$, обозначается символом $f(x_1,x_2)$ (в компактной символике — $f(x), x\in A\subseteq\mathbf{E}_2$) и называется *частным значением* (или просто — *значением*) функции f на векторе (точке) $x=(x_1,x_2)$, т.е. $y=f(x_1,x_2)$ ($y=f(x), x\in A\subseteq\mathbf{E}_2$). Число y называется также *образом* вектора (точки) $x=(x_1,x_2)\in A\subseteq\mathbf{E}_2$, а вектор $x=(x_1,x_2)\in A\subseteq\mathbf{E}_2$ — *прообразом* числа $y=f(x_1,x_2)$. Множество $A\subseteq\mathbf{E}_2$ называется *областью определения* функции f (символика: $A=Dom f$). Множество всех значений функции f обозначается символом $f(A)$ (или Imf) и называется *областью значений* функции f. Таким образом, $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbf{E}_1$.

1.3.5. Замечания.

а) Функцию f (см. раздел 1.3.3) естественно называть скалярной функцией двумерного векторного аргумента (двумерной независимой переменной). Однако далее будет использоваться более краткий термин: *функция двух переменных* (x_1 и x_2).

б) Как уже отмечалось в разделе 1.2.4, общее понятие функции определяется и обсуждается в главе второй (см. разделы 2.4.1, 2.4.10, 2.4.11).

в) В разделе 1.1.8 приведенные двухфакторные производственные функции являются функциями двух переменных (капитала и труда).

1.3.6. Пусть A и B — непустые числовые множества ($A \subseteq \mathbf{E}_n$, $B \subseteq \mathbf{E}_1$). Говорят, что задана *функция* f, если по определенному правилу каждому n-мерному вектору (n-мерной точке) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из множества $A \subseteq \mathbf{E}_n$ ставится *в соответствие* единственное (для каждого n-мерного вектора (n-мерной точки) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, вообще говоря, свое) число $y \in B \subseteq \mathbf{E}_1$.

1.3.7. Замечания.

а) Понятия образа, прообраза, области определения и области значений для функции f (см. раздел 1.3.6) вводятся по аналогии с разделом 1.3.4 с простой заменой везде двумерного вектора $x = (x_1, x_2)$ на n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

б) Функцию f (см. раздел 1.3.6) естественно назвать скалярной функцией n-мерного векторного аргумента (n-мерной векторной независимой переменной). Однако далее будут использоваться более краткие термины: функция n переменных x_1, x_2, …, x_n, *функция нескольких переменных*.

в) Далее в главе первой рассматриваются основные положения теории функции двух переменных. Основные положения теории функции нескольких переменных в явном виде не приводятся, ибо легко могут быть получены по аналогии.

1.3.8. Множество l_y *всех* прообразов значения y функции f двух переменных называется множеством l_y уровня y функции f. Таким образом,

$$l_y \overset{(def)}{=} \{(x_1, x_2) | (x_1, x_2) \in A_f \subseteq \mathbf{E}_2, y = f(x_1, x_2)\}.$$

Множества l_{τ_1} и l_{τ_2} соответствующие различным уровням τ_1 и τ_2 ($\tau_1 = \tau_2$), не имеют общих точек (см. Рис. 1.25). Обычно множество l_τ уровня τ функции $f(x_1, x_2)$ двух переменных представляет собой линию l_τ на плоскости Ox_1x_2 (см. Рис. 1.25).

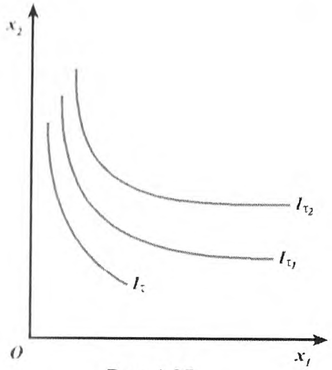

Рис. 1.25.

1.3.9. Совокупность множеств l_τ всех уровней τ (τ пробегает область значений $f(A)$ функции $f(x_1, x_2)$) называется картой множеств уровней функции $f(x_1, x_2)$ переменных x_1 и x_2.

1.3.10. Для построения множества (линии) l_τ уровня τ функции $y = f(x_1, x_2)$ переменных x_1 и x_2, содержащего точку $(x_1^0, x_2^0) \in A_f \subseteq \mathbf{E}_2$ следует выполить следующие действия:

1) определить частное значение (уровень) $\tau^0 = y^0$ функции $f(x_1, x_2)$ в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$: $\tau^0 = f(x_1^0, x_2^0)$;

2) написать уравнение $\tau^0 = f(x_1, x_2)$ множества (линии) l_{τ^0} уровня τ^0;

3) построить график уравнения $\tau^0 = f(x_1, x_2)$.

1.3.11. Примеры. Построим множество (линию) уровня функции $y = f(x_1, x_2)$, содержащее точку (x_1^0, x_2^0) (точку (x_1^1, x_2^1)):

а) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ ($(x_1^0, x_2^0) = (3,1)$, $(x_1^1, x_2^1) = (1,1)$);

б) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ($(x_1^0, x_2^0) = (2,3)$, $(x_1^1, x_2^1) = (1,3)$).

а) Найдем уровень $\tau^0 = 2x_1^0 + 3x_2^0 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$, напишем уравнение $9 = 2x_1 + 3x_2$ линии l_{τ^0} уровня τ^0 и построим прямую $l_{\tau^0} = l_9$, которая изображает уравнение $9 = 2x_1 + 3x_2$ (см. Рис. 1.26).

Для точки $(x_1^1, x_2^1) = (1,1)$ имеем $2x_1^1 + 3x_2^1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$, $5 = 2x_1 + 3x_2$. Прямая l_5, изображающая уравнение $5 = 2x_1 + 3x_2$, и есть линия уровня τ^1, содержащая точку $(x_1^1, x_2^1) = (1,1)$ (см. Рис. 1.26).

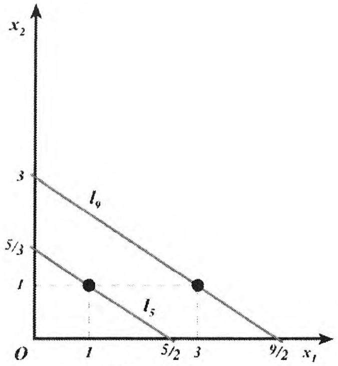

Рис. 1.26.

б) Имеем $\tau^0 = x_1^0 x_2^0 = 2 \cdot 3 = 6$, откуда получаем уравнение $6 = x_1 x_2$ линии уровня $\tau^0 = 6$ функции $y = x_1 x_2$. Уравнение $x_2 = \dfrac{6}{x_1}$ есть уравнение гиперболы, которая и есть множество l_6 уровня $\tau^0 = 6$ (состоящее из двух линий), содержащее точку $(x_1^0, x_2^0) = (2,3)$ (см. Рис. 1.27).

Для точки $(x_1^1, x_2^1) = (1,3)$ имеем $\tau^1 = x_1^1 x_2^1 = 3$, $3 = x_1 x_2$ и $x_2 = \dfrac{3}{x_1}$ (см. Рис. 1.27).

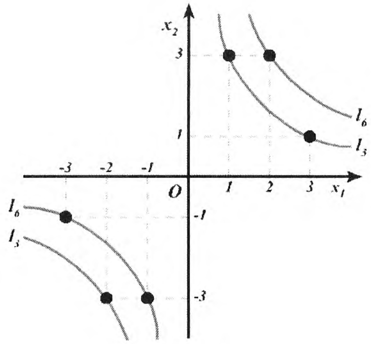

Рис. 1.27.

В экономических приложениях обычно $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Поэтому в экономических приложениях рассматриваются лишь те фрагменты множеств (линий) уровня функции $y = f(x_1, x_2)$, которые расположены в первой четверти плоскости Ox_1x_2, т.е. в неотрицательном ортанте $\mathbf{E}_2^+ = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ пространства $\mathbf{E}_2$ (плоскости Ox_1x_2).

1.3.12. *Графиком* Γ_f функции $y = f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in A \subseteq \mathbf{E}_2$ называется множество трехмерных точек (векторов) $(x_1, x_2, y) \in \mathbf{E}_3$ таких, что $(x_1, x_2) \in A \subseteq \mathbf{E}_2$, $y = f(x_1, x_2)$. В компактном виде график Γ_f функции $y = f(x_1, x_2)$ определяется так

$$\Gamma_f \overset{(def)}{=} \{(x_1, x_2, y) | (x_1, x_2) \in A \subseteq \mathbf{E}_2, y = f(x_1, x_2)\}.$$

На Рис. 1.28 график Γ_f имеет вид двумерной поверхности, однозначно проектирующейся на множество $A \subseteq \mathbf{E}_2$, которое есть область определения функции $y = f(x_1, x_2)$. Термин «однозначное проектирование» означает, что вертикальная прямая L, проходящая через точку (вектор) $x = (x_1, x_2)$ из области определения $A \subseteq \mathbf{E}_2$ функции $y = f(x_1, x_2)$, «протыкает» двумерную поверхность Γ_f только в одной точке $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$.

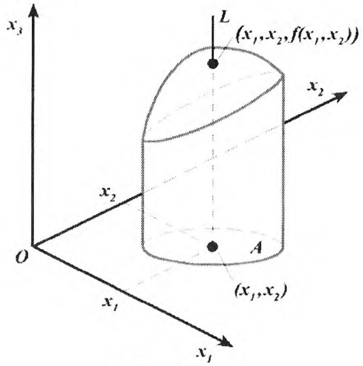

Рис. 1.28.

1.3.13. Взаимосвязь между графиком Γ_f функции $y = f(x_1, x_2)$ и множеством l_τ уровня τ этой функции может быть наглядно проинтерпретирована в трехмерном пространстве Ox_1x_2y (см. Рис. 1.29).

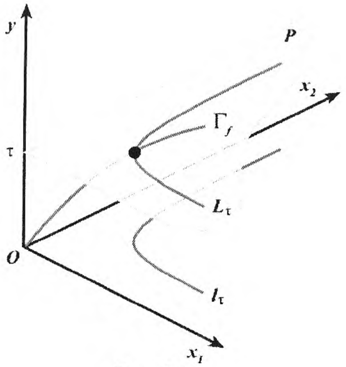

Рис. 1.29.

На оси Ox берем точку τ, проводим через эту точку горизонтальную плоскость P, которая параллельна координатной плоскости Ox_1x_2 и вырезает из поверхности Γ_f плоскую линию L_τ, которая «зависает» над координатной плоскостью Ox_1x_2 на высоте, равной τ.

Спроектируем (опустим) линию L_τ на координатную плоскость Ox_1x_2 и получим линию l_τ уровня τ функции $y = f(x_1, x_2)$ двух переменных x_1 и x_2. Очевидно, линии L_τ и l_τ конгруэнтны, т.е. при наложении друг на друга совпадают.

1.3.14. Если в функции двух переменных x_1 и x_2 положить $x_2 = x_2^0$, то получится функция $y = h(x_1)$ одной переменной x_1. Если функция $y = h(x_1)$ имеет в точке $x_1 = x_1^0$ конечную производную $h'(x_1^0)$, то она обозначается символом

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1},$$

или $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$, или $f'_1(x_1^0, x_2^0)$ (т.е. $h'(x_1^0) = \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}$), и называется (первой) *частной производной функции* $y = f(x_1, x_2)$ *по переменной* x_1 в точке (x_1^0, x_2^0). Таким образом, если нет особой оговорки, под термином «(первая) частная производная функции $y = f(x_1, x_2)$» понимается *конечная* первая частная производная этой функции. Предполагается, что точка (x_1^0, x_2^0) принадлежит области определения $A \subseteq \mathbf{E}_2$ функции $y = f(x_1, x_2)$. Если функция $y = f(x_1, x_2)$ имеет в точке (x_1^0, x_2^0) (первую) конечную частную производную по переменной x_1, то для краткости пишут $f(x_1, x_2) \in D_1^{(1)}(x_1^0, x_2^0)$. Термин «первая» в контексте с частной производной как правило не используется.

Аналогично определяется (первая) частная производная функции $y = f(x_1, x_2)$ *по переменной* x_2 в точке (x_1^0, x_2^0):

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = g'(x_2^0),$$

где $g'(x_2^0)$ — конечная производная по переменной x_2 в точке $x_2 = x_2^0$ функции $y = g(x_2) = f(x_1^0, x_2)$. Для частной производной функции $y = f(x_1, x_2)$ по переменной x_2 в точке (x_1^0, x_2^0) используется символы $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ и $f'_2(x_1^0, x_2^0)$; используется символика $f(x_1, x_2) \in D_2^{(1)}(x_1^0, x_2^0)$. Для конечных частных производных справедливы свойства, аналогичные свойствам конечной производной одной переменной.

Когда точка (x_1^0, x_2^0) особо не выделяется, для частных производных $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}$ используют также символы $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}$.

Частную производную $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}$ функции $y = f(x_1, x_2)$ по переменной x_1 в точке (x_1^0, x_2^0) в экономической литературе принято называть *маргинальным значением* функции $y = f(x_1, x_2)$ по переменной x_1 в точке (x_1^0, x_2^0). Для маргинального значения используется символика $M_1 f(x_1^0, x_2^0)$. Таким образом, $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = M_1 f(x_1^0, x_2^0)$. Аналогично, $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = M_2 f(x_1^0, x_2^0)$.

Отношение $\dfrac{f(x_1^0, x_2^0)}{x_1^0}$ в экономической литературе принято называть средним значением функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_1 в точке (x_1^0, x_2^0) (символика: $\dfrac{f(x_1^0, x_2^0)}{x_1^0} = A_1 f(x_1^0, x_2^0)$). Аналогично, $\dfrac{f(x_1^0, x_2^0)}{x_2^0} = A_2 f(x_1^0, x_2^0)$.

1.3.15. Положим в функции $y = f(x_1, x_2)$ $x_2 = x_2^0$. Геометрически это означает, что в трехмерном пространстве Ox_1x_2y проводится вертикальная плоскость $x_2 = x_2^0$, которая параллельна плоскости Ox_1y (см. Рис. 1.30).

Вертикальная плоскость P_1 вырезает из графика Γ_f функции $y = f(x_1, x_2)$ плоскую линию Γ_1, которая есть график функции $y = f(x_1, x_2^0) = h(x_1)$ одной переменной. Ее производная $h'(x_1^0)$ по переменной x_1 в точке x_1^0 есть частная производная $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}$ функции $y = f(x_1, x_2)$ по переменной x_1 в точке (x_1^0, x_2^0).

На оси Ox берем
которая паралле
плоскую линию l
высоте, равной τ.
Спроектируем (о
линию l_τ уровня
линии L_τ и l_τ кон

1.3.14. Если в фу
функция $y = h(x_1)$
конечную производ

или $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$, и

частной производ
образом, если не
функции $y = f(x_1, x$
функции. Пред
определения $A \subseteq$
точке (x_1^0, x_2^0) (пер
краткости пишут f
производной как пр

Так как $h'(x_1^0) = \operatorname{tg}\varphi_1$, то $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}$ (см. Рис. 1.30). На Рис. 1.30 прям
касательная к плоской линии Γ_1 — графику функции $y = f(x_1, x_2^0) = h(x_1)$
переменной x_1 в точке $\left(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0)\right)$.

Таким образом, частная производная $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}$ функции $y = f(x_1, x$
переменной x_1 в точке (x_1^0, x_2^0) *геометрически интерпретируется*
(см. Рис. 1.30). Аналогично, частная производная $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}$ функции $y = f(x$
переменной x_2 в точке (x_1^0, x_2^0) геометрически интерпретируется
(см. Рис. 1.30).

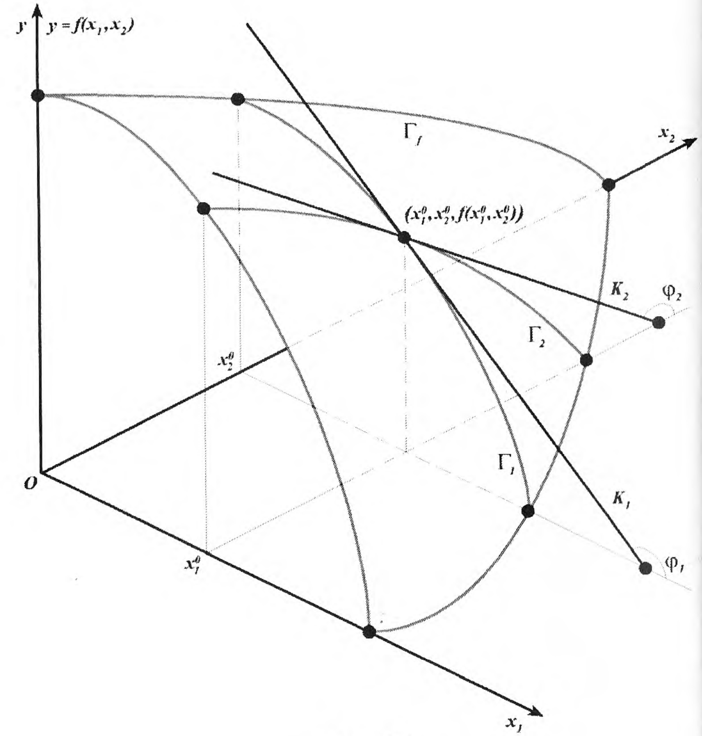

Рис. 1.30.

1.3.16. Примеры:

частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}$ функции $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. Для нахождения $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$
что переменная x_2 играет роль постоянной, тогда $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = a x_1^{\alpha_1}$
). Используя пункт а) раздела 1.2.9, получаем

$$y'_{x_1} = a\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1},$$

имеем

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2},$$

$x_2^{\alpha_2}$. Аналогично имеем

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}.$$

частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}$ функции $y = \sin(x_1^2 + x_2^3)$. На основании
раздела 1.2.9 получаем

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \cos(x_1^2 + x_2^3) \cdot 2x_1$$

играет роль постоянного слагаемого b),

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \cos(x_1^2 + x_2^3) \cdot 3x_2^2$$

играет роль постоянного слагаемого).

порядоченная пара (двумерный вектор) $\left(\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}\right)$ частных
ых функции $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0) называется *градиентом*
$f(x_1, x_2)$ в этой точке. Символика:

$$\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \right).$$

Иногда градиент функции $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0) называют (первой) *полной производной функции* $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0). Для градиента функции $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0) используется и такой символ: $f'(x_1^0, x_2^0)$.

1.3.18. Рассмотрим геометрическую интерпретацию градиента. Градиент $\left(\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \right)$ на плоскости Ox_1x_2 изображается в виде направленного отрезка, началом которого является точка $O = (0,0)$, а концом — точка M с координатами $\left(\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \right)$, а также в виде направленного отрезка, началом которого является точка $P^0 = (x_1^0, x_2^0)$, а концом — точка $Q^0 = \left(x_1^0 + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}, x_2^0 + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \right)$ (Рис. 1.31).

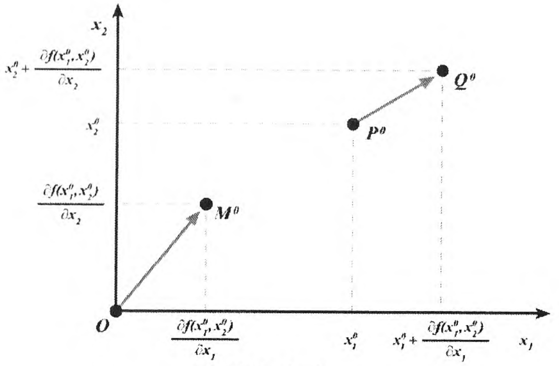

Рис. 1.31.

1.3.19. Примеры.

а) Найти и построить градиент функции $y = 4x_1^{1/4} x_2^{1/4}$ в точке $(x_1^0, x_2^0) = (8,2)$, а также линию уровня функции $y = 4x_1^{1/4} x_2^{1/4}$, содержащую точку (x_1^0, x_2^0). Имеем:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{4}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4} = x_1^{-3/4} x_2^{1/4},$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{4}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4} = x_1^{1/4} x_2^{-3/4}.$$

Полагая $x_1 = x_1^0 = 8$, $x_2 = x_2^0 = 2$, получим

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = 8^{-3/4} 2^{1/4} = 2^{-9/4} 2^{1/4} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = 8^{1/4} 2^{-3/4} = 2^{3/4} 2^{-3/4} = 1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \left(x_1^{-3/4} x_2^{1/4}, x_1^{1/4} x_2^{-1/4} \right),$$

а тогда

$$\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0) = \operatorname{grad} f(8,2) = \left(\frac{1}{4}, 1 \right).$$

Построим сначала $\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0)$ в виде направленного отрезка с началом в точке $O = (0,0)$, а затем в виде направленного отрезка с началом в точке $(x_1^0, x_2^0) = (8,2)$ (см. Рис. 1.32).

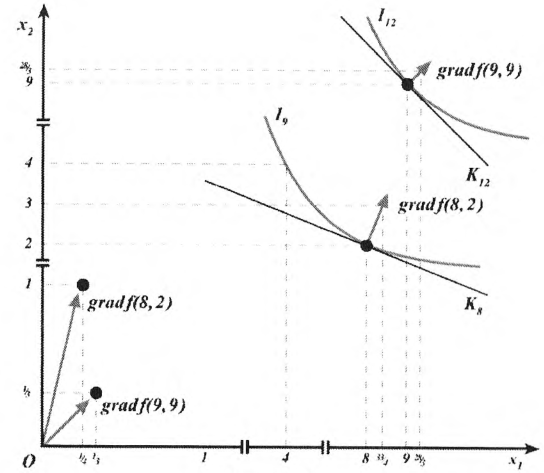

Рис. 1.32.

Так как $h'(x_1^0) = \mathrm{tg}\,\varphi_1$, то $\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}$ (см. Рис. 1.30). На Рис. 1.30 прямая K_1 — касательная к плоской линии Γ_1 — графику функции $y = f(x_1, x_2^0) = h(x_1)$ одной переменной x_1 в точке $\left(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0)\right)$.

Таким образом, частная производная $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}$ функции $y = f(x_1, x_2)$ по переменной x_1 в точке (x_1^0, x_2^0) *геометрически интерпретируется* как $\mathrm{tg}\,\varphi_1$ (см. Рис. 1.30). Аналогично, частная производная $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}$ функции $y = f(x_1, x_2)$ по переменной x_2 в точке (x_1^0, x_2^0) геометрически интерпретируется как $\mathrm{tg}\,\varphi_2$ (см. Рис. 1.30).

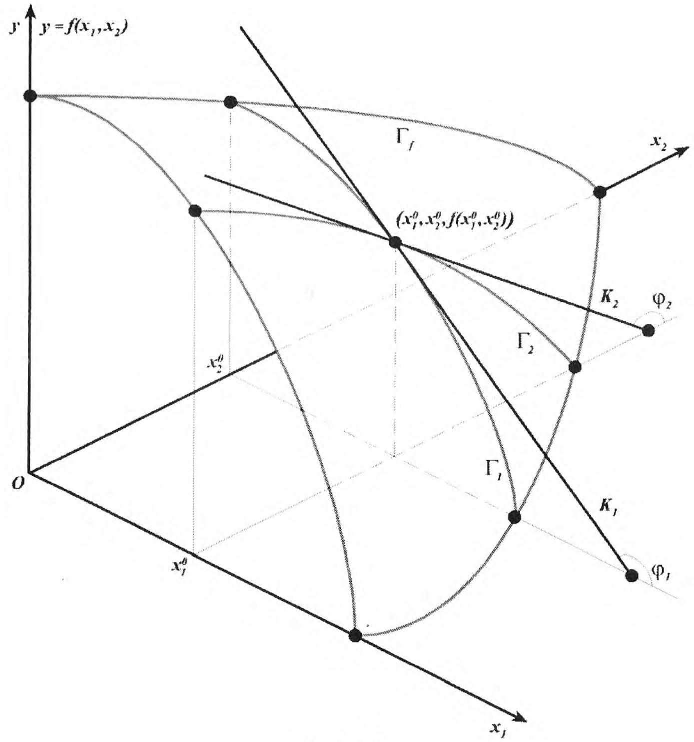

Рис. 1.30.

1.3.16. Примеры:

а) Найдем частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}$ функции $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. Для нахождения $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$ считаем, что переменная x_2 играет роль постоянной, тогда $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = a x_1^{\alpha_1}$ ($a = a_0 x_2^{\alpha_2}$). Используя пункт а) раздела 1.2.9, получаем

$$y'_{x_1} = a\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1},$$

откуда имеем

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2},$$

ибо $a = a_0 x_2^{\alpha_2}$. Аналогично имеем

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}.$$

б) Найдем частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}$ функции $y = \sin(x_1^2 + x_2^3)$. На основании пункта б) раздела 1.2.9 получаем

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \cos(x_1^2 + x_2^3) \cdot 2x_1$$

(здесь x_2^3 играет роль постоянного слагаемого b),

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \cos(x_1^2 + x_2^3) \cdot 3x_2^2$$

(здесь x_1^2 играет роль постоянного слагаемого).

1.3.17. Упорядоченная пара (двумерный вектор) $\left(\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}\right)$ частных производных функции $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0) называется *градиентом* функции $f(x_1, x_2)$ в этой точке. Символика:

На Рис. 1.32 представлена линия l_8 уровня 8 функции $y = 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}$, содержащая точку $(x_1^0, x_2^0) = (8,2)$. Касательная K_8 к линии l_8 в точке $(8,2)$ перпендикулярна (*ортогональна*) градиенту $\operatorname{grad} f(8,2)$ в точке $(8,2)$.

Этот частный пример иллюстрирует важный факт теории функций двух переменных: градиент $\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0)$ функции $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0) *ортогонален* линии l_{τ^0} уровня $\tau^0 = y^0$, содержащей точку (x_1^0, x_2^0) (точнее, $\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0)$ ортогонален касательной к линии l_{τ^0} в точке (x_1^0, x_2^0)).

Напомним, что по данной точке (x_1^0, x_2^0) линия l_{τ^0} уровня $\tau^0 = y^0$ $(\tau^0 = f(x_1^0, x_2^0))$, содержащая эту точку, строится так.

Имеем

$$\tau^0 = f(x_1^0, x_2^0) = 4(8 \cdot 2)^{1/4} = 4(16)^{1/4} = 4 \cdot 2 = 8,$$

тогда $8 = 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}$, откуда $x_2 = \dfrac{2^4}{x_1}$, т.е. уравнение линии l_{τ^0} $(\tau^0 = 8)$ есть гипербола $x_2 = \dfrac{16}{x_1}$. На Рис. 1.32 представлена одна ветвь гиперболы $x_2 = \dfrac{16}{x_1}$, именно та, которая содержит точку $(x_1^0, x_2^0) = (8,2)$.

б) Найти и построить градиент функции $y = 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}$ в точке $(x_1^1, x_2^1) = (9,9)$, а также линию уровня функции $y = 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}$, содержащую точку (x_1^1, x_2^1).

Полагая в

$$\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0) = \operatorname{grad} f(8,2) = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

$x_1 = x_1^1 = x_2 = x_2^1 = 9$, получим

$$\operatorname{grad} f(x_1^1, x_2^1) = \operatorname{grad} f(9,9) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

На Рис. 1.32 $\operatorname{grad} f(9,9)$ изображен в виде направленного отрезка, начало которого находится в точке $(0,0)$, а конец — в точке $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, и в виде направленного отрезка с началом в точке $(x_1^1, x_2^1) = (9,9)$ и с концом в точке $\left(\dfrac{28}{3}, \dfrac{28}{3}\right) = \left(9 + \dfrac{1}{3}, 9 + \dfrac{1}{3}\right)$.

На Рис. 1.32 простроены линии l_{τ^1} уровня $\tau^1 = f(x_1^1, x_2^1) = 4(9 \cdot 9)^{1/4} = 12$, содержащая точку $(x_1^1, x_2^1) = (9,9)$, и касательная K_{12} к линии l_{12} в точке $(x_1^1, x_2^1) = (9,9)$. Касательная K_{12} и $\operatorname{grad} f(x_1^1, x_2^1)$ ортогональны.

Линия l_{12} расположена «северо-восточнее» линии l_8 $(12 > 8)$, они не имеют общих точек.

Этот пример иллюстрирует важный факт теории функций двух переменных: градиент $\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0)$ функции $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0) показывает направление роста функции $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0) (на самом деле, градиент показывает направление наибыстрейшего роста функции $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0)).

Этот факт можно перефразировать следующим образом: если градиент $\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0)$ «смотрит» на «северо-восток», то более «северо-восточная» линия соответствует большему уровню, т.е. большему частному значению функции $f(x_1, x_2)$.

1.3.20. (Частной) Эластичностью $E_1 f(x_1^0, x_2^0)$ переменной y (функции $f(x_1, x_2)$) по переменной x_1 в точке (x_1^0, x_2^0) называется следующее выражение

$$E_1 f(x_1^0, x_2^0) = \frac{x_1^0}{f(x_1^0, x_2^0)} \cdot \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}.$$

Аналогично

$$E_2 f(x_1^0, x_2^0) = \frac{x_2^0}{f(x_1^0, x_2^0)} \cdot \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}.$$

Рассматривают также сумму $E_1 f(x_1^0, x_2^0)$ и $E_2 f(x_1^0, x_2^0)$, которую обозначают символом $Ef(x_1^0, x_2^0)$, т.е. $Ef(x_1^0, x_2^0) = E_1 f(x_1^0, x_2^0) + E_2 f(x_1^0, x_2^0)$. В символах $E_1 f(x_1^0, x_2^0)$, $E_2 f(x_1^0, x_2^0)$, $Ef(x_1^0, x_2^0)$ «нулики» опускают и пишут $E_1 f(x_1, x_2)$, $E_2 f(x_1, x_2)$, $Ef(x_1, x_2)$.

1.3.21. Неявная функция $y = f(x)$ одной переменной x — функция, заданная уравнением $\mathrm{F}(x, y) = 0$, еще не разрешенным относительно переменной y.

Неявной называется функция $y = f(x_1, x_2)$ двух переменных x_1 и x_2, если она задана уравнением $\mathrm{F}(x_1, x_2, y) = 0$, еще не разрешенным относительно переменной y.

1.3.22. Пример. Явная функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(|x| \le 1)$ может быть задана неявно в виде уравнения $x^2 + y^2 = 1$ $(y \ge 0)$, а может также в виде уравнения $y - \sqrt{1 - x^2} = 0$, также не разрешенного относительно переменной y.

1.3.23. *Существование* неявной функции $y = f(x)$, задаваемой уравнением $\mathrm{F}(x, y) = 0$, эквивалентно разрешимости уравнения $\mathrm{F}(x, y) = 0$ относительно переменной y при фиксированных значениях переменной x. При такой постановке задачи решение y уравнения $\mathrm{F}(x, y) = 0$ зависит от фиксированного x_0 и, следовательно, представляет собой частное значение $y_0 = f(x_0)$ неявной функции $y = f(x)$, задаваемой уравнением $\mathrm{F}(x, y) = 0$, еще не разрешенным относительно переменной y. Если (неявную) функцию $y = f(x)$ подставить в выражение $\mathrm{F}(x, y) = 0$, то получим тождество по x: $\mathrm{F}(x, f(x)) \equiv 0$ в области определения (неявной) функции $y = f(x)$.

Вернемся к примеру раздела 1.3.22. Имеем

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0$$

для всех x, таких, что $|x| \le 1$.

Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ помимо функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ задает также функцию $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Следовательно, для уравнения $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *существует* неявная функция, но она *не является единственной*. Можно указать другие неявные фукции, которые задаются уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Например, такую функцию: $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 0)$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1]$.

1.3.24. Из раздела 1.3.23 следует, что даже в случает простого выражения $\mathrm{F}(x, y)$ уравнение $\mathrm{F}(x, y) = 0$ в *целом* может быть разрешимо относительно переменной y при фиксированной переменной x, но не единственным образом. Поэтому задачу о разрешимости уравнения $\mathrm{F}(x, y) = 0$ относительно переменной y при фиксированной переменной x следует уточнить, поставив вопрос об *однозначной локальной разрешимости* уравнения x относительно переменной y при фиксированной переменной x.

Достаточное условие однозначной локальной разрешимости уравнения $\mathrm{F}(x, y) = 0$ (уравнения $\mathrm{F}(x_1, x_2, y) = 0$) относительно переменной y при фиксированной переменной x (при фиксированных переменных x_1 и x_2), т.е. достаточное условие существования и единственности неявной функции $y = f(x)$ ($y = f(x_1, x_2)$) будут приведены в теории неявных функций.

Мы здесь лишь отметим следующее важное обстоятельство. Если неявная функция $y = f(x)$ ($y = f(x_1, x_2)$) существует и единственна — не факт, что эта функция будет аналитически наблюдаемой даже для достаточно простых аналитических выражений функции $\mathrm{F}(x, y)$ ($\mathrm{F}(x_1, x_2, y)$). Однако ее производная $\dfrac{df(x)}{dx}$ (частные производные $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$) всегда аналитически наблюдаема (наблюдаемы) в случае явного аналитического представления функции $\mathrm{F}(x, y)$ (функции $\mathrm{F}(x_1, x_2, y)$),

ибо эта производная (частные производные) имеет следующее выражение (выражения):

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x, y)}{\partial y}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x_1, x_2, y)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x_1, x_2, y)}{\partial y}}, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x_1, x_2, y)}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x_1, x_2, y)}{\partial y}}. \tag{2}$$

Касательная к графику неявной функции $y = f(x)$ в точке (x^0, y^0) ($y^0 = f(x^0)$) имеет уравнение

$$y - f(x^0) = f'(x^0)\left(x - x^0\right) \tag{3}$$

(см. раздел 1.2.6).

Подставив выражение для $f'(x^0)$ (см. (1))

$$\frac{df(x^0)}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x^0, y^0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x^0, y^0)}{\partial y}}$$

в уравнение (3), получим

$$y - y^0 = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x^0, y^0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x^0, y^0)}{\partial y}}\left(x - x^0\right),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x^0, y^0)}{\partial x}\left(x - x^0\right) + \frac{\partial \mathrm{F}(x^0, y^0)}{\partial y}\left(y - y^0\right) = 0. \tag{4}$$

Таким образом, (4) есть уравнение касательной к графику неявной функции $y = f(x)$ в точке (x^0, y^0). Это уравнение не содержит самой неявной функции $y = f(x)$.

Поскольку график неявной функции $y = f(x)$ есть фрагмент множества нулевого уровня функции $\mathrm{F}(x, y)$ (уравнение $\mathrm{F}(x, y) = 0$, которое и определяет неявную функцию $y = f(x)$), постольку формула (4) представляет собой уравнение касательной K к нулевому множеству уровня функции $\mathrm{F}(x, y)$ в точке (x^0, y^0).

Напишем уравнение касательной K_8 к линии l_8 функции $y = 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}$ в точке $(x^0, y^0) = (8{,}2)$.

Сначала в формуле (4) заменим x на x_1, x^0 — на x_1^0, y — на x_2, x^0 — на x_2^0, тогда получим формулу

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}\left(x_1 - x_1^0\right) + \frac{\partial \mathrm{F}(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}\left(x_2 - x_2^0\right) = 0. \tag{5}$$

Положим $\mathrm{F}(x_1, x_2) = -8 + 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}$, тогда линия l_8 функции $y = 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}$ есть линия нулевого уровня функции $\mathrm{F}(x_1, x_2)$ ($\mathrm{F}(x_1, x_2) = -8 + 4x_1^{1/4}x_2^{1/4} = 0$).

Имеем

$$\frac{\partial \mathrm{F}(8{,}2)}{\partial x_1} = \frac{\partial y(8{,}2)}{\partial x_1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial \mathrm{F}(8{,}2)}{\partial x_2} = \frac{\partial y(8{,}2)}{\partial x_2} = 1. \tag{6}$$

Подставив (6) в (5) и полагая $x_1^0 = 8$, $x_2^0 = 2$, получим уравнение

$$\frac{1}{4}\cdot\left(x_1 - 8\right) + 1\cdot\left(x_2 - 2\right) = 0,$$

откуда следует, что

$$\left(x_1 - 8\right) + 4\left(x_2 - 2\right) = 0.$$

Это и есть требуемое уравнение касательной K_8 (см. раздел 1.3.19).

Уравнение касательной K_9 (см. раздел 1.3.19) выписывается аналогично.

1.3.25. Примеры.

а) Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (здесь $\mathrm{F}(x, y) = x^2 + y^2 - 1$) задает неявную функцию $y = f(x)$ (см. раздел 1.3.23). По формуле раздела 1.3.24 получаем

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x, y)}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Мы видим, что для получения явного выражения производной $\frac{df(x)}{dx}$ неявной функции $y = f(x)$ явное выражение этой неявной функции $f(x)$ не требуется.

Если нас интересует производная $\frac{df(x)}{dx}$, например, в точке $x^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (тогда, очевидно, $y^0 = \frac{1}{2}$, ибо $\left(x^0\right)^2 + \left(y^0\right)^2 = 1$), то эта производная $\frac{df(x^0)}{dx}$ вычисляется явно

$$\frac{df(x^0)}{dx} = -\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

б) Уравнение $a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} = y^0$ (здесь $\mathrm{F}(x_1, x_2) = a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} - y^0$) задает неявную функцию $x_2 = f(x_1)$. По формуле (1) раздела 1.3.24 получаем

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{a_0\alpha_1x_1^{\alpha_1 - 1}x_2^{\alpha_2}}{a_0\alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2 - 1}} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}.$$

Уравнение касательной к линии l_{y^0} уровня y^0 функции $y = a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ в точке (x^0, y^0) ($y^0 = a_0\left(x_1^0\right)^{\alpha_1}\left(x_2^0\right)^{\alpha_2}$) имеет вид

$$x_2 - x_2^0 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{x_2^0}{x_1^0}\left(x_1 - x_1^0\right),$$

т.е.

$$\alpha_1x_2^0\left(x_1 - x_1^0\right) + \alpha_2x_1^0\left(x_2 - x_2^0\right) = 0.$$

1.3.26. В экономической теории важную роль играет понятие функция полезности $y = u(x_1, x_2)$ (см. раздел 1.2.22, в котором кратко проанализирована функция полезности при $n=1$). Частное значение $y^0 = u(x_1^0, x_2^0)$ функции полезности равно уровню (степени) удовлетворения потребностей индивидуума, если он приобретает (или потребляет) потребительский набор $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, т.е. если индивидуум приобретает первый продукт в количестве x_1^0, второй продукт — в количестве x_2^0 единиц. В экономической теории принято считать, что с ростом потребления одного продукта (скажем, первого продукта) уровень (степень) удовлетворения потребностей индивидуума возрастает (согласно принципу «чем больше, тем лучше»). Отсюда следует, что функция полезности $y = u(x_1, x_2)$ по каждой переменной при фиксированных при фиксированных значениях другой переменной растет все медленнее. Отсюда следует, что график Γ_1 функции полезности $y = u(x_1, x_2)$ как функции одной переменной (скажем, переменной x_1) при фиксированных значениях другой переменной имеет вид «горки» (см. Рис. 1.33 и раздел 1.2.22), крутизна которой уменьшается с ростом переменной x_1.

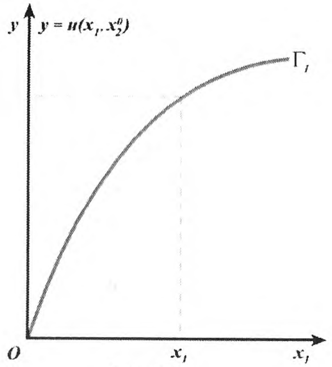

Рис. 1.33.

При $n=2$ график Γ_u функции полезности $y = u(x_1, x_2)$ показан на Рис. 1.34. График Γ имеет вид двумерной выпуклой вверх поверхности. Γ_1 есть пересечение графика Γ_u с вертикальной плоскостью $x_2 = x_2^0$, параллельной координатной плоскости Ox_1y, Γ_2 есть пересечение графика Γ_u с вертикальной плоскостью $x_1 = x_1^0$, параллельной координатной плоскости Ox_2y.

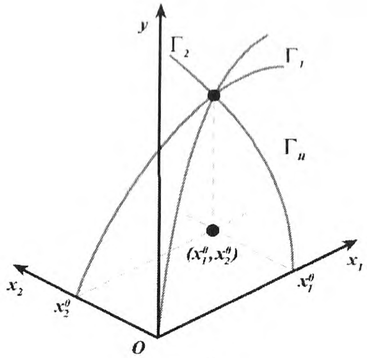

Рис. 1.34.

Примеры функций полезности в аналитической форме ($n=2$):

$y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ ($a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 + a_2 < 1$),

$y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ ($a_0 > 0$, $0 < a_1 < 1$, $0 < a_2 < 1$),

$y = a_0 \big(\ln(x_1 + 1) + \ln(x_2 + 1)\big)$ ($a_0 > 0$).

1.3.27. Переход от одномерной производственной функции (см. раздел 1.2.23) к двумерной (говорят, к двухфакторной *производственной функции*) аналогичен переходу от одномерной функции полезности (см. раздел 1.2.22) к двумерной функции полезности, который был реализован в разделе 1.3.26. Рис. 1.33 и Рис. 1.34 могут быть использованы в качестве геометрической интерпретации производственной функции.

1.3.28. Если $y = u(x_1, x_2)$ — функция полезности, то ее множество l_τ уровня τ называется *множеством* (*линией*) *безразличия* индивидуума, ибо для любого потребительского набора $(x_1, x_2) \in l_\tau$ уровень удовлетворения потребностей индивидуума один и тот же и равен τ, т.е. индивидууму *безразлично*, каккой потребительский набор из этих наборов приобретать. Линия безразличия l_τ имеет уравнение $\tau = u(x_1, x_2)$. На Рис. 1.35 показан фрагмент карты линий безразличия (похожий на коробку с «кривыми» макаронами) в виде трех линий безразличия l_τ, l_θ, l_η, соответствующих трем уровням τ, θ, η удовлетворения потребностей индивидуума; в соответствии с Рис. 1.35 обязательно $\tau < \theta < \eta$, т.е. чем «северо-восточнее» линия безразличия l_λ, тем большему уровню λ удовлетворения потребностей она соответствует.

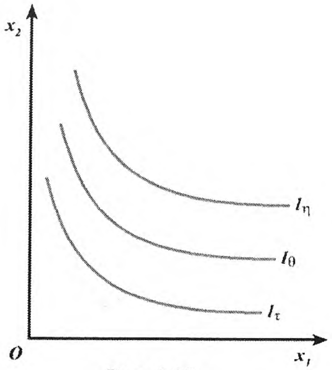

Рис. 1.35.

Поскольку функция полезности $y = u(x_1, x_2)$ обладает рядом специфических свойств, в частности, свойством, что ее график имеет вид «горки» (см. Рис. 1.34), постольку линии безразличия l_τ, l_θ, l_η обычно (строго) выпуклы к точке O (см. Рис. 1.35).

Отметим, что вк каждой точке (x_1, x_2) $(x_1 > 0, x_2 > 0)$, представляющей потребительский набор, градиент $\operatorname{grad} u(x_1, x_2)$ функции полезности $y = u(x_1, x_2)$, как правило, «смотрит» на «северо-восток». Если в разделе 1.3.19 функцию $y = 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}$ толковать как функцию полезности, то Рис. 1.32 наглядно демонстрирует взаимное расположение градиента и линий безразличия.

1.3.29. Если $y = f(x_1, x_2)$ — производственная функция, то ее множество l_τ уровня τ называется *изоквантой* (линией одного и того же объема τ выпускаемой продукции). Изокванта показывает множество всех конфигураций ресурсов, при которых объем выпуска один и тот же и равен τ. Изокванта имеет уравнение $\tau = f(x_1, x_2)$. Фрагмент карты изоквант при $n = 2$ представлен на рис. 1.35. Чем «северо-восточнее» изокванта, тем большему объему τ выпускаемой фирмой продукции эта изокванта соответствует.

На рис. 1.35 изокванты l_τ, l_θ, l_η соответствуют объемам τ, θ, η выпускаемой продукции, для которых справедлива цепочка неравенств $\tau < \theta < \eta$.

Отметим также, что изокванты l_τ, l_θ, l_η, как правило, есть линии (строго) выпуклые к точке O (см. Рис. 1.35). Обоснование этого геометрического факта аналогично обоснованию (строгой) выпуклости к точке O линий безразличия l_τ, l_θ, l_η (см. раздел 1.3.28).

В каждой точке (x_1, x_2) $(x_1 > 0, x_2 > 0)$, представляющей конфигурацию ресурсов (x_1 — количество капитала, x_2 — количество труда), градиент $\operatorname{grad} f(x_1, x_2)$

производственной функции $y = f(x_1, x_2)$, как правило, «смотрит» на «северо-восток». Если в разделе 1.3.19 функцию $y = 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}$ толковать как производственную функцию, то Рис. 1.32 наглядно демонстрирует взаимное расположение градиента и изоквант.

На Рис. 1.36 представлены две изокванты: l_τ и l_ν. Изокванта l_τ строго выпукла к точке $O = (0,0)$, изокванта l_ν выпукла (но не строго выпукла) к точке $O = (0,0)$.

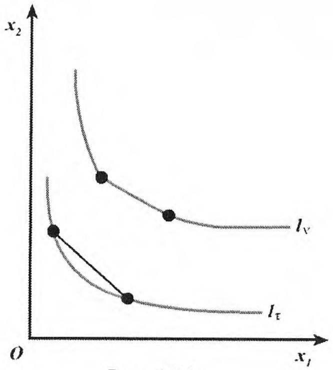

Рис. 1.36.

1.3.30. Если $y = a_1x_1 + a_2x_2$ — функция издержек, то ее множество l_τ уровня τ называется *изокостой* (линией одних и тех же издержек). Уравнение изокосты l_τ имеет вид $\tau = a_1x_1 + a_2x_2$. Изокоста показывает множество всех конфигураций ресурсов, при которых издержки одинаковы. Фрагмент карты изокост при $n = 2$ (параллельных прямых с отрицательным наклоном (если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$)) представлен на Рис. 1.27.

Здесь фрагмент карты изокост похож на коробку с «обычными» (прямыми) макаронами. Чем «северо-восточнее» расположена изокоста l_λ, тем большим издержкам λ она соответствует. Согласно рис. 1.37 $\tau < \theta < \eta$.

Градиент $\operatorname{grad} y = (a_1, a_2)$ ортогонален любой изокосте в любой ее точке и «смотрит» на «северо-восток» (если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$).

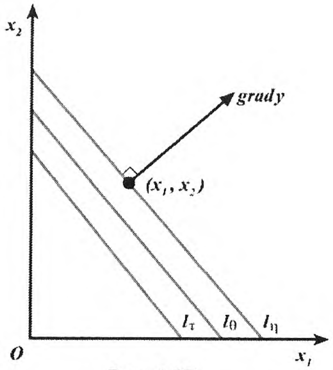

Рис. 1.37.

1.3.31. $\boxed{P}$ Описать ряд неявных функций, задаваемых уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$, которые отличаются от функций, выписанных в разделе 1.3.22. Построить графики этих функций.

1.4. ПОНЯТИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

1.4.1. Задача максимизации прибыли фирмы в однофакторном варианте была решена в разделе 1.1.3. Здесь мы рассмотрим задачу максимизации прибыли фирмы в двухфакторном варианте (т.е. в случае двух ресурсов — капитала и труда). Эта задача имеет вид

$$p_0 f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2 = PR(x_1, x_2)\,(\max). \qquad (1)$$

Здесь x_1 — искомый объем капитала, x_2 — искомый объем труда, p_0 — рыночная цена одной единицы выпускаемой фирмой продукции (например, рыночная цена одной пары валенок), p_1 — рыночная цена одной единицы капитала, p_2 — рыночная цена одной единицы труда. Слагаемое $p_0 f(x_1, x_2) = R(x_1, x_2)$ равно *доходу* (выручке) фирмы, слагаемое $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C(x_1, x_2)$ равно *издержкам* фирмы. Таким образом, *прибыль* фирмы $PR(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) - C(x_1, x_2)$.

Задача максимизации прибыли фирмы — это частный случай задачи на *абсолютный* (безусловный) *максимум*, ибо в этой задаче, кроме целевой функции (т.е. прибыли $PR(x_1, x_2)$), нет никаких дополнительных ограничений. Поскольку максимизация прибыли $PR(x_1, x_2)$ есть *цель* функционирования фирмы, постольку функция $PR(x_1, x_2)$ называется *целевой*.

Для решения задачи (1) максимизации прибыли $PR(x_1, x_2)$ фирмы следует выписать условия первого порядка

$$\frac{\partial PR(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial PR(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0,$$

которые в развернутой форме имеют вид

$$p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - p_1 = 0, \quad p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - p_2 = 0. \qquad (2)$$

В связи с тем, что производственная функция (ПФ) $f(x_1, x_2)$ фирмы обладает рядом специфических свойств, одно из которых выражается в том, что график ПФ имеет вид «горки» (см. разделы 1.3.26 и 1.3.27), система (2) двух уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ $(x_1^0 > 0, x_2^0 > 0)$. Опять же в связи с тем, что ПФ $f(x_1, x_2)$ обладает специфическими свойствами, с помощью условий *второго порядка* (эти условия будут приведены в теории позже) экстремума функций двух и нескольких переменных можно доказать, что решение $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ есть точка максимума $PR(x_1^0, x_2^0)$ прибыли $PR(x_1, x_2)$ фирмы. Таким образом, решение $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ дает конфигурацию ресурсов, максимизирующую прибыль $PR(x_1, x_2)$ фирмы. Это решение $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ называется *локальным рыночным равновесием фирмы*. Здесь термин «*локальный*» означает, что на рынке готовой продукции (например, валенок) и на рынках ресурсов (на рынке капитала и рынке труда) функционирует только одна фирма. В случае функционирования ряда (более одной) фирм речь шла бы о глобальном (общем) экономическом равновесии.

Очевидно, каждая координата x_1^0 и x_2^0 зависит от цен p_0, p_1, p_2: $x_1^0 = g_1(p_0, p_1, p_2)$, $x_2^0 = g_2(p_0, p_1, p_2)$. Функции $g_1(p_0, p_1, p_2)$, $g_2(p_0, p_1, p_2)$ называются *функциями спроса на ресурсы* (капитал и труд) *со стороны фирмы*. Функция $y^0 = f(x_1^0, x_2^0) = f(g_1(p_0, p_1, p_2), g_2(p_0, p_1, p_2)) = h(p_0, p_1, p_2)$ называется *функцией предложения со стороны фирмы* своего продукта.

Метод решения задачи максимизации прибыли фирмы, изложенный в этом разделе, в силу выполнения специфических свойств производственной функции $y = f(x_1, x_2)$ позволяет найти точку (x_1^0, x_2^0) глобального максимума $PR(x_1^0, x_2^0)$ прибыли $PR(x_1, x_2)$, т.е. точку (x_1^0, x_2^0) такую, что неравенство $PR(x_1^0, x_2^0) \geq PR(x_1, x_2)$ выполняется для любой точки (x_1, x_2) такой, что $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. В общем случае, когда функция $f(x_1, x_2)$ — не обязательно производственная функция, метод этого раздела позволяет найти лишь точку (x_1^0, x_2^0) *локального* максимума $Q(x_1^0, x_2^0)$, т.е. точку (x_1^0, x_2^0) такую, что неравенство $Q(x_1^0, x_2^0) \geq Q(x_1, x_2)$ выполняется лишь для точек (x_1, x_2), *близких* к точке (x_1^0, x_2^0). Здесь символ $Q(x_1, x_2)$ используется вместо символа $PR(x_1, x_2)$, т.е. $Q(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2$.

Отметим, что в задачах на экстремум (на максимум или на минимум) экономистов, как правило, интересует не локальный, а глобальный экстремум, так что локальное рыночное равновесие фирмы (x_1^0, x_2^0) (напоминаем, что термин «*локальный*» здесь означает, что фирма *одна*, а не несколько фирм) есть точка глобального максимума прибыли этой фирмы.

1.4.2. На плоскости Ox_1x_2 ресурсов построим точку (x_1^0, x_2^0), построим изокосту (ее уравнение — $p_1x_1 + p_2x_2 = C^0$, где $C^0 = p_1x_1^0 + p_2x_2^0$) и изокванту (ее уравнение — $y^0 = f(x_1, x_2)$, где $y^0 = f(x_1^0, x_2^0)$), которые содержат эту точку (x_1^0, x_2^0) (см. Рис. 1.38). При весьма слабых требованиях к производственной функции эти изокоста и изокванта обязательно *касаются* друг друга в точке (x_1^0, x_2^0) (в локальном рыночном равновесии), что эквивалентно тому, что $\mathrm{grad}\, f(x_1^0, x_2^0)$ и вектор (p_1, p_2) цен на ресурсы расположены на одной прямой, проходящей через точку (x_1^0, x_2^0) и ортогональной изокосте L_{c^0}, имеющей уравнение $p_1x_1 + p_2x_2 = C^0$.

Отметим, если имеет место ситуация какого-то равновесия (в рассматриваемом случае — локального), то обязательно имеет *факт касания* (в рассматриваемом варианте изокоста L_{c^0} касается изокванты l_{y^0}).

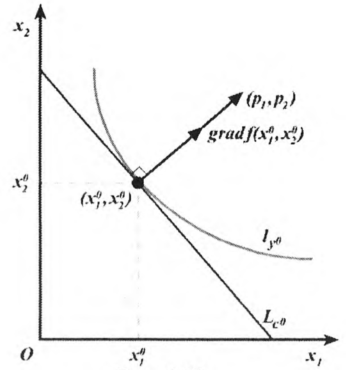

Рис. 1.38.

1.4.3. Пример.

Пусть производственная функция (ПФ) фирмы имеет вид $y = x_1^{1/4}x_2^{1/4}$, пусть $p_0 = 32$, $p_1 = 8$, $p_2 = 2$. Решим задачу максимизации прибыли $PR(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) - C(x_1, x_2)$, т.е. $PR(x_1, x_2) = 32x_1^{1/4}x_2^{1/4} - 8x_1 - 2x_2$ (здесь $PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) = 32x_1^{1/4}x_2^{1/4}$, $C(x_1, x_2) = 8x_1 + 2x_2$).

1) Выписываем условия первого порядка

$$\frac{\partial PR}{\partial x_1} = 32 \cdot \frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4} - 8 = 0, \quad \frac{\partial PR}{\partial x_1} = 32 \cdot \frac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4} - 2 = 0, \qquad (1)$$

откуда получаем

$$\frac{\frac{32}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4}}{\frac{32}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4}} = \frac{8}{2},$$

или (после всех операций)

$$\frac{x_2}{x_1} = 4,$$

т.е. $x_2 = 4x_1$. Подставив равенство $x_2 = 4x_1$ в первое уравнение системы (1), получим

$$8x_1^{-3/4}(4x_1)^{1/4} = 8,$$

откуда имеем (после окончательных элементарных преобразований) $x_1^0 = 2$ и $x_2^0 = 4x_1^0 = 4 \cdot 2 = 8$.

Таким образом, получили локальное равновесие фирмы $(x_1^0, x_2^0) = (2{,}8)$. То, что $x_1^0 < x_2^0$ — естественно, ибо $p_1 > p_2$. Однако равенство отношений $\frac{x_1^0}{x_2^0} = \frac{p_1}{p_2} = 4$ — это случайность.

2) Объем y^0 выпускаемой фирмой продукции равен $y^0 = 2^{1/4}8^{1/4} = 2$, издержки C^0 фирмы равны $C^0 = 8x_1^0 + 2x_2^0 = 8 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 32$. Максимальная прибыль PR^0 фирмы равна $PR^0 = p_0y^0 - C^0 = 32 \cdot 2 - 32 = 64 - 32 = 3$.

Уравнение $y^0 = x_1^{1/4}x_2^{1/4}$ изокванты имеет вид $2 = x_1^{1/4}x_2^{1/4}$, т.е. $x_1x_2 = 16$.

Уравнение $C^0 = 8x_1 + 2x_2$ имеет вид $32 = 8x_1 + 2x_2$, т.е. $16 = 4x_1 + x_2$.

3) Построим точку $(x_1^0, x_2^0) = (2{,}8)$, изокосту и изокванту (каждую — по трем точкам) (см. Рис. 1.39). Имеем две таблицы:

таблицу для построения изокосты

x_1	0	2	4
x_2	16	8	0

таблицу для построения изокванты

x_1	1	2	4
x_2	16	8	4

1.4.2. На плоскости Ox_1x_2

(ее уравнение — $p_1x_1 + p_2x$

$y^0 = f(x_1,x_2)$, где $y^0 = f(x_1^0$

При весьма слабых требова

обязательно *касаются* д

равновесии), что эквивале

ресурсы расположены н

и ортогональной изокосте L

Отметим, если имеет мес

случае — локального), то

варианте изокоста L_{c^0} касае

1.4.3. Пример.

Пусть производственная фун

$p_1 = 8$, $p_2 = 2$. Решим задачу

т.е. $PR(x_1,x_2) = 32x_1^{1/4}x_2^{1/4} - 8x_1$

$C(x_1,x_2) = 8x_1 + 2x_2$).

1) Выписываем условия перво

$$\frac{\partial PR}{\partial x_1} = 32\cdot\frac{1}{4}x_1^{-}$$

откуда получаем

4) Найдем и построим (с началом в точке $(x_1^0,x_2^0) = (2,8)$) градиенты и $\operatorname{grad} C = (8,2)$ (см. Рис. 1.39). Имеем ($x_1^0 = 2$, $x_2^0 = 8$)

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{4}x_1^{-3/4}x_2^{1/4}, \quad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{4}x_1^{1/4}x_2^{-3/4},$$

$$\frac{\partial f(x_1^0,x_1^0)}{\partial x_1} = \frac{1}{4}2^{-3/4}8^{1/4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2} = \frac{1}{4}2^{1/4}8^{-3/4} = \frac{1}{16},$$

$$\operatorname{grad} f(x_1^0,x_2^0) = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right).$$

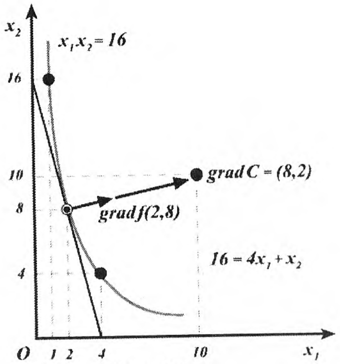

Рис. 1.39.

1.4.4. Задача максимизации прибыли фирмы имеет две модификации. В рассмотрим первую модификацию, в разделе 1.4.8 — вторую.

Если фирма имеет лимит V на приобретение ресурсов, то задача прибыли фирмы приобретает вид

$$p_0 f(x_1,x_2) - p_1x_1 - p_2x_2 = p_0 f(x_1,x_2) - V \ (\max),$$

что эквивалентно задаче максимизации выпуска производственной фу (т.е. выпуска $f(x_1,x_2)$ фирмы) при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$

$$f(x_1,x_2)\ (\max)$$

при наличии ограничения

$$p_1x_1 + p_2x_2 = V.$$

2) — это задача на *условный максимум*, ибо в ней помимо *целевой* (объема выпуска фирмы $f(x_1,x_2)$) фигурирует *ограничение* (2) — отсюда и термин «*условный* максимум») $p_1x_1 + p_2x_2 = V$ в виде

м раздел 1.4.5) дадим геометрическое описание решения задачи и выпуска $f(x_1,x_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$, а затем 1.4.6) опишем универсальный метод решения подобного вида задач.

максимизации выпуска $f(x_1,x_2)$ при наличии $p_1x_1 + p_2x_2 = V$ представляет собой поиск «последней» линии уровня ы) l_τ функции $f(x_1,x_2)$, которая имеет общие точки (точнее, общую фиксированной изокостой L, имеющей уравнение $p_1x_1 + p_2x_2 = V$).

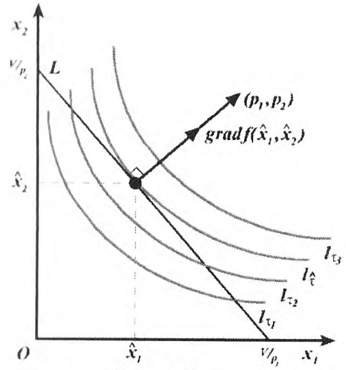

Рис. 1.40.

$l_{\tau_1}, l_{\tau_2}, l_{\hat{\tau}}, l_{\tau_3}$ представляют собой изокванты (линии постоянных $\tau_2, \hat{\tau}, \tau_3$ выпускаемой продукции). Поскольку градиент $grad\ f(x_1,x_2)$ ной функции $f(x_1,x_2)$ всегда «смотрит» на «северо-восток», постольку

максимизации, функции $f(x_1,x_2)$ при наличии ограничения V наглядно можно представить как перемещение изокванты l_τ на к» до «упора». На рис 1.40 таким «упором» будет точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ касания изокосты L.

В точке (при конфигурации ресурсов) $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ объем выпуска $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ максимален и равен $\hat{\tau}$, он строго больше объемов τ_2, τ_1, соответствующих изоквантам l_{τ_2}, l_{τ_1} расположенным строго «юго-западнее» изокванты $l_{\hat{\tau}}$.

Объем выпуска τ_3 строго больше объема $\hat{\tau}$, однако для выпуска такого объема τ_3 фирме не хватает объемов ресурсов, ибо лимит *V* на ресурсы не позволяет фирме их приобрести. Наглядно геометрически это обстоятельство иллюстрируется так, что изокоста *L* и изокванта l_{τ_3} не имеют общих точек, и изокванта l_{τ_3} расположена строго «северо-восточнее» изокосты *L*.

Таким образом, точка (конфигурация ресурсов) $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ представляет собой точку условного глобального максимума целевой функции $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$, сам условный глобальный максимум равен $\hat{\tau} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Обратим внимание, что точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ такова, что $\hat{x}_1 > 0, \hat{x}_2 > 0$, т. е. условный глобальный максимум $\hat{\tau} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ является внутренним (см. конец раздела 1.4.4)

Из геометрических соображений вытекает, что точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ условного максимума не только *существует*, но и является *единственной*, благодаря тому, что все изокванты есть линии, (строго) выпуклые к точке *O* = (0,0).

Изложенный ниже в разделе 1.4.6 метод решения задачи максимизации выпуска $f(x_1, x_2)$ фирмы при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$ в виде равенства в силу выполнения специфических свойств производственной функции $y = f(x_1, x_2)$ (основное свойство – строгая выпуклость ее изоквант к точке 0) позволяет найти точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ *глобального* условного максимума $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$, т. е. точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ такую, что неравенство $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \geq f(x_1, x_2)$ выполняется для любой точки (x_1, x_2), удовлетворяющую ограничению $p_1x_1 + p_2x_2 = V$ $(x_1 > 0, x_2 > 0)$. Если целевая функция $f(x_1, x_2)$ задачи на условный максимум при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$ — не обязательно производственная функция с ее специфическими свойствами, картина взаимного расположения прямой *L*, имеющей уравнение $p_1x_1 + p_2x_2 = V$, и линиями уровня $l_{\tau_1}, l_{\tau_2}, l_{\hat{\tau}}, l_{\tau_3}$ целевой функции может сильно отличаться (см. рис. 1.41) от картины их взаимного расположения, представления на рис. 1.40.

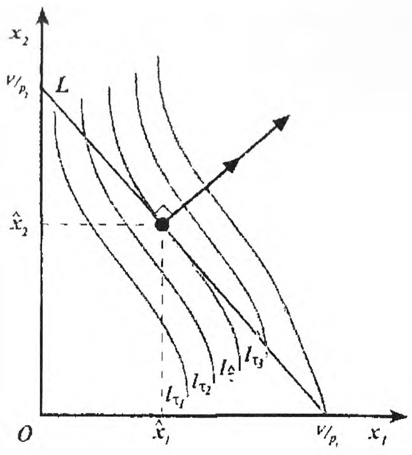

Рис. 1.41

В случае рис 1.41 есть *касание* линии уровня $l_{\hat{\tau}}$ целевой функции $f(x_1, x_2)$ и линии *L* в точке $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, однако в точке $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ нет условного внутреннего экстремума — ни максимума, ни минимума, а в случае рис. 1.40 есть касание линии уровня $l_{\hat{\tau}}$ целевой функции $f(x_1, x_2)$ и линии *L* в точке $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, и в этой точке $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ есть условный внутренний максимум $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

Отметим, что точка $(v/p_1, 0)$ (см. рис. 1.41) есть точка краевого глобального максимума функции $f(x_1, x_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$ $(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$.

Картина, представленная на рис. 1.40, типична для экономической теории; картина, представленная на рис. 1.41, нетипична для экономической теории.

1.4.6. Опишем универсальный метод *(метод Лагранжа)* решения задачи на условный максимум раздела 1.4.4

$$f(x_1, x_2)\,(\max) \qquad (1)$$

при наличии ограничения

$$p_1x_1 + p_2x_2 = V \qquad (2)$$

Отметим, что метод Лагранжа — это *метод первого порядка*. С помощью этого метода задача на условный максимум (минимум) функции двух переменных при наличии ограничения в виде равенства сводится, грубо говоря, в задаче на абсолютный максимум (минимум) функции Лагранжа трех переменных. Говоря точнее, точки условного экстремума следует выбирать только среди критических точек функции Лагранжа без последней координаты.

1) Строим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(V - p_1x_1 - p_2x_2)$$

трех независимых переменных x_1, x_2, λ. Новая независимая переменная λ называется *множителем Лагранжа.*

2) Для функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$ выписываем условие первого порядка

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$

которые в развернутом виде таковы

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0, \quad V - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (3)$$

В связи с тем, что производственная функция $f(x_1, x_2)$ обладает рядом специфических свойств (см. раздел 1.4.5), система (3) трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ имеет единственное решение $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$, где $\hat{x}_1 \geq 0, \hat{x}_2 \geq 0, \hat{\lambda} > 0$. Тройка чисел $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$, которая есть решение системы трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ, называется *критической точкой функции Лагранжа.* Короткая точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ есть точка условного глобального максимума *производственной функции* (1) при наличии ограничения (2).

Очевидно, каждая координата x_1, x_2, λ зависит от цен *p1 и p2* и лимита *V* на ресурсы:

$$\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, V), \quad \hat{x}_2 = \varphi_2(p_1, p_2, V), \quad \hat{\lambda} = \varphi_3(p_1, p_2, V).$$

Функции $\varphi_1(p_1, p_2, V)$, $\varphi_2(p_1, p_2, V)$ называются *функциями условного спроса (по Маршаллу) на ресурсы* (на капитал и труд) *со стороны фирмы.* Функция

$y = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = f(\varphi_1(p_1, p_2, V), \varphi_2(p_1, p_2, V)) = v(p_1, p_2, V)$ называется *функцией условного предложения фирмы* своей продукции.

Функция $\hat{\lambda} = \varphi_3(p_1, p_2, V)$ имеет важную экономическую интерпретацию.

1.4.7. Пример.

Пусть производственная функция фирмы имеет, вид $y = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$. Пусть $p_1 = 8, p_2 = 2, V = 64$. Решим задачу максимизации выпуска $x_1^{1/4} x_2^{1/4}$ при наличии лимита на ресурсы $8x_1 + 2x_2 = 64$.

Задача на условный максимум имеет вид

$$x_1^{1/4} x_2^{1/4} (\max) \qquad (1)$$

при наличии ограничения

$$8x_1 + 2x_2 = 64 \qquad (2)$$

1) Для решения задачи (1), (2) на условный максимум строим функцию Лагранжа.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/4} x_2^{1/4} + \lambda(64 - 8x_1 - 2x_2)$$

2) Для функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$ выписываем условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4} - 8\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4} - 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 64 - 8x_1 - 2x_2 = 0 \qquad (3)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим уравнение

$$\frac{\frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4}}{\frac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4}} = \frac{8\lambda}{2\lambda},$$

откуда следует после сокращений (отметим, что множитель Лагранжа λ в этом примере обязательно отличен от нуля: при $\lambda = 0$ система с тремя неизвестными x_1, x_2, λ не имеет решения)

$\frac{x_2}{x_1} = 4,$

т. е. $x_2 = 4x_1$.

Подставив выражение $x_2 = 4x_1$, в третье уравнение системы уравнений (3), получим равенство 0 = 64-8x_1 - 2(4x_1)=0, откуда следует, что 64 = 16x_1, т.е. $\hat{x}_1 = 4$, а $\hat{x}_2 = 16$.

Условный глобальный максимум $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 4^{1/4}\,16^{1/4} = 2^{1/2} \cdot 2 \cong 2{,}82.$

Множитель Лагранжа $\hat{\lambda} = \frac{1}{32}\hat{x}_1^{-3/4}\,\hat{x}_1^{1/4} = \frac{1}{32} \cdot 4^{-3/4} \cdot 16^{1/4} = \frac{2^{1/2}}{64}.$

3) Построим на плоскости Ox_1x_2 точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ = (4,16), изокосту, имеющую уравнение $8x_1$ $+2x_2$ $=64$, и изокванту, имеющую уравнение $2^{1/2} \cdot 2 = x_1^{1/4}\,x_2^{1/4}$ $(64 = x_1x_2)$ (каждую — по трем точкам), которые содержат точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ = (4,16) (см. рис. 1.42).

Имеем две таблицы:

таблицу для построения изокосты

x_1	0	4	8
x_2	32	16	0

таблицу для построения изокванты $(x_2 = \frac{64}{x_1})$

x_1	2	4	8
x_2	32	16	8

4) Найдем и построим (с началом в точке $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (4{,}16)$) градиенты $grad\ f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ и вектор цен (8,2) (см. рис. 1.6). Имеем $(\hat{x}_1 = 4,\ \hat{x}_2 = 16)$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{4}x_1^{-3/4}\,x_2^{1/4}, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{4}x_1^{1/4}\,x_2^{-3/4},$$

$$\frac{\partial f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{4} \cdot 4^{-3/4} \cdot 16^{1/4} = \frac{2^{1/2}}{8}, \quad \frac{\partial f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{4} \cdot 4^{1/4} \cdot 16^{-3/4} = \frac{2^{1/2}}{32},$$

$$grad\ f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{2^{1/2}}{8}, \frac{2^{1/2}}{32}\right). \quad grad\ f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\hat{\lambda})\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

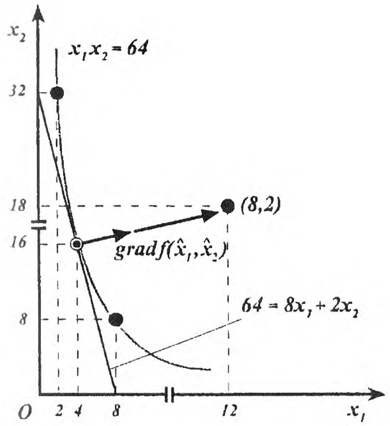

Рис. 1.42

Пусть производственная функция имеет вид $y = x_1^{\frac{2}{3}}\,x_2^{\frac{1}{4}}$, пусть $p_1 = 8$, $p_2 = 5$.

Решить задачу максимизации выпуска *y* при лимите на ресурсы $8x_1 + 5x_2 = 15$ методом Лангранжа. Найти конфигурацию ресурсов $\hat{x}_1, \hat{x}_2$, множитель Лагранжа $\hat{\lambda}$, условный глобальный максимум $\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Выписать уравнение изокванты, содержащей точку $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ - построить изокванту, изокосту $8x_1 + 5x_2 = 15$, точку $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ градиент целевой функции на вектор цен (8;5).

1.4.8. В этом разделе рассмотрим вторую модификацию задачи максимизации прибыли фирмы (см. первую модификацию в разделе 1.4.4)

Если фирма имеет фиксированный выпуск $\check{y}$ своей продукции, то задача максимизации прибыли фирмы приобретает вид

$$p_0 f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2 = p_0 \check{y} - (p_1 x_1 + p_2 x_2) \text{ (max)} \qquad (1)$$

что эквивалентно задаче минимизации издержек $C(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ фирмы при наличии ограничения $f(x_1, x_2) = \check{y}$, т. е. задаче

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = C(x_1, x_2) \text{ (min)} \qquad (1)$$

при наличии ограничения

$$\check{y} = f(x_1, x_2) \qquad (2)$$

Эта задача— на условный минимум, ибо в ней помимо целевой функции (1) (издержки $C(x_1, x_2)$ фирмы) фигурирует ограничение (2) (т.е. условие) $\check{y} = f(x_1, x_2)$ в виде равенства.

Здесь с необходимыми корректировками следует повторить реплику, помещенную в конце раздела 1.4.4 о внутреннем условном максимуме.

Сначала (см. ниже раздел 1.4.9) дадим геометрическое описание решения задачи минимизации издержек $C(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ при наличии ограничения $\check{y} = f(x_1, x_2)$, а затем (см. раздел ниже 1.4.10) опишем метод Лагранжа для решения подобного вида задач.

1.4.9. Задача минимизации издержек $C(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ при наличии ограничения $\check{y} = f(x_1, x_2)$ представляет собой поиск «последней» линии уровня (т.е. изокосты) $L_{\check{c}}$ функции $C(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$, которая имеет общие точки (точнее, общую точку) с фиксированной изоквантой $l_{\check{y}}$, имеющей уравнение $\check{y} = f(x_1, x_2)$ (см. рис. 1.43).

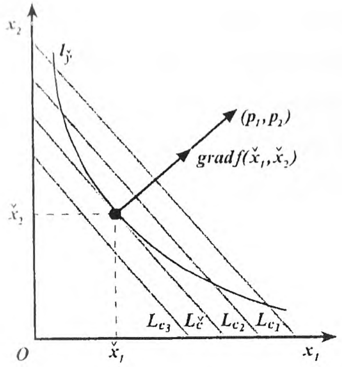

Рис. 1.43

Линии $L_{c_1}, L_{c_2}, L_{\check{c}}, L_{c_3}$ представляют собой изокосты (линии постоянных издержек $C_1, C_2, \check{C}, C_3$). Поскольку градиент $grad\ C(x_1, x_2) = (p_1, p_2)$ «смотрит» на «северо-восток», постольку $C_1 > C_2 > \check{C} > C_3$.

Задачу минимизации издержек $C(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ при наличии ограничения $\check{y} = f(x_1, x_2)$ наглядно можно представить как перемещение изокосты L_c на «юго-запад» до «упора». На рис. 1.43 таким «упором» будет точка $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ *касания* изокосты $L_{\check{c}}$ и изокванты $l_{\check{y}}$.

В точке (при конфигурации ресурсов) $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ издержки $C(\check{x}_1, \check{x}_2)$ минимальны и равны $\check{C}$. Эти издержки строго меньше издержек C_2, C_1, которым соответствуют изокосты L_{c_2}, L_{c_1}, расположенные строго «северо-восточнее» изокосты $L_{\check{c}}$.

Издержки C_3 строго меньше издержек $\check{C}$, однако понизить издержки до величины C_3 нельзя, ибо при таких малых издержках фирма может обеспечить только объем выпуска y_3, который строго меньше объема $\check{y}$. Геометрически это очевидно, ибо изокоста L_{c_3} расположена строго «юго-западнее» изокванты $l_{\check{y}}$ и не имеет с ней общих точек.

Таким образом, точка (конфигурация ресурсов) $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ есть точка условного глобального минимума целевой функции $C(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ при наличии ограничения $\check{y} = f(x_1, x_2)$, сам условный глобальный минимум равен $\check{C} = p_1 \check{x}_1 + p_2 \check{x}_2$, ибо он строго меньше значений C во всех точках изокванты $l_{\check{y}}$.

Из геометрических соображений вытекает, что точка $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ условного минимума не только *существует,* но и является *единственной,* благодаря тому, что изокванта $l_{\check{y}}$ есть линия, (строго) выпуклая к точке O = (0,0).

Картина взаимного касания линии $L_{\check{c}}$ уровня целевой функции $C(x_1,x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$ и линии $l_{\check{y}}$ уровня $\check{y}$, представленная на рис. 1.43, аналогична картине взаимного касания линии $l_{\check{\tau}}$ уровня $\check{\tau}$ целевой функции $f(x_1,x_2)$ и линии L ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$, представленной на рис. 1.4. Картины, представленные на рис. 1.40 и 1.43 типичны для экономической теории.

Аналогом картины, представленной на рис. 1.41 является картина, представленная на рис. 1.44. Обе эти картины нетипичны для экономической теории.

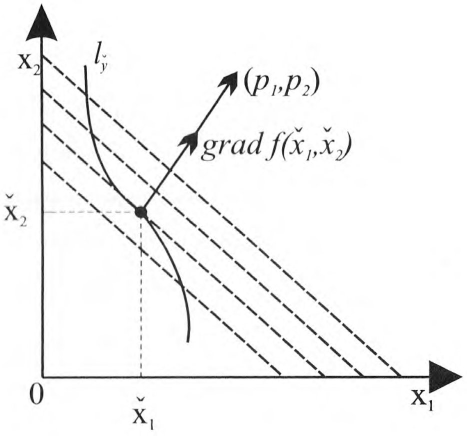

Рис. 1.44

1.4.10. Опишем метод Лагранжа решения задачи на условный минимум раздела 1.4.9.

$$p_1x_1 + p_2x_2 = C(x_1,x_2) \ (\min) \qquad (1)$$

при наличии ограничения

$$\check{y} = f(x_1,x_2) \qquad (2)$$

1) Строим функцию Лагранжа

$$L(x_1,x_2,\lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(\check{y} - f(x_1,x_2))$$

трех независимых переменных x_1, x_2, λ. Новая независимая переменная λ называется множителем Лагранжа.

2) Для функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$ выписываем условие первого порядка

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$

которые в развернутом виде таковы:

$$p_1 - \lambda\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0, \ p_2 - \lambda\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0, \ \check{y} - f(x_1,x_2) = 0. \qquad (3)$$

В связи с тем, что производственная функция $f(x_1,x_2)$ обладает рядом специфических свойств (см. раздел 1.4.5), система (3) трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ имеет единственное решение $(\check{x}_1, \check{x}_2, \check{\lambda})$, где $\check{x}_1 > 0, \check{x}_2 > 0, \check{\lambda} > 0$. Тройка чисел $(\check{x}_1, \check{x}_2, \check{\lambda})$, которая есть решение системы трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ, называется критической точкой функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$.

Короткая точка $(\check{x}_1;\check{x}_2)$ есть точка условного глобального минимума целевой функции (1) при наличии ограничения (2).

Очевидно, каждая координата x_1, x_2, λ зависит от цен p_1 и p_2 и от фиксированного объема $\check{y}$ выпуска фирмы: $\check{x}_1 = \psi_1(p_1,p_2,\check{y}), \check{x}_2 = \psi_2(p_1,p_2,\check{y}), \check{\lambda} = \psi_3(p_1,p_2,\check{y})$.

Функции $\psi_1(p_1,p_2,\check{y}), \psi_2(p_1,p_2,\check{y})$ называются *функциями условного спроса (поХиксу) на ресурсы* (на капитал и труд) *со стороны фирмы.*

Функция

$\check{C}(\check{x}_1,\check{x}_2) = p_1\check{x}_1 + p_2\check{x}_2 = p_1\psi_1(p_1,p_2,\check{y}) + p_2\psi_2(p_1,p_2,\check{y}), \ \check{\lambda} = \mu(p_1,p_2,\check{y})$

называется *функцией условных издержек фирмы.*

Функция $\check{\lambda} = \psi_3(p_1,p_2,\check{y})$ имеет важную экономическую интерпретацию.

1.4.11. Пример.

Пусть производственная функция фирмы имеет вид $y = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$. Пусть p_1 =2, p_2=8,

$\bar{y} = 2^{1/2} \cdot 2$. Решим задачу минимизации издержек $C(x_1, x_2) = 2x_1 + 8x_2$ при фиксированном объеме выпуска фирмы $2^{1/2} \cdot 2 = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$.

Задача на условный минимум имеет вид

$$2x_1 + 8x_2 (\min) \qquad (1)$$

при наличии ограничения

$$2^{1/2} \cdot 2 = x_1^{1/4} x_2^{1/4} \qquad (2)$$

1) Для решения задачи (1), (2) на условный минимум строим функцию Лагранжа.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + 8x_2 + \lambda(2^{1/2} \cdot 2 - x_1^{1/4} x_2^{1/4}).$$

2) Для функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$ выписываем условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - \frac{\lambda}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 8 - \frac{\lambda}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2^{1/2} \cdot 2 - x_1^{1/4} x_2^{1/4} = 0. \qquad (3)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим уравнение

$$\frac{\frac{\lambda}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4}}{\frac{\lambda}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4}} = \frac{2}{8},$$

откуда следует, что $x_2 = \frac{x_1}{4}$ (в этом примере множитель Лагранжа λ обязательно отличен от нуля: при $\lambda = 0$ первое и второе уравнение превращаются в противоречивые выражения 2 = 0, 8 = 0).

Подставив выражение $x_2 = \frac{x_1}{4}$ в третье уравнение системы уравнений (3), получим равенство $2^{1/2} \cdot 2 - x_1^{1/4} \frac{x_1^{1/4}}{4^{1/4}} = 0$, откуда следует, что $2 \cdot 2 - x_1^{1/2} = 0$, т. е. $\bar{x}_1 = 16$, и $\bar{x}_2 = 4$.

Условный глобальный минимум $\bar{C} = 2\bar{x}_1 + 8\bar{x}_2 = 2 \cdot 16 + 8 \cdot 4 = 64$. Множитель Лагранжа $\bar{\lambda} = 8\bar{x}_1^{3/4} \bar{x}_1^{-1/4} = 8 \cdot 16^{3/4} \cdot 4^{-1/4} = 32 \cdot 2^{1/2}$.

3) Построим на плоскости $0x_1x_2$ точку $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (16, 4)$, изокосту, имеющую уравнение $2x_1 + 8x_2 = 64$, и изокванту, имеющую уравнение $2^{1/2} \cdot 2 = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$ $(64 = x_1 x_2)$ (каждую — по трем точкам), которые содержат точку $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (16, 4)$ (см. рис. 1.45). Имеем две таблицы:

таблицу для построения изокосты

x_1	0	16	32
x_2	8	4	0

таблицу для построения изокванты

x_1	8	16	32
x_2	8	4	2

4) Найдем и построим (с началом в точке $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (16, 4)$) градиенты $grad\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

и вектор цен (2,8) (см. рис. 1.45). Имеем $(\bar{x}_1 = 16, \bar{x}_2 = 4)$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4}, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4},$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{4} \cdot 16^{-3/4} \cdot 4^{1/4} = \frac{2^{1/2}}{32}, \quad \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{4} \cdot 16^{1/4} \cdot 4^{-3/4} = \frac{2^{1/2}}{8},$$

$$grad\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left(\frac{2^{1/2}}{32}, \frac{2^{1/2}}{8} \right). \quad grad\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left(\bar{\lambda} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

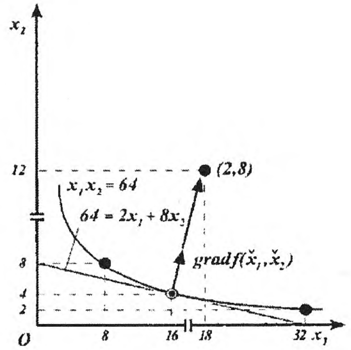

Рис. 1.45

🄿 Производственная функция имеет вид $y = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, $p_1 = 1, p_2 = 3, \breve{y} = 2$.

Решить задачу минимизации издержек $x_1 + 3x_2 = C$ при фиксированном выпуске $\breve{y} = 2$ методом Лагранжа. Найти $\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda}$. Найти условный глобальный минимум $\breve{C} = \breve{x}_1 + 3\breve{x}_2$.

Построить точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ изокосту, изокванту, содержащие точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, вектор цен (p_1, p_2) и градиент $grad\ f(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$.

Литература:

Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. 5-е изд. М.: Дело и Сервис, 2009. 384 с.

Черемных Ю.Н., Демушкина О.И. Математический анализ. Учебно-методическое пособие. Часть 1. М.: Макс-Пресс, 2010. 104 с.

More Books!

I want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн - в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов! Мы используем экологически безопасную технологию "Печать-на-Заказ".

Покупайте Ваши книги на

www.morebooks.de

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at

www.morebooks.de

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Bahnhofstr. 28
D - 66111 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omniscriptum.com
www.omniscriptum.com

Scriptum