DOI 10.15507/2079-6900.20.201804.408-418

УДК 517.938.5, 512.721

Современное изложение классификации грубых преобразований окружности

© **А. Е. Колобянина**[1], **Е. В. Ноздринова**[2], **О. В. Починка**[3]

Аннотация. В настоящей работе авторы излагают решение проблемы топологической классификации грубых преобразований окружности в канонической постановке с использованием современных методов и подходов. Современная теория динамических систем под полной топологической классификацией понимает нахождение топологических инвариантов, доказательство полноты множества найденных инвариантов и построение по заданному множеству топологических инвариантов стандартного представителя. Именно, в первой теореме данной работы устанавливается тип периодических данных грубых преобразований окружности, во второй теореме — необходимые и достаточные условия их сопряженности, состоящие в совпадении периодических данных и чисел вращения, в третьей теореме допустимый набор параметров реализуется грубым преобразованием окружности. При доказательстве теорем мы предполагаем известными результаты по локальной топологической классификации гиперболических периодических точек, а также результаты о глобальном представлении объемлющего многообразия в виде объединения инвариантных многообразий периодических точек.

Ключевые слова: грубые преобразования окружности, топологическая классификация

1. Введение

Нижний Новгород (ранее-Горький) по праву можно считать местом рождения гиперболической теории. В 1937 г. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин [1] ввели понятие *грубой* системы дифференциальных уравнений на плоскости. По определению в таких системах решения не меняют качественного поведения при C^1 малых изменениях правых частей уравнений. Оказалось, что грубые системы имеют весьма лаконичное описание: состояния равновесия и предельные циклы являются гиперболическими, их число конечно, и нет траекторий, идущих из седла в седло. Представителем горьковской школы А. Г. Майером [2] было введено понятие грубости для динамических систем с дискретным временем (каскадов) на окружности. Из его результатов следует, что грубые каскады на окружности, как и потоки на плоскости, типичны и имеют достаточно ясную динамику. А именно, грубый каскад имеет только конечное число периодических точек, причем каждая такая точка является гиперболической.

В 1959 г. М. Пейшото [3] распространил результаты А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина на произвольные ориентируемые замкнутые поверхности. При этом М. Пейшото

[1]**Колобянина Анна Евгеньевна**, студентка образовательной программмы "Математика ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5312-4478, anyakolobyanina@mail.ru

[2]**Ноздринова Елена Вячеславовна**, стажер-исследователь лаборатории Топологических методов в динамике, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5209-377X, maati@mail.ru

[3]**Починка Ольга Витальевна**, заведующая лабораторией Топологических методов в динамике, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6587-5305, olga-pochinka@yandex.ru

модифицировал понятие грубости, опустив требование близости к тождественному отображению для гомеоморфизма, сопрягающего динамику близких систем. Новое понятие *“структурная устойчивость”* стало более употребимым в теории динамических систем. Результат М. Пейшото по своей формулировке дословно повторяет критерий грубости Андронова-Понтрягина. Отметим, что М. Пейшото передоказал часть результатов А.Г. Майера, не зная о его работе.

Действительно, статья [2] была напечатана в малодоступном журнале "Записки горьковского государственного университета"и до сих пор многие отечественные и зарубежные математики не знают о ее существовании, а также о том, что А. Г. Майер был первым, кто классифицировал грубые диффеоморфизмы на окружности. Это была одна из пионерских работ по топологической классификации динамических систем.

С тех пор гиперболическая теория получила колоссальное развитие. В частности, Ч. Мане [4] и К. Робинсоном [5] получен критерий структурной устойчивости для произвольных диффеоморфизмов на многообразиях. С. Смейлом, Дж. Палисом, В. ди Мелу [6], [7], [8], [9] была стройная теория простейших структурно устойчивых систем, так называемых *систем Морса-Смейла*, включающая и вопросы их классификации (см. также [10] для систематизированного изложения).

Современная теория динамических систем под полной топологической классификацией некоторого класса G динамических систем понимается решение следующих задач:

- нахождение топологических инвариантов динамических систем из класса G;
- доказательство полноты множества найденных инвариантов, то есть доказательство того, что совпадение множеств топологических инвариантов является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности (сопряженности) двух динамических систем из G;
- реализация, то есть построение по заданному множеству топологических инвариантов стандартного представителя, принадлежащего G.

Заметим, что классификационные результаты в работе А. Г. Майера явно не выделялись- они были частью доказательства грубости и типичности диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности; не решалась и задача реализации. В настоящей работе авторам хотелось бы изложить решение проблемы топологической классификации грубых преобразований окружности именно в такой, канонической, постановке с использованием современных методов и подходов.

2. Периодические данные грубых преобразований окружности

Прежде всего напомним, что окружность S^1 является единственным замкнутым (компактным без края) одномерным многообразием и гомеоморфна стандарной единичной окружности

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Нас будут интересовать классы эквивалентности диффеоморфизмов $f : S^1 \to S^1$ относительно отношения топологической сопряженности: диффеоморфизмы $f, f' : S^1 \to S^1$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : S^1 \to S^1$ такой, что $hf = f'h$. Более того, мы будем изучать *грубые (структурно устойчивые)* диффеоморфизмы, то есть те, для которых C^1—близкие (покоординатно и по производной) к ним диффеоморфизмы принадлежат одному и тому же классу эквивалентности.

А. Г. Майер [2]пришел к выводу, что грубые диффеоморфизмы (обозначим их множество через G) имеют очень простую динамику, которая с современной точки зрения может быть описана следующим предложением (см., например, [10]).

Предложение 2.1 *Пусть $f \in G$.Тогда*

1) f имеет конечное (не меньшее двух) число периодических точек p, то есть точек, для которых существует натуральное число m_p такое, что $f^{m_p}(p) = p$ и $f^j(p) \neq p$ для любого целого $0 < j < m_p$ (обозначим через $Per(f)$ множество периодических точек диффеоморфизма f);

2) в окрестности U_p точки p, являющейся компонентой связности множества $S^1 \setminus (Per(f) \setminus p)$, диффеоморфизм f^{m_p} топологически сопряжен либо с растяжением

$$a_{\pm}(x) = \pm 2x : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

(в этом случае точка p называется источником, а окрестность U_p — его неустойчивым многообразием W^u_p), либо со сжатием

$$a^{-1}_{\pm}(x) = \pm x/2 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

(в этом случае точка p называется стоком, а окрестность U_p — его устойчивым многообразием W^s_p).

Непосредственным следствием такого описания грубого преобразования окружности f является тот факт, что множество $Per(f)$ содержит одинаковое число (обозначим его через r) источников и стоков, которые чередуются на окружности, а фазовый портрет f с точностью до периодичности имеет вид, изображенный на рис. 2.1, где $\omega_1, \dots, \omega_r$ — стоки; $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — источники. Компоненты связности множества $W^s_{\omega_i} \setminus \omega_i$ называются *устойчивыми сепаратрисами* стока ω_i, а компоненты связности множества $W^u_{\alpha_i} \setminus \alpha_i$ — *неустойчивыми сепаратрисами* источника α_i.

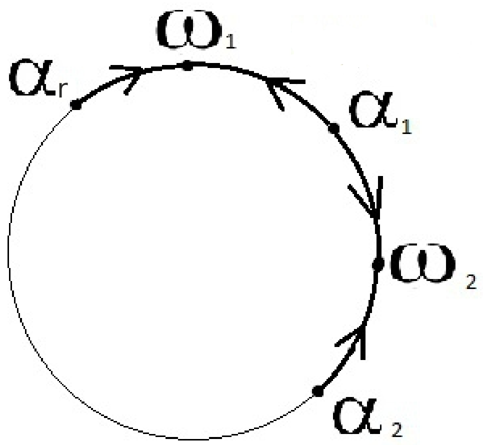

Рисунок **2.1**

Фазовый портрет грубого преобразования окружности

Будем считать окружность ориентированной по ходу часовой стрелки и называть ориентацию на дуге $\gamma \subset S^1$ *положительной (отрицательной)*, если она совпадает (не совпадает) с ориентацией окружности.

Напомним, что гомеоморфизм $g : S^1 \to S^1$ называется *сохраняющим (меняющим) ориентацию*, если для любых точек $a, b, c \in S^1$ таких, что точка b лежит на положительно ориентированной дуге $[a, c] \subset S^1$,следует, что точка $g(b)$ лежит на положительно (отрицательно) ориентированной дуге $[g(a), g(c)]$).

Разобьем множество G на два подкласса G_+ и G_-, состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно.

Непосредственным следствием определения ориентируемости отображения и предложения 2.1 являются следующие факты.

С л е д с т в и е 2.1

1. Любой диффеоморфизм $f \in G_-$ имеет неподвижную точку.

2. Любой диффеоморфизм $f \in G_+$ ($f \in G_-$) на многообразии $W^s_{\omega_i}$ топологически сопряжен посредством некоторого гомеоморфизма $h_{\omega_i} : W^s_{\omega_i} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизму a_+^{-1} (a_-^{-1}) и на многообразии $W^u_{\alpha_i}$ топологически сопряжен посредством некоторого гомеоморфизма $h_{\alpha_i} : W^u_{\alpha_i} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизму a_+ (a_-).

В следующей теореме уточняется структура периодических данных диффеоморфизмов класса G.

Т е о р е м а 2.1

1. Для каждого диффеоморфизма $f \in G_+$ множество $Per(f)$ состоит из $2n, n \in \mathbb{N}$ периодических орбит, каждая из которых имеет период k.

2. Для каждого диффеоморфизма $f \in G_-$ множество $Per(f)$ состоит из $2q, q \in \mathbb{N}$ периодических точек, две из которых являются неподвижными, а другие имеют период 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in G$ и периодические точки диффеоморфизма f занумерованы, как на рис. 2.1. Проиндексируем сепаратрисы диффеоморфизма f следующим образом: обозначим сепаратрису, ограниченную точками ω_i и α_i ,через ℓ_{2i-1}, а сепаратрису, ограниченную точками α_i и ω_{i+1}, через ℓ_{2i} (см. рис. 2.2).

Далее рассмотрим два случая a) диффеоморфизм f имеет хотя бы одну неподвижную точку, b) все периодические точки диффеоморфизма f имеют период, больший единицы.

В случае a) положим для определенности, что неподвижной является точка ω_1 (этого всегда можно добиться перенумерацией точек или переходом к диффеоморфизму f^{-1}). В силу следствия 2.1 возможны два подслучая: a+) диффеоморфизм $f|_{W^s_{\omega_1}}$ топологически сопряжен диффеоморфизму a_+^{-1} и $f \in G_+$; либо a—) диффеоморфизм $f|_{W^s_{\omega_1}}$ топологически сопряжен диффеоморфизму a_-^{-1} и $f \in G_-$.

В случае a+) сепаратриса ℓ_1 неподвижна и, из условия, неподвижной является точка α_1. Аналогичные рассуждения в окрестности α_1 приводят к тому, что неподвижной является точка ω_2, и т. д. Следовательно, все периодические точки диффеоморфизма f являются неподвижными.

В случае a—) сепаратриса ℓ_1 имеет период 2. Тогда точка α_1 либо неподвижна, и в этом случае f — меняющий ориентацию диффеоморфизм "источник-сток либо имеет период 2 и $f(\alpha_1) = \alpha_r$. Продолжая рассуждения в последнем случае, получим, что точка ω_2 либо неподвижная, либо имеет период 2, и т. д. Поскольку на ориентированной дуге $[\alpha_1, \alpha_n] \subset S^1$ меняющий ориентацию диффеоморфизм f имеет в точности одну неподвижную точку, то, либо сток $\omega_q, q > 1$, либо источник α_q окажутся неподвижными, а все остальные периодические точки, кроме ω_1, будут иметь период 2.

В случае b), согласно следствию 2.1, $f \in G_+$. По предположению, все периодические точки f имеют период, больший единицы. Обозначим через k наименьший из этих периодов. Положим для определенности, что точка ω_1 имеет период k (этого всегда можно добиться перенумерацией точек или переходом к диффеоморфизму f^{-1}). Положим $g = f^k$.

Тогда $g \in G_+$, и точка ω_1 является неподвижной точкой диффеоморфизма g. Применяя рассуждения пункта a+), получим, что все периодические точки диффеоморфизма g являются неподвижными. Из условия минимальности периода k следует, что все периодические точки диффеоморфизма f имеют период k.

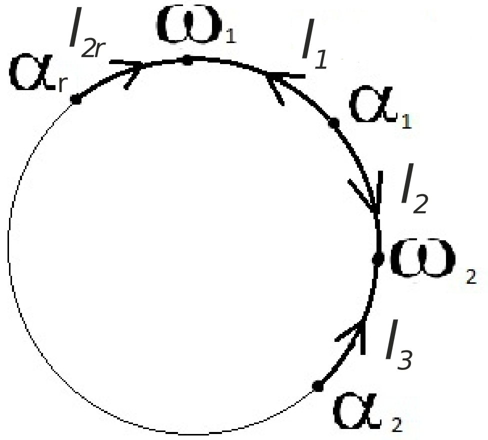

Рисунок **2.2**

Нумерация сепаратрис диффеоморфизма $f \in G$

3. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности грубых преобразований окружности

Пусть $f \in G_+$. Пронумеруем периодические точки множества $Per(f)$: $p_0, p_1, \ldots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$ начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $f(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ для $k > 1$, и числа (k, l) являются взаимно простыми. Заметим, что l не зависит от выбора точки p_0 (см. рис. 3.1 (A)).

Для $f \in G_-$ положим $\nu = -1$; $\nu = 0; \nu = +1$,если его неподвижные точки являются источниками; стоком и источником; стоками соответственно. Заметим, что $\nu = 0$, если q— нечетное и $\nu = \pm 1$, если q— четное (см. рис. 3.1 (B)).

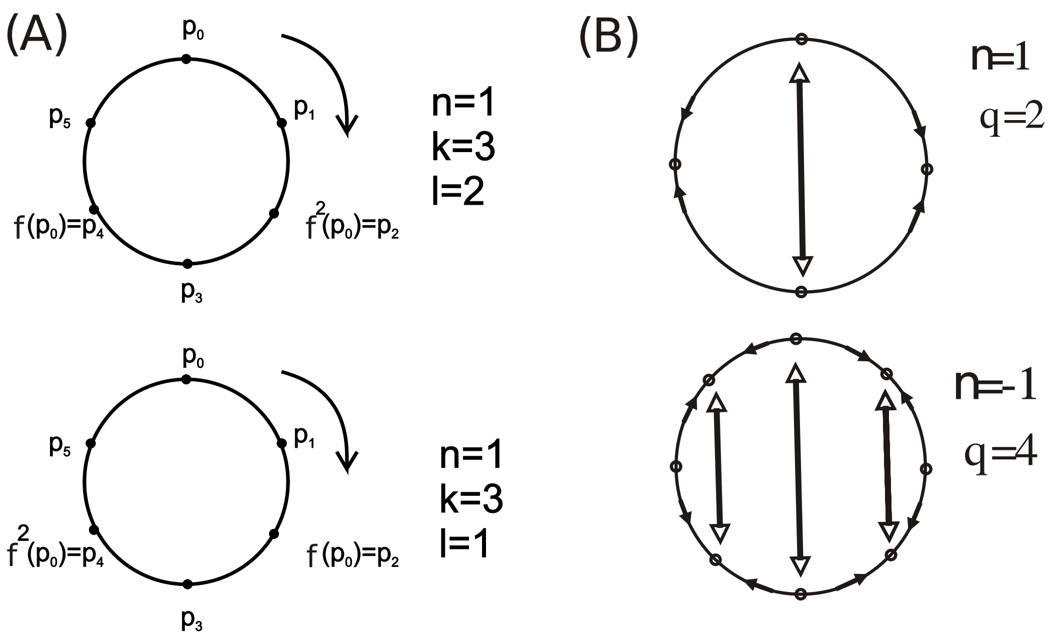

Рисунок 3.1

(A) диффеоморфизм из класса G_+; (B) диффеоморфизм из класса G_-

Следующий результат позволяет получить необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов класса G.

Теорема 3.1

1. Диффеоморфизмы $f; f' \in G_+$ с параметрами $n, k, l; n', k', l'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', k = k'$ и верно одно из следующих утверждений:

- *$l = l'$ (при этом если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию),*
- *$l = k' - l'$ (при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).*

2. Диффеоморфизмы $f; f' \in G_-$ с параметрами $q, \nu; q', \nu'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$ и $\nu = \nu'$[4].

Доказательство. Необходимость условий теоремы 3.1 является непосредственным следствием свойства сопрягающего гомеоморфизма сохранять устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек и их период. Докажем достаточность отдельно в каждом классе G_+ и G_-.

Пусть $f, f' \in G_+$, $n = n', k = k'$ и верно одно из следующих утверждений:

- $l = l'$,
- $l = k' - l'$.

Обозначим через I замыкание компоненты связности множества $S^1 \setminus (\bigcup\limits_{j=0}^{k-1} f^j(\omega_1))$, являющееся ориентированной дугой с начальной точкой ω_1. Конец этой дуги совпадает с точкой $f^i(\omega_1)$ для некоторого $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Внутренности интервалов $I, f(I), \ldots, f^{k-1}(I)$ попарно не пересекаются и $S^1 = \bigcup\limits_{j=0}^{k-1} f^j(I)$. Таким образом, полуинтервал $\dot{I} = I \setminus f^i(\omega_1)$ содержит ровно $2n$ периодических точек, по одной из каждой орбиты (см. рис. 3.2).

[4]Именно в таком виде необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов класса G были впервые сформулированы (без доказательства) в работе [11].

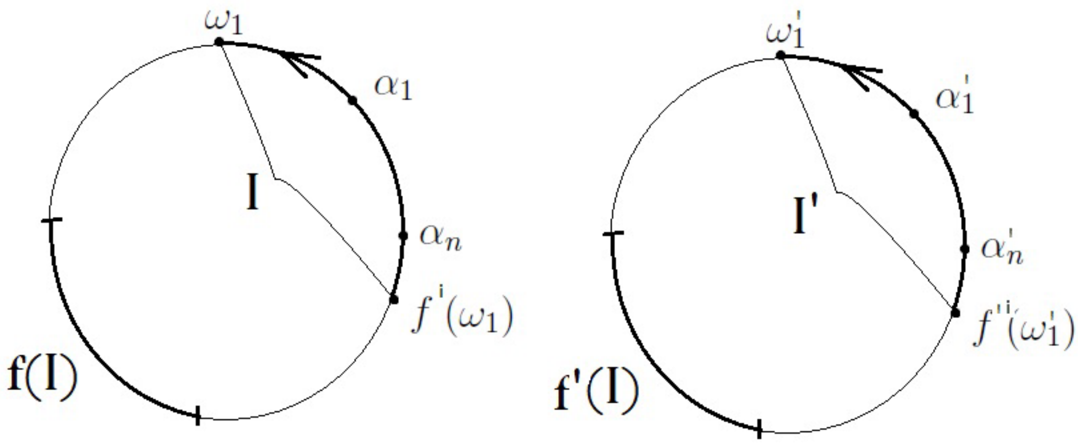

Рисунок **3.2**

Иллюстрация к построению сопрягающего гомеоморфизма

В случае $l = l'$ отрезок I' для диффеоморфизма f' строится аналогичным образом, а в противном случае так, что ω_1 является его конечной точкой. Далее будем предполагать, что $l = l'$; в противном случае рассуждения аналогичны.

Построим гомеоморфизм $h_{\dot I} : \dot I \to \dot I'$, сопрягающий диффеоморфизмы $f^k|_{\dot I}$ и $f'^k|_{\dot I'}$. С этой целью, для $i \in \{1, \ldots, n\}$ положим

$$h_{\ell_{2i-1}} = h^{-1}_{\omega_i'} h_{\omega_i} : \ell_{2i-1} \to \ell'_{2i-1},\ h_{\ell_{2i}} = h^{-1}_{\omega'_{i+1}} h_{\omega_{i+1}} : \ell_{2i} \to \ell'_{2i}.$$

Тогда гомеоморфизм $h_{\dot I}$ совпадает с $h_{\ell_{2i-1}}$ на ℓ_{2i-1}, с $h_{\ell_{2i}}$ —на ℓ_{2i} ,и $h(\omega_i) = \omega_i'$, $h(\alpha_i) = \alpha_i'$. Продолжим гомеоморфизм h на всю окружность следующим образом: для $y \in f^j(I), j \in \{0, \ldots, k-1\}$ положим

$$h(y) = f'^j(h_I(f^{-j}(y))).$$

Пусть теперь $f, f' \in G_-$, $q = q'$ и $\nu = \nu'$. В этом случае отрезок I ограничен двумя неподвижными точками, гомеоморфизм h_I строится аналогично сохраняющему ориентацию случаю, сопрягает диффеоморфизмы $f^2|_{\dot I}$ и $f'^2|_{\dot I'}$ и продолжается на всю окружность формулой $h(y) = f'(h_I(f^{-1}(y)))$ для $y \in S^1 \setminus \dot I$.

4. Реализация грубых преобразований окружности

Следующая теорема реализации является заключительным этапом топологической классификации и гарантирует существование грубого диффеоморфизма окружности с любым допустимым набором параметров.

Теорема 4.1

1. Для любой тройки целых чисел n, k, l такой, что $n, k \in \mathbb{N}$, $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ и является взаимно простым с k для $k > 1$, существует грубый сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с заданными параметрами.

2. Для любой пары целых чисел q, ν такой, что $\nu = 0$, если q— нечетное; и $\nu = \pm 1$, если q — четное, существует грубый меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с заданными параметрами.

Доказательство. Для построения диффеоморфизмов окружности с заданными периодическими данными используем универсальное накрытие окружности прямой:

$$p(x) = e^{2\pi ix} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1.$$

Заметим, что для любого $r \in \mathbb{N}$ диффеоморфизм

$$G_r(x) = x + \frac{1}{4\pi r} sin(2\pi rx) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

посредством p проектируется на окружность диффеоморфизмом $g_r : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, имеющим ровно $2r$ неподвижных точек, половина из которых является стоками, а другая половина — источниками. Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ диффеоморфизм

$$\Psi_\theta(x) = x + \theta : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

посредством p проектируется на окружность диффеоморфизмом $\psi_\theta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, являющимся поворотом на угол $2\pi\theta$. Наконец, диффеоморфизм

$$W(x) = -x : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

посредством p проектируется на окружность диффеоморфизмом $w : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, являющимся отражением относительно оси OX.

Тогда диффеоморфизм $f \in G_+$ с параметрами n, k, l реализуется композицией $\psi_{\frac{l}{k}} \circ g_{nk}$, то есть является проекцией в силу p диффеоморфизма

$$F(x) = x + \frac{1}{4\pi nk} sin(2\pi nkx) + \frac{l}{k}.$$

Диффеоморфизм $f \in G_-$ с параметрами $q, -1$ или $q, 0$ реализуется композицией $w \circ g_q$, то есть является проекцией в силу p диффеоморфизма

$$F(x) = -x - \frac{1}{4\pi q} sin(2\pi qx).$$

Диффеоморфизм $f \in G_-$ с параметрами $q, +1$ является проекцией в силу p диффеоморфизма

$$F(x) = -x + \frac{1}{4\pi q} sin(2\pi qx).$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-31-00022, в рамках проекта ЦФИ НИУ ВШЭ в 2018 г.

Список литературы

1. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР.*, **14**:5 (1937), 247–250.
2. А. Г. Майер, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Ученые записки Горьк. гос. ун-та.*, **12** (1939), 215–229.
3. M. M. Peixoto, “On structural stability”, *Ann. Math.*, **69** (1959), 199–222.

4. Mañé R., “A proof of C^1 stability conjecture”, *Publ. Math. IHES.*, **66** (1988), 161–210.

5. Robinson C., “Structural stability of C^1 diffeomorphisms”, *J. Diff. Equat.*, **22**:1 (1976), 28–73.

6. С. Смеил, “Дифференцируемые динамические системы”, *Успехи мат. наук*, **25** (1970), 113–185.

7. J. Palis, “On Morse-Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404.

8. J. Palis, S. Smale, “Structural stability theorems”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 223–231.

9. Ж. Палис, В. ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем*, Мир, 1998, 301 с.

10. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer International Publishing Switzerland, 2016, 313 p.

11. V. Grines, Yu. Levchenko, V. Medvedev, O. Pochinka, “The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets”, **28** (2015), 4081–4102.

Поступила 16.08.2018

MSC2010 05C62, 14J80, 37D15

Classification of rough transformations of a circle from a modern point of view

© **A. E. Kolobyanina**[1], **E. V. Nozdrinova**[2], **O. V. Pochinka**[3]

Abstract. In this paper the authors use modern methods and approaches to present a solution to the problem of the topological classification of circle's rough transformations in canonical formulation. In the modern theory of dynamical systems such problems are understood as the complete topological classification: finding topological invariants, proving the completeness of the set of invariants found and constructing a standard representative from a given set of topological invariants. Namely, in the first theorem of this paper the type of periodic data of circle's rough transformations is established. In the second theorem necessary and sufficient conditions of their conjugacy are proved. These conditions mean coincidence of periodic data and rotation numbers. In the third theorem the admissible set of parameters is implemented by a rough transformation of a circle. While proving the theorems, we assume that the results on the local topological classification of hyperbolic periodic points, as well as the results on the global representation of the ambient manifold as a union of invariant manifolds of periodic points, are known.
Key Words: rough transformations of a circle, topological classification

References

1. A.A. Andronov, L.S. Pontryagin, "Rough systems", *Report of the Academy of Sciences of the USSR.*, **14**:5 (1937), 247–250 (In Russ.).
2. A.G. Mayer, "Coarse transformation of a circle into a circle", *Scientific notes Gorky. state. University.*, **12** (1939), 215–229 (In Russ.).
3. M. M. Peixoto, "On structural stability", *Ann. Math.*, **69** (1959), 199–222 (In Russ.).
4. R. Mañé, "A proof of C^1 stability conjecture", *Publ. Math. IHES.*, **66** (1988), 161–210 (In Russ.).
5. C. Robinson, "Structural stability of C^1 diffeomorphisms", *J. Diff. Equat.*, **22**:1 (1976), 28–73 (In Russ.).
6. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:1 (1967), 741–817 (In Russ.).
7. J. Palis, "On Morse-Smale dynamical systems", *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404 (In Russ.).
8. J. Palis, S. Smale, "Structural stability theorems", *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 223–231 (In Russ.).

[1]**Anna E. Kolobyanina**, Student of the educational program «Mathematics», National Research University Higher School of Economics (25/12, Bolshaya Pecherskaya St., Nizhniy Novgorod, 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5312-4478, anyakolobyanina@mail.ru

[2]**Elena V. Nozdrinova**, Trainee Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (Bolshaya Pecherskaya St., Nizhniy Novgorod, 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5209-377X, maati@mail.ru

[3]**Olga V. Pochinka**, Laboratory Head, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (Bolshaya Pecherskaya St., Nizhniy Novgorod, 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6587-5305,olga-pochinka@yandex.ru

9. J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982 (In Russ.), 301 c.

10. V.Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer International Publishing Switzerland, 2016 (In Russ.), 313 c.

11. V. Grines, Yu. Levchenko, V. Medvedev, O. Pochinka, "The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets", **28** (2015), 4081–4102 (In Russ.).

Submitted 16.08.2018