

УДК 533:6.011.72

© 1999 г. А.О. КОЖЕМЯКИН, А.В. ОМЕЛЬЧЕНКО, В.Н. УСКОВ

НАКЛОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКОВ

Рассматривается задача о взаимодействии двух плоских сверхзвуковых равномерных потоков совершенного невязкого газа, встречающихся под некоторым углом. Приводятся аналитические решения, определяющие тип исходящих из точки взаимодействия отраженных разрывов, а также соотношения, описывающие границы областей исходных параметров, в которых существует решение задачи.

Указанная задача является одной из традиционных в сверхзвуковой газовой динамике. Поставленная впервые Л.Д. Ландау [1], она до сих пор привлекает к себе внимание исследователей [2–6]. В работах [2–5] исследованы частные случаи данной задачи – взаимодействия догоняющих и встречных скачков. В монографии [6], где анализировалась общая задача, получено ее приближенное решение. В данной статье задача рассматривается в полной постановке, без дополнительных ограничений на определяющие задачу параметры.

1. Рассматривается взаимодействие двух плоских полуограниченных сверхзвуковых потоков совершенного невязкого газа с разными газодинамическими параметрами, встречающихся под углом $\beta_0 > 0$ (фиг. 1). В результате взаимодействия образуются исходящие из точки встречи потоков волны f и g , которые могут быть ударными волнами (j) или центрированными волнами Прандтля – Майера (i), а также тангенциальный разрыв h , разделяющий потоки после столкновения.

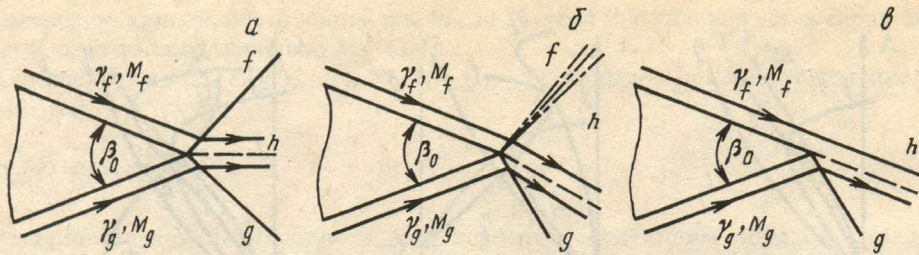
Задача о взаимодействии потоков ставится следующими образом: по заданным значениям чисел Маха M_f и M_g набегающих потоков, показателей адиабаты γ_f и γ_g , перепада давлений $J_0 = p_f^{(0)} / p_g^{(0)}$ и угла встречи β_0 определить газодинамические параметры за исходящими волнами f и g .

В общем случае взаимодействие происходит не в точке, а в некоторой области, простирающейся вниз по потоку и ограниченной исходящими из точки взаимодействия волнами. В представленной статье производится локальный анализ задачи, при котором параметры течения рассчитываются в малой окрестности точки встречи.

Решение задачи строится на основе выполнения условий на тангенциальном разрыве h , заключающихся в равенстве статических давлений ($p_f^{(1)} = p_g^{(1)}$) и углов поворота потока ($\beta_0 + \beta_f = \beta_g$) над и под h .

Для определенности будем считать, что статическое давление $p_f^{(0)}$ перед f больше или равно статическому давлению $p_g^{(0)}$ перед g . В этом случае возможно только два варианта взаимодействия потоков: схема взаимодействия с двумя косыми скачками уплотнения (фиг. 1, *a*) и схема с исходящими волной разрежения f и скачком уплотнения g (фиг. 1, *б*).

Действительно, схема взаимодействия с двумя исходящими из точки встречи центрированными волнами разрежения невозможна, так как при этом не может быть



Фиг. 1. Различные схемы взаимодействия сверхзвуковых потоков

выполнено условие параллельности линий тока за точкой встречи. Условие равенства давлений на тангенциальном разрыве h наряду с неравенством $p_g^{(0)} \leq p_f^{(0)}$ делает невозможным и вариант с исходящими волной разрежения g и скачком уплотнения f .

Вводя интенсивности $J_f = p_f^{(1)} / p_f^{(0)}$ и $J_g = p_g^{(1)} / p_g^{(0)}$ волн f и g , условия на тангенциальном разрыве можно переписать в виде

$$J_f J_0 = J_g, \quad \beta_0 + \beta_f = \beta_g \quad (J_0 \geq 1) \quad (1.1)$$

Углы поворота потока на скачке уплотнения (j) и в волне разрежения (i) рассчитываются по формулам [4]

$$\beta^{(j)}(J) = \chi \arctg \left[\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)M^2 - (J+\varepsilon)}{J+\varepsilon}} \frac{(1-\varepsilon)(J-1)}{(1+\varepsilon)M^2 - (1-\varepsilon)(J-1)} \right] \quad (1.2)$$

$$\beta^{(i)} = \chi(\omega(M_1) - \omega(M)) \quad (1.3)$$

$$\omega(M) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctg \sqrt{\varepsilon(M^2 - 1)} - \arctg(M^2 - 1), \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

Здесь M и M_1 — числа Маха до и за волной, а χ — показатель направления поворота потока в волне ($\chi = +1$ (-1), если поток отклоняется по (против) часовой стрелке). Связь чисел Маха до волны M разрежения и за ней M_1 определяется из формулы [7]

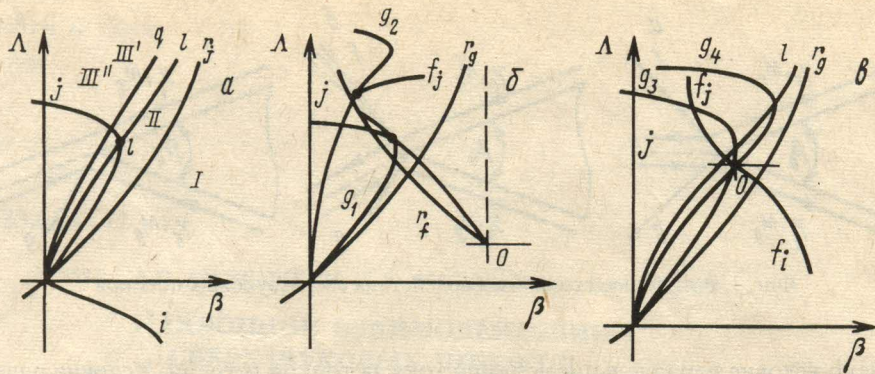
$$\mu_1 = \mu J^{-1/\eta}, \quad \eta = (1+\varepsilon)/2\varepsilon, \quad \mu = 1 + \varepsilon(M^2 - 1) \quad (1.4)$$

Система (1.1) с учетом (1.2)–(1.4) представляет собой систему двух уравнений относительно J_f и J_g . Определив J_f и J_g , можно найти любые газодинамические параметры за волнами f и g (см., например, [7]) и тем самым решить задачу.

Так как $J_0 \geq 1$, то во всех возможных схемах взаимодействия волна g представляет из себя скачок уплотнения с $\chi_g = +1$ (фиг. 1). Волна f в зависимости от значений исходных параметров может быть как скачком уплотнения (фиг. 1, а) ($f = f_i$, $\chi_f^{(j)} = -1$), так и волной разрежения (фиг. 1, б) ($f = f_i$, $\chi_f^{(i)} = +1$). В частном случае f может вырождаться в слабый разрыв (фиг. 1, в).

Априорная неопределенность вида волны f представляет основную трудность решения системы (1.1): из постановки задачи неясно, какую из зависимостей для угла поворота на волне f использовать — (1.2) или (1.3).

Целью представленной работы является получение аналитических критериев, определяющих тип исходящих из точки встречи потоков волн, а также определение границ областей исходных параметров, в которых существует решение задачи.



Фиг. 2. Графическое решение задачи

2. Анализ задачи удобно производить на плоскости $\Lambda = \ln J$, β [4, 7] (фиг. 2, а). На этой плоскости кривые, построенные на основе зависимостей (1.2)–(1.4) и называемые изомахами, отображают зависимости $J(\beta)$ при $M = \text{const}$ для ударных ($\Lambda > 0$) и изэнтропических ($\Lambda < 0$) волн. Участок j изомахи, отвечающий скачку уплотнения, из-за его характерной формы часто называют сердцевидной кривой [8].

Семейство сердцевидных кривых имеет огибающую r_j , уравнение которой запишем в параметрическом виде [7]

$$J_r^{(j)} = \frac{\mu - 1}{\varepsilon}, \quad \beta_r^{(j)} = \chi \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)(\mu - (1 + \varepsilon))}{2\sqrt{\varepsilon\mu(\mu - (1 - \varepsilon^2))}} \quad (2.1)$$

Точка l на сердцевидной кривой, соответствующая максимальному углу поворота потока на одиночном скачке уплотнения, разделяет ее на две ветви – слабую (отвечающую $\Lambda \in [0, \Lambda_l]$) и сильную (фиг. 2, а). Множество таких точек задает на плоскости Λ , β кривую l , описываемую формулами [4]

$$J_l = \frac{\mu - (1 + \varepsilon)}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\mu - (1 + \varepsilon)}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\mu(1 + 2\varepsilon) - 1}{\varepsilon}} \quad (2.2)$$

$$\beta_l = \chi \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{J_l - 1}{J_l + \varepsilon} \frac{(1 + \varepsilon) + (J_l + \varepsilon)}{1 + \varepsilon J_l} \frac{(1 - \varepsilon)(J_l - 1)}{2(J_l + \varepsilon)}} \right] \quad (2.3)$$

Кривые r_j и l разделяют первый квадрант плоскости Λ , β на три подобласти (фиг. 2, а). В области I не существует скачка, способного развернуть поток на угол β и обеспечить при этом требуемый перепад давлений Λ . Через любую точку, лежащую внутри области, ограниченной кривой r_j , проходят две сердцевидные кривые. Соответствующие им числа Маха

$$M^{(1,2)} = \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon)(J - 1)}{1 + \varepsilon} [1 + a \pm \sqrt{a^2 - b}]} \quad (2.4)$$

$$a = \frac{(1 - \varepsilon)(J - 1)}{2 \operatorname{tg} \beta (J + \varepsilon)}, \quad b = \frac{1 + \varepsilon J}{\operatorname{tg} \beta (J + \varepsilon)}$$

получаются как корни квадратного уравнения относительно M^2 , к которому при фиксированных значениях J и β сводится соотношение (1.2). Через произвольную точку области II, лежащей между кривыми l и r_j , могут проходить только слабые ветви сердцевидных кривых. В области III через фиксированную точку проходит слабая ветвь

сердцевидной кривой, построенной для числа Маха $M^{(2)}$, и сильная ветвь сердцевидной кривой, отвечающей значению $M^{(1)}$ (2.4).

Как следует из (2.1)–(2.3), при $M \rightarrow \infty$ ($J \rightarrow \infty$) кривые r_j и l имеют вертикальную асимптоту

$$\beta_a(\gamma) = \chi \operatorname{arctg} \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.5)$$

Решение задачи на плоскости Λ, β строится следующим образом. Из начала координат по заданным значениям γ_g и M_g проводится сердцевидная кривая, отвечающая скачку уплотнения g , а из точки O с координатами Λ_0, β_0 – сердцевидная кривая f_j и изомаха волны разрежения f_i , построенные по числу Маха M_f и показателю адиабаты γ_f . Точки пересечения указанных кривых являются графическим решением поставленной задачи, поскольку в них выполняются условия (1.1) на тангенциальном разрыве. При этом из двух возможных решений в качестве основного выбирается решение, отвечающее меньшим значениям интенсивностей J_f и J_g . Если кривые f и g не пересекаются, то решение задачи отсутствует.

3. Пусть точка O принадлежит области I. В этом случае кривые g и f_i не пересекаются, и поэтому при встрече двух сверхзвуковых потоков волна f всегда представляет из себя скачок уплотнения ($f = f_j$).

Перейдем к определению областей существования задачи для рассматриваемого случая. Если угол β_0 превышает величину

$$\beta_\alpha = \beta_a(\gamma_g) + \beta_a(\gamma_f) \quad (3.1)$$

где $\beta_a(\gamma)$ – угол поворота, рассчитываемый по формуле (2.5), то при любых значениях M_f и M_g решение задачи отсутствует. В дальнейшем считается, что $\beta_0 < \beta_\alpha$.

Очевидно, что нижней по M_f границей существования решения является число Маха, $M_f^{(r)}$, соответствующее касанию сердцевидной кривой f_j и огибающей r_g семейства сердцевидных кривых скачка g . Это число определяется из решения системы

$$J_g = J_0 J_f, \quad \beta_r(J_g) = \beta_0 + \beta_f^{(j)}(M_f^{(r)}, J_f) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \beta_r(J_g)}{\partial \Lambda_g} - \frac{\partial \beta_f^{(j)}(M_f^{(r)}, J_f)}{\partial \Lambda_f} = 0$$

$$\frac{\partial \beta^{(j)}(M, J)}{\partial \Lambda} = \frac{\chi}{2\gamma J} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\xi(J+\varepsilon)}} \frac{\delta + \xi(1+\varepsilon)}{\mu(J+\varepsilon) - J(1+\varepsilon J)(1-\varepsilon)} \quad (3.3)$$

$$\xi = \mu(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon J), \quad \delta = \xi(J+\varepsilon) - \varepsilon(1+\varepsilon J)(J-1)$$

$$\frac{\partial \beta_r(J)}{\partial \Lambda} = \frac{J(1-\varepsilon)}{(J+1)\sqrt{(J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)}} \quad (3.4)$$

представляющей собой формализованную запись условия касания кривых r_g и f_j .

Аналогично, если число M_g находится в диапазоне $M_g \in [1, M_g^{(r)})$, где $M_g^{(r)}$ – число Маха, соответствующее касанию сердцевидной кривой g и огибающей r_f изомах скачка уплотнения f , построенной из точки O (фиг. 2, б), то решение задачи отсутствует при любых значениях $M_f \geq 1$. Для определения числа $M_g^{(r)}$ в последних двух уравнениях системы (3.2) следует поменять индексы f и g .

Зафиксируем $M_f > M_f^{(r)}$. Нижняя по M_g граница существования решения $M_g^{(1)}$

соответствует в этом случае касанию сильной ветви изомахи g и слабой ветви сердцевидной кривой f_j (фиг. 2, б) и определяется из решения системы

$$J_g = J_0 J_f, \quad \beta_g^{(j)}(M_g, J_g) - \beta_f^{(j)}(M_f, J_f) = \beta_0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \beta_g^{(j)}(M_g, J_g)}{\partial \Lambda_g} - \frac{\partial \beta_f^{(j)}(M_f, J_f)}{\partial \Lambda_f} = 0$$

Входящие в (3.5) производные рассчитываются по формуле (3.3).

Наличие верхней по M_g границы существования решения зависит от угла β_0 . Если $\beta_0 > \beta_a(\gamma_f)$, то при любых $M_f > M_f^{(r)}$ существует сердцевидная кривая g , касающаяся изомахи f_j своей слабой ветвью (фиг. 2, б). Соответствующее этой сердцевидной кривой число Маха $M_g^{(2)}$ также определяется из решения системы (3.5) и служит верхней по M_g границей существования решения. Если же $\beta_0 < \beta_a(\gamma_f)$, то найдется число Маха $M_f^{(l)}$, при котором изомаха f_j коснется оси ординат. С точки зрения выделения областей существования решения это означает, что при $M_f \rightarrow M_f^{(l)}$ верхняя по M_g граница отсутствия решения задачи – число Маха $M_g^{(2)}$ – стремится к бесконечности, а в случае $M_f > M_f^{(l)}$ решение задачи существует для любых $M_g > M_g^{(1)}$.

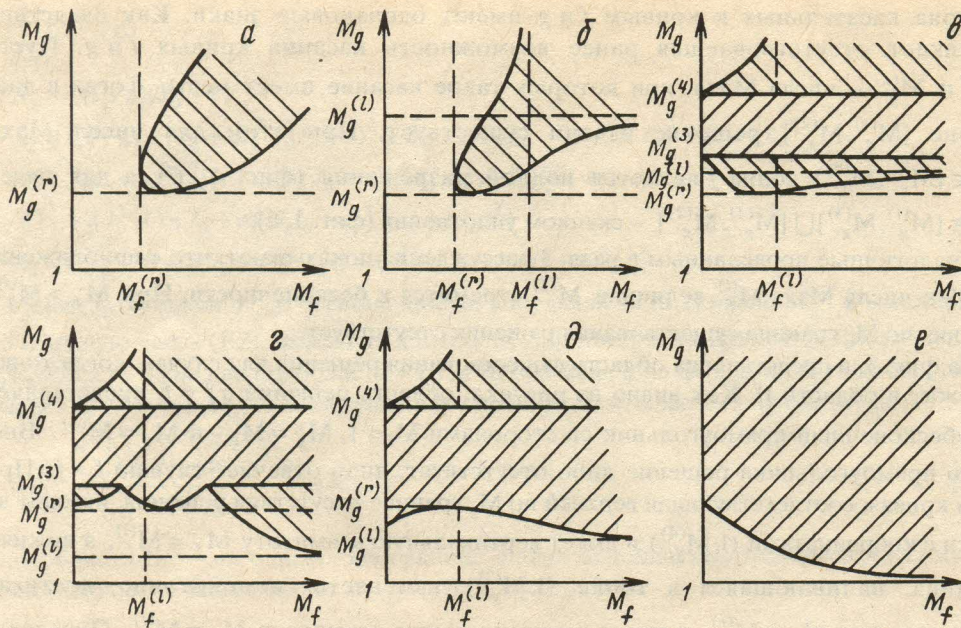
Особое число Маха $M_f^{(l)}$ определяется из решения уравнения $\beta_0 = \beta_l(J_l)$, где $\beta_l(J_l)$ – максимальный угол поворота потока на скачке (2.3), а J_l – соответствующая этому углу интенсивность, выражающаяся через число Маха $M_f^{(l)}$ набегающего потока по формуле (2.2).

Аналогичные результаты можно получить, считая M_g фиксированным и варьируя число Маха M_f . Так, если $\beta_0 > \beta_a(\gamma_g)$, то для любого $M_g > M_g^{(r)}$ найдется диапазон $[M_f^{(1)}, M_f^{(2)}]$, в котором решение задачи существует. При этом числа $M_f^{(1)}$ и $M_f^{(2)}$ по-прежнему определяются из решения системы (3.5). Если же $\beta_0 < \beta_a(\gamma_g)$, то появляется число Маха $M_g^{(l)}$, при котором изомаха g касается прямой $\beta = \beta_0$, такое, что при $M_g > M_g^{(l)}$ решение задачи существует для любых значений $M_f > M_f^{(1)}$.

Области существования решения при фиксированном значении β_0 представим на плоскости (M_f, M_g) (фиг. 3). На фиг. 3, а представлены результаты расчетов в случае, когда $\beta_0 > \beta_a(\gamma_f)$ и $\beta_0 > \beta_a(\gamma_g)$, а на фиг. 3, б – в случае, когда оба неравенства имеют противоположные знаки.

В первом случае (фиг. 3, а) при любых значениях параметра $M_f > M_f^{(r)}$ (или $M_g > M_g^{(r)}$) диапазон чисел Маха M_g (или M_f), в котором решение существует, конечен. Во втором случае (фиг. 3, б) верхняя граница области существования имеет вертикальную асимптоту $M_f = M_f^{(l)}$, а нижняя – горизонтальную асимптоту $M_g = M_g^{(l)}$. При смещении точки O к кривой r_g число $M_f^{(r)}$, соответствующее нижней по M_f границе отсутствия решения, уменьшается до значения $M_f^{(r)} = 1$, при котором точка O попадает на границу r_g существования скачка g . На плоскости (M_f, M_g) это соответствует касанию границы области существования решения оси ординат.

4. Пусть точка O лежит в области II, ограниченной кривыми r_g и r_l (фиг. 2, в). В этом случае в область существования скачка g попадает часть изомахи f , отвечающая



Фиг. 3. Области существования решения задачи на плоскости M_f, M_g при различных значениях определяющих параметров

волне разрежения, и как следствие появляется возможность существования решений с $f = f_i$ (фиг. 1, б).

Проанализируем вначале частный случай $M_f = 1$. При таком M_f часть f_i изомахи f , определяющая скачок уплотнения, вырождается в точку O , и поэтому в данном случае возможны решения только с исходящей волной разрежения ($f = f_i$).

Граница по M_g существования решения определяется из условия касания изомахи f и g . В рассматриваемом случае касание этих изомахи невозможно. Действительно, необходимым условием касания кривых f и g в точке A является равенство углов наклона касательных к кривым в этой точке. Производная $\partial \Lambda_g / \partial \beta_g^{(j)}$ в любой точке изомахи f_i волны разрежения отрицательна (фиг. 2, в). Особенность области II заключается в том, что лежащие в ней участки кривых g являются слабыми ветвями изомахи. Следовательно, в любой точке сердцевидной кривой g , расположенной в области II, производная $\partial \Lambda_g / \partial \beta_g^{(j)}$ с учетом $\chi_g = +1$ положительна. Таким образом, касательные к изомахам f и g имеют противоположные направления, а потому сами изомахи касаться не могут.

Появление диапазона чисел M_g , при которых существует решение задачи, может быть связано только с прохождением изомахи g через граничную точку кривой f — точку O . Как указывалось в разд. 2, через эту точку проходят ровно две сердцевидные кривые скачка g (кривые g_3 и g_4 на фиг. 2, в). Соответствующие этим кривым числа Маха $M_g^{(3)}$ и $M_g^{(4)}$ и являются нижней и верхней границами существования решения для случая $M_f = 1$. Для их определения в (2.4) следует положить $\beta = \beta_0$ и $J = \exp(\Lambda_0)$.

Предположим теперь, что $M_f \in (1, M_f^{(l)})$. В этом случае появляется участок f_j изомахи f , отвечающий скачку уплотнения, а вместе с ним и точки, в которых углы

наклона касательных к кривым f и g имеют одинаковые знаки. Как следствие возникает отсутствовавшая ранее возможность касания кривых f и g . Пусть $M_g^{(1)}$ и $M_g^{(2)}$ – числа Маха, при которых такое касание имеет место. Тогда в диапазоне $[M_g^{(1)}, M_g^{(2)}]$ решение задачи существует. При этом для чисел Маха $M_g \in [M_g^{(3)}, M_g^{(4)}]$ волна f является волной разрежения (фиг. 1, б), а для чисел $M_g \in [M_g^{(1)}, M_g^{(3)}] \cup [M_g^{(4)}, M_g^{(2)}]$ – скачком уплотнения (фиг. 1, а).

Аналогичные проделанным в разд. 3 рассуждения показывают, что с приближением M_f к числу Маха $M_f^{(l)}$ величина $M_g^{(2)}$ стремится к бесконечности. При $M_f > M_f^{(l)}$ верхняя по M_g граница существования решения отсутствует.

На фиг. 3, в представлена область существования решения для случая, когда точка O лежит в области II. Как видно из рисунка, область решений с $f = f_i$ представляет полубесконечный прямоугольник со сторонами $M_f = 1$, $M_g = M_g^{(3)}$ и $M_g = M_g^{(4)}$. Вне этого прямоугольника решение либо отсутствует, либо отвечает случаю $f = f_j$. При этом кривая, соответствующая верхней по M_g границе отсутствия решения, исходит из точки с координатами $(1, M_g^{(4)})$ и имеет вертикальную асимптоту $M_f = M_f^{(l)}$, а нижняя граница, начинающаяся в точке $(1, M_g^{(3)})$, изменяется немонотонно, достигая минимума при $M_g = M_g^{(r)}$, и имеет горизонтальную асимптоту $M_g = M_g^{(l)}$. Определение особых чисел Маха $M_g^{(r)}$, $M_g^{(l)}$ и $M_f^{(l)}$ описано в разд. 3.

5. Пусть точка O находится в области III. Через каждую точку этой области по-прежнему проходят две изомахи g с различными числами Маха – $M_g^{(3)}$ и $M_g^{(4)}$. Однако теперь изомаха с меньшим числом Маха ($M_g = M_g^{(3)}$) пересекает произвольную точку области III своей сильной ветвью. Так как углы наклона касательных к таким участкам кривых g отрицательны, то появляется возможность касания кривой g с частью f_i изомахи f , соответствующей волне разрежения. Одновременно с этим остается возможность касания кривых f и g в точках, отвечающих случаю $f = f_j$.

Для выяснения возможности смены типа волны f на границе области существования решения в уравнениях (3.5) следует положить $J_f = 1$. При этом первые два уравнения системы (3.5) совпадут с уравнениями, определяющими числа Маха $M_g^{(3)}$ и $M_g^{(4)}$, а последнее уравнение примет вид

$$\frac{\sqrt{M_f^{(2)} - 1}}{\gamma M_f^2} = - \frac{\partial \beta_g^{(j)}(M_g^{(k)}, J_0)}{\partial \Lambda_g} \equiv \alpha_k \quad (k = 3, 4) \quad (5.1)$$

Решению системы (3.5) при $J_f = 1$ соответствует касание кривых f и g в точке O . Так как в этой точке угол наклона касательной к кривой f всегда отрицателен, то отрицательным должен быть и угол наклона касательной к изомахе g , что возможно только тогда, когда изомаха g пересекает точку O сильной ветвью, т.е. только в случае $M_g = M_g^{(3)}$. Следовательно, в правой части уравнения (5.1) следует положить $\alpha_k = \alpha_3$.

Уравнение (5.1) сводится к квадратному относительно M_f^2 . Его дискриминант обращается в ноль при $\alpha_3 = -1/(2\gamma)$. Последнее равенство задает связь между интенсивностью $J_3 = J_0$ и числом Маха $M_g^{(3)}$. После несложных преобразований оно сводится к кубическому уравнению относительно $x = (M_g^{(3)})^2$.

$$\sum_{i=0}^3 A_i x^i = 0 \quad (5.2)$$

$$A_3 = -(1+\varepsilon)(J_0 + \varepsilon)^3$$

$$A_2 = [(1+\varepsilon) + (J_0 + \varepsilon)]^2 J_0^2 (1+\varepsilon)^2 + 2(1-\varepsilon^2)(J_0^2 - 1)(J_0 + \varepsilon)^2 + (J_0 + \varepsilon)^4$$

$$A_1 = -2(1+\varepsilon)^2 J_0^2 [(1+\varepsilon) + (J_0 + \varepsilon)] [(J_0^2 - 1) + 2(J_0 + \varepsilon)] - \\ - (1-\varepsilon)(J_0^2 - 1)(J_0 + \varepsilon)[3(J_0 + \varepsilon)^2 - (1+\varepsilon J_0)^2]$$

$$A_0 = [(J_0^2 - 1) + 2(J_0 + \varepsilon)]^2 J_0^2 (1+\varepsilon)^2 + (J_0 + \varepsilon)^2 (1-\varepsilon)^2 (J_0^2 - 1)^2$$

Меняя J_0 от единицы до бесконечности, определяя из (5.2) число $M_g^{(3)}$ и подставляя его в правую часть (1.2), можно на плоскости Λ, β построить кривую $\Lambda_q(\beta)$, разделяющую область III на две подобласти – III' и III'' (кривая q на фиг. 2, а). В подобласти III' уравнение (5.1) имеет два вещественных корня, рассчитываемых по формулам

$$M_f^{(n)} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha_3^2 \gamma^2}}{2\alpha_3 \gamma}} \quad (n=1,2) \quad (5.3)$$

а подобласти III'' – ни одного. На границе q этих подобластей уравнение (5.1) имеет единственное, не зависящее от $\gamma_f, \gamma_g, J_0, \beta_0$ и M_g решение

$$M_f = \sqrt{2}.$$

Наличие в подобласти III', ограниченной кривыми l_g и q_g , двух вещественных решений уравнения (5.1) означает, что на границе области отсутствия решения задачи происходит смена типа волны f (фиг. 3, з). Как показывает сравнение фиг. 3, з и в, вид характерных областей задачи выше прямой $M_g = M_g^{(3)}$ не меняется. В частности, при числах M_g из диапазона $[M_g^{(3)}, M_g^{(4)}]$ решение существует при любых значениях M_f и соответствует $f = f_i$, а в случае $M_g > M_g^{(4)}$ решение возможно только с $f = f_j$. Принципиальные изменения происходят при $M_g < M_g^{(3)}$. Здесь появляются диапазоны $[1, M_f^{(1)}]$ и $[M_f^{(2)}, \infty]$, в которых реализуются решения с $f = f_i$. По аналогии с выводом формул (3.5) несложно показать, что нижняя по M_g граница отсутствия решения для указанных диапазонов определяется из решения системы

$$J_f J_0 = J_g, \quad \beta_g^{(j)}(M_g, J_g) - \beta_f^{(i)}(M_f, J_f) = \beta_0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \beta_g^{(j)}(M_g, J_g)}{\partial \Lambda_g} - \frac{\partial \beta_f^{(i)}(M_f, J_f)}{\partial \Lambda_f} = 0$$

Здесь

$$\frac{\partial \beta_f^{(i)}(M, J)}{\partial \Lambda} = -\chi \frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{\gamma M_1^2}$$

а M_1 – число Маха за волной разрежения. В диапазоне $[M_f^{(1)}, M_f^{(2)}]$ волна f по-прежнему является скачком уплотнения, а нижняя по M_g граница области существования решения определяется по формулам (3.5).

С приближением точки O к кривой q диапазон $[M_f^{(1)}, M_f^{(2)}]$ постепенно сужается, вырождаясь в точку $M_f = \sqrt{2}$ на самой кривой. Переход точки O в подобласть III'' приводит к полному исчезновению решений с $f = f_j$ при числах $M_g < M_g^{(3)}$ (фиг. 3, д).

Как видно из рисунка, при таких значениях параметров Λ_0 и β_0 для $M_g > M_g^{(4)}$ возможны решения только с $f = f_j$, при $M_g = M_g^{(4)}$ скачок f_j вырождается в слабый разрыв, а в случае $M_g < M_g^{(4)}$ реализуются решения только с волной разрежения.

Как и во всех предыдущих случаях, в диапазоне $M_f \in [1, M_f^{(l)})$ область существования решений ограничена по M_g как сверху, так и снизу, а при $M_f \geq M_f^{(l)}$ верхняя граница области существования отсутствует. Кривая, описывающая нижнюю границу этой области, имеет горизонтальную асимптоту $M_g = M_g^{(l)}$. Несложно показать, что точке максимума рассматриваемой кривой на плоскости Λ, β соответствует касание сердцевидной кривой g с огибающей изомах волны разрежения f_i .

При смещении точки O к оси ординат числа $M_f^{(l)}$ и $M_g^{(l)}$ стремятся к единице, а число $M_g^{(4)} \rightarrow \infty$. В случае $\beta_0 = 0$ область существования решения имеет вид, показанный на фиг. 3, *e*. Как видно из рисунка, при таком β_0 во всей области существования решения f является волной разрежения, а область отсутствия решения представляет из себя криволинейный треугольник, стягивающийся в точку при $\Lambda_0 \rightarrow 1$.

Заключение. Описан вид областей существования решения на плоскости чисел Маха сталкивающихся потоков (M_f, M_g). Получены явные аналитические зависимости, позволяющие по заданным значениям параметров задачи: угла между скоростями сталкивающихся потоков и отношению давлений в них определить тип образующихся в результате взаимодействия волн. Найдены точные соотношения, описывающие границы отсутствия решения задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (код проекта 96-2356).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
2. Росляков Г.С. Взаимодействие плоских скачков одного направления. // Численные методы в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1965. Вып. 4. С. 28–51.
3. Росляков Г.С., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных скачков уплотнения одного направления. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 143–152.
4. Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995. 178 с.
5. Киреев В.И., Войновский А.С. Численное моделирование газодинамических течений. М.: Изд-во МАИ, 1991. 253 с.
6. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 118–126.
8. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
14.X.1997