

**ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СИСТЕМА
ВОЛНА РАЗРЕЖЕНИЯ — СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ
В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ГАЗА**

УДК 533.6.011.72

А. В. Омельченко, В. Н. Усков

**Балтийский государственный технический университет,
198005 Санкт-Петербург**

Рассматривается стационарный сверхзвуковой однородный поток совершенного невязкого газа, который последовательно проходит через простую волну разрежения Прандтля — Майера r и скачок уплотнения j , имеющие одно направление. Система двух волн $S_2 = \{r, j\}$ задается двумя параметрами: числом Маха M и суммарным углом β_s поворота невозмущенного потока. Подобно системам волн в [1–3], система $S_2^{(f)}$ при определенных значениях интенсивностей входящих в нее волн является оптимальной для большинства газодинамических переменных f . Приводятся аналитические решения, которые позволяют определить границы областей монотонного и немонотонного поведения газодинамических переменных за системой, а также рассчитать значения интенсивностей волн в оптимальной системе.

1. Система волн $S_2 = \{r, j\}$ преобразует множество газодинамических переменных $F = \{p, \rho, T, \rho v^2, p_0, \rho_0, T_0\}$, характеризующее невозмущенный поток, в множество $F_2 = \{p_2, \rho_2, T_2, \rho_2 v_2^2, p_{02}, \rho_{02}, T_{02}\}$, элементы которого определяют свойства течения за ударной волной. Элементы f и f_2 множеств F и F_2 связаны между собой соотношениями на волнах [1]:

$$I_s^{(f)} = \prod_{k=1}^2 I_k^{(f)}, \quad I_k^{(f)} = \frac{f_k}{f_{k-1}}.$$

Здесь f_{k-1} и f_k — переменные до и за волной ($f_{k-1} \equiv f$ при $k = 1$); величина $\tilde{I}_k^{(p)} \equiv \tilde{J}_k = p_k/p_{k-1}$ определяет интенсивность отдельной волны, а величина $J_s = J_1 J_2$ — интенсивность системы волн.

В [1] доказывается, что газодинамические переменные f_2 за системой волн S_2 при заданных значениях M и показателя адиабаты γ выражаются только через интенсивность системы J_s и соответствующие значения переменных f . В частности,

$$I_1^{(\rho)} \equiv E_1 = \rho_1/\rho = J_1^{1/\gamma}, \quad I_2^{(\rho)} \equiv E_2 = \rho_2/\rho_1 = (J_2 + \varepsilon)/(1 + \varepsilon J_2), \quad \varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1),$$

$$I_s^{(T)} \equiv \Theta_s = T_2/T = J_s/E_s = \mu(M)/\mu(M_2), \quad \mu(M) = 1 + \varepsilon(M^2 - 1),$$

$$I_s^{(d)} \equiv C_s = d_2/d = J_s(M_2^2/M^2), \quad d = \rho v^2.$$

Угол поворота потока в системе

$$\beta_s = \sum_{k=1}^2 \psi_k \beta_k \quad (\psi_1 = -1, \quad \psi_2 = +1) \tag{1.1}$$

выражается через зависимости

$$\beta_1^{(r)} = \omega(M_1) - \omega(M); \tag{1.2}$$

$$\beta_2^{(j)} = \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{J_m^{(1)} - J_2}{J_2 + \varepsilon} \frac{(1 - \varepsilon)(J_2 - 1)}{J_n^{(1)} + \varepsilon - (1 - \varepsilon)(J_2 - 1)}} \right], \quad (1.3)$$

где значения функций Прандтля — Майера $\omega(M)$ рассчитываются по числам Маха до волны M и за ней M_1 ; величина $J_m^{(1)} = (1 + \varepsilon)M_1^2 - \varepsilon$ определяет интенсивность прямого скачка уплотнения в потоке с M_1 . Анализ функций (1.2) и (1.3) производится в [4] на плоскости интенсивностей волн β , $\Lambda = \ln J$.

В более общей постановке для системы из n ударных волн в [1] показывается, что величины $I_s^{(f)}$ могут иметь экстремальные значения и определяют оптимальную систему $S_n^{(f)}$ для произвольной газодинамической переменной f . Величины J_k в $S_n^{(f)}$ находятся из условий экстремальности и определяют геометрию тел, при обтекании которых реализуется $S_n^{(f)}$. Такие экстремальные системы называются газодинамически обусловленными.

Часто на аэродинамические тела накладываются определенные геометрические ограничения. Так, при сверхзвуковом обтекании тел типа клин — пластина (конус — цилиндр) полагается заданным суммарный угол β_s поворота потока в образующейся системе волн. Системы, в которых интенсивности входящих в нее волн зависят от геометрических ограничений, называются геометрически обусловленными. Численное исследование [5] системы $S_2 = \{j, r\}$, которая возникает при обтекании указанных выше тел с заданным значением β_s , свидетельствует о немонотонном поведении переменных f при изменении значений M и β_s . Следовательно, и геометрически обусловленные системы могут быть оптимальными.

В данной работе доказывается, что геометрически обусловленная система $S_2^{(f)} = \{r, j\}$ при заданных значениях M и β_s может быть экстремальной для большинства переменных f . Значения интенсивностей $J_1^{(f)}$ и $J_2^{(f)}$, при которых реализуется $S_2^{(f)}$, зависят от M и β_s и существенно отличаются от соответствующих значений интенсивностей в оптимальных газодинамически обусловленных системах.

Поскольку система волн $S_2 = \{r, j\}$ часто является составным элементом в структуре сверхзвукового потока, то ее исследование на экстремальность представляется важным для задач аэродинамического проектирования. В частности, в совокупности с результатами [5] данные настоящей работы могут служить основой для создания оптимальной формы летательного аппарата.

2. Экстремальные значения функций $I^{(f)}(J_1, J_2)$ находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов Лагранжа. Для выбранной газодинамической переменной f функция Лагранжа

$$L(f) = I_s^{(f)} + \lambda \left(\sum_{k=1}^2 \psi_k \beta_k - \beta_s \right) \quad (2.1)$$

зависит от трех переменных: интенсивностей волн J_1 и J_2 и множителя Лагранжа λ .

Дифференцируя (2.1) по этим переменным, получим систему из двух уравнений, одно из которых есть уравнение связи (1.1), а второе имеет вид

$$I_2^{(f)} \frac{\partial I_1^{(f)}}{\partial J_1} \frac{\partial(\psi_2 \beta_2)}{\partial J_2} = I_1^{(f)} \frac{\partial I_2^{(f)}}{\partial J_2} \frac{\partial(\psi_1 \beta_1 + \psi_2 \beta_2)}{\partial J_1}. \quad (2.2)$$

Используя зависимости (1.1)–(1.3), перепишем уравнение (2.2):

$$I_2^{(f)} \frac{\partial I_1^{(f)}}{\partial J_1} + I_1^{(f)} \frac{\partial I_2^{(f)}}{\partial J_2} \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial J_2} \right)^{-1} \left[\frac{\partial \omega(M_1)}{\partial J_1} - \frac{\partial \beta_2}{\partial J_1} \right] = 0. \quad (2.3)$$

Входящие в (2.3) производные находятся путем дифференцирования (1.2) и (1.3) по

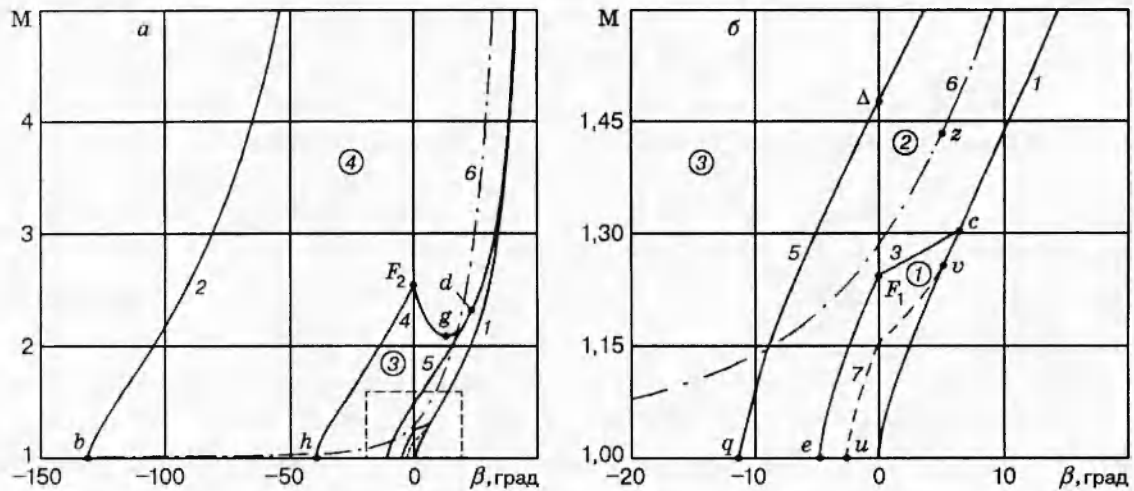


Рис. 1

соответствующим переменным.

Геометрическая связь (1.1) накладывает ограничение на область существования системы S_2 . Так, при $\beta_s > 0$ достаточным условием существования системы является неравенство $M > M_*$, где число Маха M_* соответствует скачку уплотнения, поворачивающему поток на угол β_s и тормозящему его до скорости звука за скачком ($M_2 = 1$). Значение M_* рассчитывается по формулам

$$\beta_s = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{J_* - 1}{1 + \varepsilon J_*} \frac{(1 - \varepsilon)(J_* - 1)}{(J_* + \varepsilon) + (J_* - 1)}}, \quad J_* = \frac{\mu_* - 1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\mu_* - 1}{2\varepsilon}\right)^2 + \mu_*}. \quad (2.4)$$

Зависимость $M_*(\beta_s)$ иллюстрирует рис. 1, а (кривая 1) (фрагмент, отмеченный пунктирной линией на рис. 1, а, дается в увеличенном масштабе на рис. 1, б). Здесь и далее результаты расчетов приводятся для $\gamma = 1,4$.

При $M_* \rightarrow \infty$ из (2.4) находится максимальный угол поворота потока в S_2

$$\beta_a = \operatorname{arctg}((1 - \varepsilon)/(2\sqrt{\varepsilon})) \quad (2.5)$$

($\beta_a = 45,58^\circ$).

Полагая в (1.2) $M_1 \rightarrow \infty$, для $\beta_s < 0$ определим значение M_r , которое ограничивает сверху значения чисел Маха перед волной разрежения, способной развернуть поток на заданный угол β_s :

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}(M_r^2 - 1)} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M_r^2 - 1}} = \beta_s \quad (2.6)$$

(кривая 2 на рис. 1, а).

Из (2.6) следует, что с увеличением $|\beta_s|$ значение M_r уменьшается, и $M_r = 1$ при

$$|\beta_b| = \frac{\pi}{2} \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.7)$$

($\beta_b = -130,45^\circ$, точка b на рис. 1, а).

Таким образом, области чисел Маха, в которых может существовать система S_2 , ограничены зависимостями $M_*(\beta_s)$ при $\beta_s > 0$ и $M_r(\beta_s)$ при $\beta_s < 0$; для углов $\beta_s > \beta_a$ и $\beta_s < \beta_b$ при любых числах Маха система не имеет места.

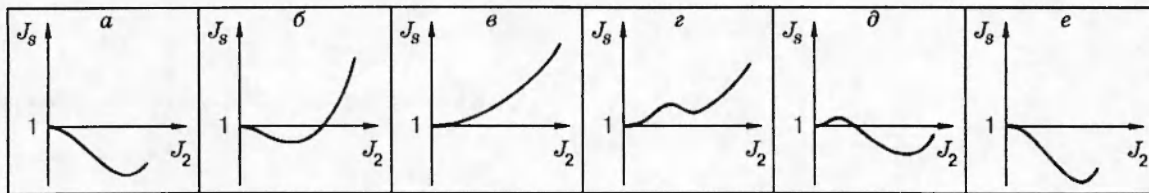


Рис. 2

В области существования S_2 геометрическое ограничение

$$\beta_s = \omega(M) - \omega(M_1(J_1)) + \beta_2(M_1(J_1), J_2) \quad (2.8)$$

и уравнение (2.3) решают поставленную задачу.

3. В качестве примера рассматривается оптимальная для статического давления ($f = p$) геометрически обусловленная система. На рис. 2 приведена качественная картина зависимости интенсивности системы $J_s = J_1 J_2$ с геометрическим ограничением $\beta_s = 0$ от интенсивности скачка уплотнения J_2 ($a-e$ соответствуют $M = 1,05; 1,2; 1,35; 1,6; 2,2; 2,6$). Картина построена на основе численного расчета величины J_s с использованием (2.8) для нахождения J_1 . Видно, что при малых значениях M (рис. 2, a) функция $J_s(J_2)$ меньше единицы для любых J_2 (перерасширение потока [5]) и имеет минимум.

С увеличением M (рис. 2, b) точка минимума смещается к началу координат, а интенсивность системы растет с увеличением J_2 , что приводит к появлению области значений J_2 , в которой $J_s > 1$ (область недорасширения [5]). При $M = M_{F_1}$ ($M_{F_1} = 1,245$) точке минимума соответствует $J_2 = 1$; в диапазоне $M \in [M_{F_1}, M_\Delta]$ ($M_\Delta = 1,478$) (рис. 2, b) функция $J_s(J_2)$ монотонно возрастающая. При $M = M_\Delta$ (точка Δ на рис. 1, b) в точке $J_2 = J_\Delta$ производная $\partial J_s / \partial J_2$ обращается в нуль, а при $M > M_\Delta$ (рис. 2, c) статическое давление за скачком уплотнения имеет максимум при $J_2 < J_\Delta$ и минимум при $J_2 > J_\Delta$. С дальнейшим ростом M (рис. 2, d) интенсивность системы вновь уменьшается; как и при малых значениях M , появляется область перерасширения, в которой $J_s < 1$, а значение J_2 , соответствующее максимуму функции, с увеличением M стремится к единице. При $M > M_{F_2}$ ($M_{F_2} = 2,539$) функция $J_s < 1$ при любых значениях J_2 и имеет единственный экстремум — минимум (рис. 2, e). Последующее увеличение M качественно не меняет поведение статического давления за системой. Похожая картина наблюдается и при $\beta_s \neq 0$.

Таким образом, в зависимости от параметров M и β_s можно выделить четыре области (см. рис. 1), в которых интенсивность системы изменяется различным образом: в области 2 функция $J_s(J_2)$ ведет себя монотонно, в области 3 она имеет две точки экстремума, а в областях 1 и 4 существует только минимум функции.

Границы областей и значения интенсивностей оптимальных волн находятся из решения уравнения (2.3) при условии (2.8). Для статического давления зависимость (2.3) приводится к кубическому уравнению относительно M_1 :

$$\sum_{n=0}^3 A_n (M_1^2)^n = 0. \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_3 &= J_2^2(1 + \varepsilon)^2 - 4\varepsilon(J_2 + \varepsilon)^2; \\ A_2 &= 4\varepsilon(1 - \varepsilon)(J_2 + \varepsilon)(J_2^2 - 1) - 2(1 - \varepsilon^2)J_2^2(J_2 - 1) - 4(1 - 2\varepsilon)(J_2 + \varepsilon)^2; \\ A_1 &= (1 - \varepsilon)[4(1 - 2\varepsilon)(J_2^2 - 1)(J_2 + \varepsilon) + 4(J_2 + \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon)J_2^2(J_2 - 1)^2]; \\ A_0 &= -4(1 - \varepsilon)^2(J_2 + \varepsilon)(J_2^2 - 1). \end{aligned}$$

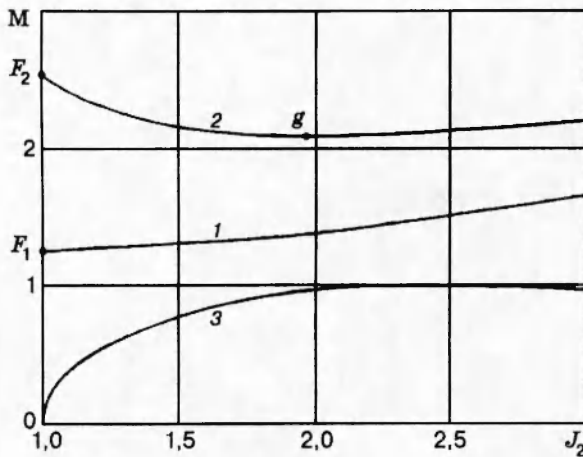


Рис. 3

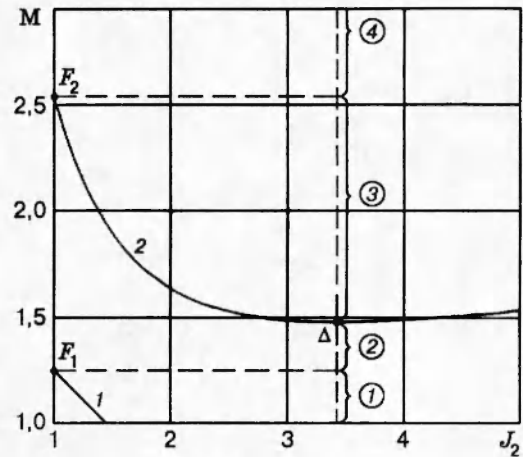


Рис. 4

В диапазоне $J_2 \in [1, \infty)$ уравнение имеет три вещественных корня, представленных на рис. 3. Меньший корень (кривая 3) не имеет физического смысла, поскольку ему соответствуют значения $M_1 < 1$. Два других корня (кривые 1 и 2) в совокупности с геометрическим ограничением

$$\omega(M) = \beta_s + \omega(M_1(J_2)) - \beta_2(J_2) \quad (3.2)$$

и заданным значением β_s позволяют найти взаимосвязь между оптимальной интенсивностью скачка и числом Маха набегающего потока. Частный случай такой взаимосвязи ($\beta_s = 0$) приводится на рис. 4.

Средний корень уравнения (3.1) (кривая 1 на рис. 3) отвечает минимуму функции $J_s(J_2)$, который реализуется при малых числах Маха (кривая 1 на рис. 4). Большой корень (кривая 2 на рис. 3) определяет экстремальные точки при $M > M_\Delta$ (кривая 2 на рис. 4). Из графиков видно, что максимум и минимум функции $J_s(J_2)$ находятся в диапазонах $J_2 \in [1, J_\Delta]$ и $J_2 \in [J_\Delta, \infty)$ соответственно.

Кривые 3 и 4, описываемые зависимостями M_{φ_1} и M_{φ_2} , ограничивают сверху области 1 и 3 на рис. 1. В точках F_i они пересекаются с осью ординат. Из уравнения (3.1) при $\beta_s = 0$, $J_2 \rightarrow 1$ и $J_1 \rightarrow 1$ ($M_1 \rightarrow M$) следуют формулы

$$M_{F_i} = \sqrt{\frac{2}{5-3\gamma} [(3-\gamma) \mp \sqrt{\gamma^2-1}]} \quad (i=1, 2), \quad (3.3)$$

определяющие M_{F_i} . Ранее эти формулы были получены в [6] при решении задачи о взаимодействии слабых возмущений со скачком уплотнения, а также в [4] на основе анализа догоняющих скачков уплотнения на плоскости β, Λ .

При $\beta_s < 0$ зависимости $M(J_2)$ качественно не отличаются от кривых $M(J_2)$, построенных на рис. 4 для $\beta_s = 0$. Следовательно, для нахождения зависимостей M_{φ_i} при $\beta_s < 0$ (левые ветви кривых 3 и 4 на рис. 1) надо в (3.1) положить $J_2 = 1$; тогда (3.2) принимает вид

$$\omega(M) = \omega(M_1) + \beta_s. \quad (3.4)$$

Здесь значения M_1 рассчитываются по формулам (3.3) и зависят только от γ .

Из (3.4) видно, что с увеличением $|\beta_s|$ числа Маха монотонно убывают и достигают

единицы при

$$\beta_s = -\omega(M_{F_i}) \quad (3.5)$$

(точки e и h на рис. 1, $\beta_e = -4,7^\circ$, $\beta_h = -40,04^\circ$). Значит, области 1 и 3 отсутствуют при $\beta_s < \beta_e$ и $\beta_s < \beta_h$ соответственно.

При $\beta_s > 0$ система существует, если $M > M_*$ (2.4). Возможные значения интенсивности J_2 в такой системе принадлежат диапазону $[J_*, \infty)$, где J_* — интенсивность скачка уплотнения, рассчитанная по M_* (формулы (2.4)). Таким образом, при $\beta_s > 0$ кривые, аналогичные построенным на рис. 4 для $\beta_s = 0$, отличаются тем, что их начало соответствует $J_2 = J_*$. Зависимости $M_{\varphi_i}(\beta_s)$, описывающие правые ветви кривых 3 и 4 на рис. 1, находятся по формуле (3.1) из условия $J_2 = J_*$. Так как при $J_2 = J_*$ угол $\beta_2(J_2) = \beta_s$, то, как видно из (3.2), $J_1 = 1$, $M_1 = M$, а числа Маха M_{φ_i} являются средним и большим корнями уравнения (3.2) (кривые 1 и 2 на рис. 3).

Интенсивность J_c скачка уплотнения, соответствующая точке с пересечения кривых 1 и 3 на рис. 1, б, определяется как третий корень кубического уравнения, которое получается из совместного решения уравнений (2.4) и (3.1):

$$4\epsilon J_c^3 + 3(1 - \epsilon)^2 J_c^2 - (5\epsilon^2 - 2\epsilon + 5)J_c + 1 - 3\epsilon - \epsilon^2 - \epsilon^3 = 0 \quad (3.6)$$

($J_c = 1,466$, $M_c = 1,305$, $\beta_c = 6,46^\circ$). При $\beta_s > \beta_c$ область 1, существующая только в диапазоне углов $\beta_s \in [\beta_e, \beta_c]$, исчезает.

Функция $M_{\varphi_2}(\beta_s)$ имеет минимум в точке g (рис. 1, а), которой соответствует интенсивность J_g скачка уплотнения. Значение J_g находится из решения уравнения

$$\sum_{n=0}^3 B_n(M_{\varphi_2}^2)^n = 0, \quad (3.7)$$

где $B_3 = 2J_g(1 + \epsilon)^2 - 8\epsilon(J_g + \epsilon)$; $B_2 = 4\epsilon(1 - \epsilon)y - 2(1 - \epsilon^2)J_g(3J_g - 2) - 8(1 - 2\epsilon)(J_g + \epsilon)$; $B_1 = 2(1 - \epsilon)[2(1 - 2\epsilon)y + 4(J_g + \epsilon) + (1 - \epsilon)J_g(J_g - 1)(2J_g - 1)]$; $B_0 = -4(1 - \epsilon)^2y$, $y = (J_g^2 - 1) + 2J_g(J_g + \epsilon)$; M_{φ_2} рассчитывается по формуле (3.1) ($J_g = 1,989$, $M_g = 2,089$, $\beta_g = 12,7^\circ$).

Число Маха M_Δ , разделяющее при заданном значении β_s области 2 и 3, соответствует минимуму неявной функции $M(J_2, \beta_s)$ (точка Δ на рис. 4), задаваемой формулой (3.2) при условии (3.1). Для его определения уравнение (3.2) можно переписать в виде

$$\nu(M) \equiv \omega(M) - \beta_s = \omega(M_1(J_2)) - \beta_2(J_2). \quad (3.8)$$

Левая часть (3.8) — монотонно зависящая функция от M , а правая зависит только от J_2 . Следовательно, если функция $\nu(M)$ имеет минимум при некотором $J_2 = J_\Delta$, то при том же значении J_2 достигает минимума и $M(J_2)$. Значение интенсивности J_Δ не зависит от β_s .

Исследование (3.8) на экстремум приводит к уравнению для определения J_Δ :

$$J_\Delta(1 + \epsilon) \sum_{n=0}^2 (n + 1)A_{n+1}(J_\Delta)(M_1^2)^n + 2\mu_1 \sum_{n=0}^3 B_n(J_\Delta)(M_1^2)^n = 0. \quad (3.9)$$

Здесь $A_{n+1}(J_\Delta)$ и $B_n(J_\Delta)$ — коэффициенты уравнений (3.1) и (3.7) соответственно; $M_1 = M_1(J_\Delta)$ и рассчитывается как больший корень кубического уравнения (3.1) ($J_\Delta = 3,434$, $M_{1\Delta} = 2,282$).

Таким образом, при любых β_s функция $M_\Delta(\beta_s)$ описывается зависимостью

$$\omega(M_\Delta) = \beta_s + \nu(\gamma) \quad (3.10)$$

и монотонно возрастает с увеличением β_s (кривая 5 на рис. 1). Кривые 4 и 5 пересекаются в точке d , координаты которой рассчитываются из условий $M_\Delta = M_{1\Delta}$ и $\beta_d = \beta_2(J_\Delta, M_\Delta)$ ($\beta_d = 22,56^\circ$), а в точке q кривая 5 пересекает ось абсцисс. Угол β_q , соответствующий этой точке, находится из (3.10) при условии $M_\Delta = 1$ ($\omega(M_\Delta) = 0$) ($\beta_q = -11,27^\circ$).

Таким образом, область 3 существует только в диапазоне углов $[\beta_q, \beta_d]$.

4. При фиксированных значениях β_s и M интенсивность J_2 скачка уплотнения может изменяться в диапазоне $[J_\sigma, J_\vartheta]$. Левая граница J_σ является функцией только угла β_s : при $\beta_s \leq 0$ интенсивность $J_\sigma \equiv 1$, что соответствует повороту потока в волне разрежения на угол β_s , а при $\beta_s > 0$ $J_\sigma = J_*(\beta_s)$ (2.4). Правая граница J_ϑ определяется из уравнения (2.8) при условии $J_\vartheta = J_*(M_1)$.

Экстремумы функции $J_s(J_2)$ находятся внутри интервала (J_σ, J_ϑ) , а сами граничные точки $J_2 = J_\sigma$ и $J_2 = J_\vartheta$ являются точками локального экстремума. При этом, как видно из рис. 2, значение $J_\sigma = 1$ отвечает локальному максимуму функции $J_s(J_2)$ в диапазонах $M \in [1, M_{F_1}]$ и $M \in [M_{F_2}, \infty)$. При $M \in [M_{F_1}, M_{F_2}]$ значение J_σ определяет локальный минимум интенсивности системы.

Абсолютный максимум статического давления за системой S_2 при заданном значении β_s достигается, когда $J_2 = J_\vartheta$ и $M = M_w$. Для определения M_w используется метод Лагранжа. Функция Лагранжа

$$L_m = J_\vartheta \left(\mu \frac{J_\vartheta + \varepsilon}{J_\vartheta(1 + \varepsilon J_\vartheta)} \right)^{(1+\varepsilon)/2\varepsilon} + \lambda [\omega(M_1) - \omega(M) - \beta_*(J_\vartheta) + \beta_s] \quad (4.1)$$

зависит от трех переменных: J_ϑ , M и λ . Значение M_1 находится при условии $M_2 = 1$ из уравнения

$$\mu_1 = J_\vartheta(1 + \varepsilon J_\vartheta)/(J_\vartheta + \varepsilon), \quad (4.2)$$

а угол $\beta_*(J_\vartheta)$ — из (2.4).

Дифференцируя (4.1) с учетом (4.2) по J_ϑ , M и λ и исключая множитель Лагранжа λ , можно получить следующие уравнения, определяющие значение числа Маха M_w :

$$\beta_s = \beta_*(J_\vartheta) + \omega(M_w) - \omega(M_1(J_\vartheta)); \quad (4.3)$$

$$M_w^2 = (x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4x^2})/2. \quad (4.4)$$

Здесь

$$x = \frac{1}{\gamma} \frac{(J_\vartheta - 1)^2}{J_\vartheta(J_\vartheta + \varepsilon)(1 + \varepsilon J_\vartheta)} [\zeta - \xi]^{-1}; \quad \zeta = \frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1^2 \mu_1} \frac{J_\vartheta^2 + 2\varepsilon J_\vartheta + 1}{(J_\vartheta + \varepsilon)^2};$$

$$\xi = \frac{\sqrt{J_\vartheta - 1}}{\sqrt{1 + \varepsilon J_\vartheta}} \frac{2J_\vartheta + 1}{J_\vartheta(J_\vartheta^2 + J_\vartheta - 1 + \varepsilon)}.$$

Из (4.3) и (4.4) видно, что зависимость $M_w(\beta_s)$ (кривая 6 на рис. 1) является параметрической. Параметром служит величина J_ϑ .

Подкоренное выражение в (4.4) обращается в нуль, если $x = 2$; при этом $M_w = \sqrt{2}$, $J_\vartheta = J_z$ ($J_z = 3,882$) и $\beta_s = \beta_z$ ($\beta_z = 4,51^\circ$, точка z на рис. 1, б). В диапазоне $J_\vartheta \in [J_z, \infty)$ подкоренное выражение больше нуля; знак плюс перед корнем отвечает $M_w \in [\sqrt{2}, \infty)$, а минус — $M_w \in (1, \sqrt{2}]$. При $M_w \rightarrow 1$ угол $\beta_s \rightarrow \beta_b$ (2.7), а при $M_w \rightarrow \infty$ $\beta_s \rightarrow \beta_a$ (2.5) (рис. 1, б). Таким образом, абсолютный экстремум статического давления достигается при любых β_s из области существования системы S_2 .

5. Геометрически обусловленные системы $S_2^{(f)}$ могут быть оптимальными не только для статического давления, но и для температуры, плотности и скоростного напора. Гра-

ниции областей немонотонности и экстремумы функций находятся из уравнения (2.3) при условии (3.2).

Наиболее простой вид уравнение (2.3) имеет для температуры ($I(f) = I(T)$):

$$M_1^2 = (J_2 + 1) \frac{J_2(J_2 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon J_2)}{J_2(J_2 + 1)(1 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon J_2)}, \quad (5.1)$$

что позволяет при заданных M и β_s рассматривать (2.8) как уравнение относительно единственной неизвестной — J_2 .

Проведенные расчеты показывают, что при малых числах Маха ($M \in [1, M_t]$) температура имеет минимум при значении $J_2 = J_t$, которое определяется из уравнения (3.2) при условии (5.1). Если $M > M_t$, то функция $I^{(T)}(J_2)$ монотонная.

Зависимость $M_t(\beta_s)$ (линия 7 на рис. 1,б) для $\beta_s > 0$ находится из (3.2) при условии $M = M_1(J_2)$ (5.1). При $\beta_s < 0$ в (3.2) следует положить $J_2 = 1$; при этом, как видно из (5.1), $M_1 = 2/\sqrt{3}$.

Область немонотонного изменения $I^{(T)}(J_2)$ существует в диапазоне углов $[\beta_u, \beta_v]$. Угол β_u (точка u на рис. 1,б) определяется из (3.2) при $M = 1$, $J_2 = 1$ и $M_1 = 2/\sqrt{3}$ в виде

$$\beta_u = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} - \frac{\pi}{6}$$

($\beta_u = -2,49^\circ$), а координатам точки v (рис. 1,б) соответствует интенсивность J_v , которая рассчитывается по формуле

$$J_v = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{27 - 4(1 + \varepsilon)^2}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{27 - 4(1 + \varepsilon)^2}{108}}}. \quad (5.2)$$

Формула (5.2) получается из совместного решения уравнений (2.4) и (5.1).

По известному значению J_v можно найти значения M_v (формула (5.1)) и β_v (формула (3.2)) ($M_v = 1,257$, $\beta_v = 5,16^\circ$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17549).

ЛИТЕРАТУРА

1. Омельченко А. В., Усков В. Н. Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С. 118–126.
2. Петров Г. И. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования: Избр. тр. М.: Наука, 1992.
3. Герман Р. Сверхзвуковые входные диффузоры. М.: Физматгиз, 1960.
4. Усков В. Н. Ударные волны и их взаимодействие. Л.: ЛМИ, 1980.
5. Григоренко В. Л., Крайко А. Н. О внутренних скачках уплотнения при сверхзвуковом обтекании идеальным газом конфигураций клин — пластинка и конус — цилиндр // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 1. С. 91–97.
6. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 22/VI 1995 г.,
в окончательном варианте — 15/XI 1995 г.