

УДК 533.6.011.72

© 1996 г. А.В. ОМЕЛЬЧЕНКО, В.Н. УСКОВ

ОПТИМАЛЬНЫЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА СУММАРНЫЙ УГОЛ ПОВОРОТА ПОТОКА

Рассматривается ударно-волновая система "скачок уплотнения и последующая волна разрежения" в плоском сверхзвуковом течении вязкого нетеплопроводного газа. Методом неопределенных множителей Лагранжа найдено точное аналитическое решение задачи определения интенсивностей волн, которые приводят к экстремальным значениям газодинамических переменных (статического давления, температуры и др.) за волной. Такие системы относятся к оптимальным [1, 2]. Параметрами задачи являются число Маха невозмущенного потока, показатель адиабаты и суммарный угол поворота потока в системе волн.

Приводятся аналитические решения, которые определяют границы областей монотонного и немонотонного поведения газодинамических переменных за системой. Исследуется влияние показателя адиабаты на размеры областей существования оптимальных волн.

Задание геометрического ограничения на систему в виде суммарного поворота потока связывает между собой интенсивности скачка уплотнения и волны разрежения. Такие системы называются геометрически обусловленными и отличаются от рассматриваемых в [1, 2] оптимальных систем, в которых значения интенсивностей волн считаются независимыми и определяются только из условий экстремальности газодинамических переменных.

Актуальность исследования геометрически обусловленных систем подчеркивают библиография и результаты работы [3]. Анализ данных численного исследования [3] задачи о сверхзвуковом обтекании конфигурации клин – пластина с нулевым суммарным углом поворота потока свидетельствует о наличии экстремальных перерасширений и недорасширений потока за волной разрежения при определенных числах Маха. Сопоставление результатов расчетов [3] с аналитическими решениями данной статьи подтверждают достоверность последних и возможность использования методического подхода [2] к анализу геометрически обусловленных систем.

1. Рассматривается плоское стационарное сверхзвуковое течение совершенного вязкого газа с последовательно расположенными волнами (w), которые могут быть ударными ($w = j$) и изоэнтропными ($w = i$).

Упорядоченная система волн $S_n = \{w_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) преобразует множество газодинамических переменных $F = \{p, \rho, T, \rho v^2, p_0, \rho_0, T_0\}$, характеризующих невозмущенный сверхзвуковой поток, в соответствующее множество $F_n = \{p_n, \rho_n, T_n, \rho_n v_n^2, p_{0n}, \rho_{0n}, T_{0n}\}$, элементы которого определяют свойства газа за S_n . Элементы f и f_n множеств F и F_n связаны между собой известными соотношениями на волнах [2]

$$I_n^{(f)} = \prod_{k=1}^n I_k^{(f)}, \quad I_k^{(f)} = \frac{f_k}{f_{k-1}} \quad (1.1)$$

Здесь f_{k-1} и f_k – значения переменных до и за волной, величина $I_k^{(p)} \equiv J_k = p_k / p_{k-1}$ определяет интенсивность отдельной волны, а соответствующая величина J_n – интенсивность системы волн.

Связь чисел Маха в системе волн осуществляется через изоэнтропные функции температуры

$$\frac{\tau(M_n)}{\tau(M)} = \Theta_n \equiv \frac{T_n}{T}, \quad \tau(M) = \frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + 0,5(\gamma - 1)M^2} \quad (1.2)$$

$$\Theta_n = \frac{J_n}{E_n(J_n)}, \quad E_n(J_n) = \frac{p_n}{\rho} \quad (1.3)$$

Здесь γ – показатель адиабаты, а зависимость $E_n(J_n)$ имеет различный вид для скачков уплотнения (j) и изоэнтропных волн (i)

$$E_k^{(j)} = \frac{J_k + \varepsilon}{1 + \varepsilon J_k}, \quad E_k^{(i)} = J_k^{1/\gamma}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (1.4)$$

Отношение скоростных напоров в потоках до и за S_n выражается через J_n и M , а коэффициент потерь полного давления зависит только от интенсивностей скачков уплотнения в системе [2]. Таким образом, из (1.1), (1.2), (1.3) и (1.4) следует, что значения газодинамических переменных за системой волн S_n выражаются только через число Маха невозмущенного потока, интенсивность системы J_n и соответствующие переменные до первой волны.

Суммарный угол поворота потока в S_n

$$\beta_n = \sum_{k=1}^n \psi_k \beta_k, \quad \psi_k = \text{sign} \beta_k \quad (1.5)$$

зависит от абсолютных значений β_k и от знака угла поворота (ψ) на каждой волне: $\psi = +1$, если поток в волне поворачивается против часовой стрелки, и $\psi = -1$ в противном случае.

На скачке уплотнения модуль угла поворота рассчитывается по формуле

$$\beta_k^{(j)} = \arctg \left[\sqrt{\frac{J_m^{(k-1)} - J_k}{J_k + \varepsilon}} \cdot \frac{(1 - \varepsilon)(J_k - 1)}{J_m^{(k-1)} + \varepsilon - (1 - \varepsilon)(J_k - 1)} \right] \quad (1.6)$$

$$J_m^{k-1} = (1 + \varepsilon)M_{k-1}^2 - \varepsilon$$

Здесь величина J_m^{k-1} определяет интенсивность прямого скачка уплотнения в потоке с числом M_{k-1} .

В изоэнтропной волне с интенсивностью $J = \Theta_k^{(1+\varepsilon)/2\varepsilon}$ модуль угла β_k выражается через функции Прандтля – Майера

$$\beta_k^i = \omega(M_k) - \omega(M_{k-1}) \quad (1.7)$$

которые рассчитываются по числам Маха до волны (M_{k-1}) и за ней (M_k); в уравнение (1.5) этот угол входит со значением $\psi = -1$.

При определенных значениях интенсивностей $J^{(f)}$ волн в системе S_n величины $I_n^{(f)}$ имеют экстремальные значения и определяют оптимальную систему волн $S_n^{(f)}$ для газодинамической переменной f [1,2]. При этом значения интенсивностей отдельных волн в системе считаются независимыми друг от друга и находятся только из условия оптимальности. Однако во многих прикладных задачах сверхзвуковой газовой дина-

мики системы волн реализуются при обтекании тел заданной геометрии. В таких системах $J = J(\beta, \gamma, M)$ и они называются геометрически обусловленными. В данной работе производится анализ оптимальных систем, в которых считается заданным суммарный угол поворота потока β_n (параметр задачи). Анализ функций (1.6) и (1.7) на плоскости интенсивностей волн $(\beta, \Lambda = \ln J)$ служит основой для исследования таких систем.

Экстремальные значения функций $I^{(f)}(J_1, \dots, J_n, M)$ находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов Лагранжа. Для выбранной газодинамической переменной f функция Лагранжа

$$L^{(f)} = I^{(f)} + \lambda \left(\sum_{k=1}^n \psi_k \beta_k - \beta_n \right) \quad (1.8)$$

зависит от $n + 2$ переменных: интенсивностей волн J_1, \dots, J_n , числа M и множителя Лагранжа λ . Условия экстремума функции $L^{(f)}$ определяют интенсивности входящих в систему оптимальных волн.

На основе теоретического и численного анализа (1.8) доказывается, что геометрически обусловленные системы могут быть оптимальными для большинства газодинамических переменных f , причем значения интенсивностей оптимальных волн существенно отличаются от соответствующих интенсивностей в газодинамически обусловленных системах [1, 2].

2. В качестве примера геометрически обусловленной системы волн (S_2) рассматриваются последовательно расположенные скачок уплотнения и волна разрежения, поворачивающие поток с известным числом Маха на заданный угол (1.5)

$$\beta_n = \beta_1(M, J_1) - \beta_2(M_1, J_2) = \text{const} \quad (2.1)$$

Значение угла β_n ограничивает числа Маха, при которых реализуется такая система. Так, необходимым условием существования S_2 в случае $\beta_n > 0$ является неравенство $M > M_*$, в котором величина M_* соответствует течению газа за скачком уплотнения со скоростью звука. Связь между M_* и β_n вытекает из (1.2), (1.3) и (1.6) при $M_1 = 1$

$$\sqrt{\frac{J_* - 1}{1 + \varepsilon J_*}} \frac{(1 - \varepsilon)(J_* - 1)}{(J_* + \varepsilon) + (J_* - 1)} = \text{tg } \beta_n \quad (2.2)$$

$$J_* = \frac{\mu_* - 1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\mu_* - 1}{2\varepsilon}\right)^2 + \mu_*}, \quad \mu_* = 1 + \varepsilon(M_*^2 - 1)$$

Полагая в (2.2) $M_* \rightarrow \infty$, можно определить максимально возможный угол β_a поворота потока на скачке уплотнения

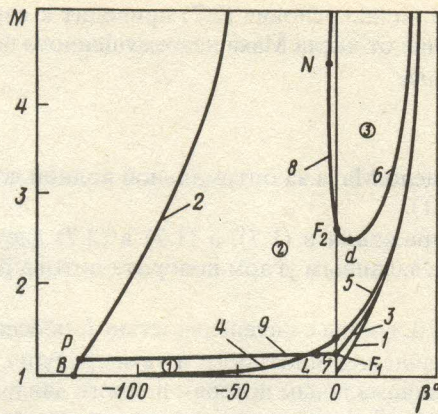
$$\beta_a = \text{arctg} \frac{1 - \varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.3)$$

Для $\gamma = 1,4$ $\beta_a = 45,58^\circ$.

Параметрическая зависимость $\beta_n(M_*)$ (2.2) ограничивает справа (фиг. 1) область существования S_2 (кривая 1).

В случае $\beta_n < 0$ область существования системы ограничена по M слева (кривая 2 на фиг. 1) величиной M_e , которая рассчитывается по (1.7) при $M_{k-1} = M_e$, $M_k = M_1$ и $M_1 \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(M_e^2 - 1)}} - \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{M_e^2 - 1}} = \beta_n \quad (2.4)$$



Фиг. 1. Границы областей существования оптимальных для статического давления ударно-волновых систем

Из (2.4) при $M_e = 1$ следует

$$|\beta_n| = \beta_b = \frac{\pi}{2} \frac{1 - \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}}$$

Для $\gamma = 1,4$ $\beta_b = 130,45^\circ$. Если $M_e \rightarrow \infty$, то $\beta_n = 0$.

Внутри ограниченной зависимостями $M_*(\beta_n)$ и $M_e(\beta_n)$ области существует оптимальная одиночная волна (ударная, если $\beta_n > 0$, или разрежения, когда $\beta_n < 0$), которая при заданном значении β_n обеспечивает экстремальные значения газодинамических переменных f . Интенсивность оптимальной волны определяется с помощью функции Лагранжа (1.8). Для одиночной волны $L^{(j)}$ является функцией трех переменных: J , M и λ . Условия экстремума $L^{(j)}$ образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными. Одно из них представляет собой уравнение связи (2.1)

$$\beta(M, J) - \beta_n = 0 \quad (2.5)$$

Два других уравнения после исключения λ приводят к зависимости

$$\frac{\partial I^{(f)}}{\partial M^2} \frac{\partial \beta}{\partial J} - \frac{\partial I^{(f)}}{\partial J} \frac{\partial \beta}{\partial M^2} = 0 \quad (2.6)$$

Поскольку величины J , E (1.4), Θ (1.3) и J° являются функциями только интенсивности волны J , то (2.6) принимает вид

$$\partial \beta / \partial M^2 = 0 \quad (2.7)$$

и совпадает с условием существования огибающей кривой у семейства изолиний $M = \text{const}$ (изомах) на плоскости β, λ [4].

Конкретное выражение для производной в левой части (2.7) зависит от типа волны и определяет связь между значениями интенсивности J_r оптимальной волны и числа M_r набегающего потока [4].

В случае скачка уплотнения из (2.7) следует $M_r^2 = J_r + 1$, что позволяет из (2.5) получить явную зависимость интенсивности J_r оптимального скачка уплотнения от заданного угла поворота потока β_n (кривая 3 на фиг. 1)

$$J_r^{(j)} = \frac{1 + \gamma \sin \beta_n}{1 - \gamma \sin \beta_n}$$

В случае изоэнтропной волны условие (2.7) приводит к явной зависимости интенсивности оптимальной волны от числа Маха невозмущенного потока

$$J_r^{(i)} = \left(\frac{M^2 - (1 - \varepsilon)}{(M^2 - 1)\mu} \right)^{-(1 + \varepsilon)/2\varepsilon}$$

из которой следует, что число Маха за оптимальной волной должно иметь следующее значение: $M_1^2 = M^2 / (M^2 - 1)$.

Подстановка этого выражения в (1.7), а (1.7) в (2.7) дает неявную связь между оптимальным числом M_r и заданным углом поворота потока β_n в системе (кривая 4 на фиг. 1).

При заданном значении β_n волны с интенсивностью J_r , обеспечивающей экстремальные величины статического давления, плотности и температуры, а оптимальный скачок уплотнения приводит и к минимальным потерям полного давления за ним.

3. Задание параметров M и β_n однозначно определяет интенсивность одиночной волны и значения газодинамических переменных за ней. В случае двух волн варьирование величин их интенсивностей позволяет управлять параметрами на выходе системы S_2 .

Иллюстрацией этого утверждения служит анализ статического давления $I^{(p)} \equiv J_n = J_1 J_2$ за системой S_2 на плоскости интенсивностей волн (фиг. 2). Здесь изомахи ($M = 4$, $\gamma = 1,4$) 1 и 2 описываются формулами (1.6) и (1.7) соответственно и отображают возможные для данного M одиночные скачки уплотнения ($\beta_n > 0$) и волны разрежения ($\beta_n < 0$) в невозмущенном потоке. Точки A на этом рисунке обозначают значения J_A интенсивностей одиночных волн, поворачивающих поток на угол β_n , а точка r отмечает оптимальный скачок уплотнения.

Кривые 3 и 4 на рисунке соответствуют волнам разрежения, расположенным за скачками уплотнения с интенсивностями $J_1 = J_q$ (кривая 3, исходящая из точки q на кривой 1) и $J_1 = J_s$ (кривая 4, исходящая из точки s). Величина интенсивности системы волн S_2 , как следует из (2.1), определяется ординатой точки пересечения изомахи $\beta_2(M_1, J_2)$ (1.7) и вертикальной прямой $\beta_n = \text{const}$. Координаты этих точек, отсчитываемые от точек q или s , определяют значения J_2 и β_2 в системах со скачками уплотнения, имеющими различные интенсивности.

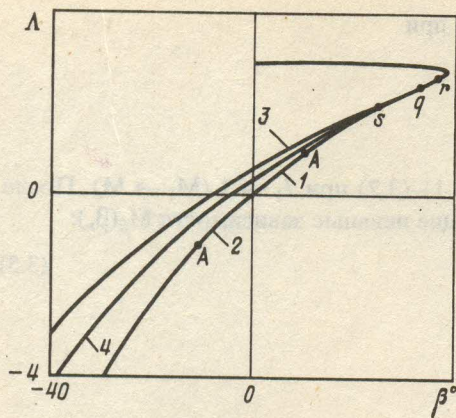
Изменение J_1 в зависимости от значений M и β_n может привести к монотонному и немонотонному поведению интенсивности системы, а следовательно, и других переменных $I^{(p)}$. В частности, кривая 3 на фиг. 2 соответствует максимальному значению J_n для $\beta_n = 0$ и очень близка к максимальным J_n при других углах поворота потока.

Качественный характер зависимости $J_n(J_1)$ для $\gamma = 1,4$ иллюстрирует фиг. 3 при $M = 1,2$ (а, з), 2 (б, д) и 4 (в, е) для $\beta_n = 5^\circ$ (верхние рисунки) и -5° (нижние рисунки). Точки A на этом рисунке, как и на фиг. 2, соответствуют величинам J_A для одиночных волн. Из рисунков следует, что течение за волной разрежения может быть как с перерасширением ($p_2 < p$, $J_n < 1$), так и с недорасширением ($p_2 > p$, $J_n > 1$). При небольших числах Маха (фиг. 3, а, з) функция $J_n(J_1)$ монотонна, при умеренных M она имеет только максимум (фиг. 3, б, д), а при больших M — два экстремума (фиг. 3, в, е). Небольшая величина минимума, существующего только при больших числах Маха, не была замечена в работе [3].

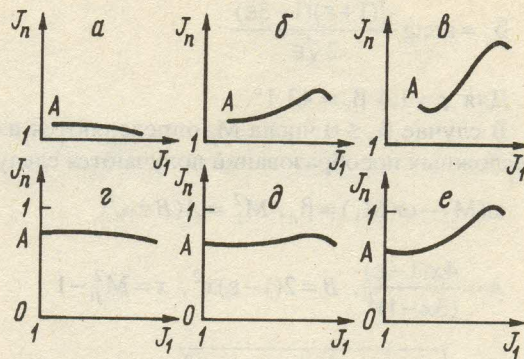
Интенсивности оптимальных волн в системе определяются методом Лагранжа. Считая число Маха параметром и дифференцируя (1.8) по переменным J_1, J_2 и λ , несложно получить систему из двух уравнений

$$\beta_1(M, J_1) - \omega(M_2) + \omega(M_1) - \beta_n = 0 \quad (3.1)$$

$$1 - \frac{\gamma J_1 M_2^2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} \phi - \frac{1 + \varepsilon}{2} \frac{J_1^2 + 2\varepsilon J_1 + 1}{(1 + \varepsilon J_1)(J_1 + \varepsilon)} \left[1 - \frac{M_2^2 \sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1^2 \sqrt{M_2^2 - 1}} \right] = 0 \quad (3.2)$$



Фиг. 2. Линии $M = \text{const}$ на плоскости интенсивностей волн



Фиг. 3. Качественное поведение интенсивности системы при различных значениях параметров задачи

$$\phi = \frac{\sqrt{\varepsilon}[\delta + \chi(1 + \varepsilon)]}{\gamma\sqrt{(J_1 + \varepsilon)\chi[\mu(J_1 + \varepsilon) - J_1(1 + \varepsilon J_1)(1 - \varepsilon)]}}$$

$$\chi = \mu(1 + \varepsilon) - (1 + \varepsilon J_1), \quad \delta = \chi(J_1 + \varepsilon) - \varepsilon(1 + \varepsilon J_1)(J_1 - 1)$$

Решение системы (3.1)–(3.2) определяет значение интенсивности J_1 оптимального скачка уплотнения, при котором функция $J_n(J_1)$ достигает экстремума. Расчеты показывают, что на плоскости β_n, M (фиг. 1) существуют три отмеченные на рисунке кружками характерные области, различающиеся числом точек экстремума: в области 1 функция монотонна, в области 2 она имеет максимум, а в области 3 кроме максимума существует минимум $J_n(J_1)$.

Уравнения кривых $M_{fi}(\beta_n)$ ($i = 1, 2$), разделяющих эти области при $\beta_n > 0$, получают аналитически из системы (3.1)–(3.2) при условии $J_2 \rightarrow 1$ ($M_2 \rightarrow M_1$) и имеют вид

$$\beta_1(\mu_{fi}, J_1) = \beta_n, \quad \mu_{fi} = A(B \mp C) \quad (i = 1, 2) \quad (3.3)$$

$$A = \frac{1 + \varepsilon J_1}{(1 + \varepsilon)(J_1(1 - 3\varepsilon) - 4\varepsilon^2)}$$

$$B = J_1(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) - 2\varepsilon^2, \quad C = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon J_1)(J_1 + \varepsilon)}$$

Значения $\beta_n = 0$ ($J_1 \rightarrow 1$) соответствуют числам Маха

$$M_{Fi} = \sqrt{\frac{2}{5 - 3\gamma}[(3 - \gamma) \mp \sqrt{\gamma^2 - 1}]} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$

Для $\gamma = 1,4$ $M_{F1} = 1,245$, $M_{F2} = 2,539$. Эти числа Маха получены также в [5] при решении задачи о взаимодействии слабых возмущений со скачком уплотнения и в [4] при анализе свойств изомах на плоскости β, Λ .

Зависимостям $M_{f1}(\beta_n)$ и $M_{f2}(\beta_n)$ для $\beta_n > 0$ соответствуют кривые 5 и 6 на фиг. 1. Функция $M_{f1}(\beta_n)$ монотонно возрастает с увеличением β_n и стремится к β_a (2.3) при $M \rightarrow \infty$, а $M_{f2}(\beta_n)$ имеет минимум при числе $M = M_d$, которое определяется из решения уравнения

$$\mu^2(1 + \varepsilon)(1 - 3\varepsilon) - 2\mu[2(1 + \varepsilon J_1)(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) - (1 - \varepsilon^2)(1 - 2\varepsilon)] + (1 - \varepsilon)^2(1 + \varepsilon J_1)(1 + 3\varepsilon J_1) = 0$$

в котором $\mu = \mu_{f2}(J_1)$ (3.3) ($M_d = 2,4617$ при $\gamma = 1,4$, а $\beta_d = 6,6^\circ$).

Величина M_{f2} становится бесконечно большой при

$$\beta_c = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(1+\varepsilon)(1-3\varepsilon)}}{2\sqrt{\varepsilon}}$$

Для $\gamma = 1,4$ $\beta_c = 43,1^\circ$.

В случае $\beta_n \leq 0$ числа M_{fi} определяются из (3.1)–(3.2) при $J_1 \rightarrow 1$ ($M_1 \rightarrow M$). После несложных преобразований получаются следующие неявные зависимости $M_{fi}(\beta_n)$:

$$\omega(M) - \omega(M_1) = \beta_n, \quad M_1^2 = A(B \pm C) \quad (3.5)$$

$$A = \frac{4x(1-\varepsilon)}{(3x-1)^2}, \quad B = 2(1-\varepsilon)x^2, \quad x = M_{fi}^2 - 1$$

$$C = \sqrt{x[4(1-\varepsilon)^2 x^3 - (3x-1)^2]}$$

Здесь M_1 – число Маха за волной разрежения, поворачивающей поток на угол β_n .

Подкоренное выражение в (3.5) неотрицательно в двух диапазонах чисел Маха: $M \in [M_{R1}, M_{R2}]$ и $M \in [M_{R3}, \infty)$ ($M_{R1} = 1,1224$, $M_{R2} = 1,2556$, а $M_{R3} = 1,8449$ для $\gamma = 1,4$). В каждом из диапазонов имеются по две зависимости $M(\beta_n)$, различающиеся знаком перед радикалом в (3.5). Таким образом, существуют четыре различные функции $M_{fi}(\beta_n)$ ($i = 1, \dots, 4$).

Из условия непрерывности функции $M_{fi}(\beta_n)$ при $\beta_n = 0$ следует, что кривая 7, разделяющая области 1 и 2 (отмеченные кружками на рисунке) при малых $|\beta_n|$ ($\beta_n < 0$), описывается зависимостью $M_{f1}(\beta_n)$ из первого диапазона со знаком минус в (3.5). Из того же условия вытекает, что функции $M_{f2}(\beta_n)$ для малых углов $\beta_n < 0$ соответствует второй диапазон чисел Маха и положительный знак перед радикалом (кривая 8 на фиг. 1).

С увеличением $|\beta_n|$ дискриминант в (3.5) уменьшается и обращается в ноль ($C = 0$), когда $M = M_{R2}$ (при $\gamma = 1,4$ $\beta_L = -4,42^\circ$). Следовательно, в точке L значение $M_{f1}(\beta_n)$ совпадает со значением функции $M_{f3}(\beta_n)$, которой соответствует знак плюс перед радикалом и диапазон чисел Маха $[M_{R1}, M_{R2}]$. Кроме того, при $|\beta_n| > |\beta_L|$ величина M_{f3} становится меньше M_{R2} . Таким образом, начиная с точки L зависимость $M_{f3}(\beta_n)$ (кривая 9) разделяет области 1 и 2.

Дальнейшее увеличение $|\beta_n|$ приводит к возрастанию числа M_1 за волной разрежения и $M_1 \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow M_p$, причем $M_p = 2/\sqrt{3}$ и не зависит от γ . Этому числу Маха соответствует угол

$$\beta_n = \beta_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - \frac{\pi}{3}}$$

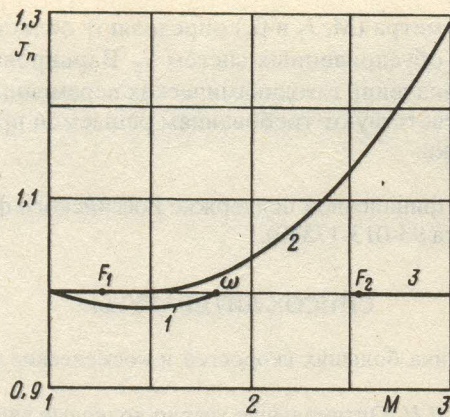
($\beta_p = -127,97^\circ$ для $\gamma = 1,4$) и точка p на фиг. 1. При $\beta_n < \beta_p$ интенсивность системы может изменяться только монотонно.

Кривая 8 (фиг. 1), разделяющая при $\beta_n < 0$ области 2 и 3, имеет характерную точку N . Координаты этой точки определяются из уравнения

$$\frac{4(1-\varepsilon)(M_{f2}^2 - 1)^3}{\mu_{f2} M_{f2}^2 (M_{f2}^2 - 2)} = \frac{3M_1^2 (M_1^2 - 1)}{\mu_1 (M_1^2 - 2)}$$

в котором число $M_1(M_{f2})$ за волной разрежения определяется по формуле (3.5). Для $\gamma = 1,4$ $\beta_N = -3,72^\circ$.

На размеры области 3 существенно влияет величина показателя адиабаты. С ростом γ эта область сжимается, числа M_{f2} и M_N увеличиваются, а $\beta_N \rightarrow 0$. При



Фиг. 4. Зависимость от числа Маха экстремальных значений интенсивности системы в случае $\beta_n = 0$

$\gamma \rightarrow 5/3$ число $M_{F2} \rightarrow \infty$ и часть области 3, лежащая левее оси ординат, исчезает. С дальнейшим ростом γ углы β_d и β_c уменьшаются и при $\gamma \rightarrow 2$ область 3 исчезает полностью. На размеры остальных областей показатель адиабаты влияет слабо.

Проведенный выше анализ оптимальных геометрически обусловленных систем дополняет фиг. 4. Здесь для наиболее простого случая обусловленности ($\beta_n = 0$) приводятся границы области изменения интенсивности системы волн при различных числах Маха для $\gamma = 1,4$. При $M < M_{F1}$ (формула (3.4)) функция $J_n(J_1)$ монотонно убывает с увеличением интенсивности скачка уплотнения и имеет наименьшее значение при $J_1 = J_*$ (формула (2.2)) (кривая 1 на рисунке). В интервале $[M_{F1}, \infty)$ максимальное значение J_n достигается при интенсивности оптимального скачка уплотнения $J_1 = J_M$ (формула (3.3)) (кривая 2). Одновременно нижняя граница функции J_n возрастает, достигая единицы при $M = M_w = 1,837$. В диапазоне $[M_w; M_{F2}]$ она остается равной единице, а при $M > M_{F2}$ определяется точкой минимума функции J_n (формула (3.2)) и практически сливается с осью абсцисс (кривая 3 на фиг. 4).

4. Рассматриваемая система волн может быть оптимальной и для других газодинамических переменных (плотности, температуры, скоростного напора). Соответствующие оптимальные интенсивности волн находятся из условия равенства нулю производных от функции $L^{(j)}$ (1.8) по переменным J_1, J_2 и λ .

В случае $f = T$ экстремум функции $I^{(T)}$ реализуется, если число M и интенсивность оптимального скачка $J_1 = J$ связаны следующей зависимостью:

$$\mu = \frac{(1 + \varepsilon J)(D + E)}{2(J + \varepsilon)[(1 + \varepsilon)(J + 1)^2 - J(1 + \varepsilon J)]} \quad (4.1)$$

$$D = J(J + 1)^2(1 + \varepsilon) + (J + \varepsilon)(J + 1)^2 - 2J(J + \varepsilon)(1 + \varepsilon J)$$

$$E = \varepsilon(J + 1)\sqrt{(J^2 - 1)^2 + 4J(J + \varepsilon)(1 + \varepsilon J)}$$

Анализ (4.1) показывает, что в диапазоне чисел Маха $M \in [1, M_p]$, где $M_p = 2\sqrt{3}$, функция $I^{(T)}$ монотонна и меньше единицы во всей области своего существования, а при $M > M_p$ имеет максимум при $J_1 = J$.

В отличие от других газодинамических переменных интенсивность оптимального для температуры скачка не зависит от угла поворота потока β_n , а является функцией только числа Маха. При этом величина максимума растет с увеличением β_n .

Заключение. Три параметра (M , J_1 и β_n) определяют области существования оптимальных геометрически обусловленных систем S_2 . Варьированием этих параметров можно достигнуть таких значений газодинамических переменных за системой, которые наилучшим образом соответствуют требованиям решаемой прикладной задачи сверхзвуковой аэрогазодинамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17549).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Г.И. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования. М.: Наука, 1992. 306 с.
2. Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 118–126.
3. Григоренко В.Л., Крайко А.Н. О внутренних скачках уплотнения при сверхзвуковом обтекании идеальным газом конфигураций клин – пластинка и конус – цилиндр // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 91–97.
4. Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995. 180 с.
5. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
25.V.1995