

**ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА СРОЧНОЙ СТРУКТУРЫ ВЕРОЯТНОСТИ ДЕФОЛТА\*****Михаил Вячеславович ПОМАЗАНОВ**

кандидат физико-математических наук, доцент факультета экономических наук,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Российская Федерация  
m.pomazanov@hse.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-3069-1511>  
SPIN-код: отсутствует

**История статьи:**

Получена 14.06.2018  
Получена в доработанном виде 02.07.2018  
Одобрена 17.07.2018  
Доступна онлайн 29.08.2018

УДК 336.71(075.8)

JEL: C58, G17, G28

**Аннотация**

**Предмет.** Существующие методы моделирования срочной структуры вероятности дефолта и их недостатки, ограничивающие практическое применение.

**Цели.** Дать эффективное предложение кредиторам по построению методики оценки вероятности дефолта корпоративного заемщика с учетом изменяемого срока до конца кредитной сделки, не противоречащей новому стандарту МСФО IFRS 9.

**Методология.** Экономико-статистический анализ, оптимизация параметров специального вида распределений на статистических данных рейтинговых агентств.

**Результаты.** На консолидированных эмпирических данных рейтинговых агентств для корпоративного сектора обоснована двухпараметрическая формула срочной структуры вероятности дефолта, не противоречащая требованиям международного стандарта IFRS 9 для корпоративного сектора заемщиков, в котором недостаточно внутренних данных банка для построения собственной внутренней модели Lifetime PD либо построение требует чрезмерных затрат и усилий.

**Область применения.** При расчете ставки резервов для кредитных активов, условия по которым согласуются с основным механизмом кредитования (тест SPPI) для второй стадии обесценения, согласно классификации стандарта IFRS 9; внутренняя самостоятельная оценка требований к экономическому капиталу по сделке с учетом срока; оценка минимальной (безубыточной) ставки кредитования с учетом риска и срока сделки; оптимизация срока сделки и другие возможные приложения.

**Выводы.** Обосновывается формула расчета срочной структуры вероятности дефолта, наилучшая в пуле фитирующих распределений, калиброванная на внешних эмпирически статистически репрезентативных данных рейтинговых агентств, включающих исторический период 44 года. Формула является явной и не требует для практического применения использования сложных вычислений.

**Ключевые слова:**

кредитный риск, резервы МСФО, вероятность дефолта, срочная структура дефолта, стандарт IFRS 9

© Издательский дом ФИНАНСЫ и КРЕДИТ, 2018

**Для цитирования:** Помазанов М.В. Двухпараметрическая формула срочной структуры вероятности дефолта // Финансы и кредит. — 2018. — Т. 24, № 8. — С. 1920 — 1937.  
<https://doi.org/10.24891/fc.24.8.1920>

**Введение**

Основной показатель кредитных рисков — вероятность дефолта компании (PD), оценивается на ближайшем годовом интервале с учетом текущего годового макропрогноза общего состояния кредитных рисков (парадигма PIT, point-in-time). Альтернативой парадигме PIT является парадигма TTC

(through-the-cycle), для которой среднегодовое PD рассчитывается по усредненному за цикл состоянию экономики. Среднегодовые ожидаемые потери, на основании которых создаются экономические резервы, опираются на значение PD PIT. Однако для оценки экономического капитала, требуемого для покрытия непредвиденных потерь, в соответствии с продвинутым подходом Международной конвергенции измерения

\* Выражаю благодарность выпускнице магистратуры НИУ ВШЭ Н.А. МОРЕНКО за предоставление данных из магистерской диссертации.

капитала<sup>1</sup> (Базель II), должно использоваться PD ТТС. Кумулятивная вероятность дефолта  $PD(t)$  (за произвольный период  $t$ ) для практической реализации продвинутого подхода Базель II не требуется ни в одной формуле, поскольку для оценки ожидаемых потерь достаточно среднегодовой величины, а для оценки капитала на периоде кредитного риска, превышающего год, можно воспользоваться формулой корректировки капитала на срок погашения (п. 272, Базель II).

Исключительная практическая ценность задачи определения корректного значения кумулятивной вероятности (жизненного цикла) PD появилась с введением Международного стандарта IFRS 9<sup>2</sup>. Согласно IFRS 9 оценка ожидаемых потерь должна проводиться до конца срока по сделкам, для которых произошло увеличение кредитного риска, то есть для тех активов, которые попали на второй уровень (где третий уровень — дефолт по классификации IFRS 9). То есть необходимо иметь обоснованный метод расчета вероятности дефолта по всему жизненному циклу как минимум в виде  $PD(t, PD1)$ , где  $PD1$  — вероятность дефолта за год  $PD(1, PD1) = PD1$ .

Понятно, что простейшая формула «перегорания лампочки»<sup>3</sup>

$$PD(t, PD1) = 1 - (1 - PD1)^t \quad (1)$$

является слишком грубым приближением и, как показывает практика, сильно консервативным для  $t$  больше 2–3 лет. Впрочем, эта формула вполне годится для  $t < 1$ .

С фундаментальной точки зрения многопериодные оценки  $PD(t)$  базируются на нескольких подходах и их комбинациях:

<sup>1</sup> Международная конвергенция измерения капитала и стандартов капитала: уточненные рамочные подходы. 2004. URL: <http://safbd.ru/sites/default/files/basel.pdf>

<sup>2</sup> Международный стандарт финансовой отчетности (IFRS) 9 «Финансовые инструменты» (ред. от 26.08.2015) принят приказом Минфина России от 02.04.2013 № 36н. URL: [https://www.minfin.ru/ru/document/?id\\_4=117330](https://www.minfin.ru/ru/document/?id_4=117330). Обязателен к внедрению в РФ с 2018 г.

<sup>3</sup> Экспоненциальная зависимость вероятности выживания от времени  $F(t, \lambda) = e^{-\lambda t}$ , полученная из условия независимости вероятности перегорания в любой момент времени  $t$  от  $t$ .

- 1) структурные модели дефолта в разных вариациях зависимости поведения активов;
- 2) модели, основанные на исследовании собственной популяции клиентов, базирующиеся на моделях выживания с применением метода максимального правдоподобия;
- 3) модели, основанные на цепях Маркова (roll-rate) и миграции рейтингов;
- 4) прямое фитирование зависимости  $PD(t)$  на наблюдаемой статистике (в том числе рейтинговых агентств).

Первый подход был положен в основу рекомендаций коррекции капитала Базель II, поскольку подход к оценке экономического капитала целиком базируется на классическом структурном подходе Мертона—Блэка—Шоулза [1], базовая формула оценки требований к капиталу получена Васичек [2].

В работе [3] авторы фокусируются на классическом представлении события дефолта как случайного падения активов до уровня внешнего долга, при этом теоретическое поведение  $PD(t)$  задается формулой, являющейся следствием формулы Мертона. Однако параметры формулы авторами уточняются с учетом зависимости эффективного возврата на капитал, который должен определяться рейтингом компании. В итоге после применения подхода к требованию на капитал в мультипериодных сделках получается поправка, близкая к регламентируемой рекомендациями Базель II. Эмпирические расчеты опираются на данные кумулятивной вероятности дефолта на периодах {1,2,3,4,5} лет четырех рейтинговых агентств, для нескольких обобщенных рейтинговых разрядов (AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC/C). При этом стоит заметить, что фитирование  $PD$  для разрядов AAA/A не получается вообще или очень низкого качества.

В разрезе структурных моделей вероятностей дефолта [4, 5] использовали условное распределение времени до дефолта для эмитентов, у которых расстояние до дефолта наблюдалось неявно и с шумом. Данная

модель предполагает существование процесса интенсивности дефолта, который зависит от текущего измерения расстояния до дефолта и от других предикторов, которые могут предоставить дополнительную информацию о состоянии фирмы. На финансовое состояние фирмы может оказывать влияние ряд различных факторов, в том числе особенности фирмы, размер сектора, макроэкономический цикл — все эти переменные способны влиять на эволюцию потоков платежей, а также на уровень финансового рычага. Данный подход, основанный на структурной модели, позволяет включить наравне с расстоянием до дефолта другие наблюдаемые и ненаблюдаемые предикторы в целях отражения источников кредитного риска, которые не покрываются расстоянием до дефолта.

Второй подход оценки жизненного цикла *PD* использует статистику банка и наилучшим образом удовлетворяет требованиям IFRS 9 (см. п. B5.5.52 «Информация прошлых периодов является важной отправной точкой или базой для оценки ожидаемых кредитных убытков»). Он опирается на использование исторических данных о жизненном цикле каждого индивидуального актива на заданном историческом периоде с учетом «цензурирования», когда момент открытия актива происходил до начала периода, то есть отсутствие дефолта к моменту начала периода, в том числе момент планируемого закрытия актива происходит в будущем, а также дефолты открывшихся в заданный период активов и дефолты открывшихся ранее. Такой метод опирается на функцию выживания, на которой строится функционал правдоподобия и решается задача оптимизации. При этом в формуле кумулятивной вероятности кроме параметра времени (возраста) используются финансовые параметры актива, параметры обеспечения, макропараметры, гомогенные циклические функции.

Математическая структура моделей выживаемости является основой процессов подсчета, описанных, например, в работе [6]. Такие модели применяются для массовых (в основном розничных) активов, являясь достаточно эффективными. Наиболее классическая — пропорциональная модель

риска Кокса [7], описанная в ее более современном изложении в книге [8]. Модель Кокса опирается на предположение о том, что функция риска декомпозируется в независимые произведения, первое зависит только от времени экспозиции, второе — только от параметров актива. Далее строятся два независимых предиктора для функции максимального правдоподобия: для срока и для параметров актива отдельно, что облегчает задачу оценивания.

Третий подход основан на конечном числе состояний (рейтинговых разрядов) заемщика — и моделируется матрица переходов между ними. В течение непрерывной временной цепи Маркова матрица миграции за период времени между датами 0 и  $t$  получается путем возведения в степень генерирующей матрицы [9]. Генерирующая матрица является квадратной по числу состояний  $K \times K$  такой, что матрица миграций на периоде  $(0, t) P(0; t) = \exp(Gt)$ . Произведение  $Gt$  в гомогенном по времени случае является произведением матрицы на скалярное число, а экспоненциальная функция — конечная сумма:

$$\exp(Gt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot G^k, \quad (2)$$

или  $P(0, t) = \exp\left(\int_0^t G(t) dt\right)$  в негомогенном случае.

Где генерирующая функция  $G$  обладает свойствами  $G_{(i,j)} \geq 0, i \neq j$  и

$$G_{(i,i)} = -\sum_{i \neq j} G_{(i,j)}.$$

С помощью фиксации частоты переходов в разные состояния на разных промежутках времени методом максимального подобия строится оценка компонент генерирующей матрицы, а затем и компонент матрицы переходов с учетом макроэкономических параметров [10, 11].

Смешанным третьим и четвертым подходом является подход к поиску негомогенной во времени генерирующей матрицы  $G(t)$  с

использованием фитирующей матрицы  $\varphi(t)$ , являющейся диагональной, так, что

$$G(t) = G \cdot \varphi(t), \quad \varphi_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ \varphi_{\alpha,\beta}(t), & i = j \end{cases}$$

$$\varphi_{\alpha,\beta}(t) = \frac{(1 - e^{-\alpha t}) \cdot t^{\beta-1}}{1 - e^{-\alpha}} \quad [12].$$

Параметры  $\alpha, \beta$  выбираются путем минимизации метрики приближения к наблюдениям кумулятивной вероятности дефолта, соответствующим различным рейтинг-классам рейтинговых агентств Fitch и Standard&Poors. Двухпараметрический класс фитирующих функций затем используется для построения матрицы миграций для произвольного срока  $t$  по формуле (2). Метод нашел практическое применение для расчета вероятности дефолта до конца срока сделок для корпоративных облигаций Болгарии [13] в рамках задачи резервирования по стандарту IFRS9.

Очевидно, что перечисленные подходы 1–3 имеют существенные недостатки, ограничивающие (но не исключающие) их практическое применение. В первом подходе основной недостаток — в привязанности к структурной модели, которая строится на семействе случайных процессов, близких к виннеровскому, поэтому отклонения от реальной статистики дефолтов в таком подходе ожидаемы и естественны. Второй подход при всей своей адекватной привязке к реальному внутреннему опыту требует достаточно обширной статистики для успешного применения алгоритмов оценивания, но и сами алгоритмы расчета жизненного цикла  $PD$  сложны для реализации и требуют существенных затрат и усилий. Третий подход опирается на конечный набор рейтинговых состояний и требует от банка в рамках подхода внутренних рейтингов статистически безупречной оценки матрицы переходов, а в рамках применения внешней статистики рейтинговых агентств — решения проблемы непрерывности вероятности дефолта, рассчитываемой внутренней моделью и шкалированием внутренней модели на внешнюю. С практической точки зрения сложность реализации экстраполирующей формулы (например, в Excel) также затрудняет

практическое использование этого подхода, особенно если реализовывать требование учета прогноза модельной этой зависимости на основе макрофакторов [14].

Среди подходов, опирающихся на произвольные распределения, была впервые предложена модель дюрации дефолтов. С учетом временной структуры вероятности дефолта делается предположение о том, что кумулятивная вероятность дефолта корпоративных заемщиков может быть описана распределением Вейбулла<sup>4</sup>.

В работе [15] описывается метод расчета корректировки капитала на срок с использованием открытых данных, публикуемых рейтинговыми агентствами. Основой фитирования является трехпараметрическая функция  $PD(t)$ , параметры которой аппроксимируются зависимостью от  $PD(1 \text{ год})$ . Предлагаются аналитические выражения, раскрывающие временную структуру вероятности дефолта с высокой точностью фитирования. Чтобы подтвердить/корректировать рекомендации Базеля II, выполняется сравнение полученных результатов оценки коррекции капитала с Базельской формулой корректировки на срок. Характер представленных зависимостей в основном подтверждает рекомендации корректировки срока, но было обнаружено, что для низких вероятностей дефолта (для высоких оценок рейтинга) и сроков погашения от двух—трех лет может существовать значительная недооценка рискованного капитала.

В рамках требований стандарта IFRS9, касающихся оценки  $PD$  на длительном времени жизни ссуды, следует отметить несколько принципиальных.

1.  $PD$  следует рассчитывать с использованием достаточного размера выборки, то есть оценки должны основываться на достаточно большом размере выборки, чтобы обеспечить значимую количественную оценку и проверку характеристик потерь. Данные об исторических убытках должны охватывать как минимум один полный кредитный цикл.

<sup>4</sup> Распределение будет показано в следующем пункте.

2.  $PD$ , рассчитанные на период жизни кредита, должны быть вычислены с использованием соответствующих методов экстраполяции на консервативной основе. В тех случаях когда методы экстраполяции используются для определения мер  $PD$  на время жизни, они не должны вводить предвзятость в расчет ожидаемых кредитных потерь (Expected credit loss, ECL).
3. Оценочные  $PD$  должны включать в себя прогнозную информацию, в том числе макроэкономические факторы при вычислении  $PD$  жизненного цикла, чтобы гарантировать, что признание потерь не задерживается.
4. Внутренние данные следует использовать при построении моделей  $PD$ , где это возможно без чрезмерных затрат и усилий, и данные должны представлять портфель в будущем.
5. Если используются внешние данные или модели поставщиков, образец внешней калибровки должен быть репрезентативным для внутреннего профиля риска для текущей популяции.

В представленной работе обосновывается наилучшая в пуле фитирующих распределений формула расчета кумулятивного  $PD$ , калиброванная на внешних статистически репрезентативных данных на максимальном историческом периоде 40 и более лет, обеспеченного такими данными. Формула циклозависима и может включать прогнозную информацию, обеспеченную макропрогнозами. Оптимальная область применения подхода — корпоративные заемщики, выборка которых, как правило, исторически не репрезентативна на внутренних данных кредитного портфеля. Предложенная экстраполяция вероятности дефолта, применяемая для расчета резервов на основе ECL, не противоречит требованиям стандарта IFRS 9.

#### **Анализ двухпараметрических моделей жизненного цикла вероятности дефолта на статистике рейтинговых агентств**

Для поиска распределения, которое наиболее близко описывает исследуемые данные, были сопоставлены табличная кумулятивная

вероятность дефолта эмитентов, предоставленная рейтинговыми агентствами, и предполагаемая функция распределения. Поиск параметров для функции распределения производился методом наименьших квадратов.

В качестве метрики эффективности распределения был выбран критерий  $R^2$ :

$$R^2 = 1 - RSS/TSS;$$

$$RSS = \frac{1}{T} \cdot \sum_i \left( \frac{y - \hat{y}}{y} \right)^2;$$

$$TSS = \frac{1}{T} \cdot \sum_i \left( \frac{y - \bar{y}}{y} \right)^2,$$
(3)

где  $y$  — эмпирические данные рейтингового агентства;

$\bar{y}$  — данные о кумулятивной вероятности дефолта для каждого рейтингового разряда, усредненные за 10 лет;

$\hat{y}$  — прогнозное значение вероятности дефолта, предсказанное моделью с оптимальными параметрами;

$T$  — максимальный срок эмпирической последовательности сроков.

Отрицательное значение метрики  $R^2$  будет означать, что наивное приближение средним значением лучше описывает разброс значений, нежели применение распределения. Распределения с отрицательным значением  $R^2$  будут исключены из выбора. Оптимальной спецификацией назовем модель с наибольшим значением  $R^2$  для большинства рейтингов.

Встает вопрос, какого типа распределения следует рассматривать для поставленной задачи? Так возможно было решить задачу при использовании полинома 10-й степени, но подобное решение не было бы оптимальным. В качестве параметрических моделей для интенсивности дефолта советуется применять распределение Вейбулла, лог-логистическое, логнормальное, а также экспоненциальное распределение. Расширенный список потенциально полезных распределений,

которые могут быть использованы в анализе выживаемости, представлен в монографии [16]. Авторы выделяют семейства следующих распределений, среди которых отбираются только двухпараметрические<sup>5</sup>:

### 1) экспоненциальные распределения:

- распределение Вейбулла:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\gamma};$$

- экспоненциальное распределение с параметром асимметрии (*tilt*):

$$F(x) = 1 - \frac{\gamma}{e^{-\lambda x} - (1 - \gamma)} x \geq 0; \gamma, \lambda > 0;$$

### 2) логистические распределения:

- логнормальное распределение:

$$F(x) = N\left(N^{-1}(p) + \frac{\ln(x)}{\sigma}\right) x \geq 0; p \in (0, 1), \sigma > 0$$

где  $N(x)$ ,  $N^{-1}(x)$  — прямое и обратное нормальное распределение соответственно;

- лог-логистическое распределение:

$$F(x) = \frac{1}{1 + (x/\alpha)^{-\beta}};$$

### 3) распределения Гомперца:

- распределение Гомперца:

$$F(x) = 1 - \exp\{-\xi(e^{\lambda x} - 1)\} x \geq 0; \xi, \lambda > 0;$$

- отрицательное распределение Гомперца:

$$F(x) = 1 - \exp\{\xi(e^{\lambda x} - 1)\} x \geq 0; \xi, \lambda > 0.$$

Для решения исследовательской задачи выбора наилучшего распределения были собраны данные о средней кумулятивной вероятности дефолта для корпоративных заемщиков, предоставленные рейтинговыми агентствами Moody's, Standard&Poor's, Fitch. Рейтинговые агентства имеют различный срок работы и разную методологию оценки кредитного качества компаний. Первой

<sup>5</sup> Однопараметрические распределения мы отвергаем, поскольку, очевидно, они не смогут быть эффективной экстраполяцией жизненного цикла PD.

проблемой, возникающей при обработке данных, является наличие большого количества пропусков для инвестиционных рейтингов у агентств S&P и Fitch. Для эмитентов с очень высоким и очень низким кредитным рейтингом собранной статистики недостаточно, потому требуется экспертная оценка, а не статистические выводы. По этой причине логично ограничить анализ для ограниченного пула рейтингов A1—Caa3. Другой особенностью является различный временной горизонт, на котором доступны данные о кумулятивной вероятности дефолта: у агентства Moody's для каких-то рейтингов есть данные на 17, для каких-то — на 20 лет; в агентстве S&P предоставляется информация на 15 лет, в агентстве Fitch — на первые 5 лет и на 10-й год. Поэтому для идентичности области оценки была выбрана область кумулятивных сроков 1—10 лет. Эмпирические данные для оценок были взяты из ежегодных отчетов:

– Moody's<sup>6</sup> — Corporate Default and Recovery Rates, 1920—2015, табл. 35 Exhibit 35 — Average Cumulative Issuer-Weighted Global Default Rates by Alphanumeric Rating, 1983—2015. Диапазон рейтинговых разрядов A1/Caa3 (15 разрядов);

– Standard&Poor's<sup>7</sup> — Default, Transition, and Recovery: 2015 Annual Global Corporate Default Study and Rating Transitions, табл. 26 Global Corporate Average Cumulative Default Rates by Rating Modifier (1981—2015). Диапазон рейтинговых разрядов A+/B- (12 разрядов);

– Fitch<sup>8</sup> — 2015 Transition & Default Studies, табл. Fitch Global Corporate Finance Average Cumulative Default Rates: 1990—2015. Диапазон рейтинговых разрядов A/B- (11 разрядов).

Критерий выбора наилучшего распределения достаточно прост.

Распределение A лучше распределения B, если оценки  $R^2$  у распределения A выше

<sup>6</sup> Moody's. URL: <https://www.moody.com/pages/guidetodefaulttresearch.aspx>

<sup>7</sup> Standard&Poor's. URL: <https://www.capitaliq.com>

<sup>8</sup> Fitch. URL: <https://www.fitchratings.com>

оценок  $R^2$  у распределения В на преобладающем количестве рейтингов.

Эмпирический анализ  $R^2$  для оптимальных значений параметров распределений в смысле той-же метрики  $R^2$  показал результат, представленный в табл. 1–3.

Результатом представленного эмпирического анализа является вывод о том, что логнормальное распределение является наиболее адекватным для описания срочной структуры вероятности дефолта в сегменте корпоративных финансов среди предложенного набора двухпараметрических семейств распределений.

### Стационарные параметры логнормального распределения срочной структуры вероятности дефолта на статистике Moody's (1983–2016)

Логнормальная структура временной зависимости  $PD$  имеет вид:

$$PD(t, p, \sigma) = N\left(N^{-1}(p) + \frac{\ln(t)}{\sigma}\right),$$

который имеет очевидную экономическую интерпретацию параметров, а именно:

- $PD(1, p, \sigma) = p$ , то есть параметр  $p$  является вероятностью дефолта на годовом интервале;
- параметр  $\sigma$  отвечает за «крутизну» срочной кривой  $PD(t)$  — чем  $\sigma$  больше, тем более пологая кривая и зависимость от срока ослабляется.

Логнормальное распределение обладает свойством экстремума безусловной интенсивности дефолта  $\rho(t, p, \sigma) = \frac{d}{dt} PD(t, p, \sigma)$ ,

который проявляется на сроках  $T_{max} = \exp(-\sigma \cdot N^{-1}(p) - \sigma^2)$ .

На сроках сделок  $t > T_{max}$  интенсивность выхода в дефолт убывает, что является экономически не противоречивым, поскольку основная интенсивность дефолтов более вероятна на раннем историческом участке, чем на позднем. Среднее время до дефолта,

являющееся по определению взвешенным по  $\rho$ :

$$T = \int_0^{\infty} t \rho(t) dt = \exp\left(-\sigma \cdot N^{-1}(p) + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Очевидно, что с увеличением  $p$  падают срок максимальной интенсивности и среднее время до дефолта.

Для оценки величин и их свойств, а именно:

- численного значения  $\sigma$ ;
- зависимости  $p$  от рейтингового разряда (будем обозначать в дальнейшем  $\langle PD1 \rangle$ );
- сравнения этого значения с эмпирическим  $PD1$  (статистическая вероятность дефолта разряда на сроке 1 год);
- проверки гипотезы о зависимости  $\sigma$  от  $p$  в усредненном историческом интервале.

Обратимся к статистическим данным Moody's. Данные берутся из отчета Moody's — Corporate Default and Recovery Rates, 1920–2016, табл. 35 Average Cumulative Issuer-Weighted Global Default Rates by Alphanumeric Rating, 1983–2016. Рейтинги A1/Caa3 (15 разрядов), диапазон сроков 1, 2, ...20 лет.

Значение  $\sigma$  при котором сумма квадратов отклонений (3) минимальна принимает значение  $\sigma = 1,765$ . Оптимизация проводится в два шага — сначала находятся оптимальные значения  $\langle PD1_{Rating}(\sigma) \rangle$ , в смысле минимума квадратов относительных отклонений для каждого разряда отдельно, затем значение  $\sigma$ , минимизирующее всю сумму квадратов отклонений по всем разрядам. Результаты представлены в табл. 4.

Из табл. 4 видно, что модельные значения среднегодовой вероятности дефолта  $\langle PD \rangle - 1$  год не значительно отличаются от эмпирических значений, измеренных на исторических данных, однако в целом высокий уровень качества интерполяции (фитирования) обеспечивается высоким значением  $R^2$  (99+%, кроме Caa3). На рис. 1 представлена иллюстрация качества экстраполяции на выборке из трех

зависимостей срочной структуры  $PD$  от разрядов.

Следующим шагом будет проверка гипотезы наличия/отсутствия монотонной зависимости значений  $\sigma(p)$ . То есть для каждого разряда находится значение оптимального  $\sigma_{Rating}$  и проверяется гипотеза о наличии монотонной связи через оценку значения ранговой корреляции Спирмена<sup>9</sup> между рейтингом и значением  $\sigma_{Rating}$ . Значения  $\sigma_{Rating}$  представлены на рис. 2.

Ранговая корреляция Спирмена дает значение  $R_{xy} = -0,1$ . Статистика проверки гипотезы о зависимости между величинами определяется по формуле:

$$t = \frac{R_{xy} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{xy}^2}} = 0,375, \quad (4)$$

которая подчиняется  $t$ -статистике (распределение Стьюдента) с  $n-2$  степенями свободы, где  $n=15$  (количество разрядов). Критическое значение  $t$ , при котором верна нулевая гипотеза (отсутствие зависимости) с уровнем достоверности 90% –  $t_{крит.}(H_0)=0,13$ . Критическое значение  $t$ , при котором зависимость присутствует с тем же уровнем достоверности – 90% –  $t_{крит.}(H_1)=1,78$ . Это значит, что ни одна из гипотез не может быть принята на уровне 90%. Принятие гипотезы об отсутствии зависимости возможно на уровне 70%, но такого уровня достоверности мало. Следовательно, нет достоверных данных для нахождения зависимости  $\sigma(p)$ , а значит,  $\sigma(p)=const$  – вполне оправданная модель по крайней мере на усредненных по историческим периодам данных, то есть в смысле ТТС.

### Модель жизненного цикла $PD$ с учетом текущего экономического цикла

Эмпирический анализ РИТ-зависимости параметра логнормального распределения от экономического цикла проводится на исторических данных Moody's, представленных в том же отчете Corporate

<sup>9</sup> См., напр.: Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. СПб.: Речь, 2004. 392 с.

Default and Recovery Rates, 1920–2016, но в табл. 41 Cumulative Issuer-Weighted Default Rates by Annual Cohort, 1970–2016. В этой таблице собраны годовые данные срочной структуры  $PD$  по консолидированным рейтинговым разрядам {Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa-C}, в том числе усредненные по классу «SG» (Speculative-grade, спекулятивные разряды) с 1970 по 2016 г. Для исследования циклического поведения параметра ограничимся разрядами с достаточной статистикой дефолтов {Baa, Ba, B, Caa-C}, а в качестве ведущего показателя цикла выбирается усредненный  $PD1$ -год из класса «SG» той же таблицы. Исторический диапазон измерений срочной структуры  $PD$  будет ограничен 2013 г., для которого имеется четыре годовые точки измерений при максимуме 20 (максимальное число измерений наблюдается начиная с 1997 г. и ранее), то есть количество годовых измерений равно 44.

Вычисление оптимального годового значения  $\sigma$  (год) производится по тому же алгоритму, что и в предыдущем пункте, но для меньшего числа рейтинговых разрядов (от разряда не зависит, разрядов 4). После измерения ряда  $\sigma$  (год) проводится статистический тест проверки гипотезы о наличии ранговой корреляции Спирмена между последовательностями из 44 значений  $PD1$ (год) и  $\sigma$  (год). Ранговая корреляция Спирмена дает положительное значение  $R_{xy}=0,6$ , а значение  $t$ -статистики 4,84 оказывается очень высоким, что гарантирует принятие гипотезы о наличии положительной монотонной связи на уровне достоверности выше 99%.

Циклозависимая модель  $\sigma$  (год) строится по линейной формуле:

$$\hat{\sigma}(\text{год}) = \bar{\sigma} + \beta \cdot \left( \frac{PD1(\text{год}) - (\overline{PD1})}{\overline{PD1}} \right). \quad (5)$$

где  $(\overline{PD1})$  – среднее значение  $PD1$ (год) (равно 3,8% согласно статистике наблюдений Moody's для класса SG), то есть это  $PD$  ТТС для наблюдений Moody's;



$\bar{\sigma}, \beta$  — параметры, вычисляемые из условий глобального минимума

$$RSS = \sum_{год} \frac{1}{T} \cdot \sum_t \left( \frac{y - \hat{y}}{y} \right)^2$$

на всем периоде наблюдений 1970–2013 (44 точки). Поиск оптимума дает значения  $\bar{\sigma}, \beta$ .  
 $\bar{\sigma} = 1,552; \beta = 0,412$ .

На рис. 3 представлены результат сопоставления эмпирических  $\sigma$  (год) и модельных  $\hat{\sigma}$  (год) параметров. Видно, что в моменты достижения критических значений среднегодовых вероятностей дефолта значения  $\sigma$  увеличиваются, допуская более пологую срочную структуру вероятности дефолта в будущем.

Прямая линейная регрессия циклозависимых годовых вероятностей дефолта  $PD1$ (год) на значения ряда оптимальных  $\sigma$  (год) по модели (5) дает регрессионные коэффициенты и их доверительные интервалы, представленные в табл. 5.

Оптимальные параметры близки к регрессионным с учетом доверительного интервала, но именно они являются предпочтительными с точки зрения практического применения, поскольку получены в результате прямой минимизации ошибок (3) с учетом нелинейности логнормального распределения для срочной структуры вероятности дефолта.

## Заключение

На консолидированных эмпирических данных рейтинговых агентств для корпоративного сектора обоснована двухпараметрическая формула срочной структуры вероятности дефолта, не противоречащая требованиям международного стандарта IFRS 9 для корпоративного сектора заемщиков, в котором недостаточно собственных внутренних данных для построения внутренней модели «Lifetime PD» либо построение требует чрезмерных затрат и усилий. Для применения формулы достаточно рассчитать среднегодовую вероятность дефолта компании  $PD1$  по внутренней модели, калиброванной на среднесекторное  $PD_{PIT}$ , учитывающей

макроэкономический прогноз по сектору. Формула основана на логнормальном семействе распределений временной структуры зависимости  $PD(T)$  для срока экспозиции (срока сделки)  $T > 1$  год:

$$PD(T) = N \left( N^{-1}(PD1) + \frac{\ln(T)}{\sigma(PD_{PIT}, PD_{TTC})} \right);$$

$$\begin{aligned} \sigma(PD_{PIT}, PD_{TTC}) &= \\ &= 1,552 + 0,412 \cdot \left( \frac{PD_{PIT} - PD_{TTC}}{PD_{TTC}} \right). \end{aligned}$$

Методика оценки  $PD_{PIT}, PD_{TTC}$  в работе не приводится — это тема отдельного рассмотрения. При  $T < 1$  год рекомендуется применение общеизвестной формулы экстраполяции  $PD1$  на срок менее года  $PD(T) = 1 - (1 - PD1)^T$ .

Вероятность дефолта  $PD1$  вычисляется на основе калибровки рейтинга или рейтингового балла, полученного на базе внутренней модели. Технику калибровки и схему построения рейтинговой модели можно почерпнуть, например, из монографии<sup>10</sup>. Рейтинговая модель, построенная по финансовым показателям корпоративных компаний, предложена, например, в работе [17].

Областью практического и теоретического применения полученного результата являются:

- расчет ставки резервов для кредитных активов, условия по которым согласуются с основным механизмом кредитования (тест SPPI<sup>11</sup>) для второй стадии обесценения, согласно классификации стандарта IFRS 9;
- внутренняя самостоятельная оценка требований к экономическому капиталу по сделке с учетом срока;
- оценка минимальной (безубыточной) ставки кредитования с учетом риска и срока сделки;
- оптимизация срока сделки и другие возможные приложения.

<sup>10</sup> Помазанов М.В. Управление кредитным риском в банке: подход внутренних рейтингов (ПВР). М.: Юрайт, 2016. 265 с.

<sup>11</sup> Подробнее в Международном стандарте финансовой отчетности (IFRS) 9, 2013.

**Таблица 1**  
**Выбор лучшего распределения на данных Moody's**

**Table 1**  
**Choosing the best fitting distribution, using the Moody's data**

Рейтинг	Max R-sq	Вейбулла	Экспоненциальное с параметром асимметрии	Логнормальное	Лог-логистическое	Гомперца	Отрицательное Гомперца
A1	Логнормальное	0,9959	0,9906	0,999	0,996	0,9906	0,9827
A2	Лог-логистическое	1	0,9957	0,9994	1	0,9957	0,9642
A3	Логнормальное	0,9997	0,9947	0,9998	0,9997	0,9946	0,9717
Vaa1	Логнормальное	0,9959	0,9937	0,9991	0,9961	0,9936	0,9919
Vaa2	Лог-логистическое	0,9997	0,9971	0,9995	0,9998	0,9971	0,987
Vaa3	Лог-логистическое	1	0,9979	0,9986	1	0,9978	0,9861
Va1	Логнормальное	0,9925	0,9882	0,9984	0,9935	0,9881	0,9851
Va2	Логнормальное	0,9969	0,9948	0,9999	0,9975	0,9948	0,9922
Va3	Логнормальное	0,9952	0,9916	0,9999	0,9971	0,9913	0,9872
V1	Логнормальное	0,9969	0,994	0,9999	0,9988	0,9937	0,9897
V2	Логнормальное	0,9913	0,9919	0,9992	0,9952	0,9957	0,992
V3	Логнормальное	0,9949	0,996	0,9998	0,9984	0,9986	0,9962
Saa1	Логнормальное	0,9848	0,9946	0,9964	0,991	0,9959	0,9914
Saa2	Экспоненциальное с параметром асимметрии	0,9981	1	0,9994	1	0,9823	0,9999
Saa3	Отрицательное Гомперца	0,9844	0,9578	0,9948	0,9934	0,8006	0,9992

*Источник:* авторская разработка

*Source:* Authoring

**Таблица 2****Выбор лучшего распределения на данных S&P****Table 2****Choosing the best fitting distribution, using the S&P data**

Рейтинг	Max R-sq	Вейбулла	Экспоненциальное с параметром асимметрии	Логнормальное	Лог-логистическое	Гомперца	Отрицательное Гомперца
A+	Логнормальное	0,9991	0,996	0,9992	0,9991	0,996	0,9828
A	Вейбулла	0,9994	0,999	0,9971	0,9994	0,999	0,9811
A-	Лог-логистическое	0,9998	0,9978	0,9988	0,9998	0,9978	0,9872
BBB+	Логнормальное	0,9983	0,9958	0,9999	0,9984	0,9957	0,991
BBB	Лог-логистическое	0,9997	0,998	0,9994	0,9998	0,998	0,9925
BBB-	Логнормальное	0,9924	0,9902	0,9979	0,993	0,9906	0,99
BB+	Логнормальное	0,9925	0,9904	0,9982	0,9933	0,9909	0,9904
BB	Логнормальное	0,9866	0,9869	0,9955	0,9883	0,9894	0,9854
BB-	Логнормальное	0,9895	0,989	0,9976	0,9917	0,992	0,989
B+	Exponential	0,979	0,9947	0,9916	0,9831	0,9951	0,9879
B	Отрицательное Гомперца	0,9662	0,9676	0,9812	0,9723	0,943	0,9937
B-	Отрицательное Гомперца	0,968	0,9301	0,9825	0,9753	0,8715	0,998

Источник: авторская разработка

Source: Authoring

**Таблица 3****Выбор лучшего распределения на данных Fitch****Table 3****Choosing the best fitting distribution, using the Fitch data**

Рейтинг	Max R-sq	Вейбулла	Экспоненциальное с параметром асимметрии	Логнормальное	Лог-логистическое	Гомперца	Отрицательное Гомперца
A	Логнормальное	0,993	0,9823	0,9981	0,9932	0,9823	0,9543
A-	Гомперца	0,9701	0,9902	0,9523	0,9697	0,9903	0,953
BBB+	Логнормальное	0,9926	0,9855	0,9954	0,9928	0,9855	0,9663
BBB	Логнормальное	0,9831	0,9712	0,9931	0,9837	0,9712	0,9527
BBB-	Логнормальное	0,9989	0,9939	0,9994	0,9991	0,9938	0,9742
BB+	Гомперца	0,9527	0,9864	0,9731	0,9557	0,988	0,9665
BB	Логнормальное	0,9786	0,9762	0,9928	0,981	0,9793	0,9761
BB-	Отрицательное Гомперца	0,9864	0,9583	0,9953	0,9878	0,9489	0,9995
B-	Экспоненциальное с параметром асимметрии	0,86	0,9785	0,8909	0,8651	0,9777	0,9204
B	Экспоненциальное с параметром асимметрии	0,9259	0,9812	0,9528	0,9323	0,9747	0,9622
B-	Отрицательное Гомперца	0,8429	0,3564	0,8639	0,8465	0,297	0,9816

Источник: авторская разработка

Source: Authoring

**Таблица 4**

**Значения оптимальных параметров логнормального распределения, фитирующего историческую зависимость вероятности дефолта от срока, данные Moody's**

**Table 4**

**Values of optimal parameters of lognormal distribution, fitting the historical dependence of default probability on the term: The Moody's data**

Рейтинг	PD-1 год, %	<PD>-1 год, %	R-square, %	Средний период до дефолта, лет	Срок до максимума интенсивности PD, лет
A1	0,07	0,04	99,92	1 780	16,6
A2	0,05	0,05	99,99	1 567	14,6
A3	0,06	0,05	100	1 552	14,5
Baa1	0,14	0,07	99,88	1 355	12,7
Baa2	0,18	0,11	99,97	1 040	9,7
Baa3	0,26	0,19	99,97	791	7,4
Ba1	0,47	0,53	99,99	433	4
Ba2	0,77	0,69	99,98	367	3,4
Ba3	1,47	2,02	99,87	177	1,7
B1	2,16	2,96	99,82	133	1,2
B2	3,21	3,97	99,89	105	1
B3	5,36	5,87	99,67	75	0,7
Saa1	5,16	6,13	99,78	72	0,7
Saa2	10,84	11	99,71	41	0,4
Saa3	20,45	15,72	89,65	28	0,3

Источник: авторская разработка

Source: Authoring

**Таблица 5**

**Результат оценки коэффициентов модели (5) на основе линейной регрессии**

**Table 5**

**Model (5) coefficients estimation based on linear regression**

Обозначение	Коэффициенты	Стандартная ошибка	Нижние 95%	Верхние 95%	t-статистика	P-Значение
$\bar{\sigma}$	1,672	0,06	1,55	1,79	29,5	1,08E-29
$\square$	0,542	0,08	0,39	0,7	7,1	1,22E-08

Регрессионная статистика: Множественный R — 73,6%; R-квадрат — 54,2%; Нормированный R-квадрат — 53,1%; Стандартная ошибка — 0,38; Наблюдения — 44.

Источник: авторская разработка

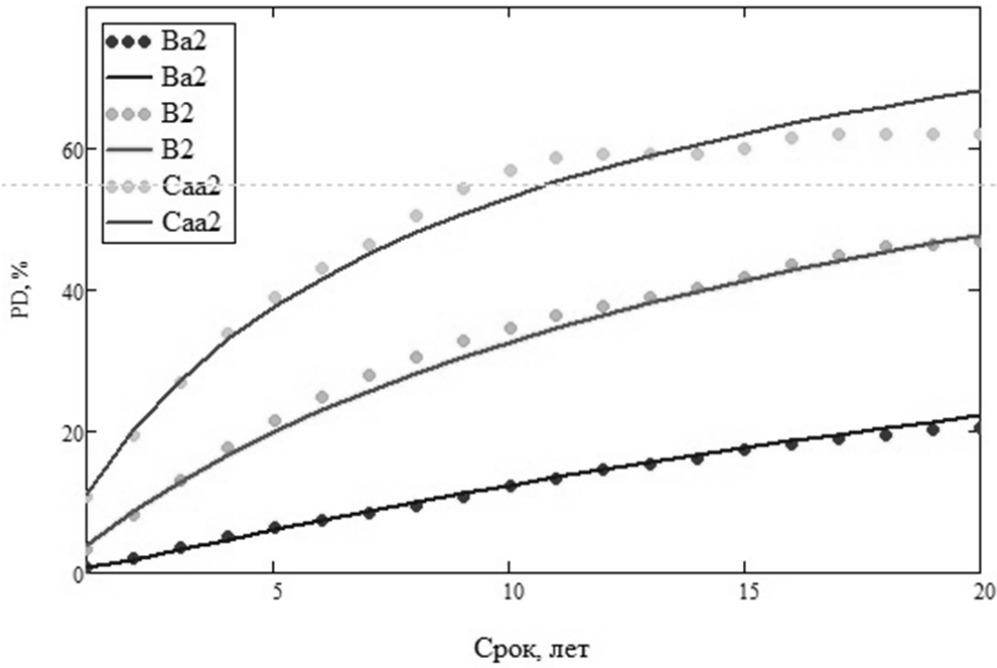
Source: Authoring

**Рисунок 1**

Экстраполированные (сплошные кривые) и наблюдаемые значения вероятности дефолта для разных сроков и трех разрядов рейтинга Moody's при постоянном оптимальном значении  $\sigma$

**Figure 1**

Extrapolated (solid curves) and observed values of default probability for different terms and the three categories of the Moody's rating at constant optimum value  $\sigma$

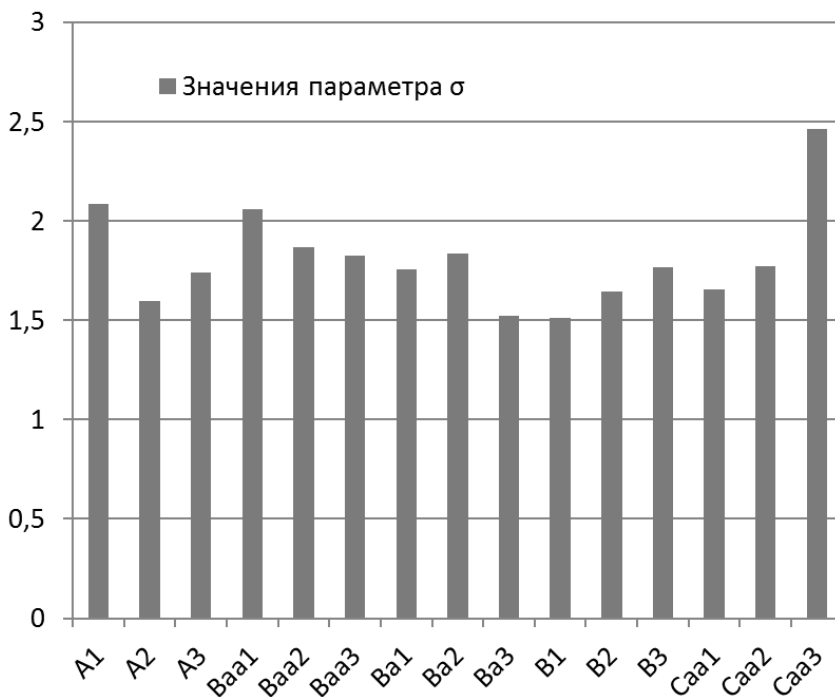


Источник: авторская разработка

Source: Authoring

**Рисунок 2**  
**Значения  $\sigma$  (Rating) для разрядов рейтинговой шкалы Moody's**

**Figure 2**  
**The values of  $\sigma$  (Rating) for the Moody's rating scale category**

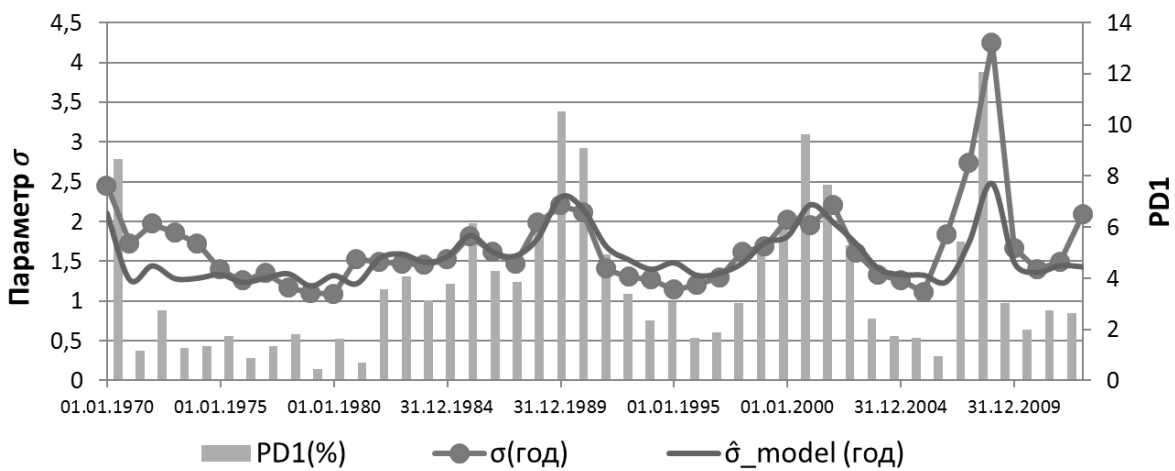


Источник: авторская разработка

Source: Authoring

**Рисунок 3**  
**Временные ряды эмпирических и модельных значений параметров  $\sigma$  логнормального распределения (данные Moody's 1970–2013), а также значения вероятностей дефолта за срок — год**

**Figure 3**  
**The time series of empirical and model values of the lognormal distribution parameters  $\sigma$  (Moody's data, 1970–2013), and the year-term default probabilities**



Источник: авторская разработка

Source: Authoring

**Список литературы**

1. Merton R.C. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, 1974, vol. 29, iss. 2, pp. 449–470.  
URL: <https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/1874/SWP-0684-14514372.pdf>
2. Vasicek O. Loan Portfolio Value. *Risk*, 2002, December, pp. 160–162.
3. Gürtler M., Heithecker D. Multi-Period Defaults and Maturity Effects on Economic Capital in a Ratings-based Default-mode Model. *Working Papers Technische Universität Braunschweig, Institute of Finance*, 2005, no. FW19V2.  
URL: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/55248/1/684837757.pdf>
4. Fisher E., Heinkel R., Zechner J. Dynamic Capital Structure Choice: Theory and Tests. *The Journal of Finance*, 1989, vol. 44, no. 1, pp. 19–40. URL: <https://doi.org/10.2307/2328273>
5. Duffie D., Lando D. Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information. *Econometrica*, 2001, vol. 69, iss. 3, pp. 633–664. URL: <https://doi.org/10.1111/1468-0262.00208>
6. Kiefer N.M., Larson C.E. Counting Processes for Retail Default Modeling. *Journal of Credit Risk*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 45–72. URL: [http://pure.au.dk/ws/files/86346097/rp15\\_17.pdf](http://pure.au.dk/ws/files/86346097/rp15_17.pdf)
7. Cox D.R. Regression Models and Life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1972, vol. 34, no. 2, pp. 187–220.  
URL: [http://www.stat.cmu.edu/~ryantibs/journalclub/cox\\_1972.pdf](http://www.stat.cmu.edu/~ryantibs/journalclub/cox_1972.pdf)
8. Breeden J. Reinventing Retail Lending Analytics – 2nd Impression – Forecasting, Stress Testing, Capital and Scoring for a World of Crises. London, Risk Books Publ., 2010, 433 p.
9. Israel R.B., Rosenthal J.S., Wei J.Z. Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices, with Applications to Credit Ratings. *Mathematical Finance*, 2001, vol. 11, iss. 2, pp. 245–265. URL: <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00114>
10. Brunel V., Roger B. Le Risque de Credit: Des Modeles au Pilotage des Banques. *Economica*, 2014.
11. Brunel V. Loan Classification under IFRS 9. *Risk*, 2016, May, pp. 77–80.
12. Bluhm C., Overbeck L. Calibration of PD Term Structures: To Be Markov or not to Be. *Risk*, 2007, vol. 20, no. 11, pp. 98–103.  
URL: [http://www.christian-bluhm.net/Personal/Papers\\_files/nhctmc.pdf](http://www.christian-bluhm.net/Personal/Papers_files/nhctmc.pdf)
13. Kristof T., Virag M. Lifetime Probability of Default Modeling for Hungarian Corporate Debt Instruments. URL: [http://www.academia.edu/33180853/Lifetime\\_probability\\_of\\_default\\_modeling\\_for\\_Hungarian\\_corporate\\_debt\\_instruments](http://www.academia.edu/33180853/Lifetime_probability_of_default_modeling_for_Hungarian_corporate_debt_instruments)
14. Vaněk T., Hampel D. The Probability of Default Under IFRS 9: Multi-period Estimation and Macroeconomic Forecast. *Acta Univ. Agric. Silvic. Mendelianae Brun*, 2017, vol. 65, iss. 2, pp. 759–776. URL: <https://doi.org/10.11118/actaun201765020759>
15. Petrov D., Pomazanov M. Validation Method of Maturity Adjustment Formula for Basel II Capital Requirement. *The Journal of Risk Model Validation, Risk Journals*, 2009, vol. 3, iss. 3, pp. 81–97.
16. Marshall A.W., Olkin I. Life Distributions. New York, Springer Publ., 2007, 783 p.

17. Карминский А. Модели корпоративных рейтингов для развивающихся рынков // Корпоративные финансы. 2011. Т. 5. № 3. С. 19—29.  
URL: <https://mgimo.ru/upload/iblock/bdb/bdbcfeb400d0122fe321dffeae42cda.pdf>

### **Информация о конфликте интересов**

Я, автор данной статьи, со всей ответственностью заявляю о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи. Настоящее заявление относится к проведению научной работы, сбору и обработке данных, написанию и подготовке статьи, принятию решения о публикации рукописи.



## A TWO-PARAMETER FORMULA OF DEFAULT PROBABILITY TERM STRUCTURE

Mikhail V. POMAZANOV

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation  
m.pomazanov@hse.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-3069-1511>**Article history:**Received 14 June 2018  
Received in revised form  
2 July 2018  
Accepted 17 July 2018  
Available online  
29 August 2018**Abstract****Importance** This paper describes the existing methods of default probability term structure modeling and the disadvantages that limit their application.**Objectives** The paper aims to give an effective offer to lenders on the construction of a method of estimating the probability of default of a corporate borrower, taking into account the changed term to the end of the credit transaction, not contradicting the new IFRS 9 standard.**Methods** For the study, I used an economic and statistical analysis, and optimization of parameters of special kind of distributions on statistical data of rating agencies.**Results** Using the consolidated empirical data of rating agencies, I attribute a two-parameter formula of default probability term structure, which does not contradict the requirements of the international standard IFRS 9 for the corporate borrowers sector, that does not have enough internal data to build its own *Lifetime PD* internal model.**Conclusions and Relevance** The presented study substantiates the formula of calculation of a default probability term structure in the best fitting distribution pool. It is calibrated on external empirical and statistical data of rating agencies, including a 44-year period. The formula is explicit and does not require complex computations. The results obtained can be used to calculate the rate of reserves for credit assets, estimate the minimum (break-even) lending rate taking into account the risk and the term of the transaction, optimize the term of the transaction, and for other possible applications.**JEL classification:** C58, G17, G28**Keywords:** credit risk, IFRS reserves, default probability, default time structure, IFRS 9

© Publishing house FINANCE and CREDIT, 2018

**Please cite this article as:** Pomazanov M.V. A Two-Parameter Formula of Default Probability Term Structure. *Finance and Credit*, 2018, vol. 24, iss. 8, pp. 1920–1937.  
<https://doi.org/10.24891/fc.24.8.1920>**Acknowledgments**

I express my gratitude to N.A. MORENKO, Graduate of the NRU HSE, for the given data from the Master's thesis.

**References**

1. Merton R.C. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, 1974, vol. 29, iss. 2, pp. 449–470.  
URL: <https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/1874/SWP-0684-14514372.pdf>
2. Vasicek O. Loan Portfolio Value. *Risk*, 2002, December, pp. 160–162.
3. Gürtler M., Heithecker D. Multi-Period Defaults and Maturity Effects on Economic Capital in a Ratings-based Default-mode Model. *Working Papers Technische Universität Braunschweig, Institute of Finance*, 2005, no. FW19V2.  
URL: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/55248/1/684837757.pdf>
4. Fisher E., Heinkel R., Zechner J. Dynamic Capital Structure Choice: Theory and Tests. *The Journal of Finance*, 1989, vol. 44, no. 1, pp. 19–40. URL: <https://doi.org/10.2307/2328273>

5. Duffie D., Lando D. Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information. *Econometrica*, 2001, vol. 69, iss. 3, pp. 633–664. URL: <https://doi.org/10.1111/1468-0262.00208>
6. Kiefer N.M., Larson C.E. Counting Processes for Retail Default Modeling. *Journal of Credit Risk*, 2015, vol. 11, iss. 3, pp. 45–72. URL: [http://pure.au.dk/ws/files/86346097/rp15\\_17.pdf](http://pure.au.dk/ws/files/86346097/rp15_17.pdf)
7. Cox D.R. Regression Models and Life-Tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1972, vol. 34, no. 2, pp. 187–220.  
URL: [http://www.stat.cmu.edu/~ryantibs/journalclub/cox\\_1972.pdf](http://www.stat.cmu.edu/~ryantibs/journalclub/cox_1972.pdf)
8. Breeden J. Reinventing Retail Lending Analytics – 2nd Impression – Forecasting, Stress Testing, Capital and Scoring for a World of Crises. London, Risk Books, 2010, 433 p.
9. Israel R.B., Rosenthal J.S., Wei J.Z. Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices, with Applications to Credit Ratings. *Mathematical Finance*, 2001, vol. 11, iss. 2, pp. 245–265. URL: <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00114>
10. Brunel V., Roger B. Le Risque de Credit: Des Modeles au Pilotage des Banques. *Economica*, 2014.
11. Brunel V. Loan Classification under IFRS 9. *Risk*, 2016, May, pp. 77–80.
12. Bluhm C., Overbeck L. Calibration of PD Term Structures: To Be Markov or Not To Be. *Risk*, 2007, vol. 20, no. 11, pp. 98–103.  
URL: [http://www.christian-bluhm.net/Personal/Papers\\_files/nhctmc.pdf](http://www.christian-bluhm.net/Personal/Papers_files/nhctmc.pdf)
13. Kristof T., Virag M. Lifetime Probability of Default Modeling for Hungarian Corporate Debt Instruments. URL: [http://www.academia.edu/33180853/Lifetime\\_probability\\_of\\_default\\_modeling\\_for\\_Hungarian\\_corporate\\_debt\\_instruments](http://www.academia.edu/33180853/Lifetime_probability_of_default_modeling_for_Hungarian_corporate_debt_instruments)
14. Vaněk T., Hampel D. The Probability of Default under IFRS 9: Multi-period Estimation and Macroeconomic Forecast. *Acta Univ. Agric. Silvic. Mendelianae Brun*, 2017, vol. 65, iss. 2, pp. 759–776. URL: <https://doi.org/10.11118/actaun201765020759>
15. Petrov D., Pomazanov M. Validation Method of Maturity Adjustment Formula for Basel II Capital Requirement. *The Journal of Risk Model Validation, Risk Journals*, 2009, vol. 3, iss. 3, pp. 81–97.
16. Marshall A.W., Olkin I. Life Distributions. New York, Springer, 2007, 783 p.
17. Karminskii A. [Corporate rating models for emerging markets]. *Korporativnye finansy = Journal of Corporate Finance Research*, 2011, vol. 5, iss. 3, pp. 19–29. (In Russ.)  
URL: <https://mgimo.ru/upload/iblock/bdb/bdbcfefb400d0122fe321dffeae42cda.pdf>

### **Conflict-of-interest notification**

I, the author of this article, bindingly and explicitly declare of the partial and total lack of actual or potential conflict of interest with any other third party whatsoever, which may arise as a result of the publication of this article. This statement relates to the study, data collection and interpretation, writing and preparation of the article, and the decision to submit the manuscript for publication.