А. В. Омельченко, О связи производных на сильном разрыве, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2002, том 42, номер 8, 1246–1257

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2002, том 42, № 8, с. 1246–1257

УДК 519.6:531.33

О СВЯЗИ ПРОИЗВОДНЫХ НА СИЛЬНОМ РАЗРЫВЕ

© 2002 г. А. В. Омельченко

(199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7/9, СПбГУ, матем.-механ. ф-т)

Поступила в редакцию 05.04.01 г.

Выводится связь производных на сильном разрыве для общего случая системы квазилинейных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными. Отдельно исследуются случаи неособой и особой матриц системы. Для случая неособой матрицы системы, гиперболической в узком смысле, дается решение задачи взаимодействия сильного и слабого разрывов. В качестве примера использования полученных результатов рассматриваются системы, описывающие движение с ускорением нестационарной ударной волны по одномерному вихревому неизобарическому потоку совершенного невязкого газа. Библ. 16.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость получения соотношений. Связывающих такие характеристики сильных разрывов, как кривизна скачка уплотнения, ускорение ударной волны, с производными газодинамических переменных по обе стороны от сильного разрыва, была обусловлена в основном двумя задачами: изучением течений за искривленными ударными волнами и расчетом взаимодействия сильного и слабого разрывов. Первые результаты в этой области, полученные в [1] и [2] еще в конце 40-х годов, касались частного случая плоского или осесимметричного стационарного искривленного скачка уплотнения. Несколько позднее эти результаты были обобщены Лайтхиллом [3] и В.В. Русановым [4] на случай задач с большей размерностью. Наиболее удобные для практики соотношения для случая плоского или осесимметричного искривленного скачка уплотнения были получены в работах В.Н. Ускова (см., например, монографию [5]). Однако большинство соотношений, связывающих производные по обе стороны от сильного разрыва, имело довольно громоздкий вид. Как следствие задачи интерференции сильных разрывов со слабыми в газовой динамике либо решались методами малых возмущений (см., например, классическую работу [6], а также серию работ [7]–[11]), либо получались как частный случай задач интерференции сильных разрывов (см. работы [5], [12], [13]).

Одновременно с решением конкретных газодинамических задач в 50–60 годах появился целый ряд работ, обобщающих полученные результаты на случай произвольных систем квазилинейных уравнений. В 1968 году вышла монография [14], в которой достаточно полно освещался ряд вопросов, связанных с классическими и обобщенными решениями уравнений газовой динамики и более общих квазилинейных систем. Однако проблема связи производных по обе стороны от сильного разрыва с геометрическими или динамическими характеристиками сильного разрыва, а также тесно связанная с ней проблема взаимодействия сильного и слабого разрывов ни в [14], ни в более поздних работах, посвященных изучению произвольных систем квазилинейных уравнений, остались незатронутыми.

В представленной работе выводится связь производных на сильном разрыве для общего случая системы квазилинейных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными, приводящейся к нормальной форме [14]. Отдельно исследуются случаи неособой и особой матриц системы. Для случая неособой матрицы проводится подробный анализ задачи взаимодействия сильного и слабого разрывов. В качестве примера использования полученных результатов рассматриваются системы, описывающие движение с ускорением нестационарной ударной волны по одномерному вихревому неизобарическому потоку совершенного невязкого газа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными, гиперболическая в некоторой односвязной области Ω переменных (x, t, u) и приводящаяся к нормальной форме:

$$\partial u/\partial t + A\partial u/\partial x = b. \tag{1.1}$$

Здесь $u = u[N]$ – вектор неизвестных функций, N – индексное множество размера $|N| = n$, $A = A[N, N]$ и $b = b[N]$ – известные матрицы и вектор, зависящие от вектора u и двух независимых переменных x и t. Домножая (1.1) слева на левый собственный вектор $L^{(k)}$ матрицы A, получаем эквивалентную (1.1) систему в характеристической форме:

$$L^{(k)}\partial u/\partial t + \lambda_k L^{(k)}\partial u/\partial x = L^{(k)}b, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Здесь λ_k – соответствующее $L^{(k)}$ собственное значение матрицы A. Далее будем считать, что в каждой точке области Ω собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A вещественны и различны, т.е. ограничимся рассмотрением систем, гиперболических в узком смысле [14].

Как известно, при определенных граничных условиях непрерывные решения $u(x, t)$ системы (1.1) отсутствуют. Следуя [14], введем в рассмотрение класс K функций $u(x, t)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) в любой конечной части полуплоскости $t \geq 0$ имеется конечное число линий $x(t)$ разрыва вектор-функции $u(x, t)$; вне этих линий функция $u(x, t)$ непрерывна и обладает непрерывными частными производными;

2) на линиях разрыва $x(t)$ существуют левые $u(x - 0, t) =: u_1$ и правые $u(x + 0, t) =: u_2$ предельные значения.

Вектор-функцию $u(x, t) \in K$ будем называть обобщенным решением системы (1.1), если для произвольного кусочно-гладкого контура и ограниченной им области удовлетворяются некоторые соответствующие (1.1) интегральные законы сохранения [14]. Как показано в [14], из законов сохранения на линии $x(t)$ разрыва следуют так называемые условия Гюгонио

$$D[u] = [\psi(u, x, t)], \quad [u] = u_2 - u_1, \quad D = x'(t), \tag{1.3}$$

связывающие левые и правые предельные значения решения на линии разрыва.

Для обеспечения единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных будем считать, что на линии $x(t)$ разрыва решения $u(x, t) \in K$ системы (1.1) выполнены условия устойчивости, т.е. удовлетворены неравенства (см. [15])

$$\lambda_k(u_1(t), x(t), t) > D > \lambda_k(u_2(t), x(t), t), \quad (\lambda_{k-1}(u_1(t), x(t), t) < D < \lambda_{k+1}(u_2(t), x(t), t). \tag{1.4}$$

Номер k, для которого выполнены условия (1.4), называют индексом разрыва. Далее для определенности будем считать, что индекс разрыва $k = 1$. Условия (1.4) означают, что в любую точку разрыва индекса 1 приходит $n + 1$ приходящая характеристика (по одной характеристике, отвечающей $\lambda_k(u_1(t), x(t), t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и одна характеристика, отвечающая $\lambda_1(u_2(t), x(t), t)$), а выходит $n - 1$ исходящая характеристика (по одной характеристике, отвечающей $\lambda_k(u_2(t), x(t), t)$, $k = 2, 3, \ldots, n$).

Пусть $x = x(t)$ – уравнение линии сильного разрыва функции $u(x, t) \in K$. Введем векторы $\mathbf{V} = \partial u/\partial t$ и $\mathbf{U} = \partial u/\partial x$. На сильном разрыве помимо самих функций рвутся и производные $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$. Основная цель первой части работы – получить из соотношений (1.1) и (1.3) связь частных производных функций u_2 и u_1 на линии разрыва $w(\tau)$.

Рассмотрим теперь линию $x = x(t)$, на которой решение $u(x, t)$ непрерывно, а производные $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ терпят разрыв. Такая линия носит название линии слабого разрыва. Как показано, например, в [14], эта линия обязательно совпадает с одной из характеристик системы (1.2), т.е. существует такое $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $dx/dt = \lambda_k$. По аналогии с сильным разрывом будем назвать ее линией слабого разрыва индекса k.

Вторая часть работы посвящена анализу взаимодействия сильного и слабого разрывов в точке их пересечения. Как было показано выше, в качестве приходящего разрыва может выступать слабый разрыв, совпадающий с характеристикой, отвечающей $\lambda_k(u_1(t), x(t), t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (встречный слабый разрыв индекса k), либо слабый разрыв, совпадающий с характеристикой, отвечающей $\lambda_1(u_2(t), x(t), t)$ (догоняющий слабый разрыв индекса 1). В результате пересечения сильного разрыва индекса 1 с приходящим слабым разрывом индекса k возникает $n - 1$ исходящий разрыв индекса k, $k = 2, 3, \ldots, n$, совпадающий с характеристикой, отвечающей $\lambda_k(u_2(t), x(t), t)$, $k = 2, 3, \ldots, n$ (отраженный слабый разрыв индекса k). Кроме того, скачкообразно изменяется кривизна сильного разрыва. Задача расчета взаимодействия сильного и слабого разрывов заключается в следующем: по заданным соотношениям (1.3) на сильном разрыве и известных величинах разрыва производных $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ на приходящем слабом разрыве определить величину скачка кривизны сильного разрыва, а также величины разрыва производных $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ на исходящих из точки взаимодействия слабых разрывах.

2. СВЯЗЬ ПРОИЗВОДНЫХ НА СИЛЬНОМ РАЗРЫВЕ В СЛУЧАЕ НЕОСОБОЙ МАТРИЦЫ A

Рассмотрим вначале систему (1.1) с матрицей A, все собственные значения которой отличны от нуля. Как следствие, строки этой матрицы линейно независимы и существует обратная к ней матрица A^{-1}.

Пусть $x = x(t)$ – линия сильного разрыва, задаваемая уравнением $x'(t) = D(x, t)$, u_2 и u_1 – значения функции $u(x, t)$ по обе стороны сильного разрыва. Введем в рассмотрение производные функций u_2 и u_1 по t в направлении кривой $x(t)$:

$$du_2/dt = \partial u_2/\partial t + D\partial u_2/\partial x, \quad du_1/dt = \partial u_1/\partial t + D\partial u_1/\partial x. \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Производные функции $u_2(x, t)$ за сильным разрывом линейно выражаются через производную du_2/dt функции u_2 по t в направлении кривой $x(t)$.*

Доказательство. Подставляя в (1.1) вместо u функцию u_2 и используя первое из равенств (2.1), получаем систему $2n$ линейных относительно производных функции $u_2(x, t)$ за сильным разрывом уравнений, решение которой

$$\partial u_2/\partial x = Z(du_2/dt - b_2), \quad \partial u_2/\partial t = Z(Db_2 - A_2du_2/dt), \quad Z = DE - A_2, \tag{2.2}$$

существует, если матрица $DE - A_2$ невырожденна.

Матрица $DE - A$ является вырожденной тогда и только тогда, когда D совпадает с одним из собственных чисел матрицы A. Однако это невозможно в силу условий (1.4). Лемма доказана.

Рассмотрим частный случай соотношений (1.3) на разрыве

$$[u] = \varphi(u_1, [u], D), \tag{2.3}$$

встречающийся в газодинамических задачах.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы* 1, *соотношения* (1.3) *на сильном разрыве имеют вид* (2.3) *и у матрицы $E - \partial\varphi/[u]$ существует обратная. Тогда производные функции $u_2(x, t)$ за сильным разрывом линейно выражаются через производные функции $u_1(x, t)$ до него, а также через производную dD/dt, характеризующую ускорение сильного разрыва.*

Доказательство. Производные функций u_2 и u_1 в направлении сильного разрыва связаны друг с другом очевидным соотношением

$$du_2/dt = du_1/dt + d[u]/dt. \tag{2.4}$$

Используя (2.3), производную $d[u]/dt$ можно представить в виде линейной комбинации векторов du_1/dt, $d[u]/dt$ и величины dD/dt:

$$\frac{d[u]}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial[u]}\frac{d[u]}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial D}\frac{dD}{dt}.$$

Объединяя последние два выражения и пользуясь существованием матрицы $G := (E - \partial\varphi/[u])^{-1}$, получаем

$$\frac{du_2}{dt} = F\frac{du_1}{dt} + G\frac{\partial\varphi}{\partial D}\frac{dD}{dt}, \quad F = E + G\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}. \tag{2.5}$$

Подставляя полученное выражение в (2.2) и используя второе из равенств (2.1), получаем систему соотношений, доказывающих теорему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= Z\left(F\frac{\partial u_1}{\partial t} + DF\frac{\partial u_1}{\partial x} + G\frac{\partial\varphi}{\partial D}\frac{dD}{dt} - b_2\right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= Z\left(Db_2 - A_2F\frac{\partial u_1}{\partial t} - DA_2F\frac{\partial u_1}{\partial x} - A_2G\frac{\partial\varphi}{\partial D}\frac{dD}{dt}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда соотношения (2.6) можно переписать следующим образом:

$$\partial u_2/\partial x = \Phi_b + \Phi_x\partial u_1/\partial x + \Phi_D dD/dt, \quad \partial u_2/\partial t = \Psi_b + \Psi_x\partial u_1/\partial t + \Psi_D dD/dt. \tag{2.7}$$

Доказательство. Действительно, использованием системы (1.1), записанной для $u = u_1$, совместно со вторым из равенств (2.1) позволяет вектор du_1/dt заменить одним из следующих соотношений:

$$du_1/dt = (DE - A_1)\partial u_1/\partial x + b_1, \quad du_1/dt = (E - DA_1^{-1})\partial u_1/\partial t + DA_1^{-1}b_1. \tag{2.8}$$

Подставляя в (2.5) вместо du_1/dt указанные выражения и вводя матрицы

$$\Phi_b = Z(Fb_1 - b_2), \quad \Phi_x = ZF(DE - A_1), \quad \Phi_D = ZG\frac{\partial\varphi}{\partial D},$$

$$\Psi_b = DZ(b_2 - A_2FA_1^{-1}b_1), \quad \Psi_t = -ZA_2F(E - DA_1^{-1}), \quad \Psi_D = -ZA_2G\frac{\partial\varphi}{\partial D},$$

получаем требуемый результат.

Замечание 1. Аналогично рассматриваются и более сложные случаи соотношений (1.3) на сильном разрыве. Так в случае, когда вместо (2.3) на сильном разрыве выполняются соотношения вида

$$[u] = \varphi(u_1, u_2, D),$$

существует матрица $\tilde{G} = (E - \partial\varphi/\partial u_2)^{-1}$ и справедливы условия леммы 1, производные функции $u_2(x, t)$ за сильным разрывом по-прежнему оказываются связанными с производными функции $u_1(x, t)$ до разрыва формулами (2.6), в которых вместо матриц G и F следует использовать матрицы $\tilde{G}$ и $\tilde{F} = \tilde{G}(E + \partial\varphi/\partial u_1)$.

3. СВЯЗЬ ПРОИЗВОДНЫХ НА СИЛЬНОМ РАЗРЫВЕ В СЛУЧАЕ ОСОБОЙ МАТРИЦЫ A

В ряде важных частных случаев специальным выбором системы координат можно добиться понижения ранга матрицы A. Так, переход от декартовой к естественной системе координат в случае сверхзвукового двумерного установившегося течения газа [16] или переход от эйлеровых к лагранжевым координатам в случае неустановившегося одномерного течения газа [14] позволяет понизить ранг этой матрицы до значения $r = 2$. Последнее позволяет несколько упростить полученные в предыдущем разделе соотношения.

Будем считать, что в результате перехода от старой системы координат (x', t') к новой (x, t) функция $u(x, t)$ по-прежнему удовлетворяет системе вида (1.1), а линия сильного разрыва, задававшаяся в старой системе координат уравнением $dx'/dt' = D$, перешла в кривую $w(\tau)$, задаваемую уравнениями

$$dt/d\tau = \zeta, \quad dx/d\tau = \xi.$$

В случае натуральной параметризации кривой $w(\tau)$, когда параметр τ есть длина дуги этой кривой, существуют такие α, β, что $\zeta = \alpha/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\xi = \beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. В случае, когда $\tau = t$, функция $\zeta \equiv 1$. В общем случае $\xi = \xi(x, t, u, D)$ и $\zeta = \zeta(x, t, u, D)$ и потому ξ и ζ могут быть различны по обе стороны разрыва. Как следствие, производные функций u_2 и u_1 по параметру τ в направлении кривой $w(\tau)$ задаются формулами

$$\frac{du_2}{dw} = \left(\frac{du_2}{d\tau}\right)_w = \zeta_2\frac{\partial u_2}{\partial t} + \xi_2\frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{du_1}{dw} = \left(\frac{du_1}{d\tau}\right)_w = \zeta_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + \xi_1\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{3.1}$$

В случае систем, гиперболических в узком смысле слова, понижение ранга матрицы A возможно только на единицу. В данном разделе рассмотрим более общий случай, когда $r = \operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A) < n$, $n = |N|$. При этом по-прежнему будем считать, что условия единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных выполнены.

Неравенство $r < n$ означает, что среди n компонент вектора $\partial u/\partial t$ имеются только r линейно независимых, а оставшиеся $n - r$ компонент однозначно через них выражаются:

$$\frac{\partial u}{\partial t}[N_2] = C[N_2, N_1]\frac{\partial u}{\partial t}[N_1] = \sum_{j \in N_1} C[N_2, j]\frac{\partial u}{\partial t}[j], \quad |N_2| = n - r. \tag{3.2}$$

Следовательно, не имеет смысла искать вектор $(\partial u/\partial t)[N_2]$ с помощью общих соотношений – достаточно с их помощью найти вектор $(\partial u/\partial t)[N_1]$, $|N_1| = r$.

Лемма 2. *Если матрица* $\xi_2 H_2[N_1, N_1] - \xi_2 A_2[N_1, N_1]$, *где*

$$H_2[N_1, N_1] = E[N_1, N_1] - \frac{\zeta_2}{\xi_2} A_2[N_1, N_2] C[N_2, N_1],$$

является невырожденной, то производные $(\partial u_2/\partial t)[N_1]$ *и* $(\partial u_2/\partial x)[N_1]$ *за сильным разрывом линейно выражаются через компоненты производной функции* u_2 *по параметру* τ *в направлении кривой* $w(\tau)$.

Доказательство. Система (1.1), записанная для $u = u_2$, вместе с первым из равенств (3.1) представляет собой линейную систему уравнений относительно частных производных функций u_2. С учетом условия (3.2) эта система может быть переписана в следующем виде:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}[N_1] + A_2[N_1, N_1]\frac{\partial u_2}{\partial x}[N_2] + A_2[N_1, N_2]\frac{\partial u_2}{\partial x}[N_2] = b_2[N_1],$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial w}[N_1] = \zeta_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}[N_1] + \xi_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}[N_1],$$

$$\frac{du_2}{dw}[N_2] = \zeta_2 C[N_2, N_1]\frac{\partial u_2}{\partial t}[N_1] + \xi_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}[N_2].$$

Решая ее, получаем равенства вида

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}[N_1] = Z[N_1, N_1]\left[H_2[N_1, N_1]\frac{du_2}{dw}[N_1] + \frac{\zeta_2}{\xi_2}A_2[N_1, N_2]\frac{du_2}{dw}[N_2] - \zeta_2 b_2[N_1]\right],$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}[N_1] = Z[N_1, N_1]\left[\xi_2 b_2[N_1] - A_2[N_1, N]\frac{du_2}{dw}[N]\right], \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}[N_2] = \frac{1}{\xi_2}\frac{du_2}{dw}[N_2] - \frac{\zeta_2}{\xi_2}C_2[N_2, N_1]\frac{\partial u_2}{\partial t}[N_1],$$

$$Z[N_1, N_1] := (\xi_2 H_2[N_1, N_1] - \zeta_2 A_2[N_1, N_1])^{-1},$$

которые и доказывают лемму.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы* 2, *соотношения* (1.3) *на сильном разрыве имеют вид* (2.3) *и у матрицы* $E - \partial\varphi/\partial[u]$ *существует обратная матрица* G. *Тогда производные функции* $u_2(x, t)$ *за сильным разрывом линейно выражаются через производные* $(\partial u_1/\partial t)[N_1]$, $(\partial u_1/\partial x)[N_2]$ *функции* u_1 *перед разрывом, а также через производную* dD/dw, *характеризующую ускорение сильного разрыва.*

Доказательство. Компоненты производных функций u_2 и u_1 в направлении сильного разрыва связаны друг с другом очевидными соотношениями

$$\frac{du_2}{dw}[M] = \frac{du_1}{dw}[M] + \frac{d[u]}{dw}[M], \quad M = N_1, N_2, N.$$

В общем случае любая компонента $[u][i]$ вектора $[u]$ зависит как от $[u][i]$ и $u_1[i]$, так и от всех остальных компонент векторов $[u]$ и u_1. Следовательно, компоненты производной функции $[u]$ с учетом (2.3) можно представить следующим образом:

$$\frac{d[u]}{dw}[M] = G[M, N]\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}[N, N]\frac{du_1}{dw}[N] + G[M, N]\frac{\partial\varphi}{\partial D}[N]\frac{dD}{dw}.$$

Используя индексную технику, можно записать

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}[N, N]\frac{du_1}{dw}[N] = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}[N, M]\frac{du_1}{dw}[M] + \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}[N, N\backslash M]\frac{du_1}{dw}[N\backslash M].$$

Объединяя последние три выражения и вводя матрицы

$$R[N, N] = G[N, N]\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}[N, N], \quad F_D[N] := G[N, N]\frac{\partial\varphi}{\partial D}[N],$$
$$F[N, N] := E[N, N] + R[N, N],$$

получаем

$$\frac{du_2}{dw}[M] = F[M, M]\frac{du_1}{dw}[M] + R[M, N\backslash M]\frac{du_1}{dw}[N\backslash M] + F_D[M]\frac{dD}{dw}. \tag{3.4}$$

Так как матрица $A_1[N_1, N_1]$ неособая, то из соотношения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}[N_1] + A_1[N_1, N_1]\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_1] + A_1[N_1, N_2]\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_2] = b_1[N_1]$$

с учетом второго из равенств (3.1) можно получить для $(du_1/dw)[N_1]$ следующее выражение:

$$\frac{du_1}{dw}[N_1] = T_t[N_1, N_1]\frac{\partial u_1}{\partial t}[N_1] + T_x[N_1, N_2]\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_2] + T_b[N_1],$$
$$T_t[N_1, N_1] = (\zeta_1 E[N_1, N_1] - \xi_1 A_1^{-1}[N_1, N_1]), \tag{3.5}$$
$$T_x[N_1, N_2] = \xi_1 A_1^{-1}[N_1, N_1]A_1[N_1, N_2], \quad T_b[N_1] = \xi_1 A_1^{-1}[N_1, N_1]b_1[N_1].$$

Производная $(du_1/dw)[N_2]$ с использованием соотношений (3.1) и (3.2) выражается через $(\partial u_1/\partial t)[N_1]$ и $(\partial u_1/\partial x)[N_2]$:

$$\frac{du_1}{dw}[N_2] = \zeta_1 C_1[N_2, N_1]\frac{\partial u_1}{\partial t}[N_1] + \xi_1\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_2]. \tag{3.6}$$

Для завершения доказательства достаточно подставить (3.5) и (3.6) в (3.4), а затем воспользоваться равенствами (3.3).

В практических задачах, как правило, имеется определенная свобода в выборе компонент вектора u, пользуясь которой, можно в ряде случаев существенно упростить соотношения, связывающие производные на сильном разрыве. Рассмотрим, некоторые возможности такого рода упрощений.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2 *и подматрица* $A[N_1, N_2]$ *матрицы* A *системы* (1.1) *тождественно равна нулю. Тогда производные функции* $u_2(x, t)$ *за сильным разрывом можно представить следующим образом:*

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}[N_1] = Z[N_1, N_1]\left(-\zeta_2 b_2[N_1] + \Theta_b[N_1] + F_D[N_1]\frac{dD}{dw} + \Theta_t[N_1, N_1]\frac{\partial u_1}{\partial t}[N_1] + \Theta_x[N_1, N_2]\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_2]\right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}[N_1] = Z[N_1, N_1]\times$$
$$\times\left(\xi_2 b_2[N_1] - A_1[N_1, N_1]\left\{\Theta_b[N_1] + F_D[N_1]\frac{dD}{dw} + \Theta_t[N_1, N_1]\frac{\partial u_1}{\partial t}[N_1] + \Theta_x[N_1, N_2]\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_2]\right\}\right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}[N_2] = -\frac{\zeta_2}{\xi_2}C_2[N_2, N_1]\frac{\partial u_2}{\partial t}[N_1] + \Gamma_b[N_2] + F_D[N_2]\frac{dD}{dw} + \Gamma_t[N_2, N_1]\frac{\partial u_1}{\partial t}[N_1] + \Gamma_x[N_2, N_2]\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_2], \tag{3.7}$$
$$\Theta_x[N_1, N_2] = \xi_1 R[N_1, N_2], \quad \Theta_b[N_1] := F[N_1, N_1]T_b[N_1],$$
$$\Theta_t[N_1, N_1] = F[N_1, N_1]T_t[N_1, N_1] + \zeta_1 R[N_1, N_2]C_1[N_2, N_1],$$
$$\Gamma_x[N_2, N_2] = \frac{\xi_1}{\xi_2}F[N_2, N_2], \quad \Gamma_b[N_2] := \frac{1}{\xi_2}R[N_2, N_1]T_b[N_1],$$

$$\Gamma_t[N_1, N_1] = \frac{1}{\xi_2}R[N_2, N_1]T_t[N_1, N_1] + \frac{\zeta_1}{\xi_2}F[N_2, N_2]C_1[N_2, N_1].$$

Доказательство. Действительно, в этом случае матрица $H_2[N_1, N_1] = E[N_1, N_1]$ и потому формулы (3.3) примут вид

$$\left[\frac{\partial u_2}{\partial x}N_1\right] = Z[N_1, N_1]\left[\frac{du_2}{dw}[N_1] - \zeta_2 b_2[N_1]\right],$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}[N_1] = Z[N_1, N_1]\left[\xi_2 b_2[N_1] - A_2[N_1, N_1]\frac{du_2}{dw}[N_1]\right],$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}[N_2] = \frac{1}{\xi_2}\frac{du_2}{dw}[N_2] - \frac{\zeta_2}{\xi_2}C_2[N_2, N_1]\frac{\partial u_2}{\partial t}[N_1].$$

Выражая в этих формулах с помощью соотношений (3.4), (3.5) и (3.6) производные $(du_2/dw)[N_1]$ и $(du_2/dw)[N_2]$ через $(\partial u_1/\partial t)[N_1]$ и $(\partial u_1/\partial x)[N_2]$, получаем требуемое представление (3.7).

Теорема 4. *Предположим, что в условиях теоремы* 3 *от вектора* u *можно перейти к вектору* $\tilde{u}$ *такому, что* $\tilde{u}[N_1] = u[N_1]$, *а оставшиеся* $n - r$ *компонент удовлетворяют условиям*

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}[N_2] = 0, \quad \tilde{C}[N_2, N_2]\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}[N_2] = \frac{\partial u}{\partial t}[N_2] - C[N_2, N_1]\frac{\partial u}{\partial t}[N_1],$$

$$\tilde{C}[N_2, N_2]\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}[N_2] = \frac{\partial u}{\partial x}[N_2] - C[N_2, N_1]\frac{\partial u}{\partial y}[N_1].$$

Тогда связь между производными $(\partial \tilde{u}_2/\partial x)[N_1]$, $(\partial \tilde{u}_2/\partial t)[N_1]$ *и* $(\partial \tilde{u}_1/\partial t)[N_1]$, $(\partial \tilde{u}_1/\partial x)[N_2]$ *будет осуществляться по формулам* (3.7), *в которых коэффициенты при производных имеют вид*

$$\Theta_x[N_1, N_2] = \xi_1 R[N_1, N_2]\tilde{C}[N_2, N_2], \quad \Theta_b[N_1] = \tilde{F}[N_1, N_1]T_b[N_1],$$

$$\Theta_t[N_1, N_1] = \tilde{F}[N_1, N_1]T_t[N_1, N_1],$$

где

$$\tilde{F}[N_1, N_1] := F_2[N_1, N_2]C_2[N_2, N_1] + F_1[N_1, N_1].$$

Доказательство. Действительно, так как подматрица $A(N_1, N_2] = 0[N_1, N_2]$, то

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_1] = A_1^{-1}[N_1, N_1]b_1[N_1] - A_1^{-1}[N_1, N_1]\frac{\partial u_1}{\partial t}[N_1],$$

и потому можно записать следующую цепочку равенств:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_2] = \tilde{C}_1[N_2, N_2]\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}[N_2] + C_1[N_2, N_1]\frac{\partial u_1}{\partial x}[N_1] = \tilde{C}_1[N_2, N_2]\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}[N_2] +$$

$$+ C_1[N_2, N_1]A_1^{-1}[N_1, N_1]b_1[N_1] - C_1[N_2, N_1]A_1^{-1}[N_1, N_1]\frac{\partial u_1}{\partial t}[N_1].$$

Для завершения доказательства достаточно подставить в (3.7) вместо $(\partial u_1/\partial x)[N_2]$ полученное выражение и учесть, что $(\partial u_1/\partial t)[N_1] = (\partial \tilde{u}_1/\partial t)[N_1]$.

4. СВЯЗЬ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В качестве простейшего примера использования полученных выше результатов рассмотрим движение с ускорением нестационарной ударной волны по одномерному вихревому неизобарическому потоку совершенного невязкого газа. Система уравнений, описывающих рассматриваемое течение, в переменных Лагранжа имеет следующий вид [14]:

$$\frac{\partial \ln p}{\partial \tau} + \frac{\gamma^2 p x^\delta}{a^2}\frac{\partial v}{\partial q} = -\frac{\delta\gamma v}{x}, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + p x^\delta \frac{\partial \ln p}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \ln p}{\partial \tau} - \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{\partial \ln a}{\partial \tau} = 0. \tag{4.1}$$

Здесь p и a – давление и скорость звука в потоке, v – скорость потока, γ – показатель адиабаты, q, τ – лагранжевы координаты, $\delta = 0, 1, 2$ для плоского, осесимметричного и сферически-симметричного потоков. Эйлерова координата $x = x(q, t)$ рассматривается как решение дифференциального уравнения $\partial x/\partial t = v(q, t)$. Вводя вектор $\mathbf{u} = [\ln p, v, \ln a]$ и переходя к матричной форме записи, получаем систему вида (1.1), в которой матрица A имеет ранг, равный двум.

Пусть $D = dx/dt$ – скорость ударной волны в неподвижной системе координат, f_i – произвольная компонента вектора u_i, $i = 1, 2$. Несложно показать, что производная этой функции по τ в направлении траектории w ударной волны связана с D следующим соотношением:

$$\left(\frac{df_i}{d\tau}\right)_w = \frac{\partial f_i}{\partial \tau} + (D - v_i)\frac{\gamma p_i x^\delta}{a_i^2}\frac{\partial f_i}{\partial q}. \tag{4.2}$$

Следовательно, коэффициенты при производных в (3.1) для рассматриваемого случая равны $\zeta_i = 1$, $\xi_i = (D - v_i)\gamma p_i x^\delta / a_i^2$.

Условия Гюгонио на нестационарной одномерной ударной волне имеют вид

$$\begin{aligned} \ln p_2 - \ln p_1 &= \ln\left[(1+\varepsilon)\left(\frac{D - v_1}{a_1}\right)^2 - \varepsilon\right], \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \\ v_2 - v_1 &= (D - v_1)\frac{(1-\varepsilon)(J-1)}{(J+\varepsilon)}, \quad J = \frac{p_2}{p_1}, \\ \ln(a_2 - \ln a_1) &= \frac{1}{2}\ln\frac{J(1+\varepsilon J)}{(J+\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Несложно проверить, что для системы (4.1), а также для соотношений (4.2) и (4.3) на ударной волне выполнены все условия теоремы 3. Следовательно, связь производных на ударной волне осуществляется с помощью соотношений (3.7). Входящие в эти соотношения матрицы имеют вид

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_2 & 1 & 0 \\ h_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial D} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} 0 & -g_2 & -g_2(D - v_1) \\ 0 & -g_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -g_2 & -g_2(D - v_1) \\ 0 & -h_2 g_2 - g_3 & -h_2 g_2(D - v_1) \\ 0 & -h_3 g_2 & -h_3 g_2 (D - v_1) \end{bmatrix}, \quad F_D = \begin{bmatrix} g_2 \\ h_2 g_2 + g_3 \\ h_3 g_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$g_2 = \frac{2(J+\varepsilon)}{J[D - v_1]}, \quad g_3 = \frac{(1-\varepsilon)(J-1)}{J+\varepsilon},$$

$$h_2 = \frac{J(1-\varepsilon^2)}{(J+\varepsilon)^2}[D - v_1], \quad h_3 = \frac{\varepsilon[(1+\varepsilon J) + J(J+\varepsilon)]}{2(J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)}.$$

Переход от скорости звука к энтропии по формуле

$$\frac{\partial \ln a}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{\partial \ln p}{\partial x} + \frac{1}{2c_p}\frac{\partial S}{\partial x}$$

позволяет с помощью теоремы 4 получить наиболее простую связь производных $\partial \ln p_2/\partial t$ и $\partial v_2/\partial t$ с производными $\partial \ln p_1/t$, $\partial v_1/\partial t$ и $\partial S_1/\partial x$, характеризующими основные неравномерности потока до ударной волны, а также с величиной dD/dw, характеризующей ускорение ударной волны.

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА СО СЛАБЫМ В СЛУЧАЕ НЕОСОБОЙ МАТРИЦЫ A

Рассмотрим вначале случай взаимодействия с сильным разрывом встречного разрыва индекса l. Введем векторы $\mathbf{V}^{(+)}$, $\mathbf{U}^{(+)}$ и $\mathbf{V}^{(-)}$, $\mathbf{U}^{(-)}$ производных за сильным разрывом в областях до и за точкой взаимодействия, а также векторы $[\mathbf{V}]_w = \mathbf{V}^{(+)} - \mathbf{V}^{(-)}$ и $[\mathbf{U}]_w = \mathbf{U}^{(+)} - \mathbf{U}^{(-)}$ разрыва производных за сильным разрывом.

Теорема 5. *В случае когда сильный разрыв индекса* 1 *взаимодействует со встречным слабым разрывом, векторы* $[\mathbf{V}]_w$ *и* $[\mathbf{U}]_w$ *разрыва производных за сильным разрывом ортогональны левому собственному вектору* $\mathbf{L}^{(1)}$:

$$\mathbf{L}^{(1)}[\mathbf{V}]_w = 0, \quad \mathbf{L}^{(1)}[\mathbf{U}]_w = 0. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть $[\mathbf{V}]_k = \mathbf{V}^{(k+1)} - \mathbf{V}^{(k)}$ и $[\mathbf{U}]_k = \mathbf{U}^{(k+1)} - \mathbf{U}^{(k)}$ – разрывы производных $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ на исходящем из точки взаимодействия слабом разрыве индекса k, $k = 2, 3, \ldots, n$. Разность производных $\mathbf{V}^{(+)}$, $\mathbf{U}^{(+)}$ и $\mathbf{V}^{(-)}$, $\mathbf{U}^{(-)}$ в областях до и за точкой взаимодействия связана с величинами $[\mathbf{V}]_k$ и $[\mathbf{U}]_k$ разрыва производных на исходящих слабых разрывах следующим очевидным соотношением:

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}]_w &= \mathbf{V}^{(+)} - \mathbf{V}^{(-)} = \sum_{k=2}^{n} \mathbf{V}^{(k+1)} - \mathbf{V}^{(k)} = \sum_{k=2}^{n} [\mathbf{V}]_k, \\ [\mathbf{U}]_w &= \mathbf{U}^{(+)} - \mathbf{U}^{(-)} = \sum_{k=2}^{n} \mathbf{U}^{(k+1)} - \mathbf{U}^{(k)} = \sum_{k=2}^{n} [\mathbf{U}]_k. \end{aligned} \tag{5.2}$$

В работе [14] доказывается, что при переходе через слабый разрыв индекса k линейные комбинации вида $\mathbf{L}^{(m)}\mathbf{V}^{(k)}$ и $\mathbf{L}^{(m)}\mathbf{U}^{(k)}$, $m \neq k$, не рвутся:

$$\mathbf{L}^{(m)}[\mathbf{V}]_k = 0, \quad \mathbf{L}^{(m)}[\mathbf{U}]_k = 0, \quad m \neq k. \tag{5.3}$$

Умножая равенства (5.2) слева на $\mathbf{L}^{(1)}$ и учитывая (5.3), получаем требуемый результат.

Следствие 2. Разрыв $[dD/dw]$ кривизны сильного разрыва линейно зависит от векторов $[\tilde{\mathbf{V}}]_l$ и $[\tilde{\mathbf{U}}]_l$ разрыва производных на встречном разрыве индекса l.

Доказательство. Действительно, рассмотрим, к примеру, производные $\mathbf{U}^{(+)}$ и $\mathbf{U}^{(-)}$. Они относятся к областям, расположенным непосредственно за сильным разрывом, и поэтому их можно выразить через производные $\tilde{\mathbf{U}}^{(+)}$ и $\tilde{\mathbf{U}}^{(-)}$ до него с помощью соотношения (2.7):

$$\mathbf{U}^{(+)} = \mathbf{\Phi}_b + \mathbf{\Phi}_x\tilde{\mathbf{U}}^{(+)} + \mathbf{\Phi}_D(dD/dt)^{(+)}, \quad \mathbf{U}^{(-)} = \mathbf{\Phi}_b + \mathbf{\Phi}_x\tilde{\mathbf{U}}^{(-)} + \mathbf{\Phi}_D(dD/dt)^{(-)}.$$

Следовательно,

$$[\mathbf{U}]_w = \mathbf{U}^{(+)} - \mathbf{U}^{(-)} = \mathbf{\Phi}_x[\tilde{\mathbf{U}}^{(+)} - \tilde{\mathbf{U}}^{(-)}] + \mathbf{\Phi}_D[(dD/dt)^{(+)} - (dD/dt)^{(-)}].$$

Подставляя указанную разность в (5.1), получаем искомую связь между разрывом $[dD/dt]$ производной на сильном разрыве и разрывом $[\tilde{\mathbf{U}}]$ вектора $\mathbf{U}$ на встречном слабом разрыве:

$$o = \mathbf{L}^{(1)}\{\mathbf{\Phi}_x[\tilde{\mathbf{U}}] + \mathbf{\Phi}_D[dD/dt]\}. \tag{5.4}$$

Следствие 3 (обобщенная формула Честера–Уизема). Произведение левого собственного вектора $\mathbf{L}^{(1)}$ на производную $d\mathbf{u}_2/dt$ вектор-функции $\mathbf{u}_2$ по t в направлении сильного разрыва не меняется в процессе взаимодействия сильного разрыва со встречным слабым разрывом и равно

$$\mathbf{L}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}^{(+)}}{dt} = \mathbf{L}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}^{(-)}}{dt} = \mathbf{L}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}_2}{dw} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{b}. \tag{5.5}$$

Доказательство. Рассмотрим линию $x(t)$ разрыва вектор-функции $\mathbf{u}(x, t)$, задаваемую уравнением $dx/dt = D$. Домножим второе равенство в (5.1) на D и сложим эти два уравнения. Учитывая, что сумма $\partial\mathbf{u}/\partial t + D\partial\mathbf{u}/\partial x$ равна производной $d\mathbf{u}/dt$ вектор-функции $\mathbf{u}$ по t в направлении сильного разрыва, получаем, что

$$\mathbf{L}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}^{(+)}}{dt} - \mathbf{L}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}^{(-)}}{dt} = 0.$$

Последнее равенство означает, что производная $\mathbf{u}$ в направлении сильного разрыва, умноженная слева на $\mathbf{L}^{(1)}$, не меняется при взаимодействии сильного разрыва с произвольным встречным слабым разрывом:

$$\mathbf{L}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}^{(+)}}{dt} = \mathbf{L}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}^{(-)}}{dt} = \mathrm{const} = C. \tag{5.6}$$

Осталось найти стоящую в правой части константу. Для этого рассмотрим приходящую в точку взаимодействия характеристику первого семейства, задаваемую уравнением $dx/dt = \lambda_1$. Так как она лежит в области, отвечающей $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(-)}$, то условия на этой характеристике имеют вид

$$\mathbf{L}^{(1)}\frac{\partial\mathbf{u}^{(-)}}{\partial t} + \lambda_1\mathbf{L}^{(1)}\frac{\partial\mathbf{u}^{(-)}}{\partial x} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{b}. \tag{5.7}$$

Вычитая из (5.6) соотношение (5.7), получаем в левой части

$$\mathbf{L}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}^{(-)}}{dt} - \mathbf{L}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}^{(-)}}{dt} = (D-\lambda_1)(\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{U}^{(-)} - \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{U}^{(-)}) = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $C = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{b}$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. По-видимому, впервые частный случай формулы (5.5) был получен в работах [10], [11] на основе анализа результатов работ [7] и [8], [9]. В этих работах рассматривалась задача распространения ударной волны по покоящемуся газу в канале с малым скачком сечения. В [7] на основе линеаризации соотношений на скачке сечения [14] была получена следующая связь между малым изменением относительной скорости $\mathrm{M} = D/a$ движения ударной волны и изменением площади A сечения трубы:

$$\begin{gathered} d\ln A = -\frac{d\mathrm{M}^2}{(\mathrm{M}^2-1)k(\mathrm{M})}, \\ k(\mathrm{M}) = 2\left[\left(1+(1-\varepsilon)\frac{1-g^2}{g}\right)\left(2g+1+\frac{1}{\mathrm{M}^2}\right)\right]^{-1}, \quad g(\mathrm{M}) = \frac{(\gamma-1)\mathrm{M}^2+2}{2\gamma\mathrm{M}^2-(\gamma-1)}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Уизем заметил, что этот же результат можно получить, записывая условие на характеристике второго семейства в смутном потоке за ударной волной:

$$d\ln p_2 + \frac{\gamma}{a_2}du_2 + \frac{\gamma u_2}{u_2+a_2}d\ln A = 0,$$

и подставляя вместо p_2, u_2, a_2 их выражения через M из условий на ударной волне, которые для случая распространения ударной волны по покоящемуся газу с параметрами p_1, u_1, a_1 могут быть записаны так:

$$p_2/p_1 = (1+\varepsilon)\mathrm{M}^2-\varepsilon, \quad u_2/a_1 = (1-\varepsilon)(\mathrm{M}-1/\mathrm{M}), \quad a_2/a_1 = \sqrt{[(1+\varepsilon)-\varepsilon/\mathrm{M}^2][(1-\varepsilon)+\varepsilon\mathrm{M}^2]}.$$

Указанный прием назван в [11] правилом характеристик. Полученные в настоящей работе результаты показывают, что указанное правило непосредственно вытекает из решения задачи взаимодействия сильного разрыва со слабым встречным разрывом.

Теорема 6. *Условием отсутствия слабого разрыва индекса k, исходящего из точки взаимодействия сильного разрыва индекса 1 со слабым встречным разрывом, является ортогональность векторов $[\mathbf{V}]_w$ и $[\mathbf{U}]_w$ разрыва производных за сильным разрывом левому собственному вектору $\mathbf{L}^{(k)}$:*

$$\mathbf{L}^{(k)}[\mathbf{V}]_w = 0, \quad \mathbf{L}^{(k)}[\mathbf{U}]_w = 0. \tag{5.9}$$

Доказательство. Действительно, как следует из (5.3), произведение k-го собственного вектора $\mathbf{L}^{(k)}$ на вектор разрыва $[\mathbf{V}]_m$ для любого $m \neq k$ равно нулю. Проводя рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве формулы (5.1), несложно показать, что

$$\mathbf{L}^{(k)}[\mathbf{V}]_k = \mathbf{L}^{(k)}[\mathbf{V}]_w. \qquad (5.10)$$

Пусть равенство $\mathbf{L}^{(k)}[\mathbf{V}]_m = 0$ выполняется не только при $m \neq k$, но и при $m = k$. Это означает, что вектор $[\mathbf{V}]_m$ ортогонален всем n собственным векторам матрицы A. В силу линейной независимости последних, это возможно только в случае $[\mathbf{V}]_m = 0$, т.е. в случае отсутствия разрыва производных на m-й характеристике. Указанные рассуждения с учетом (5.10) доказывают первое из равенств (5.9). Аналогично показывается справедливость второго равенства (5.9).

Следствие 4. Критерием отсутствия исходящего слабого разрыва индекса k при взаимодействии сильного разрыва индекса 1 со встречным слабым разрывом является равенство нулю определителя матрицы вида

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}^{(1)}\Phi_x\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)} & \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{\Phi}_D \\ \mathbf{L}^{(k)}\Phi_x\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)} & \mathbf{L}^{(k)}\mathbf{\Phi}_D \end{bmatrix}. \qquad (5.11)$$

Доказательство. Как следует из теорем 5 и 6, случаю отсутствия разрыва индекса k при взаимодействии сильного разрыва индекса 1 со встречным слабым разрывом соответствует ортогональность векторов $[\mathbf{V}]_w$ и $[\mathbf{U}]_w$ разрыва производных за сильным разрывом как вектору $\mathbf{L}^{(k)}$, так и вектору $\mathbf{L}^{(1)}$. Условия ортогональности вектора $[\mathbf{U}]_w$ с учетом (2.7) можно переписать так:

$$\mathbf{L}^{(1)}\Phi_x[\tilde{\mathbf{U}}]_l + L^{(1)}\mathbf{\Phi}_D[dD/dt] = 0, \quad \mathbf{L}^{(k)}\Phi_x[\tilde{\mathbf{U}}]_l + L^{(k)}\mathbf{\Phi}_D[dD/dt] = 0. \qquad (5.12)$$

Здесь $[\tilde{\mathbf{U}}]_l$ – разрыв вектора производных на взаимодействующем с сильным разрывом слабым разрыве индекса l, а $[dD/dt]$ – разрыв касательной к траектории сильного разрыва; знак тильда означает, что производные вычисляются по значениям u до сильного разрыва. На разрыве индекса l для всех $k \neq l$ справедливы равенства $\mathbf{L}^{(k)}[\tilde{\mathbf{U}}]_l = 0$. Последнее соотношение с учетом линейной независимости векторов $\mathbf{L}^{(k)}$ позволяет выразить разрыв вектора производных через разрыв любой из компонент этого вектора:

$$[\tilde{\mathbf{U}}]_l = \Lambda^{(i)}[\tilde{U}[i]]_l. \qquad (5.13)$$

Подставляя (5.13) в (5.12), получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных $[\tilde{U}[i]]_l$ и $[dD/dt]$. Она имеет нетривиальное решение в случае, когда определитель матрицы (5.11) равен нулю, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай взаимодействия с сильным разрывом слабого догоняющего разрыва индекса 1.

Теорема 7. *В случае когда сильный разрыв индекса* 1 *взаимодействует с догоняющим слабым разрывом индекса* 1, *собственный вектор* $\mathbf{L}^{(k)}$ *ортогонален разности векторов* $[\mathbf{V}]_w$, $[\mathbf{U}]_w$ *разрыва производных за сильным разрывом и векторов* $[\mathbf{V}]_k$, $[\mathbf{U}]_k$ *разрыва производных на слабом разрыве индекса* k:

$$\mathbf{L}^{(k)}([\mathbf{V}]_w - [\mathbf{V}]_k) = 0, \quad \mathbf{L}^{(k)}([\mathbf{U}]_w - [\mathbf{U}]_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.14)$$

Доказательство. В случае взаимодействия сильного разрыва с догоняющим слабым разрывом индекса 1 разность производных $\mathbf{V}^{(+)}$, $\mathbf{U}^{(+)}$ и $\mathbf{V}^{(-)}$, $\mathbf{U}^{(-)}$ в областях до и за точкой взаимодействия связана с величинами $[\mathbf{V}]_k$ и $[\mathbf{U}]_k$ разрыва производных на приходящем разрыве индекса 1 и исходящих слабых разрывах индекса k, $k = 2, 3, \ldots, n$, следующим соотношением:

$$[\mathbf{V}]_w = \mathbf{V}^{(+)} - \mathbf{V}^{(-)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}^{(k+1)} - \mathbf{V}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{V}]_k,$$

$$[\mathbf{U}]_w = \mathbf{U}^{(+)} - \mathbf{U}^{(-)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{U}^{(k+1)} - \mathbf{U}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{U}]_k.$$

Домножая эти равенства слева на вектор $\mathbf{L}^{(k)}$ и используя (5.3), получаем требуемое.

Следствие 5. Критерием отсутствия исходящего слабого разрыва индекса k при взаимодействии сильного разрыва с догоняющим его слабым разрывом является ортогональность векторов $\mathbf{L}^{(k)}$ и $\mathbf{\Phi}_D$:

$$\mathbf{L}^{(k)}\mathbf{\Phi}_D = 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Доказательство. Выразим производные $\mathbf{U}^{(+)}$ и $\mathbf{U}^{(-)}$ с помощью (2.7) через производные $\tilde{\mathbf{U}}^{(+)}$ и $\tilde{\mathbf{U}}^{(-)}$ до него:

$$\mathbf{U}^{(+)} = \mathbf{\Phi}_b + \Phi_x\tilde{\mathbf{U}}^{(+)} + \mathbf{\Phi}_D(dD/dt)^{(+)}, \quad \mathbf{U}^{(-)} = \mathbf{\Phi}_b + \Phi_x\tilde{\mathbf{U}}^{(-)} + \mathbf{\Phi}_D(dD/dt)^{(-)}.$$

Так как в рассматриваемом случае взаимодействия имеем $\tilde{\mathbf{U}}^{(+)} = \tilde{\mathbf{U}}^{(-)}$, то разрыв $[\mathbf{U}]_w$ производных за сильным разрывом равен

$$[\mathbf{U}]_w = \mathbf{U}^{(+)} - \mathbf{U}^{(-)} = \mathbf{\Phi}_D[dD/dt].$$

Подставляя это равенство в (5.14), получаем

$$\mathbf{L}^{(k)}[\mathbf{V}]_k = \mathbf{L}^{(k)}\mathbf{\Phi}_D[dD/dt], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Из этого соотношения видно, что критерием отсутствия отраженного разрыва индекса k, $k = 2$, $3, \ldots, n$, является равенство нулю стоящего при $[dD/dw]$ коэффициента, т.е. условие (5.15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Truesdell C.* On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // J. Aeronaut. Sci. 1952. V. 19. P. 826–828.
2. *Lighthill M.J.* The flow behind a stationary shock // Philos. Mag. 1949. V. 40. P. 214–220.
3. *Lighthill M.J.* Dynamics of dissotiating gas. Part I. // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 1–32.
4. *Русанов В.В.* Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной: Препринт № 18. М.: ИПМатем. АН СССР, 1973.
5. *Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н.* Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995.
6. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
7. *Честер Б.* Распространение ударных волн в каналах переменной ширины // Сб. Механика. М., 1954. Вып. 6. С. 76–87.
8. *Chisnell R.F.* The normal motion of a shock wave through a nonuniform onedimentional medium // Proc. Roy. Soc. 1955. V. 232. P. 350.
9. *Chisnell R.F.* The motion of a shock wave in a channel, with applications to cylindrical and spherical shock waves // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 286.
10. *Witham G.B.* On the propogation of a shock wave through regions of non-uniform area of flow // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 337.
11. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
12. *Веккен Ф.* Предельные положения вилкообразных скачков уплотнения // Механика. 1950. № 4. С. 24–34.
13. *Вюст В.* К теории разветвленных скачков уплотнения // Газовая динамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. С. 131–143.
14. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
15. *Lax P.D.* Giperbolic systems of conservation laws // Communs Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. P. 537–566.
16. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.