КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929.5

Матричная линеаризация функционально-дифференциальных уравнений точечного типа и вопросы существования и единственности периодических решений.

© 2017 г. Бекларян Л. А., Белоусов Ф. А.

Аннотация

Работа посвящена периодическим решениям функционально-дифференциального уравнения точечного типа. Следуя работе [1], в терминах правой части исходного нелинейного функционально-дифференциального уравнения точечного типа сформулированы легко проверяемые условия существования и единственности ω-периодического решения и описан итерационный процесс построения такого решения. В отличие от скалярной линеаризации, рассмотренной в статье [1], здесь используется более сложная матричная линеаризация, позволяющая расширить класс уравнений, для которых в рамках такого подхода удается установить существование и единственность ω-периодического решения.

1 Введение. Постановка задачи

Среди основных методов изучения проблемы существования периодических решений дифференциальных уравнений следует отметить метод точечных отображений Пуанкаре-Андронова [2], с. 328, [3], с. 66, топологический метод, метод направляющих функций [4], с. 72 [5], с. 172, вариационные методы и т.д. Предлагаемый в работе подход по своей сути наиболее близок к методу интегральных уравнений, который детально изложен в монографии Е. Н. Розенвассера [6], с. 146, а также в монографии [7], с. 26, и в ряде примыкающих к ней работ для изучения периодических и ограниченных решений. Основной особенностью в этих работах является процедура построения операторной функции Грина, с помощью которой и строится периодическое решение. Сама процедура построения операторной функции Грина, а также проверка условий, которым она должна удовлетворять, являются трудоемкими. Решение каждой конкретной задачи требует проведения нетривиальной большой предварительной работы. Отдельного изучения требует вопрос о том, является ли решение классическим?

Подход, реализуемый в представленной работе, позволяет обойти эти сложности. Условия, обеспечивающие существование и единственность классического ω-периодического решения являются легко проверяемыми и формулируются в терминах характеристик правой части дифференциального уравнения (константа Липщица для остаточного нелинейного возмущения, величина отклонений в случае функционально-дифференциального уравнения точечного типа, коэффициенты линеаризованного уравнения). Одной из особенностей рассматриваемого здесь подхода является процедура линеаризации правой части уравнения. Как правило, наиболее распространенным способом выделения линейной части считается тейлоровская линеаризация. Существуют примеры, которые показывают, что тейлоровская линеаризация не всегда позволяет установить существование периодического решения, хотя при иных линеаризациях это удается. Возможности вариации линейной части позволяют для выбранной линеаризации гарантировать выполнение условия нерезонансности, что позволяет корректно определить оператор периодического решения, а также решать задачу минимизации константы Липщица для остаточного нелинейного возмущения при выполненном условии нерезонансности. Первое из условий, условие нерезонансности, является "типичным"и может быть достигнуто с использованием только лишь скалярной линеаризации, при которой линеаризованное уравнение проще, но решение задачи минимизации константы Липщица для остаточного нелинейного возмущения в классе скалярных линеаризаций хуже. Этим и объясняется необходимость изучения матричной линеаризации исходного функционально-дифференциального уравнения.

Будет рассматриваться функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где функция $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n), \quad r \in \{0, 1, ...\}$ является 2π-периодической по времени. Решением уравнения (1) называется всякая абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая уравнению. Так как правая часть уравнения принадлежит пространству $\mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$, $r \in \{0, 1, ...\}$, то всякое решение $x(\cdot)$ будет принадлежать пространству $\mathbb{C}^{(r+1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Уравнение любого периода $\omega > 0$ может быть очевидным образом сведено к уравнению периода 2π. Будут сформулированы условия существования и единственности 2π-периодического решения $x(\cdot)$ уравнения (1), описан итерационный процесс построения такого решения, а также указана скорость сходимости процесса.

В силу того, что целью исследования являются 2π-периодические решения, то, не нарушая общности, можем считать, что все отклонения $\tau_1, ..., \tau_s$ принадлежат $[0, 2\pi)$. Действительно. Если отклонения таковы, что $\tau_j \in [2\pi p, 2\pi(p+1)),\ j \in \{1, ..., s\}, \quad p \in \mathbb{Z}$, то вместо них можно положить отклонения равные $\overline{\tau}_j = \tau_j - 2\pi p$. Очевидно, что новое уравнение будет иметь те же 2π-периодические решения, что и исходное.

Кроме этого будем полагать, что отклонения $\tau_1, ..., \tau_s$ удовлетворяют условию соизмеримости. Это означает, что для любых $\tau_i, \quad \tau_j, \quad i, j, \in \{1, ..., s\}$ должны существовать $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $n_1 + n_2 \neq 0$ и $n_1\tau_i = n_2\tau_j$.

Уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} A_j x(t+\tau_j) + f(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где A_j - $(n\times n)$ матрица, каждый элемент которой принадлежит $\mathbb{R}$ и $\tau_j \in [0, 2\pi), \quad j \in \{1, ..., s\}$,

$$f(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)) - \sum_{j=1}^{s} A_j x(t+\tau_j).$$

Данная работа посвящена изучению условий, накладываемых на $A_j, \quad \tau_j, \quad j \in \{1, ..., s\}$ и $f(\cdot)$, которые обеспечивают существование и единственность 2π-периодического решения.

Данное исследование является продолжением и развитием работы [1]. Главное отличие от [1] состоит в том, что будет рассмотрен более общий случай выделения матричной линейной части, когда в уравнении (2) в роли коэффициентов линеаризованной части выступают матрицы A_j, тогда как в работе [1] был рассмотрен случай выделения скалярной линейной части, когда уравнение (2) имело следующий вид

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t+\tau_j) + f(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $a_j \in \mathbb{R}$. Таким образом все полученные в данной работе результаты расширяют возможности применения данного метода.

Такой тип функционально-дифференциальных уравнений исследовался в работах автора (см. монографию [8]). Получены условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$x(\bar{t}) = \overline{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

в специальном классе функций.

Условия, которым должна удовлетворять функция $g(\cdot)$ следующие

(I) $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n), \quad r \in \{0, 1, ...\}$;

(II) для всех t, x_j и $\overline{x}_j, j = \overline{1, s}$

$$\|g(t, x_1, ..., x_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^{s} \|x_j\|_{\mathbb{R}^n}, \quad M_0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$\|g(t, x_1, ..., x_s) - g(t, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_g \sum_{j=1}^{s} \|x_j - \overline{x}_j\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Отметим, что второе неравенство является условием Липшица;

(III) существует $\mu^* \in \mathbb{R}$ такое, что выражение

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} M_0(t + i)(\mu^*)^{|i|}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет конечное значение и как функция аргумента t непрерывна;

(IV) существует $\mu^* \in \mathbb{R}$ такое, что семейство функций

$$\tilde{g}_{i,z_1,...,z_s}(t) = g(t + i, z_1, ..., z_s)(\mu^*)^{|i|}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (z_1, ..., z_s) \in \mathbb{R}^{n\times s}$$

на любом конечном интервале равностепенно непрерывно.

Отдельно отметим, что в приведенных условиях (I)-(IV) и всюду далее в данной статье под нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ подразумевается евклидова норма n-мерного пространства.

Очевидно, что в силу периодичности функции $g(\cdot)$, как правой части (1), условия (III) будет выполняться автоматически, поэтому всюду далее будем считать, что $\mu^* = 1$.

Определим пространство

$$\mathcal{L}^n_\mu\mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R}) = \{x(\cdot)| \quad x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(l)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n), \quad \max_{0\leq l\leq r} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x^{(l)}(t)e^{-\delta|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty, \}$$

где $r \in \{0, 1, ...\}$ и $\mu = e^{-\delta}$.

Теорема 1.([8], с. 45) *Если функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям (I)-(IV) и для некоторого $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$L_g \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln \mu^{-1}, \tag{5}$$

то для любого $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}^n_\mu\mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R})$ задачи Коши (3)- (4). Такое решение является единственным и, более того, принадлежит классу $\mathcal{L}^n_\mu\mathbb{C}^{(r+1)}(\mathbb{R})$.

В случае, когда функция $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n), \quad r \in \{0, 1, ...\}$ в правой части уравнения (3) является ω-периодической, мы можем переформулировать данную теорему в виде следствия.

Следствие 1. *Пусть функция $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n), \quad k \in \{0, 1, ...\}$ в уравнении (3) является ω-периодической по времени. Если функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям (II) и (IV) и для некоторого $\mu \in (0, 1)$ выполняется неравенство (5), то для любого $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}^n_\mu\mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R})$ задачи Коши (3)-(4). Такое решение является единственным и, более того, принадлежит классу $\mathcal{L}^n_\mu\mathbb{C}^{(r+1)}(\mathbb{R})$.*

Рассмотрим пространство функций

$$V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n) = \big\{ f(\cdot) : f(\cdot) \text{ удовлетворяет условиям (I)-(III) } \big\}.$$

Для всех функций из $V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$ параметр $\mu^*\in\mathbb{R}_+$ совпадает с соответствующей константой из условия (III). В пространстве $V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$ можно ввести Липщицеву норму

$$\|g(\cdot)\|_{L_{ip}}=\sup_{t\in R}\|f(t,0,\dots,0)e^{-\delta^*|t|}\|_{R^n}+$$

$$+\sup_{t,z_1,\dots,z_s,\bar z_1,\dots,\bar z_s\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns}\times\mathbb{R}^{ns}}\frac{\|g(t,z_1,\dots,z_s)-g(t,\bar z_1,\dots,\bar z_s)\|_{R^n}}{\sum_{j=1}^s\|z_j-\bar z_j\|_{R^n}},\qquad \mu^*=e^{-\delta^*}.$$

Очевидно, что для функции $g(\cdot)\in V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$ наименьшее значение константы L_g из условия Липшица (условие (II) данного параграфа), совпадает со значением второго слагаемого в определении нормы $\|g(\cdot)\|_{L_{ip}}$. В дальнейшем, говоря об условии Липшица, под константой L_g будем понимать именно такое её наименьшее значение. Правую часть функционально-дифференциального уравнения точечного типа мы будем рассматривать как элемент банахового пространства $V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$.

Чтобы указать на зависимость решения задачи Коши (3)-(4) от начального значения $\bar x$, а также от самой правой части $g(\cdot)$ функционально-дифференциального уравнения, будем пользоваться обозначением $x(t;\bar t,\bar x,g)$. Под непрерывной зависимостью решения $x(\cdot)$ мы будем понимать его непрерывную зависимость по переменным $\bar t,\bar x,g\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n\times V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. (теорема о "грубости") ([8], с. 47) *В теореме 1 и следствии 1 решение основной задачи Коши* (3)-(4) *непрерывно зависит от переменных* $\bar t,\bar x,g$.

В теореме 2 о непрерывной зависимости от начального условия $\bar x$ и правой части $g(.)$ дифференциального уравнения можно сказать большее.

Замечание 1. ([8], с. 47) *В теореме 2 решение задачи Коши* (3)-(4)*, как элемент пространства* $\mathcal{L}^n_\mu\mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R})$ *непрерывно зависит от* $\bar x$ *и* $g(\cdot)$.

Так как в дальнейшем мы будем иметь дело исключительно с периодическими функциями, когда это будет возможно вместо пространств $\mathcal{L}^n_\mu\mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R})$ будут использоваться обычные пространства непрерывных функций $\mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $\quad r\in\{0,1,...\}$.

2 Свойства периодических решений для линейного однородного уравнения

Установим некоторые свойства для линейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа, которые будут необходимы в дальнейшем.

Рассмотрим однородное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot x(t)=\sum_{j=1}^s A_jx(t+\tau_j),\quad t\in\mathbb{R},\tag{6}$$

где A_j является $(n\times n)$ матрицей, каждый элемент которой принадлежит $\mathbb{R}$ и $\tau_j\in[0,2\pi)$, $\quad j\in\{1,...,s\}$.

Опишем множество $(A_1,...,A_s)$ матриц и отклонений $(\tau_1,\cdots,\tau_s)\in[0,2\pi)\times...\times[0,2\pi)$, при которых однородное уравнение (6) имеет только нулевое 2π-периодическое решение (*условие нерезонансности*). Для этого введем в рассмотрение матрицу размерности $(2n\times 2n)$, которая будет состоять из четырех блоков размерности $(n\times n)$.

$$\mathbb{A}_k=\begin{pmatrix}-\sum_{j=1}^sA_j\cos k\tau_j & kI-\sum_{j=1}^sA_j\sin k\tau_j\\ -kI+\sum_{j=1}^sA_j\sin k\tau_j & -\sum_{j=1}^sA_j\cos k\tau_j\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{N},\tag{7}$$

где I единичная матрица размерности $(n\times n)$.

Введем обозначения

$$\bar A_k=-\sum_{j=1}^sA_j\cos k\tau_j,\qquad \underline{A}_k=kI-\sum_{j=1}^sA_j\sin k\tau_j.$$

Тогда матрица $\mathbb{A}_k$ в новых обозначениях примет вид

$$\mathbb{A}_k = \begin{pmatrix} \bar{A}_k & \underline{A}_k \\ -\underline{A}_k & \bar{A}_k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Будем предполагать, что для всех $k \in \mathbb{N}$ матрица $\mathbb{A}_k$ является обратимой. Очевидно для матрицы $\bar{A}_k$ существует такая константа $\widetilde{C}_1 > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ будет выполняться оценка $\|\bar{A}_k\|_{\mathbb{R}^n} < \widetilde{C}_1$. Аналогично для матрицы $\sum_{j=1}^{s} A_j \sin k\tau_j$ существует некоторая константа $\widetilde{C}_2 > 0$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ также справедлива оценка $\|\sum_{j=1}^{s} A_j \sin k\tau_j\|_{\mathbb{R}^n} < \widetilde{C}_2$. Также легко видеть, что при $k \to \infty$ норма $\|\underline{A}_k\|_{\mathbb{R}^n}$ будет стремиться к бесконечности со скоростью $O(k)$.

Оценим поведение нормы матрицы $\|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}$ при $k \to \infty$. Нетрудно видеть, что

$$\|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}} = (\min_{e \in \mathbb{R}^{2n}, \|e\|_{\mathbb{R}^{2n}}=1} \|\mathbb{A}_k e\|_{\mathbb{R}^{2n}})^{-1}.$$

Следовательно нам следует оценить величину

$$\min_{e \in \mathbb{R}^{2n}, \|e\|_{\mathbb{R}^{2n}}=1} \|\mathbb{A}_k e\|_{\mathbb{R}^{2n}}. \tag{8}$$

Пусть $e_1,\ e_2 \in \mathbb{R}^n$. Образуем вектор $e = (e_1', e_2')'$ пространства $\mathbb{R}^{2n}$ ($'$-транспонирование). Тогда

$$\mathbb{A}_k e = \begin{pmatrix} \bar{A}_k & \underline{A}_k \\ -\underline{A}_k & \bar{A}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_k e_1 + \underline{A}_k e_2 \\ -\underline{A}_k e_1 + \bar{A}_k e_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\|\mathbb{A}_k e\|^2_{\mathbb{R}^{2n}} = \|\bar{A}_k e_1 + \underline{A}_k e_2\|^2_{\mathbb{R}^n} + \| - \underline{A}_k e_1 + \bar{A}_k e_2\|^2_{\mathbb{R}^n}, \quad \|e\|^2_{\mathbb{R}^{2n}} = \|e_1\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|e_2\|^2_{\mathbb{R}^n}.$$

Так как при $k \to \infty$ нормы матриц $\bar{A}_k$ ограниченны, а норма матрицы $\underline{A}_k$ стремится к бесконечности, то норма матрицы $\mathbb{A}_k$ будут стремиться к бесконечности. В таком случае, норма матрицы $\mathbb{A}_k^{-1}$ будет сходиться к нулю. Оценим скорость такой сходимости. Для этого оценим скорость сходимости величины (8). В силу равномерной ограниченности норм $\|\bar{A}_k\|,\ \ k = 0, 1, ...,$ указанная величина (8) будет стремиться к бесконечности при $k \to \infty$ с той же скоростью, что и выражение

$$\min_{e \in \mathbb{R}^{2n}, \|e\|_{\mathbb{R}^{2n}}=1} \left\| \begin{pmatrix} \underline{A}_k & 0 \\ 0 & \underline{A}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^{2n}} = \big[\min_{e \in \mathbb{R}^{2n}, \|e\|_{\mathbb{R}^{2n}}=1} (\|\underline{A}_k e_1\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|\underline{A}_k e_1\|^2_{\mathbb{R}^n}) \big]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Для произвольного $\tilde{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\tilde{e}\|_{\mathbb{R}^n} = 1$ имеет место соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \|\frac{1}{k} \underline{A}_k\|_{\mathbb{R}^n} = \lim_{k\to\infty} \|(I - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{s} A_j \sin k\tau_j)\tilde{e}\|_{\mathbb{R}^n} = 1$$

Из этого легко увидеть, что при $k \to \infty$ величина (8) будет стремиться к бесконечности со скоростью $O(k)$. Следовательно, при $k \to \infty$ норма $\|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}$ будет стремиться к нулю со скоростью $O(1/k)$. В дальнейшем этот факт для нас будет важен.

Лемма 1. *Однородное уравнение* (6) *имеет единственное* 2π*-периодическое решение тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\det \sum_{j=1}^{s} A_j \neq 0, \quad \det \mathbb{A}_k \neq 0, \quad \textit{для всех} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Такое 2π*-периодическое решение является тривиальным. В противном случае однородное уравнение* (6) *будет иметь бесконечное число* 2π*-периодических решений.*

`Доказательство.` Учитывая, что решения однородного уравнения (6), в частности, принадлежат пространству $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, произвольное 2π-периодическое решение на интервале $[0,2\pi]$ может быть представлена в виде сходящегося ряда Фурье

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1}\cos kt + \alpha_{2k}\sin kt.$$

Подставим это представление в уравнение (6) и приравняем коэффициенты при соответствующих базисных функциях. Получим, что для любого $k = 1, 2, ...$ должны выполняться равенства

$$1: \quad -\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j\Big)\alpha_0 = 0$$

$$\cos kt: \quad -\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j \cos k\tau_j\Big)\alpha_{2k-1} + \Big(kI - \sum_{j=1}^{s} A_j \sin k\tau_j\Big)\alpha_{2k} = 0$$

$$\sin kt: \quad \Big(-kI + \sum_{j=1}^{s} A_j \sin k\tau_j\Big)\alpha_{2k-1} - \Big(\sum_{j=1}^{s} A_j \cos k\tau_j\Big)\alpha_{2k} = 0.$$

Следовательно, для существования ненулевого 2π-периодического решения уравнения (6) необходимо и достаточно, чтобы имела место нестрогая альтернатива: или выполняется равенство $\det \sum_{j=1}^{s} A_j = 0$, или выполняется равенство $\det \mathbb{A}_k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.■

3 Свойства периодических решений для линейного неоднородного уравнения

Приведем некоторые общие, хорошо известные для обыкновенных дифференциальных уравнений свойства периодических решений, которые будут необходимы для дальнейших рассуждений.

Предложение 1. *Пусть выполнены условия следствия 1, тогда решение $x(\cdot)$ уравнения (1) является 2π-периодическим тогда и только тогда, когда для него выполняется равенство $x(0) = x(2\pi)$.*

`Доказательство.` Доказательство этого утверждения легко вытекает из 2π-периодичности функции $g(\cdot)$ по t и выполнения условия существования и единственности решения задачи Коши (3)-(4) (Следствие 1). Предложение доказано.■

Перейдем к рассмотрению линейного неоднородного уравнения

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} A_j x(t+\tau_j) + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где A_j - $(n \times n)$ матрица, каждый элемент которой принадлежиту $\mathbb{R}$ и $\tau_j \in [0, 2\pi)$, $j \in \{1, ..., s\}$, $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ - 2π-периодическая функция. Наряду с ним будем рассматривать также и соответствующее линейное однородное уравнение

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} A_j x(t+\tau_j), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Условия (I)-(IV) для правых частей уравнений (11) и (12), очевидно, будут выполнены. Определим константу

$$M = \max_{1\le j\le s} \|A_j\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Теорема 3. *Пусть для некоторого $\mu \in (0,1)$ выполнено неравенство* (5)*, принимающее вид*

$$M\sum_{j=1}^{s}\mu^{-|\tau_j|} < \ln\mu^{-1}. \tag{13}$$

Тогда, для существования единственного 2π-периодическое решение неоднородного уравнения (11) *необходимо и достаточно, чтобы единственным 2π-периодическим решением однородного уравнения* (12) *была функция, тождественно равная нулю.*

`Доказательство.` Прежде чем приступить к доказательству, введем в рассмотрение матрицу фундаментальных решений $\phi(t)$. Она является решением матричного уравнения

$$\dot{\phi}(t) = \sum_{j=1}^{s} A_j\phi(t+\tau_j), \quad t \in \mathbb{R},$$

с начальным условием

$$\phi(0) = \mathbb{I}.$$

Существование такой матрицы фундаментальных решений вытекает из следствия 1. В силу того же следствия 1, любое решение однородного уравнения (12) представимо в виде $x(t) = \phi(t)x(0)$, а произвольное решение неоднородного уравнения (11) имеет представление $x(t) = \phi(t)x(0) + \psi(t)$, где $\psi(t)$ -частное решение уравнения (11) с начальными условиями $\psi(0) = 0$. Используя это, приступим непосредственно к доказательству теоремы.

`Достаточность.` Пусть тривиальное решение является единственным 2π-периодическим решением однородного уравнения (12). Тогда из предложения 1 и из того, что для решений однородного уравнения (12) справедливо представление $x(2\pi) = \phi(2\pi)x(0)$ получаем, что единственным решением уравнения $x = \phi(2\pi)x$ должно быть $x = 0$. Следовательно $\det(\mathbb{I} - \phi(2\pi)) \neq 0$. С другой стороны, для произвольного решения неоднородного уравнения (11) справедливо равенство $x(2\pi) = \phi(2\pi)x(0) + \psi(2\pi)$. Так как для периодического решения выполнено условие $x(0) = x(2\pi)$, задача нахождения периодического решения неоднородного уравнения сводится к решению уравнения $(\mathbb{I} - \phi(2\pi))x = \psi(2\pi)$. Так как $det(\mathbb{I} - \phi(2\pi)) \neq 0$, то получим единственность 2π-периодического решения неоднородного уравнения (11).

`Необходимость.` Пусть для неоднородного уравнения (11) существует единственное 2π-периодическое решение. Доказательство проведем от противного. Предположим, что для однородного уравнения (12) помимо нулевого существует, как минимум, еще одно 2π-периодическое решение. Из этого следует, что $\det(\mathbb{I} - \phi(2\pi)) = 0$. В таком случае, уравнение $(\mathbb{I} - \phi(2\pi))x = \psi(2\pi)$ либо не будет иметь решений, либо будет иметь бесконечное число решений, что противоречит единственности 2π-периодического решения неоднородного уравнения (11). Теорема доказана.■

При доказательстве теоремы мы выяснили, что при существовании ненулевого периодического решения для однородное уравнение (12) соответствующее неоднородное уравнение (11) может иметь, либо бесконечное число периодических решений, либо не иметь их вовсе. Для иллюстрации рассмотрим пример простейшего одномерного обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = \xi(t)$. Для него $A_j \equiv 0, \quad j = \overline{1,s}$ и соответствующее линейное однородное уравнение примет вид $\dot{x} = 0$. То есть линейное однородное уравнение имеет бесконечное число периодических решений $x(t) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Тогда в качестве $\xi(t)$ рассмотрим функцию $\xi(t) \equiv 1$. В этом случае семейство решений будет иметь вид $x(t) = t + C$, $C \in \mathbb{R}$, т. е. периодических решений у этого уравнения не будет. С другой стороны, если положить $\xi(t) = \cos t$, то решения уравнения примут вид $x(t) = \sin t + C$, $C \in \mathbb{R}$, т. е. все решения являются периодическими.

Теперь, на основе теоремы 3 и леммы 1 можно сформулировать следствие, уточняющее теорему 3.

Следствие 2. *Пусть для некоторого $\mu \in (0,1)$ справедливо неравенство* (13)*. Неоднородное уравнение* (11) *имеет единственное 2π-периодическое решение тогда и только тогда, когда для $(n \times n)$ матриц A_j, $j \in \{1, ..., s\}$ и отклонений $(\tau_1, \cdots, \tau_s) \in [0, 2\pi) \times ... \times [0, 2\pi)$ выполняются условия* (10).

4 Оператор периодических решений

Вернемся к рассмотрению линейного неоднородного уравнения (11), в котором отклонения $\tau_j \in [0, 2\pi), \quad j \in \{1, ..., s\}$ являются соизмеримыми, а $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad r \in \{0, 1, ...\}$ является 2π-периодической функцией. Будем рассматривать также и соответствующее линейное неоднородное уравнение (11), для параметров которого выполняются условия следствия 2.

Каждое такое неоднородное уравнение определяет оператор $\mathbb{P}$ периодических решений следующим образом: в силу следствия 2, при каждой 2π-периодической функции $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad l \in \{0, 1, ...\}$ следует положить $\mathbb{P}\xi(\cdot) = x(\cdot)$, где $x(\cdot)$ является единственным 2π-периодическим решением соответствующего линейного неоднородного уравнения (11) (более того, $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(r+1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$).

При каждом $r = 0, 1, ...$ определим пространства

$$\mathbb{C}_{2\pi}^{(r)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)) = \Big\{ x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(r)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \Big| \quad x^{(j)}(t) = x^{(j)}(t + 2\pi), \quad j = 0, ..., r, \quad t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Следовательно, при каждом $r = 0, 1, ...$ определен линейный оператор

$$\mathbb{P} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(r)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(r+1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \mathbb{P}\xi(\cdot) = x(\cdot). \tag{14}$$

Легко видеть, что действие оператора $\mathbb{P}$ является инъективным. При операторе $\mathbb{P}$ мы не будем ставить индекс r, так как это не приводит к недоразумению. Более того, оператор $\mathbb{P}$ для $r \in \{1, 2, ...\}$ является сужением аналогичного оператора при индексе $(r - 1)$.

При каждом $r = 0, 1, ...$ определим пространства

$$\mathbb{C}_{2\pi}^{(r),n} = \Big\{ x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(r)}([0, 2\pi], \mathbb{R}^n) \Big|, \quad x^{(j)}(0) = x^{(j)}(2\pi), \quad j = 0, ..., r \Big\}.$$

Норму в этих пространствах введем такую же как в $\mathbb{C}^{(r)}([0, 2\pi], \mathbb{R}^n)$. В силу предложения 1, примененного к неоднородному уравнению (11), оператор периодических решений $\mathbb{P}$ находится во взаимно однозначном соответствии со своим ограничением на интервал $[0, 2\pi]$, который при каждом $k = 0, 1, ...$ имеет вид

$$\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(r),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(r+1),n}, \quad \hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot) = \hat{x}(\cdot) \tag{15}$$

и также является инъективным.

Пусть $\mathbb{J} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(r+1),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(r),n}, \quad r = 0, 1, ...$ оператор естественного вложения. В дальнейшем, под оператором периодических решений будем подразумевать линейный оператор $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(r),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(r),n}, \quad r = 0, 1, ...$ Очевидно, что действие оператора $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$ также является инъективным.

Предложение 2. *Пусть для некоторого* $\mu \in (0, 1)$ *справедливо неравенство* (13) *и при всех* $k \in \mathbb{N}$ *одновременно выполняются условия* (10). *Тогда оператор*

$$\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}, \quad \hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot) = \hat{x}(\cdot). \tag{16}$$

является непрерывным.

`Доказательство.` Оно непосредственно следует из теоремы 2 и замечания 1. Предложение доказано. ■

Одной непрерывности оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ недостаточно. Нам потребуется еще и точная оценка нормы такого оператора. Однако, оценка нормы такого оператора затруднительна. В действительности нам будет достаточно иметь оценки, полученные для сужения рассматриваемого оператора на подпространство 2π-периодических функций класса $\mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}$. Для этого определим величины

$$\mathbb{A} = \Big\| \Big(\sum_{j=1}^{s} A_j \Big)^{-1} \Big\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \mathbb{D} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}^2 \Big)^{1/2}. \tag{17}$$

Предложение 3. *Пусть выполняются условия предложения 2. Тогда*

$$\sup_{\hat{\xi}(\cdot)\in\mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n},\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}=1} \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \le \sqrt{\mathbb{A}^2+2\mathbb{D}^2}.$$

`Доказательство.`

1. *Построение действия оператора* $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ *в явном виде на функциях* $\hat{\xi}(\cdot)\in\mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}$.
Используя ряды Фурье, построим оператор $(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}})^{-1}$. Разложим в ряд Фурье периодическое решение $\hat{x}(\cdot)$ уравнения (11) и функцию $\hat{\xi}(\cdot)$ из правой части этого уравнения

$$\hat{x}(t)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{2k-1}\cos kt+\alpha_{2k}\sin kt)$$

$$\hat{\xi}(t)=\beta_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{2k-1}\cos kt+\beta_{2k}\sin kt).$$

Так как

$$\hat{\xi}(t)=\dot{\hat{x}}(t)-\sum_{j=1}^{s}A_j\hat{x}(\,(t+\tau_j)(mod\,2\pi)\,),$$

то, подставляя вместо соответствующих функций их разложения в ряды Фурье и приравнивая коэффициенты при соответствующих базисных функциях, получаем

$$\beta_0=-\Big(\sum_{j=1}^{s}A_j\Big)\alpha_0$$

$$\beta_{2k-1}=-\Big(\sum_{j=1}^{s}A_j\cos k\tau_j\Big)\alpha_{2k-1}+\Big(kI-\sum_{j=1}^{s}A_j\sin k\tau_j\Big)\alpha_{2k}$$

$$\beta_{2k}=\Big(-kI+\sum_{j=1}^{s}A_j\sin k\tau_j\Big)\alpha_{2k-1}-\Big(\sum_{j=1}^{s}A_j\cos k\tau_j\Big)\alpha_{2k},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Для любого $k\in\mathbb{N}$ коэффициенты β_{2k-1} и β_{2k} удовлетворяют матричному уравнению

$$\begin{pmatrix}\beta_{2k-1}\\ \beta_{2k}\end{pmatrix}=\mathbb{A}_k\begin{pmatrix}\alpha_{2k-1}\\ \alpha_{2k}\end{pmatrix},$$

где $(2n\times 2n)$ матрица $\mathbb{A}_k$ определяется формулой (7).

Из условий предложения 2 следует, что такие матрицы являются невырожденными и поэтому справедливы равенства

$$\alpha_0=-\Big(\sum_{j=1}^{s}A_j\Big)^{-1}\beta_0$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_{2k-1}\\ \alpha_{2k}\end{pmatrix}=\mathbb{A}_k^{-1}\begin{pmatrix}\beta_{2k-1}\\ \beta_{2k}\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Таким образом оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ в явном виде принимает вид

$$(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot))(t)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{2k-1}\cos kt+\alpha_{2k}\sin kt)=$$

$$= -\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j\Big)^{-1}\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\Big((\bar{A}_k^2 + \underline{A}_k^2)^{-1}\underline{A}_k\beta_{2k-1} - (\bar{A}_k^2 + \underline{A}_k^2)^{-1}\underline{A}_k\beta_{2k}\Big)\cos kt +$$

$$+\Big((\bar{A}_k^2 + \underline{A}_k^2)^{-1}\underline{A}_k\beta_{2k-1} + (\bar{A}_k^2 + \underline{A}_k^2)^{-1}\bar{A}_k\beta_{2k}\Big)\sin kt\Big\}.$$

2.*Мажорирование нормы* $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}, \quad \hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}, \quad \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq 1.$
Для вывода оценок, сформулированных в предложении 3, нам следует решить следующую экстремальную задачу:

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \to \sup_{\hat{\xi}(\cdot)} \tag{18}$$

при условии

$$\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}, \quad \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq 1. \tag{19}$$

Легко видеть, что для любой координаты $i \in \{1, ..., n\}$ справедлива следующая цепочка

$$\alpha_{i,2k-1}\cos kt + \alpha_{i,2k}\sin kt = \sqrt{\alpha_{i,2k-1}^2 + \alpha_{i,2k}^2}\Big(\frac{\alpha_{i,2k-1}}{\sqrt{\alpha_{i,2k-1}^2 + \alpha_{i,2k}^2}}\cos kt +$$

$$+\frac{\alpha_{i,2k}}{\sqrt{\alpha_{i,2k-1}^2 + \alpha_{i,2k}^2}}\sin kt\Big) = \sqrt{\alpha_{i,2k-1}^2 + \alpha_{i,2k}^2}\ (\cos\theta_{ik}\cos tk + \sin\theta_{ik}\sin tk) =$$

$$= \sqrt{\alpha_{i,2k-1}^2 + \alpha_{i,2k}^2}\ cos(\theta_{ik} - kt) \leq \sqrt{\alpha_{i,2k-1}^2 + \alpha_{i,2k}^2},$$

где

$$\cos\theta_{ik} = \frac{\alpha_{i,2k-1}}{\sqrt{\alpha_{i,2k-1}^2 + \alpha_{i,2k}^2}}, \quad \sin\theta_{ik} = \frac{\alpha_{i,2k}}{\sqrt{\alpha_{i,2k-1}^2 + \alpha_{i,2k}^2}}.$$

Тогда очевидно, что

$$\|\alpha_{2k-1}\cos kt + \alpha_{2k}\sin kt\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sqrt{\|\alpha_{2k-1}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\alpha_{2k}\|_{\mathbb{R}^n}^2}$$

С другой стороны легко видеть, что

$$\|\alpha_{2k-1}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\alpha_{2k}\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \left\|\begin{pmatrix}\alpha_{2k-1}\\ \alpha_{2k}\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^{2n}}^2 = \left\|\mathbb{A}_k^{-1}\begin{pmatrix}\beta_{2k-1}\\ \beta_{2k}\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^{2n}}^2 \leq \|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}^2\left\|\begin{pmatrix}\beta_{2k-1}\\ \beta_{2k}\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^{2n}}^2 =$$

$$= \|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}^2(\|\beta_{2k-1}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\beta_{2k}\|_{\mathbb{R}^n}^2)$$

Учитывая вышеприведенные оценки получаем следующую оценку

$$\|\alpha_{2k-1}\cos kt + \alpha_{2k}\sin kt\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sqrt{\|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}^2(\|\beta_{2k-1}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\beta_{2k}\|_{\mathbb{R}^n}^2)}.$$

Таким образом, для всякой функций $\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}, \quad \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} = 1$ норма $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}$ мажорируется следующим образом

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j\Big)^{-1}\beta_0\Big\|_{\mathbb{R}^n} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}\sqrt{\|\beta_{2k-1}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\beta_{2k}\|_{\mathbb{R}^n}^2}\Big). \tag{20}$$

Ниже будет показано, что ряд в правой части полученного неравенства сходится.

3.*Вспомогательная экстремальная задача для завершения оценки нормы* $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{2\pi}}$. Оценка правой части последнего неравенства затруднительна. Такую задачу мы можем заменить на более простую. Для этого значение правой части последнего неравенства будем максимизировать на более широком множестве функций $\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{L_2([0,2\pi],\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{2\pi}$. Такая экстремальная задача формулируется следующим образом:

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j\Big)^{-1}\beta_0\Big\|_{\mathbb{R}^n} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}\sqrt{\|\beta_{2k-1}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|\beta_{2k}\|^2_{\mathbb{R}^n}}\Big) \to \sup_{\beta_k, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \tag{21}$$

при условии

$$\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{L_2([0,2\pi],\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{2\pi}. \tag{22}$$

Очевидно, что при этом, верхняя грань значения функционала в задаче (21)-(22) больше чем верхняя грань значения функционала в задаче (18)-(19). По равенству Парсеваля относительно ортогонального базиса $\{1, \cos kt, \sin kt\}_{k\in\mathbb{N}}$ пространства $L_2([0,2\pi],\mathbb{R}^n)$

$$\|\hat{\xi}(\cdot)\|^2_{L_2([0,2\pi],\mathbb{R}^n)} = \int_0^{2\pi}\|\hat{\xi}(t)\|^2_{\mathbb{R}^n}dt = 2\pi\|\beta_0\|^2_{\mathbb{R}^n} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\|\beta_k\|^2_{\mathbb{R}^n}.$$

В таком случае, экстремальную задачу (21)-(22) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j\Big)^{-1}\beta_0\Big\|_{\mathbb{R}^n} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}\sqrt{\|\beta_{2k-1}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|\beta_{2k}\|^2_{\mathbb{R}^n}}\Big) \to \sup_{\beta_k, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \tag{23}$$

при условии

$$\|\beta_0\|^2_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\|\beta_k\|^2_{\mathbb{R}^n} \leq 1. \tag{24}$$

4.*Завершение доказательства предложения.*

Введем в рассмотрение пространство числовых последовательностей l_2. Рассмотрим элементы этого пространства r_1 и r_2, которые определяются по правилу

$$r_1 = \Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j\Big)^{-1}\Big\|_{\mathbb{R}^n}, \|\mathbb{A}_1^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}, \|\mathbb{A}_2^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}, ...\Big\},$$

$$r_2 = \Big\{\sqrt{2}\|\beta_0\|_{\mathbb{R}^n}, \sqrt{\|\beta_1\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|\beta_2\|^2_{\mathbb{R}^n}}, \sqrt{\|\beta_3\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|\beta_4\|^2_{\mathbb{R}^n}}, ...\Big\}.$$

Легко видеть, что r_1 принадлежит пространству l_2, т.к., как было отмечено выше, для достаточно больших k имеет место $\|\Lambda_k^{-1}\|^2_{\mathbb{R}^{2n}} = O(1/k^2)$ откуда и будет следовать неравенство $\|r_1\|_{l_2} < +\infty$. Оптимизационная задача (23)-(24) в новых терминах будет иметь следующий вид:

$$(r_1, r_2)_{l_2} \to \sup_{r_2\in l_2}$$

при условии

$$\|r_2\|^2_{l_2} \leq 2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим оценку

$$(r_1, r_2)_{l_2} \leq \|r_1\|_{l_2}\|r_2\|_{l_2} \leq \sqrt{2}\|r_1\|_{l_2}.$$

Норма r_1 имеет вид

$$\|r_1\|^2_{l_2} = \frac{1}{2}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j\Big)^{-1}\Big\|^2_{\mathbb{R}^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbb{A}_k^{-1}\|^2_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

Известно, что равенство в неравенстве Коши-Буняковского достигается в случае коллинеарности векторов. Следовательно, если подобрать такие $\bar{\beta}_k, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, при которых вектор r_2 будет коллинеарен вектору r_1 и будет выполнено равенство $\|r_2\|_{l_2} = \sqrt{2}$, исходная задача максимизации будет решена. Очевидно, такие $\bar{\beta}_k, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ существуют. В таком случае, целевой функционал (23) в точке максимума принимает значение

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j\Big)^{-1}\bar{\beta}_0\Big\|_{\mathbb{R}^n} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\|\mathbb{A}_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n}}\sqrt{\|\bar{\beta}_{2k-1}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|\bar{\beta}_{2k}\|^2_{\mathbb{R}^n}}\Big) =$$

$$= \Big(\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{s} A_j\Big)^{-1}\Big\|^2_{\mathbb{R}^n} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\|\mathbb{A}_k^{-1}\|^2_{\mathbb{R}^{2n}}\Big)^{1/2} = \sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2}$$

откуда и следует окончательная оценка

$$\sup_{\hat{\xi}(\cdot)\in\mathbb{C}^{(1),n}_{2\pi}, \|\hat{\xi}(\cdot)\|^2_{\mathbb{C}^{(0),n}_{2\pi}}\le 1} \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{2\pi}} \le \sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2}.$$

Предложение доказано. ■

Замечание 2. *В работе [1] для случая скалярной линеаризации были получены аналогичные оценки нормы оператора периодических решений* $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$. *Однако если в данном случае компонента* $\mathbb{D}$ *в формуле* (17) *вычисляется через нормы матриц* $\mathbb{A}_k^{-1}$, $k = 1, 2, \dots$, *то в работе [1] аналогичная компонента считается через* $1/\det A_k$ *(см. формулу (16) в работе [1]). Это объясняется тем, что для скалярного случая будет справедливо соотношение* $\|A_k^{-1}\|_{\mathbb{R}^2} = 1/\sqrt{\det A_k}$ *(матрица* A_k *в работе [1] является аналогом матрицы* $\mathbb{A}_k$*). Поэтому сформулированный в данной работе результат является обобщением результата, полученного в работе [1] для случая скалярной линеаризации. Отметим, что в не скалярном случае между величинами детерминанта* $\det \mathbb{A}_k$ *и нормой* $\|\mathbb{A}_k\|_{\mathbb{R}^{2n}}$ *нет никакой взаимосвязи.*

5 Существование и единственность 2π-периодического решения для нелинейного уравнения.

В данном заключительном разделе будут получены условия, обеспечивающие существование и единственность периодических решений для нелинейного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (1), в котором $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$ является 2π-периодической функцией. Наряду с уравнением (1) будем рассматривать и уравнение (2), полученное из уравнения (1) путем процедуры линеаризации. Если функция $g(.)$ из уравнения (1) удовлетворяет условию Липщица с константой L_g

$$\|g(t, x_1, ..., x_s) - g(t, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \le L_g \sum_{j=1}^{s} \|x_j - \overline{x}_j\|_{\mathbb{R}^n}, \tag{25}$$

то в уравнении (2) функция f

$$f(.) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)) - \sum_{j=1}^{s} A_j x(t+\tau_j) \tag{26}$$

также будет удовлетворять условию Липщица с некоторой константой L_f. С каждой линеаризацией уравнения (1) связана линейная неоднородная система

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} A_j x(t+\tau_j) + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

В свою очередь, если для матриц A_j, $j \in \{1, ..., s\}$ и отклонений $(\tau_1, \cdots, \tau_s) \in [0, 2\pi) \times ... \times [0, 2\pi)$ выполняются условия следствия 2, то корректно определен оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$. Определим оператор

$$\mathbb{F} : \mathbb{C}^{(r)}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^{(r)}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad r = 0, 1,$$

$$\mathbb{F}[x(\cdot)](t) = f(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ограничение этого оператора на функции определенные на отрезок $[0, 2\pi]$ будет обозначаться через $\hat{\mathbb{F}}$

$$\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}^{(r),n}_{2\pi} \to \mathbb{C}^{(r),n}_{2\pi}, \quad r = 0, 1,$$

$$\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)](t) = f(t, \hat{x}(\,(t+\tau_1)(mod\,2\pi)\,), \cdots, \hat{x}(\,(t+\tau_s)(mod\,2\pi)\,)\,), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Теорема 4. *Пусть:*
a) в нелинейном уравнении (1) функция $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n)$ является 2π-периодической функцией и удовлетворяет условию Липщица (25), а L_f, соответственно, константа Липщица функции $f(.)$;
b) для некоторого $\mu \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$M \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln\, \mu^{-1}, \quad M = \max_{1 \le j \le s} \|A_j\|_{\mathbb{R}^n};$$

c) при всех $k \in \mathbb{N}$ одновременно справедливы условие (10).
Если справедливо неравенство

$$sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1, \tag{28}$$

где $\mathbb{A}$ и $\mathbb{D}$ определяются по формуле (17), то для уравнения (1) существует 2π-периодическое решение. Такое решение является единственным и оно принадлежит пространству $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Более того, для любой начальной функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(2),n}_{2\pi}$ последовательность $\hat{x}^m(\cdot) = (\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^m[\hat{x}^0(\cdot)]$, $m \in \mathbb{N}$ стремится к единственной функции $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(2),n}_{2\pi}$, и справедлива оценка сходимости:

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^m[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{2\pi}} \le \left(sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2}\right)^m \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{2\pi}}. \tag{29}$$

Периодическое решение $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ индуцируется функцией $\hat{x}(\cdot)$ путем продолжения ее по периодичности 2π на всю числовую ось $\mathbb{R}$.

`Доказательство.` В пространстве $\mathbb{C}^{(0),n}_{2\pi}$ определим операторное уравнение

$$(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)])(\cdot) = \hat{x}(\cdot). \tag{30}$$

В силу следствия 2, продолжение по периодичности 2π на всю числовую ось всякого решения уравнения (30) задает периодическое решение уравнения (2) (соответственно, уравнения (1)) и наоборот. Так как $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n)$, то каждое решение уравнения (30) будет принадлежать пространству $\mathbb{C}^{(2),n}_{2\pi}$.

Из условия Липшица для функции $f(\cdot)$ следует неравенство

$$\|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq sL_f \|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}.$$

В силу предложения 3, для любых $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}$ справедлива следующая цепочка неравенств

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} = \|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \ \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\big(\frac{\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]}{\|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}}\big)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2}\ \ \|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2}\ \ \|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}. \tag{31}$$

Из неравенства (31) несложно получить фундаментальность последовательности $\hat{x}^m(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^m[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$ для любой функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}$. По предложению 2 оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ непрерывен и, соответственно, непрерывен оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$. Поэтому всякая фундаментальная последовательность $(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^m[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot)$ сходится к неподвижной точке уравнения (30). Остается показать, что для уравнения (30) неподвижная точка единственная. Мы уже отмечали, что каждая неподвижная точка уравнения (30) принадлежит пространству $\mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$. Если $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot)$ различные неподвижные точки уравнения (30), то, в силу неравенства (31), должно выполняться соотношение

$$\|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} = \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} < \|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \tag{32}$$

чего не может быть. Теорема доказана. ■

В теореме 4 при выборе линеаризации в линейной части берутся только те отклонения, которые присутствуют в правой части исходного функционально-дифференциального уравнения (1). И это по существу. Если при выборе линеаризации окажется, что в функции $f(.)$ есть хотя бы одно отклонение $\bar{\tau}$, не совпадающее ни с одним из отклонений $\tau_1, ..., \tau_s$, тогда нетрудно убедиться, что неравенство $sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1$, как правило, нарушается.

Пример.

Приведем пример когда скалярная линеаризация, рассмотренная в работе [1], не способна выявить существование единственного периодического решения, в то время как матричная линеаризация такое решение выявляет. Рассмотрим задачу

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \epsilon f(t, x_1(t+\tau), x_2(t+\tau)).$$

Функция $f(\cdot)$ - 2π-периодической по времени с константой Липшица L_f, отклонение τ подбирается таким, чтобы были выполнены условия отсутствия резонансности (10). Величина $\epsilon > 0$ - некоторый, достаточно маленький параметр. Очевидно, в такой задаче для матричной линеаризации проще всего выбрать матрицу A следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что если взять достаточно маленькое значение параметра $\epsilon > 0$, то всегда можно добиться выполнения неравенства $2\epsilon L_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1$, что в свою очередь гарантирует существования единственного 2π-периодического решения.

Теперь проверим, можно ли определить наличие единственного 2π-периодического решения для данного уравнения с помощью выделения скалярной линейной части. В таком случае уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \epsilon f(t, x_1(t+\tau), x_2(t+\tau)).$$

Хотелось бы проверить существует ли такое значение параметра $a \in \mathbb{R}$, при котором выполнялось бы неравенство $2L_{\tilde{f}}\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1$, где $\mathbb{A} = 1/|a|$, $\mathbb{D} = \sum_{k=1}^{\infty} 1/\det A_k$ (см. формулу (16) и теорему 4 в работе [1]), $L_{\tilde{f}}$ константа Липшица для функции

$$\tilde{f}(t, x(t), x(t+\tau)) = \begin{pmatrix} [-1-a] & 0 \\ 0 & [1-a] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \epsilon f(t, x_1(t+\tau), x_2(t+\tau)).$$

Легко видеть, что

$$\left\| \begin{pmatrix} -1-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} = 1 + |a|$$

и имеют место неравенства $L_{\tilde{f}} \geq 1 + |a|$, $\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} > \mathbb{A} = 1/|a|$, из которых следует справедливость оценок

$$2L_{\tilde{f}}\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} > 2(1 + |a|)\frac{1}{|a|} > 2.$$

В таком случае, признак существования 2π-периодического решения при скалярной линеаризации, имеющего вид неравенства $2L_{\tilde{f}}\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1$, не выполняется ни при каких значениях ϵ и $a \in \mathbb{R}$, хотя при достаточно малых ϵ такое решение существует.

6 Вариационная задача, связанная с вопросом существования 2π-периодического решения для нелинейного уравнения.

Существование и единственность 2π-периодического решения для исходного нелинейного уравнения (1) устанавливалось на основе изучения свойств линеаризации правой части уравнения, приведенное в (2). Признак существования и единственности периодического решения сформулирован в виде строгого неравенства (28). Поэтому естественна постановка следующей вариационной задачи.

Вариационная задача. Минимизировать функционал

$$J(A_1, ..., A_s) = sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} \to \inf_{A_1,...,A_s \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})},$$

при ограничениях:

$$M\sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln \mu^{-1}, \quad M = \max_{1\leq j\leq s} \|A_j\|_{\mathbb{R}^n};$$

$$\sum_{j=1}^{s} A_j \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \mathbb{A}_k \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Здесь $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ кольцо всех матриц степени n, а $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ группа всех обратимых матриц степени n. Величины $\mathbb{A}, \mathbb{D}$ определяются в (17), а матрицы $\mathbb{A}_k$, $k = 1, 2, ...$ определяются в (7). В такой вариационной задаче всегда можно выбрать минимизирующую последовательность $A_1(r), ..., A_s(r)$, $r = 1, 2, ...$, на которой предел значений $J(A_1(r), ..., A_s(r))$ стремится к нижней грани J_* функционала. Теперь мы можем сформулировать теорему существования и единственности периодического решения в терминах вариационной задачи.

Теорема 5. *Пусть в нелинейном функционально-дифференциальном уравнении* (1) *функция* $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$ *является 2π-периодической функцией и удовлетворяет условию Липщица* (25)*. Если в вариационной задаче выполняется неравенство*

$$J_* < 1,$$

то для уравнения (1) *существует 2π-периодическое решение. Такое решение является единственным и оно принадлежит пространству $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Более того, для любой начальной* *функции* $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$ *последовательность* $\hat{x}^m(\cdot) = (\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^m[\hat{x}^0(\cdot)], \quad m \in \mathbb{N}$ *стремится к единственной функции* $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$ *и справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^m[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq J_*^m \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}.$$

Периодическое решение $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *индуцируется функцией* $\hat{x}(\cdot)$ *путем продолжения ее по периодичности* 2π *на всю числовую ось* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Начиная с некоторого достаточно большого N для линеаризаций правой части исходного уравнения (1) с матрицами $A_1(r), ..., A_s(r), \;\; r \geq N$ из минимизирующей последовательности справедливы все условия теоремы 4. Поэтому, для такого уравнения существует, причем единственное, 2π-периодическое решение, для которого при $r \geq N$ справедливы оценки

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^m[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq \left(sL_f\sqrt{\mathbb{A}(r)^2 + 2\mathbb{D}(r)^2}\right)^m \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}.$$

Если взять предел правой части полученного неравенства, то оно перейдет в соответствующее неравенство из теоремы 5. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Л. А. Бекларян, Ф. А. Белоусов. Периодические решения для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. // Дифференциальные уравнения. 2015, Т. 51, є12, с. 1565-1579.

[2] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. - М.: Наука, 1981. -918 с.

[3] Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. Л. Фуфаев. Введение в теорию нелинейных колебаний. -М.: Наука, 1976. -с. 385.

[4] М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. Геометические методы нелинейного анализа. -М.: Наука, 1975, - 512 с.

[5] М.А. Красносельский, А.И. Перов, А.И. Поволоцкий, П.П. Забрейко. Векторные поля на плоскости. -М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1963.
-245 с.

[6] В. Н. Розенвассер. Колебания нелинейных систем. - М.: Наука, 1969.

[7] А. И. Перов, И. Д. Коструб. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка: монография. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга 2013. -с. 227.

[8] Л. А. Бекларян. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс, 2007. - 288 с. - (Методы современной математики; Вып. 5).