

## Вейвлет-анализ временных рядов в модели кочевников и земледельцев

Федор А. Белоусов<sup>1</sup> sky\_tt@list.ru

<sup>1</sup>Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский пр., 47, г. Москва, 117418, Россия

**Реферат.** Статья посвящена изучению полученных в более ранних работах временных рядов с помощью эконометрического и вейвлет-анализа. На первом этапе данного исследования был проведен эконометрический анализ, была построена регрессия, с помощью которой изучалось влияние численности кочевников и количества ресурса на численность земледельцев. Коэффициент детерминации ( $R^2$ ) построенной регрессии получился равным 0,81, статистика Дарбина-Уотсона равна 0,94, что свидетельствует о наличии положительной автокорреляции ошибок первого порядка. На следующем этапе осуществляется анализ на основе вейвлет-преобразований, с помощью которого удается избавиться от высокочастотных «шумов» и помехи в исследуемых временных рядах. В рамках данной работы были рассмотрены вейвлет Хаара и вейвлет Добеши порядка 2 (остальные вейвлеты дают похожие результаты). После того, как с помощью вейвлет-анализа временные ряды были очищены от помех, снова был применен регрессионный анализ. Коэффициент детерминации новых регрессий в зависимости от того какой вейвлет был применен и помехи какой частоты были убраны принял значения в диапазоне от 0,86 до 0,93. Однако статистика Дарбина-Уотсона уменьшила свои значения и стала принимать значения в пределах от 0,01 до 0,46, что по-прежнему говорит о наличии положительной автокорреляции ошибок первого порядка. В итоге поучаем, что в данной ситуации применение вейвлет-анализа заметно увеличивает объясняющую способность регрессии, с другой стороны проблему автокорреляции ошибок разрешить таким способом не удаётся, в некотором смысле она только усугубилась.

**Ключевые слова:** вейвлет-анализ, искусственные общества, имитационное моделирование, агент-ориентированные модели, нестационарные временные ряды, модель кочевников и земледельцев

## Wavelet analysis of time series in the model of nomads and tillers

Fedor A. Belousov<sup>1</sup> sky\_tt@list.ru

<sup>1</sup>Central Economics and Mathematics Institute RAS, Nachimovsky prospect, 47, Moscow, 117418, Russia

**Summary.** The article is devoted to the study of time series obtained in earlier works by econometric and wavelet analysis. At the first stage of this study, econometric analysis was conducted, regression was constructed. In the regression influence of the number of nomads and the amount of resource on the number of plowmen was studied. The coefficient of determination ( $R^2$ ) of the constructed regression turned out to be 0.81, the Durbin-Watson statistics equals to 0.94, which indicates the presence of positive first-order autocorrelation of errors. The next stage is an analysis based on wavelet transforms, which helps to get rid of high-frequency "noise" and interference in considered time series. Within the framework of this paper, the Haar wavelet and the Daubechies 2 tap wavelet were considered (the remaining wavelets give similar results). After the time series had been cleared by the wavelet analysis, regression analysis was applied again. The coefficient of determination of new regressions depending on which wavelet was applied and the interference of what frequency were removed took values in the range from 0.86 to 0.93. The coefficient of determination of new regressions depends on which wavelet was applied and the interference of what frequency were removed. It takes values in the range from 0.86 to 0.93. However, the Durbin-Watson statistics decreased its values and began to take values in the range from 0.01 to 0.46, which still indicates the presence of positive first-order autocorrelation of errors. In the end, we learn that in this situation, the application of wavelet analysis significantly increases the explanatory power of regression, on the other hand, the problem of autocorrelation of errors can not be resolved in this way, in some sense it is only getting worse.

**Keywords:** wavelet analysis, artificial society, simulation modeling, agent-based modeling, non-stationary time series, model of nomads and plowmen

*Работа выполнена при финансовой поддержке  
РФФИ, грант №16-36-00338*

### Введение

#### Описание данных

В работе [1] представлена агент-ориентированная модель взаимодействия двух типов цивилизаций, которые условно были названы «кочевниками» и «земледельцами». Каждый тип агента олицетворяет собой цивилизацию с соответствующим способом воспроизводством продукта. Если земледельцы могут самостоятельно производить продукт для собственного потребления, то кочевники самостоятельно производить продукт не в состоянии, поэтому единственный способ добыть его чтобы выжить,

это либо найти дикий ресурс, который с некоторой интенсивностью появляется на ареале, либо отобрать тот ресурс, который был произведен одним из земледельцев. В рамках построенной модели в работе [1] была проведена серия экспериментов, с помощью которой получен большой объем данных. На основе этих данных произведен статистический и эконометрический анализ, на базе которого удалось выявить ряд закономерностей. В данной работе также будет использован эконометрический подход, однако центральное место займет применение вейвлет-анализа, с помощью которого будут получены более сильные и статистически значимые закономерности.

Появление вейвлет-анализа можно датировать восьмидесятыми годами XX столетия.

Для цитирования

Белоусов Вейвлет-анализ временных рядов в модели кочевников и земледельцев // Вестник ВГУИТ. 2018. Т. 80. № 1. С. 288–297. doi:10.20914/2310-1202-2018-1-288-297

For citation

Belousov F.A. Wavelet analysis of time series in the model of nomads and tillers. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of VSUET]. 2018. vol.80. no. 1. pp. 288–297. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2018-1-288-297

Возникновение этого инструментария было вызвано необходимостью более чувствительного исследования сейсмических сигналов, в то время как используемый до этого метод Фурье не давал желаемых результатов. Вейвлет-анализ является мощной альтернативой классическому анализу Фурье. Новый метод также оказался применим в области теоретической физики и математике. Широкое применение вейвлет-анализ нашел в сфере обработки сигналов – очистка от шумов, сжатия данных и др. В настоящее время вейвлет-преобразование находит все более широкое применение в обработке временных рядов, будь это интернет трафик или биржевые котировки, распознавание образов и речи и др.

Существует много работ, в которых продемонстрировано применение вейвлет-преобразований на практике. Применение вейвлетов в статистике и анализе временных рядов изложено в работах [4, 5], исследование финансовых временных рядов с помощью вейвлет-преобразований продемонстрировано в работе [6] и [8], также вейвлет-анализ активно применяется в технических дисциплинах, в таких областях как радиосвязь (обработка сигналов) [9], также для решения других прикладных задач технического характера [7] и [10, 11].

Приведем на графике данные по динамике численности популяций кочевников и земледельцев, а также динамику численности ресурса (рисунок 1–3).

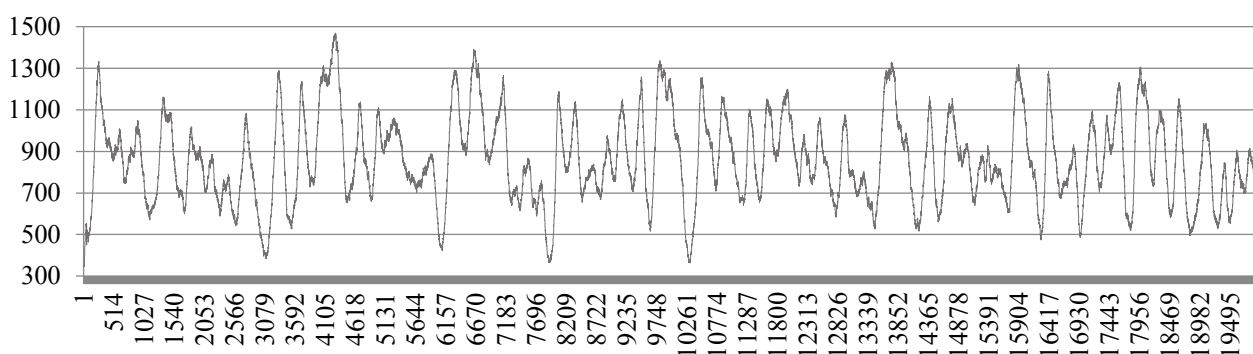


Рисунок 1. Численность земледельцев за 20000 периодов

Figure 1. The number of plowmen for 20000 periods

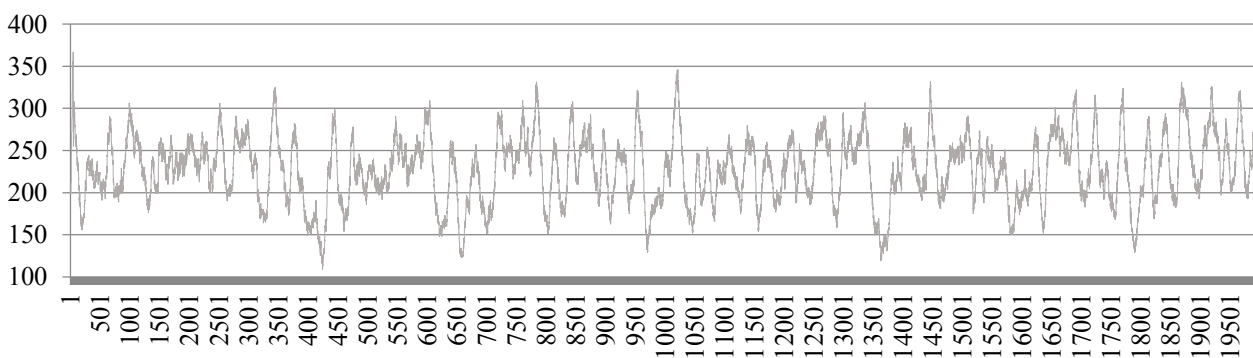


Рисунок 2. Численность кочевников за 20000 периодов

Figure 2. The number of nomads for 20000 periods

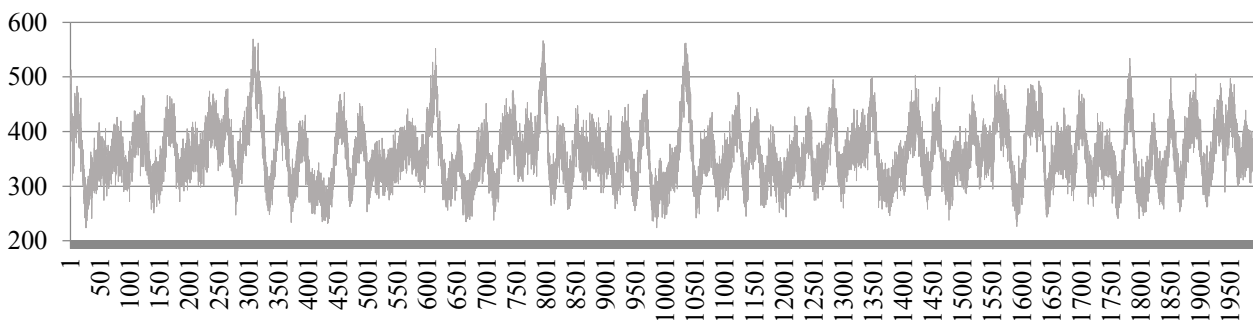


Рисунок 3. Численность ресурса за 20000 периодов

Figure 3. The number of resource for 20000 periods

Корреляционная матрица

Table 1.

Correlation matrix

	кочевники   nomads	землепашцы   husbandmen	ресурс   resource
кочевники   nomads	1	-0.4138	-0.0023
землепашцы   husbandmen	-0.4138	1	-0.7986
ресурс   resource	-0.0023	-0.7986	1

**Вейвлет-преобразования. Ортогональный кратномасштабный анализ**

Продемонстрируем теоретические моменты применения вейвлет-анализа. Вейвлет-анализ аналогичен преобразованию Фурье, однако имеет свои особенности. Данную часть постараемся описать кратко, не сильно вдаваясь в детали. Иллюстрировать будем все на примере вейвлета Хаара. Здесь мы опишем принцип вейвлет-разложения для случая ортогональных вейвлетов.

Рассуждения, которые мы будем здесь приводить, будут справедливы для случая ортонормированных вейвлетов. Более подробно с этой теорией можно ознакомиться в частности в книге [2].

**Определение.** Функция  $\varphi(x) \in L^2(R)$  называется масштабирующей, если она может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_n \varphi(2x - n), \quad (1)$$

где числа  $h_n, n \in Z$  удовлетворяют условию  $\sum_{n \in Z} |h_n|^2 < \infty$ .

Для каждого  $j \in Z$  можно построить систему следующих функций  $\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - n), n \in Z$ , которая будет ортонормированной системой функций (напоминаем, мы рассматриваем случай ортогональных в  $L^2(R)$  вейвлетов). Для каждого фиксированного  $j \in Z$  такие функции являются ортонормированным базисом подпространства  $V_j$ , эти пространства в свою очередь образуют бесконечную в обе стороны последовательность вложенных подпространств  $\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \subset V_j \subset \dots$ , причем такую, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} \quad \text{и} \quad \overline{\sum_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(R). \quad (2)$$

Для каждого из таких подпространств можно ввести операторы проектирования  $P_j : L^2(R) \rightarrow V_j$ , которые с возрастанием  $j$  дают все более точные приближения  $P_j(f)$  элементов  $f \in L^2(R)$ ,

$$P_j(f) = \sum_{n \in Z} (f, \varphi_{j,n}) \varphi_{j,n}(x),$$

где  $(f, \varphi_{j,n})$  – скалярное произведение в пространстве  $L^2(R)$ .

Число  $j$  характеризует уровень разрешения. Чем больше  $j$ , тем более мелкие носители имеют функции  $\varphi_{j,k}(x)$  и тем более детально коэффициенты  $(f, \varphi_{j,k})$  отражают свойства  $f(x)$ .

Отметим, что каждое подпространство  $V_j$  может быть разложено в прямую сумму ортогональных подпространств  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ . Это разложение позволяет  $j$ -й уровень приближения  $P_j$  представить в виде суммы  $P_j(f) = P_{j-1}(f) + P_{j-1}^W(f)$ . В базисах пространств  $V_{j-1}$  и  $W_{j-1}$  имеем:

$$P_j(f)(x) = \sum_{k \in Z} a_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x),$$

где  $a_{j-1,k} = (f, \varphi_{j-1,k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi_{j-1,k}(x)} dx$  – коэффициенты аппроксимации  $(j-1)$ -го уровня разрешения,  $d_{j-1,k} = (f, \psi_{j-1,k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_{j-1,k}(x)} dx$  – детализирующие коэффициенты или коэффициенты детализации,  $\{\psi_{j-1,k}\}_{k \in Z}$  – ортонормированный базис пространства  $W_{j-1}$ .

Очевидно, справедливо следующее разложение

$$P_j(f) = P_{j-1}(f) + P_{j-1}^W(f) = \\ = P_{j-2}(f) + P_{j-2}^W(f) + P_{j-1}^W(f).$$

Такое разложение можно совершать итерационно  $N$  раз, тогда получим

$$P_j(f) = P_{j-k}(f) + \sum_{k=1}^N P_{j-k}^W(f).$$

Вейвлет-анализ состоит из следующих шагов:

Выберем достаточно высокий уровень разрешения  $j$ , такой, что аппроксимация  $P_j(f)$  достаточно точно отражает функцию  $f$ . Если работа ведется с числовым рядом, то значения коэффициентов разложения для оператора  $P_j(f)$  приравниваются значениям рассматриваемого ряда.

Выбирается глубина разложения  $N$  и находятся коэффициенты разложения:

$$\left\{ \{a_{j-N,k}\} \quad \{d_{j-N,k}\} \quad \{d_{j-(N-1),k}\}, \dots, \{d_{j-1,k}\} \right\}.$$

Функция  $f(x)$  (или ряд) восстанавливается используя возможно измененные коэффициенты разложения:

$$f(x) = \sum_{k \in Z} a_{j-N,k} \varphi_{j-N,k}(x) + \\ + \sum_{k \in Z} d_{j-N,k} \psi_{j-N,k}(x) + \dots + \sum_{k \in Z} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x).$$

В данной работе с помощью такого разложения мы будем корректировать рассматриваемые временные ряды. А именно, будут обнуляться коэффициенты детализации, соответствующие высоким частотам. Самые высокочастотные коэффициенты детализации – это  $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z}$ , следующие по высокочастотности коэффициенты –  $\{d_{j-2,k}\}_{k \in Z}$  и т. д. После того, как несколько уровней коэффициентов детализации будут приравнены нулю (грубо говоря удалены «шумы»), исходный ряд будет восстановлен, но уже с учетом проделанной процедуры.

### Вейвлет Хаара

Покажем работу алгоритма вейвлет-разложения на примере самого простого вейвлета – вейвлета Хаара.

Масштабирующая функция вейвлета Хаара имеет вид

$$\varphi_H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно условие (1) выполняется, так как

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1) = \\ = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x-1) \right).$$

Соответственно  $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$ , для остальных  $k \in Z, k \neq 0, k \neq 1$  справедливо  $h_k = 0$ .

Очевидно, что для построенных с помощью такой масштабирующей функции подпространств  $V_j, j \in Z$  условия (2) будут выполнены.

Определим  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in Z}$  – ортонормированный базис подпространства  $W_j$ , ортогонального пространству  $V_j$ . Не трудно видеть, что

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^j}, & 2^j x - k \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -\sqrt{2^j}, & 2^j x - k \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \\ 0, & 2^j x - k \notin [0, 1) \end{cases}$$

Видно, что функции  $\psi_{j,k_1}$  и  $\varphi_{j,k_2}$  будут всегда ортогональны относительно скалярного произведения пространства  $L^2(R)$  при любых  $k_1$  и  $k_2$  ( $k_1 \neq k_2$ ) из пространства  $Z$ .

Принцип действия проектора  $P_j(f)$  в случае вейвлета Хаара достаточно прост – на участках где  $\varphi_{j,k}(x)$  не равна нулю коэффициенты  $a_{j,k}$  равны среднему значению функции  $f$  на этом участке

$$a_{j,k} = (f, \varphi_{j,k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi_{j,k}(x)} dx = \\ = \sqrt{2^j} \int_{k/2^j}^{(k+1)/2^j} f(x) dx.$$

Аналогично определяются коэффициенты для оператора  $P_j^W(f)$ .

Для случая, когда у нас задан ряд  $\{f_k\}_{k=1}^N$  вместо функции  $f$ , коэффициенты оператора  $P_{j-1}(f)$  определяются с помощью правила арифметического среднего, примененного к коэффициентам оператора  $P_j(f)$ . Так, если в соответствии с пунктом 1) вышеописанного алгоритма, в качестве коэффициентов оператора  $P_j(f)$  мы берем значения исходного ряда  $\{f_k\}_{k=1}^N$ , тогда коэффициенты оператора  $P_{j-1}(f)$  будут определяться по следующему правилу (не ограничивая общности будем считать, что  $N - \text{четно}$ )

$$\{a_{j-1,k}\}_{k=1}^{N/2} = \left\{ \frac{a_{j,1} + a_{j,2}}{2}, \frac{a_{j,3} + a_{j,4}}{2}, \dots, \frac{a_{j,N-1} + a_{j,N}}{2} \right\} = \left\{ \frac{f_1 + f_2}{2}, \frac{f_3 + f_4}{2}, \dots, \frac{f_{N-1} + f_N}{2} \right\}.$$

Коэффициенты оператора  $P_{j-1}^W(f)$  определяются по следующему правилу

$$\{d_{j-1,k}\}_{k=1}^{N/2} = \left\{ \frac{a_{j,1} - a_{j,2}}{2}, \frac{a_{j,3} - a_{j,4}}{2}, \dots, \frac{a_{j,N-1} - a_{j,N}}{2} \right\} = \left\{ \frac{f_1 - f_2}{2}, \frac{f_3 - f_4}{2}, \dots, \frac{f_{N-1} - f_N}{2} \right\}.$$

Аналогично, коэффициенты для операторов  $P_{j-i}(f)$  и  $P_{j-i}^W(f)$  определяются итерационно через коэффициенты оператора  $P_{j-i+1}(f)$ .

Соответственно восстановление коэффициентов проектора  $P_{j-i+1}(f)$  осуществляется

через коэффициенты проекторов  $P_{j-i}(f)$  и  $P_{j-i}^W(f)$  по следующему правилу:

$$a_{j-i+1,2k-1} = a_{j-i,k} + d_{j-i,k},$$

$$a_{j-i+1,2k} = a_{j-i,k} - d_{j-i,k}.$$

### Применение вейвлет-анализа к результатам работы модели «кочевников» и «землепашцев»

Применим вейвлет-анализ к временным рядам, которые были получены в результате работы модели «кочевников» и «землепашцев» (см. [1]). А именно, мы будем анализировать временные ряды численности популяций обоих видов, «кочевников» и «землепашцев». Кроме этого, в анализе также будет участвовать временной ряд, характеризующий количество ресурса (пищи), которое в каждый момент времени присутствует в рассматриваемом ареале. Применим вейвлет-анализ к этим данным и сделаем качественные выводы.

К рассматриваемым временным рядам будем применять различные вейвлет-преобразования с целью выяснения вопроса – какие вейвлеты подходят лучше для анализа изучаемых данных?

На первом этапе проведем простой эконометрический анализ исходных данных. На имеющихся данных методом наименьших квадратов оценим следующую регрессию:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t^1 + \beta_2 x_t^2 + \varepsilon_t, \quad (3)$$

где  $y_t$  – количество землепашцев в рамках ареала в каждый момент времени,  $x_t^1$  – количество кочевников в каждый момент времени,  $x_t^2$  – количество ресурса в каждый момент времени.

Длина временных рядов составляет равно 20000 периодов. Результаты применения регрессии видны в таблице 2.

Таблица 2.

Результаты регрессии

Table 2.

Regression results

	Коэффициенты Coefficients	Стандартная ошибка Standard error	t-статистика t-stat	P-Значение P-value	Нижние (lower) 95%	Верхние (upper) 95%
$\beta_0$	2527,769	5,815146	434,6871	0	2516,3706	2539,1669
$\beta_1$	-2,20738	0,016166	-136,543	0	-2,239066	-2,175692
$\beta_2$	-3,25125	0,012416	-261,861	0	-3,275589	-3,226916

$$R^2 = 0,81; \quad DW = 0,94$$

Видно, что  $R^2$  достаточно большой, однако тест Дарбина-Уотсона показывает наличие автокорреляции первого порядка, что мешает использовать ее для прогнозов. Отметим также, что проанализировав порядок автокорреляции можно утверждать, что он на много больше чем один.

Проведем вейвлет-анализ данных после чего применим методы эконометрики.

После применения вейвлет-преобразования ко всем трем временным рядам обнулили высокочастотные коэффициенты детализации и восстановили исходные временные ряды с учетом обнуленных коэффициентов. После этого проведем эконометрический анализ модифицированных временных рядов.

Начнем с самого простого вейвлета, а именно с применения вейвлета Хаара. Глубину разложения выберем равную  $N = 4$ .

Выясним какие результаты получатся, если сначала приравнять к нулю коэффициенты детализации первого уровня  $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z} = 0$ .

На следующем шаге приравниваем коэффициенты детализации первого и второго уровней  $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z} = 0$  и  $\{d_{j-2,k}\}_{k \in Z} = 0$  и на третьем шаге приравниваем нулю коэффициенты детализации первых трех уровней  $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z} = 0$ ,  $\{d_{j-2,k}\}_{k \in Z} = 0$  и  $\{d_{j-3,k}\}_{k \in Z} = 0$ . На заключительном шаге проведем анализ, приравняв все коэффициенты детализации нулю.

И так, приравнивая к нулю коэффициенты детализации на первом уровне  $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z} = 0$ , с учетом этого восстановим временные ряды и оценим регрессию аналогичную регрессии (3)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t^1 + \beta_2 x_t^2 + \varepsilon_t.$$

Полученные результаты видны в таблице 3.

Приравняем коэффициенты детализации на первом и втором уровнях. Восстановив с учетом этого временные ряды и оценив регрессию получаем результаты, которые можно наблюдать в таблице 4.

На следующем шаге получаем результаты, изложенные в таблице 5.

На заключительном шаге имеем результаты, которые отражены в таблице 6.

Видим, что на каждом следующем шаге показатель  $R^2$  увеличивается, а статистика  $DW$  уменьшается. Увеличение  $R^2$  говорит об увеличении взаимозависимости исходных рядов, тогда как уменьшение  $DW$  свидетельствует об увеличении отрицательной автокорреляции.

Далее посмотрим, что изменится, если вместо вейвлета Хаара взять другие вейвлеты.

Рассмотрим вейвлет Добеши порядка 2. Как и в предыдущем случае глубину разложения возьмем равную  $N = 4$ . На первом шаге, приравняв  $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z} = 0$  и восстановив временные ряды, имеем результаты таблицы 7.

На втором шаге, приравняв нулю следующий уровень коэффициентов детализации  $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z} = 0$  и  $\{d_{j-2,k}\}_{k \in Z} = 0$ , получаем результаты в таблице 8.

На следующем шаге, при  $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z} = 0$ ,  $\{d_{j-2,k}\}_{k \in Z} = 0$  и  $\{d_{j-3,k}\}_{k \in Z} = 0$ , имеем результаты в таблице 9.

На последнем шаге, когда всех коэффициенты детализации равны нулю получаем результаты таблицы 10.

Таблица 3.

Результаты регрессии

Table 3.

Regression results

	Коэффициенты Coefficients	Стандартная ошибка Standard error	t-статистика t-stat	P-Значение P-value	Нижние (lower) 95%	Верхние (upper) 95%
$\beta_0$	2615,36	5,1269	510,12	0	2605,3	2656,4
$\beta_1$	-2,2082	0,013959	-158,2	0	-2,2356	-2,1809
$\beta_2$	-3,4955	0,011113	-314,55	0	-3,5173	-3,4738

$$R^2 = 0,86; \quad DW = 0,46$$

Таблица 4.

Результаты регрессии

Table 4.

Regression results

	Коэффициенты Coefficients	Стандартная ошибка Standard error	t-статистика t-stat	P-Значение P-value	Нижние (lower) 95%	Верхние (upper) 95%
$\beta_0$	2675,61	4,5483	588,26	0	2666,7	2684,5
$\beta_1$	-2,2091	0,012222	-180,75	0	-2,2331	-2,1852
$\beta_2$	-3,6634	0,009954	-368,03	0	-3,6829	-3,6439

$$R^2 = 0,89; \quad DW = 0,22$$

Таблица 5.

Результаты регрессии

Table 5.

Regression results

	Коэффициенты Coefficients	Стандартная ошибка Standard error	t-статистика t-stat	P-Значение P-value	Нижние (lower) 95%	Верхние (upper) 95%
$\beta_0$	2718,85	4,0489	671,51	0	2710,9	2726,8
$\beta_1$	-2,2102	0,010794	-204,77	0	-2,2313	-2,47339
$\beta_2$	-3,7836	0,0089207	-424,14	0	-3,8011	-3,7661

$$R^2 = 0,92; \quad DW = 0,095$$

Таблица 6.

Результаты регрессии

Table 6.

Regression results

	Коэффициенты Coefficients	Стандартная ошибка Standard error	t-статистика t-stat	P-Значение P-value	Нижние (lower) 95%	Верхние (upper) 95%
$\beta_0$	2747,77	3,6645	749,84	0	2740,6	2755,0
$\beta_1$	-2,2126	0,0097407	-227,15	0	-2,2317	-2,1935
$\beta_2$	-3,8629	0,0081143	-476,06	0	-3,8788	-3,8470

$$R^2 = 0,93; \quad DW = 0,045$$

Таблица 7.

Результаты регрессии

Table 7.

Regression results

	Коэффициенты Coefficients	Стандартная ошибка Standard error	t-статистика t-stat	P-Значение P-value	Нижние (lower) 95%	Верхние (upper) 95%
$\beta_0$	2612,51	5,1518	507,11	0	2602,4	2622,6
$\beta_1$	-2,2087	0,014034	-157,39	0	-2,49752	-2,47339
$\beta_2$	-3,4872	0,01116	-312,48	0	-3,5091	-3,4653

$$R^2 = 0,86; \quad DW = 0,40$$

## Результаты регрессии

Table 8.

## Regression results

	Коэффициенты Coefficients	Стандартная ошибка Standard error	t-статистика t-stat	P-Значение P-value	Нижние (lower) 95%	Верхние (upper) 95%
$\beta_0$	2675,4	4,5512	587,84	0	2666,5	2684,3
$\beta_1$	-2,2087	0,012223	-180,71	0	-2,2327	-2,1847
$\beta_2$	-3,6631	0,009959	-367,82	0	-3,6826	-3,6436

$$R^2 = 0,89; \quad DW = 0,13$$

Таблица 9.

## Результаты регрессии

Table 9.

## Regression results

	Коэффициенты Coefficients	Стандартная ошибка Standard error	t-статистика t-stat	P-Значение P-value	Нижние (lower) 95%	Верхние (upper) 95%
$\beta_0$	2716,4	4,0843	665,09	0	2708,4	2724,4
$\beta_1$	-2,2081	0,010882	-202,92	0	-2,2295	-2,1868
$\beta_2$	-3,778	0,0089943	-420,05	0	-3,7956	-3,7604

$$R^2 = 0,92; \quad DW = 0,04$$

Таблица 10.

## Результаты регрессии

Table 10.

## Regression results

	Коэффициенты Coefficients	Стандартная ошибка Standard error	t-статистика t-stat	P-Значение P-value	Нижние (lower) 95%	Верхние (upper) 95%
$\beta_0$	2743,5	3,7342	734,7	0	2736,2	2750,8
$\beta_1$	-2,212	0,0099155	-223,09	0	-2,2315	-2,1926
$\beta_2$	-3,8514	0,008257	-466,44	0	-3,8676	-3,8352

$$R^2 = 0,93; \quad DW = 0,01$$

Для вейвлетов Добеши с более высокими порядками и для других вейвлетов картина будет похожая. Таким образом исследование рассматриваемых временных рядов показало, что при удалении из временных ряда высокочастотных «шумов» с одной стороны взаимозависимость между этими данными увеличивается ( $R^2$  увеличивается), с другой стороны наблюдается рост отрицательной автокорреляции ошибок. Наличие автокорреляции ошибок не позволяет нам использовать эту модель для осуществления прогнозов.

**Заключение**

Полученные результаты показывают, что проведенный вейвлет-анализ с одной стороны увеличивает коэффициент детерминации ( $R^2$  соответствующих регрессий стремится к 1), с другой стороны статистика Дарбина-Уотсона становится хуже, т.е. наблюдается усиление автокорреляции ошибок (в нашем случае DW-статистика стремится к 0). Можно отметить следующую закономерность – чем выше  $R^2$ , тем ниже статистика DW. Наличие автокорреляции ошибок в регрессии не позволяет



нам использовать построенные эконометрические модели для предсказаний, однако автокорреляция не мешает нам судить о характере зависимостей (метод наименьших квадратов в такой ситуации дает несмещенные и состоятельные оценки коэффициентов  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ). Низкое значение статистики Дарбина-Уотсона может означать, что построенная модель учитывает не все значимые факторы.

Таким образом получаем, что количество землепашцев в каждый момент времени достаточно хорошо объясняется количеством кочевников и количеством ресурса на ареале. Однако количество землепашцев и количество ресурса содержит в себе не достаточно информации для того, чтобы по ним можно было предсказать количество кочевников. Удалив высокочастотные шумы с помощью вейвлет-анализа эта ситуация не меняется, а скорее даже усиливается.

При ближайшем рассмотрении такая ситуация видится вполне закономерной, поскольку помимо численности кочевников и ресурса на ареале свое влияние могут оказывать возраст агентов, соотношение дикого и культурного ресурса (культурный ресурс – ресурс, произведенный землепашцем), кроме этого влияние оказывают некоторые качественные характеристики такие, например, как взаимное

расположение агентов (в какие группы они объединены и как эти группы взаимодействуют друг с другом). Все эти характеристики очень сложно поместить в одну регрессию. Такое положение вещей соотносится с интуицией, поскольку в реальном мире, если каким либо образом сделать в нем разделение на «кочевников» и «землепашцев» (например если рассматривать древние века), то очевидно количество одних будет объяснять количество других, т. е. будет наблюдаться высокая корреляция, однако предсказывать одни характеристики по другим будет очень сложно, поскольку могут появляться факторы, которые трудно учесть (например такой фактор, как влияние личности в истории).

Еще один вывод, который можно сделать из проведенного анализа – это то, что, если оценивать по коэффициенту детерминации, то большинство вейвлетов дают примерно одинаковые результаты. Если посмотреть одновременно на два показателя – на  $R^2$  и на статистику Дарбина-Уотсона, то самым лучшим вейвлетом оказался вейвлет Хаара. Из этого можно сделать вывод, что исследуемые временные ряды не содержат так скажем шаблонных или одинаковых, повторяющихся во времени помех, от которых можно избавиться, применив наиболее удачный вейвлет.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Белоусов Ф.А. Модель сообществ с двумя способами воспроизводства продукта (модель "кочевников" и "землепашцев") // Экономика и математические методы. 2017. Т. 53. № 3. С. 93–109.
- 2 Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2005. 304 с.
- 3 Штарк Г.Г. Применение вейвлетов для ЦОС. М.: Техносфера, 2007. 192 с.
- 4 Астафьев Н.М. Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1998. Т.166. № 11. С. 1145–1170.
- 5 Киселев А. Непрерывные вейвлет-преобразования в анализе бизнес-информации. URL: <https://basegroup.ru/community/articles/wavelet-applications>
- 6 Огородов А.П. Применение теории вейвлет-преобразований в исследовании финансовых временных рядов // Электроника информационные технологии. 2009. № 2(7). URL: [http://fetmag.mrsu.ru/2009-3/pdf/Financial\\_transient\\_series.pdf](http://fetmag.mrsu.ru/2009-3/pdf/Financial_transient_series.pdf)
- 7 Осипов Д.С., Ковалентко Д.В., Файфер Л.А. Применение вейвлет преобразования для расчета мощности в системах электроснабжения при нестационарных режимах работы Инновации в науке: сб. ст. по материалам LI междунар. научн.-практ. конф. № 11(48). Ч. II. Новосибирск: СибАК, 2015. С.126-142.
- 8 Алексеев В.И. Анализ и прогнозирование циклических временных рядов с использованием вейвлетов и нейросетевых нечетких правил вывода // Вестник ЮГУ. 2013. №3. С. 3-10.

- 9 Гиш Т.А., Калмыков И.А., Дунин А.В., Калмыков М.И. и др. Реализация крупномасштабного анализа с использованием модулярных отказоустойчивых технологий. // Теория и техника радиосвязи. 2015. № 3. С. 11-19.
- 10 Кобышев В.Ю., Максимов Н.А., Шаронов А.В. Вейвлет-анализ в задачах контроля и диагностики линейных динамических систем. // Труды МАИ. 2017. № 97. URL: [https://mai.ru/upload/iblock/911/Konyshova\\_Maksimov\\_SHaronov\\_rus.pdf](https://mai.ru/upload/iblock/911/Konyshova_Maksimov_SHaronov_rus.pdf).
- 11 Подгорный С.А. Оценка точности аппроксимаций, полученных методом конечных элементов // Вестник ВГУИТ. 2013. №4. С. 31-34.

#### REFERENCES

- 1 Belousov F.A. Model of civilization with two types of reproduction product (model of nomads and plowmen). *Ekonomika i matematicheskie metody* [Economics and Mathematical Methods] 2017, vol. 53, no. 3, pp. 93–109. (in Russian)
- 2 Smolentsev N.K. *Osnovy teorii veyvletov. Veyvlety v MATLAB*. [Fundamentals of the theory of wavelets. Wavelets in MATLAB] Moscow, DMK Press, 2005. 304 p. (in Russian)
- 3 Shtark G.G. *Primenenie veyvletov dlya COS* [The use of wavelets for DSP] Moscow, Tehnosfera, 2007. 192 p. (in Russian)
- 4 Astafev N.M. Wavelet analysis: the basis of the theory and examples of application. *Uspehi fizicheskikh nauk*. [Successes of physical sciences] 1998. vol. 166. no 11. pp. 1145–1170. (in Russian)

5 Kiselev A. Nепrеривные вейвлет-преобразования в анализе бизнес-информации. [Continuous wavelet transforms in the analysis of business information] Available at: <https://basegroup.ru/community/articles/wavelet-applications>. (in Russian)

6 Ogorodov A.P. Application of the theory of wavelet transformations in the study of financial time series. *Jelektronika informacionnye tehnologii*. [Electronics Information Technology] 2009, no. 2(7). Available at: [http://fetmag.mrsu.ru/2009-3/pdf/Financial\\_transient\\_series.pdf](http://fetmag.mrsu.ru/2009-3/pdf/Financial_transient_series.pdf) (in Russian)

7 Osipov D.S., Kovalenko D.V., Fajfer L.A. Application of wavelet transformation for power calculation in power supply systems in non-stationary operating modes. *Innovacii v nauke: sb. st. po mater. LI mezhdunar. nauch. -prakt. konf.* [Innovations in science] Novosibirsk, SibAK, 2015. pp. 126-142. (in Russian)

#### **СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

**Федор А. Белоусов**, Лаборатория динамических моделей экономики и оптимизации, Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский пр-т, 47, г. Москва, 117418, Россия, [sky\\_tt@list.ru](mailto:sky_tt@list.ru)

#### **КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА**

**Федор А. Белоусов** Полностью подготовил рукопись и несет ответственность за плагиат

#### **КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ**

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**ПОСТУПИЛА 22.01.2018**

**ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 19.02.2018**

8 Alekseev V. I. Analysis and prediction of cyclic time series using wavelets and neural network fuzzy inference rules. *Vestnik JuGU*. [Herald of the SouthUU] 2013. no. 3. pp. 3-10. (in Russian)

9 Gish T.A., Kalmykov I.A., Dunin A.V., Kalmykov M.I. et al. Large-scale analysis realization using modular fault-tolerant technologies. *Teoriya i tekhnika radiosvyazi* [Radio communication theory and equipment] 2015, no 3. pp. 11-19. (in Russian)

10 Konyshchev V.U., Maksimov N.A., Sharonov A.V. Wavelet analysis in problems of control and diagnostics of linear dynamical systems. *Trudy MAI*. [Proceedings of the MAI] 2017. no 97. URL: [https://mai.ru/upload/iblock/911/Konyshcheva\\_Maksimov\\_SHaronov\\_rus.pdf](https://mai.ru/upload/iblock/911/Konyshcheva_Maksimov_SHaronov_rus.pdf). (in Russian)

11 Podgomyi S.A. Evaluation of the accuracy of approximations obtained by finite element method. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of the Voronezh State University of Engineering Technologies] 2013. no. 4. pp. 31-34. (in Russian)

#### **INFORMATION ABOUT AUTHORS**

**Fedor A. Belousov**, Laboratory of Dynamic Models of Economics and Optimization, Central Economics and Mathematics Institute RAS, Nachimovsky prospect, 47, Moscow, 117418, Russia, [sky\\_tt@list.ru](mailto:sky_tt@list.ru)

#### **CONTRIBUTION**

**Fedor A. Belousov** Completely prepared the manuscript and is responsible for plagiarism

#### **CONFLICT OF INTEREST**

The author declare no conflict of interest.

**RECEIVED 1.22.2018**

**ACCEPTED 2.19.2018**