А. А. Пересецкий, Сингулярность однородных метрик Эйнштейна, *Матем. заметки*, 1977, том 21, выпуск 1, 71–80

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 21, № 1 (1977)

УДК 519

СИНГУЛЯРНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ МЕТРИК ЭЙНШТЕЙНА

А. А. Пересецкий

Рассматриваются однородные космологические модели с произвольным (однородным) движением вещества. Показано наличие колебательного режима типа режима БЛХ при движении к космологической особенности в моделях II—IV, VI—IX типов Бьянки.

Сформулированы ограничения на скорости, при которых колебательный режим вырождается в казнеровскую асимптотику. Библ. 5 назв.

Введение. Цель работы — исследование поведения однородных космологических моделей на ранней стадии развития с помощью современных геометрических методов теории динамических систем, применявшихся ранее С. П. Новиковым и О. И. Богоявленским [1], [2].

В физической литературе несколько лет назад был открыт колебательный режим приближения к космологической особенности для моделей VIII и IX типа без движения вещества — режим В. А. Белинского, Е. М. Лифшица, И. М. Халатникова (БЛХ) (см. [3]). Было также показано, что наличие движения вещества в модели IX типа приводит к некоторому изменению колебательного режима — «повороту казнеровских осей». В работе О. И. Богоявленского [2] было проведено полное качественное исследование модели IX типа с движением вещества.

В настоящей работе показано, что наличие колебательного режима типа БЛХ является общим свойством всех однородных космологических моделей (кроме I и V типов) при наличии движения вещества. Отметим, что на возможность наличия колебательного режима для модели VII типа с движением вещества было указано в [4].

§ 1. Определение однородной (пространственно-однородной) метрики Эйнштейна состоит в следующем. На 4-мерном пространственно-временно́м многообразии M^4 3-мерная группа Ли $\mathfrak{G}$ действует правыми сдвигами. Все орбиты группы пространственноподобны. Пусть $X_0, \ldots$ $\ldots, X_3$ — правоинвариантные векторные поля на M^4 такие, что поле X_0 трансверсально, а поля X_m, $m = 1, 2, 3$, касаются орбит группы. Коммутаторы векторных полей имеют вид:

$$\begin{gathered}[X_0, X_m] = 0, \quad [X_3, X_1] = -aX_1 + n_2X_2, \\ [X_2, X_3] = n_1X_1 + aX_2, \quad [X_1, X_2] = n_3X_3.\end{gathered} \tag{1}$$

Всевозможные типы неизоморфных алгебр Ли L ($\mathfrak{G}$) приведены в таблице. Римской цифрой указан номер по классификации Бьянки [3, стр. 487].

Тип	a	n_3	n_1	n_2	Тип	a	n_3	n_1	n_2
I	0	0	0	0	V	1	0	0	0
II	0	0	1	0	VII_a	a	0	1	1
IX	0	1	1	1	III	1	0	1	−1
VIII	0	−1	1	1	VI_a	a	0	1	−1
VII_0	0	0	1	1	IV	1	0	1	0
VI_0	0	0	1	−1					

(2)

Выбрана синхронная система отсчета ($c = 8\pi k/c^4 = 1$) с метрикой $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $\langle X_0, X_0 \rangle = 1$, $\langle X_0, X_i \rangle = 0$, удовлетворяющей уравнениям Эйнштейна с гидродинамическим тензором энергии-импульса:

$$\delta \int R \sqrt{-g}\, dt - \int g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, dt = - \int T^{ik} \delta g_{ik} \sqrt{-g}\, dt, \tag{3}$$

$$T^i_j = (p + \varepsilon) u^i u_j - p \delta^i_j,$$

$$p = k\varepsilon, \quad 0 \leqslant k < 1, \quad g = \det g_{ij}$$

(u^i — поле скоростей материи, пространственная метрика и энергия положительны $(-g_{ij}) > 0$, $\varepsilon > 0$).

По лагранжиану $L(G, \dot{G}) = \frac{1}{2} R \sqrt{-g}$ строится гамильтониан $H(P, G)$. $\left(\text{Импульсы } P = p^{ij} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ij}} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{G}}.\right)$

Уравнения (3) имеют почти гамильтонов вид:

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial G} - M - \Pi, \quad \dot{G} = \frac{\partial H}{\partial P}$$

(M (P, G) и Π (G) — 3×3-матрицы. M получается подстановкой в правую часть (3) ε и u^i, выраженных из $(\overset{0}{m})$ уравнений Эйнштейна, Π связана с использованием неголономной системы координат).

Далее удобно перейти к координатам G, $S_1 = PG$ и затем компактифицировать фазовое пространство переходом к переменным

$$\begin{gathered} S = S_1/\| S_1 \|, \ Y = G/\| G \|, \\ w = \| G \|^2/\| S_1 \|^2, \ v = \| G \|, \\ d\tau = \frac{\| S_1 \|}{2\sqrt{-g}}\, dt, \qquad (\| S \|^2 = \mathrm{Sp}\,(S^t S)). \end{gathered} \tag{4}$$

В этих переменных уравнения Эйнштейна (3) имеют вид:

$$\frac{dS}{d\tau} = (1-k)\,H_1\cdot(E - S\cdot \mathrm{Sp}\, S) + \frac{8yw}{(1+k)\,\Delta}\,(B - S\cdot \mathrm{Sp}\, S^t B) + \\ + w\,(Q - S\cdot \mathrm{Sp}\, S^t Q),$$

$$\frac{dw}{d\tau} = 8w\,(\mathrm{Sp}\, S - 2\,\mathrm{Sp}\, Y^2 S) - \\ - 2w\left((1-k)\,H_1\,\mathrm{Sp}\, S + \frac{8yw}{(1+k)\,\Delta}\,\mathrm{Sp}\, S^t B + w\,\mathrm{Sp}\, S^t Q\right),$$

$$\frac{dY}{d\tau} = 8\,(-YS + Y\cdot \mathrm{Sp}\, Y^2 S),$$

$$\frac{dv}{d\tau} = 4v\,(\mathrm{Sp}\, S - 2\,\mathrm{Sp}\, Y^2 S),$$

$$B_n^m = -y^{mk} x_k x_n + k\delta_n^m y^{ij} x_i x_j, \tag{5}$$

$$x_m = s_k^j \varepsilon_{jmk} n_k - a\,\mathrm{Sp}\, S\delta_m^3 + 3as_m^3,$$

$$H_1 = (\mathrm{Sp}\, S)^2 - 2\,\mathrm{Sp}\,(S^2) - \frac{w}{4}\,\mathrm{Sp}\, Q,$$

$$\Delta = H_1 + \left(H_1^2 + \frac{16k}{(1+k)^2}\,(-y)\,wy^{ij}x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Q_n^m = \delta_n^m y\,(4a^2 y^{33} - n_2 n_3 y^{11} - n_1 n_3 y y^{22} - n_1 n_2 y^{33}) + \\ + a\varepsilon_{npm} y y^{3p} n_m + a\varepsilon_{m3p} y_{pq} y_{qn} n_q + y y^{mn} n_p n_q \,|\, \varepsilon_{npq} \,|\, + \\ + y_{mp} y_{pn} n_m n_p.$$

Переменная v отщепляется в силу масштабной инвариантности уравнений Эйнштейна. Система (4) рассматривается на инвариантном 11-мерном подмногообразии $\mathcal{M}$, задаваемом в пространстве параметров (4) условиями:

$$Y^t = Y,\ S^tY = YS,\ \| Y \| = \| S \| = 1,$$
$$w > 0,\ y = \det Y < 0,\ H_1 > 0, \qquad (5')$$

Известно [3, стр. 369], что существует функция F, монотонная в силу системы (5):

$$F = \operatorname{Sp} S \cdot w^{-1/2}(-y)^{-1/3}, \quad \frac{dF}{d\tau} \leqslant 0 \qquad (6)$$

($\operatorname{Sp} S \leqslant 0$ означает выбор направления времени в сторону сжатия).

Как показано в [2], начальной стадией естественно называть те точки w, S, Y фазового пространства, в которых $F \leqslant -1$. Иначе говоря, начальной стадии соответствуют точки многообразия $\mathcal{M}$, близкие к компонентам Γ_0 ($y = 0$) и Γ_w ($w = 0$) его границы. В силу (6) при движении в сторону сжатия траектория системы (5) приближается к $\Gamma_0 \bigcup \Gamma_w$ и начинает двигаться вдоль траекторий, идущих по границе, представляющих собой сепаратрисы особых точек.

§ 2. Система (5) продолжается на Γ_w всюду и на Γ_0 почти всюду (см. [2], [5]). На Γ_w система (5) не зависит от типа модели. Поэтому особые точки и сепаратрисы, лежащие на Γ_w, одинаковы для всех типов Бьянки и совпадают с указанными в работе [2].

Здесь нас особенно будет интересовать множество особых точек $K \subset \Gamma_0 \bigcap \Gamma_w$. Точка $P = (Y, S) \in K$ задается кроме условий (5^1), условиями: 1) Y двукратно вырождена, 2) $H_1(S) = (\operatorname{Sp} S)^2 - 2\operatorname{Sp}(S^2) = 0$, 3) $w = 0$.

Собственный вектор матрицы Y, соответствующий ненулевому собственному значению, является также собственным вектором матрицы S^t, соответствующим собственному значению s. Множество K разбивается на 3 подмножества K_l. Точка $P \in K_l$, если $s = s_l$ ($0 \geqslant s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3$ — собственные числа матрицы S^t). Особые точки K_l невырождены, их собственные числа λ_i и их знаки равны:

λ	K_1	K_2	K_3
$2(1-k)(s_1+s_2+s_3)$	—	—	—
$8(s_n+s_m-s_l)$	—	—	+
$8(s_l-s_n)$	+	—	—
$8(s_l-s_m)$	+	+	—

Из K_1 выходит двумерная сепаратриса, идущая по Γ_w на уровне $H_1 = 0$:

$$w \equiv 0, \ S(\tau) \equiv S,$$
$$Y(\tau) = G_0 e^{-8S\tau} [\operatorname{Sp}(G_0 e^{-8S\tau})^2]^{-1/2}. \qquad (7)$$

Почти вся сепаратриса (7) попадает в K_3, от нее отщепляется одномерная сепаратриса, идущая в K_2. Из каждой точки K_2 выходит одномерная сепаратриса вида (7), идущая в K_3.

Сепаратрисы, выходящие из K_3, идут по Γ_0, где система (5) имеет вид:

$$\frac{dS}{d\tau} = (1-k) H_1 \cdot (E - S \cdot \operatorname{Sp} S) + w(Q - S \cdot \operatorname{Sp} S^t Q), \qquad (8^1)$$

$$\frac{dw}{d\tau} = 8w(\operatorname{Sp} S - 2 \operatorname{Sp} Y^2 S) - 2(1-k) H_1 w \operatorname{Sp} S - 2w^2 \operatorname{Sp} S^t Q. \qquad (8^2)$$

Вдоль этих сепаратрис $H_1 = 0$ и $Y(\tau) = Y$. Тогда

$$Q(Y(\tau)) \equiv Q = aKYNY + NYNY,$$
$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Из (8^1) следует, что при $Q = 0$ сепаратриса имеет вид:

$$S(\tau) \equiv S, \ Y(\tau) \equiv Y,$$
$$w(\tau) = w_0 \exp(\tau \cdot 8(\operatorname{Sp} S - 2 \operatorname{Sp} Y^2 S)), \qquad (10)$$

т. е. идет по Γ_0 от $w = 0$ до $w = \infty$. Мы получили

ЛЕММА 1. *Если точка $P = (Y, S)$ множества K_3 удовлетворяет условию $Q(Y) = 0$, то сепаратриса, выходящая из P, уходит из множества K.*

Если $\| Q \| \neq 0$, то сепаратриса, выходящая из K_3, имеет вид $(d\xi = w \| Q \| d\tau)$:

$$S(\xi) = \frac{\operatorname{ch} \xi_0}{\operatorname{ch} \xi} S + \frac{\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh} \xi_0}{\operatorname{ch} \xi} \bar{Q}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{\| Q \|}, \qquad (11)$$

$$w(\xi) = 4(2 \operatorname{Sp} Y^2 Q - \operatorname{Sp} Q)(\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh} \xi_0)(\operatorname{sh} \xi_1 - \operatorname{sh} \xi),$$

где ξ_1 определяется из условия:

$$(\operatorname{sh} \xi_1 - \operatorname{sh} \xi_0)(2 \operatorname{Sp} Y^2 \bar{Q} - \operatorname{Sp} \bar{Q}) = 2 \operatorname{ch} \xi_0 (\operatorname{Sp} S - 2 \operatorname{Sp} Y^2 S), \qquad (12)$$

т. е. в момент ξ_1, сепаратриса (11) снова попадает в точку

$w = 0$, $Y' = Y$, $S' = S(\xi_1)$, принадлежащую множеству $K_1 \cup K_2$.

ЛЕММА 2. *Если точка $P = (Y, S) \in K_3$ такова, что $Q(Y) \neq 0$, то сепаратриса, выходящая из P, попадает в точку $P' = (Y', S') \in K_1 \cup K_2$, такую, что $Y' = Y$, а S и S' — две точки пересечения поверхности $H_1(S) = (\mathrm{Sp}\, S)^2 - 2\,\mathrm{Sp}\,(S^2) = 0$ на единичной сфере $\Sigma\,(s_j^i)^2 = 1$ в $\mathbf{R}^9$ с большим кругом, проведенным через точки S и $\bar{Q}\,(Y)$.*

Доказательство. А) Возьмем на сфере две точки S и Z, $H_1(S) = 0$. Соединим их большим кругом $S(\varphi) = S\cos\varphi + Z\sin\varphi$. Уравнение $H_1(S(\varphi)) = 0$ имеет два корня: $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$. Имеем

$$S(0) = S;\ S(\varphi_1) \sim S\,[2\mathrm{Sp}\,(Z^2) - (\mathrm{Sp}\, Z)^2] + 2Z\,(\mathrm{Sp}\, S\,\mathrm{Sp}\, Z - 2\mathrm{Sp}\,(SZ)). \quad (13)$$

Б) Матрица $\bar{Y} = -Y$ имеет собственные значения: 0, 0, 1, поэтому является проектором: $\bar{Y}^2 = Y^2 = \bar{Y}$. Ее можно представить в виде $\bar{y}_{ij} = y_i y_j$, $\Sigma y_i^2 = 1$. Имеют место следующие равенства:

$$(\mathrm{Sp}\, Q)^2 = \mathrm{Sp}\,(Q^2) = (\mathrm{Sp}\, NY)^4 = \mathrm{Sp}\, Q\cdot\mathrm{Sp}\,\bar{Y}Q;$$
$$NYNY = \mathrm{Sp}\,(NY)NY;\ YKY = 0;$$
$$\mathrm{Sp}\, Q\cdot\mathrm{Sp}\,\bar{Y}S = \mathrm{Sp}\, SQ. \quad (14)$$

Покажем, как получается последнее из них: условие $S^tY = YS$ дает $y_p s_m^p = y_m\,(y_i y_k s_i^k)$. Далее,

$$\mathrm{Sp}\, Q\cdot\mathrm{Sp}\,\bar{Y}S = (\mathrm{Sp}\, N\bar{Y})(n_m y_m^2 y_i y_k s_i^k) = (\mathrm{Sp}\, N\bar{Y})\,(n_m y_m y_p s_m^p) = (\mathrm{Sp}\, N\bar{Y})(\mathrm{Sp}\, SN\bar{Y}) = \mathrm{Sp}\,(SN\bar{Y}N\bar{Y}) = \mathrm{Sp}\, SQ,$$

так как

$$\mathrm{Sp}\,(SKYNY) = \mathrm{Sp}\,(YSKYN) = \mathrm{Sp}\,(S^tYKYN) = 0.$$

Подставив (12) в (11), получим (используя (14))

$$S' = S(\xi_1) = \frac{\mathrm{ch}\,\xi_0}{\mathrm{ch}\,\xi_1}[S\,(2\,\mathrm{Sp}\,\bar{Y}Q - \mathrm{Sp}\,Q) + 2Q\,(\mathrm{Sp}\, S - 2\,\mathrm{Sp}\bar{Y}S)] \times \frac{1}{2\,\mathrm{Sp}\,\bar{Y}Q - \mathrm{Sp}\, Q} = \frac{\mathrm{ch}\,\xi_0}{\mathrm{ch}\,\xi_1}\cdot\frac{1}{(\mathrm{Sp}\, Q)^2}[S\cdot\mathrm{Sp}\, Q\cdot(2\,\mathrm{Sp}\,\bar{Y}Q - \mathrm{Sp}\, Q) + 2Q\,(\mathrm{Sp}\, Q\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{S} - 2\,\mathrm{Sp}\, SQ)] =$$
$$= \frac{\mathrm{ch}\,\xi_0}{\mathrm{ch}\,\xi_1}\frac{1}{(\mathrm{Sp}\,\bar{Q})^2}[S\,(2\,\mathrm{Sp}\,\bar{Q}^2 - (\mathrm{Sp}\,\bar{Q})^2) + 2\bar{Q}(\mathrm{Sp}\,\bar{Q}\mathrm{Sp}\, S - 2\,\mathrm{Sp}\, S\bar{Q})]. \quad (15)$$

(15) совпадает с (13) при $Z = \bar{Q}$. Лемма доказана.

§ **3.** Рассмотрим, когда выполняется условие $Q(Y) = 0$. Имеем

$$\|Q\|^2 = \operatorname{Sp} Q^t Q = (n_1 y_1^2 + n_2 y_2 + n_3 y_3^2)^2 [(a y_1 + n_2 y_2)^2 + (a y_2 - n_1 y_1)^2 + n_3^2 y_3^2]. \quad (16)$$

Из (16) и таблицы (2) видно, что $\|Q\|$ обращается в 0 одновременно с $(\operatorname{Sp} Q)^{\frac{1}{2}} = n_1 y_1^2 + n_2 y_2^2 + n_3 y_3^2$.

Множество матриц $\ddot{y}_{ij} = y_i y_j$, $\Sigma y_i^2 = 1$ гомеоморфно двумерной проективной плоскости RP^2. Из таблицы (2) следует, что $Q(Y) \equiv 0$ для I и V типов. Уравнение $Q(Y) = 0$ задает на RP^2 прямую (II тип), кривую второго порядка (VIII, VI_0, III, VI_a типы), точку (VII_0, VII_a типы) или пустое множество (IX тип).

Таким образом, все сепаратрисы, выходящие из K_3, в моделях I и V типа имеют вид (10); почти все сепаратрисы, выходящие из K_3, в моделях остальных типов (в IX типе — все) имеют вид (11). Отсюда вытекает

ЛЕММА 3. *Во всех типах, кроме I и V, почти все точки множества K (в IX типе — все) обладают следующим свойством: траектория сепаратрисной диаграммы, начатая из этой точки, все время остается в множестве K.*

Траектория, идущая по физической области вдоль сепаратрис $K_{1,2} \to K_3$, аппроксимируется решением Казнера [3] (γ_i — собственные числа метрики g_{ij})

$$\gamma_i \sim t^{2p_i}, \quad \Sigma p_i = \Sigma p_i^2 = 1. \quad (17)$$

Казнеровские показатели $p_i = 1 - 2s_i (s_1 + s_2 + s_3)^{-1}$.

При движении вдоль сепаратрис $K_3 \to K_{1,2}$ матрица S меняется, т. е. происходит поворот «казнеровских осей» (собственных векторов матрицы S^t) и «смена казнеровских показателей» [3]. Закон изменения матрицы S вдоль сепаратрис $K_3 \to K_{1,2}$ (т. е. закон смены «казнеровских показателей» и «поворота казнеровских осей») указан в лемме 2.

Уравнения (5) инвариантны относительно действия матриц A из группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} \boldsymbol{L}$ ($\mathfrak{G}$)

$$S \to A^{t^{-1}} S A^t, \qquad Y \to A Y A^t. \quad (18)$$

Поэтому начальную точку сепаратрисы (11) можно выбрать в виде (во всех типах, кроме VIII, о котором будет сказано ниже)

$$Y=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad S(\xi_0)=S=\begin{pmatrix}s_1&0&0\\s_1^2&s_2&0\\s_1^3&s_2^3&s_3\end{pmatrix},\quad s_1\leqslant s_{2,3}\leqslant 0, \tag{19}$$

конечная точка:

$$S'=S(\xi_1)=\mathrm{const}\left[S+2(s_2+s_3-s_1)\begin{pmatrix}1&0&0\\a&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right].$$

Собственные числа преобразуются по закону: $s_1\to\to 2s_2+2s_3-s_1$, $s_2\to s_2$, $s_3\to s_3$, что соответствует указанному БЛХ закону смены казнеровских показателей:

$$p_1=\frac{-u}{1+u+u^2},\quad p_2=\frac{1+u}{1+u+u^2},\quad p_3=\frac{u+u^2}{1+u+u^2},$$

$$p_1'=p_2(u-1),\qquad p_2'=p_1(u-1),\qquad p_3'=p_3(u-1).$$

Собственные векторы матриц S^t и S'^t имеют вид:

$$s_1\to(1,\,0,\,0),\ s_2\to(s_1^2,\ s_2-s_1,\ 0), \tag{20}$$

$$s_3\to(s_1^2s_2^3+(s_3-s_2)s_1^3,\qquad (s_3-s_1)s_2^3,\qquad (s_3-s_1)(s_3-s_2)).$$

Обозначив их

$$L\,(1,\,0,\,0);\ M\,(\cos\theta_m,\ \sin\theta_m,\ 0);$$
$$N\,(\cos\theta_n,\ \sin\theta_n\cos\varphi_n,\ \sin\theta_n\sin\varphi_n),$$

получим закон поворота осей:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_n'}{\operatorname{tg}\theta_n}=\frac{u-2}{u+2+4a\operatorname{tg}\theta_n\cos\varphi_n};$$
$$\varphi_n'=\varphi_n;\quad \frac{a+\operatorname{ctg}\theta_m}{a+\operatorname{ctg}\theta_m'}=-\frac{2u-1}{2u+1}. \tag{21}$$

(Здесь θ_m', θ_n', φ_n' относятся к векторам $L'=L$; M', N' — казнеровские оси после поворота.) Из (21) видно, что закон поворота в случае $L=X_1$ зависит от типа модели.

При приведении S к треугольному виду (19) ее собственные числа не меняются, но собственные векторы преобразуются матрицей A^t. Для IX типа $\operatorname{Aut}L\,(\mathfrak{G})=SO_3$, поэтому A^t сохраняет углы между собственными векторами и закон поворота (21) сохраняется. Но в других типах матрицы A^t не ортогональны, и поэтому закон поворота осей зависит не только от их взаимного расположения (углов θ_m, θ_n, φ_n), но и от их расположения относительно реперных векторов X_i.

Определение. Общим режимом приближения к космологической особенности называется такой режим, которому соответствует открытое подмножество траекторий динамической системы Эйнштейна.

Из предыдущих замечаний и лемм 1, 3 следует

ТЕОРЕМА 1. *В однородных космологических моделях (со скоростями) всех типов, кроме* I *и* V, *колебательный режим типа режима БЛХ* [2] *является общим режимом приближения к космологической особенности* ($t \to 0$). *Закон смены казнеровских показателей одинаков для всех типов. Колебательные режимы для разных типов отличаются законом поворота казнеровских осей.*

Примечание. Как показано в работах [2, 5], колебательный режим в моделях IX и VII типов является единственным общим режимом приближения к космологической особенности.

Рассмотрим, когда сепаратриса $K_{1,2} \to K_3$ (7) попадает в точку K_3 с $Q(Y) = 0$. Так как вдоль (7) матрица S сохраняется, то это означает, что условию $Q(Y) = 0$ должен удовлетворять один из казнеровских векторов (M, N) (20). Используя выражение для x_i (5), получаем:

ЛЕММА 4. *Если* $x_1 = x_2 = 0$ (VII, VI, III, VII_0, VI_0, IV *тип*) *или* $x_3 = 0$ (II тип), *то сепаратриса* (7) *попадает в точку* K_3 *с* $Q(Y) = 0$.

Отметим, что траектория, идущая вдоль сепаратрисы (10), имеет вид (17). Из лемм 1, 4 и того, что u_i пропорционально x_i, получается

ТЕОРЕМА 2. *В моделях* I *и* V *типов, а также в моделях* III—VII *типов и* II *типа с ограничениями на скорости соответственно* $u_1 = u_2 = 0$ *и* $u_3 = 0$ *решение Казнера* (17) *является общим режимом при* $t \to 0$.

В работах БЛХ показано, что в IX типе при $t \to 0$ казнеровские оси сближаются. Как уже было сказано, «сближение» имеет смысл измерять в метрике, инвариантной относительно действия Aut L ($\mathfrak{G}$). Кроме IX типа, только в VIII типе существует инвариантная невырожденная метрика (с сигнатурой: $+ + -$).

Казнеровские оси в VIII типе можно привести к одному из двух видов:

$$L\ (1,\ 0,\ 0);\ \ M\ (\cos\theta_m,\ \sin\theta_m,\ 0);$$
$$N\ (\cos\theta_n\ \mathrm{ch}\,\varphi_n,\ \sin\theta_n\ \mathrm{ch}\,\varphi_n,\ \mathrm{sh}\,\varphi_n) \tag{22a}$$

или (в том случае, когда квадрат длины собственного вектора матрицы Y отрицателен и ее нельзя привести к виду (19), а можно — к виду $y_{ij} = -\delta_i^3\delta_j^3$):

$$L\ (0,\ 0,\ 1);\ \ M\ (0,\ \mathrm{sh}\,\theta_m,\ \mathrm{ch}\,\theta_m);$$
$$N\ (\cos\varphi_n\ \mathrm{sh}\,\theta_n,\ \sin\varphi_n\ \mathrm{sh}\,\theta_n,\ \mathrm{ch}\,\theta_n). \tag{22б}$$

В (22) разрешается менять местами функции sh и ch в зависимости от знаков M^2 и N^2.

Записав закон поворота осей (лемма 2) в углах (22), получим, что условие L^2, M^2, $N^2 > 0$, а также условие L^2, M^2, $N^2 < 0$ сохраняются при движении в сторону сжатия. В первом случае (22а) казнеровские оси сближаются, во втором (22б) казнеровские оси расходятся:

$$\frac{\mathrm{th}\,\theta_n'}{\mathrm{th}\,\theta_n} = \frac{u+2}{u-2};\ \ \frac{\mathrm{th}\,\theta_m'}{\mathrm{th}\,\theta_m} = -\frac{2u+1}{2u-1};\ \ \varphi_n' = \varphi_n. \tag{23}$$

Следовательно, в VIII типе возможны две разновидности колебательного режима: со сближением и с расхождением казнеровских осей.

Автор благодарит С. П. Новикова и О. И. Богоявленского за постоянную помощь и внимание.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
22.IV.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Богоявленский О. И., Новиков С. П., Качественная теория однородных космологических моделей, Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1973, 7—44.

[2] Богоявленский О. И., О некоторых свойствах однородной космологической модели IX типа Бьянки с движением вещества. ЖЭТФ, **70**, № 2 (1976), 361—373.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., «Наука», 1973.

[4] Лукаш В. Н., Однородные космологические модели с гравитационными волнами и вращением, Письма в ЖЭТФ **19**, № 8 (1974), 499—501.

[5] Пересецкий А. А., Анизотропная однородная космологическая модель VII типа Бьянки с движением вещества, Успехи матем. наук, **31**, № 5 (1976), 251—253.