А. А. Пересецкий, Анизотропная однородная космологическая модель VII типа Бьянки с движением вещества, *УМН*, 1976, том 31, выпуск 5(191), 251–252

АНИЗОТРОПНАЯ ОДНОРОДНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ VII ТИПА БЬЯНКИ С ДВИЖЕНИЕМ ВЕЩЕСТВА

А. А. Пересецкий

Цель работы — полное исследование модели VII типа с произвольным (однородным) движением вещества с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений, применявшихся ранее О. И. Богоявленским и С. П. Новиковым [1], [2], [3].

На 4-мерном пространстве-времени M^4 3-мерная группа Ли $\mathfrak{G}$ действует правыми сдвигами. Пусть $X_0, \ldots, X_3$ — правоинвариантные векторные поля на M^4. Поля X_m $(m = 1, 2, 3)$ касаются орбит группы. Их коммутаторы имеют вид $[X_0, X_m] = [X_1, X_2] = 0$, $[X_3, X_1] = aX_1 + X_2$, $[X_3, X_2] = -X_1 + aX_2$. Выбрана синхронная система отсчета с метрикой $(c = 8\pi k/c^4 = 1)$ $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$, $\langle X_0, X_0\rangle = 1$, $\langle X_0, X_i\rangle = 0$, удовлетворяющей уравнениям Эйнштейна с гидродинамическими тензором энергии-импульса $T^{\alpha}_{\beta} = (p + \varepsilon)u^{\alpha}u_{\beta} - p\delta^{\alpha}_{\beta}$ $(p = k\varepsilon;\ 0 \leqslant k < 1)$ (u^{α} — 1-поле скоростей материи). Требуем положительности пространственной метрики и энергии — $(g_{ij}) > 0$, $\varepsilon \geqslant 0$.

Уравнения Эйнштейна можно записать в почти гамильтоновом виде

$$\dot{s}^i_{\ j} = -\frac{\partial H}{\partial g_{ik}} g_{kj} - (MG + \Pi G)^i_{\ j}, \quad \dot{g}_{ij} = \frac{\partial H}{\partial s^i_{\ k}} g_{kj} \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Точка означает дифференцирование по времени τ, $dt = (-g)^{k/2}\, d\tau$, $s^i_{\ j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ik}} g_{kj}$, H — гамильтониан, соответствующий лагранжиану $L = R\sqrt{-g}/2$ $(g = \det G;\ G = (g_{ij}))$,

$$H(S, G) = \frac{1}{(-g)^{(1-k)/2}} \left\{ (\operatorname{Sp} S)^2 - 2\operatorname{Sp} S^2 - \frac{1}{2}\left[(6a^2 - 1)\, gg^{33} + \frac{1}{2}(g_{11}^2 + g_{22}^2 + 2g_{12}^2)\right]\right\}.$$

3×3 матрицы, связанные с наличием скоростей материи (М) и негамильтоновые поправки (П) равны

$$\Pi^{ij} = \frac{1}{2}(-g)^{(1+k)/2}\left[a^2(6g^{3i}g^{3j} - 2g^{33}g^{ij}) - \frac{a}{g}(\varepsilon_{3jm}n^i g_{im} + \varepsilon_{3im}n^j g_{jm})\right]$$

(ε_{mnk} — единичный антисимметричный индекс, $n^1 = n^2 = 1$, $n^3 = 0$, $(g^{ij}) = G^{-1}$),

$$M^{ij} = \frac{4(-g)^k(-X^iX^j + kg^{ij}g_{mn}X^mX^n)}{(1+k)[H + (H^2 + Z)^{1/2}]},$$

$$Z = \frac{16k}{(1+k)^2} X_m X_n g^{mn}(-g)^k \leqslant 0, \qquad X_1 = s^3_{\ 2} + 3as^3_{\ 1},$$

$$X_2 = -s^3_{\ 1} + 3as^3_{\ 2}, \qquad X_3 = s^2_{\ 1} - s^1_{\ 2} + a(2s^3_{\ 3} - s^1_{\ 1} - s^2_{\ 2}).$$

Физическая область $(\varepsilon > 0;\ g < 0)$ компактифицируется переходом к координатам $(\|S\| = \|s^i_{\ j}\| = (\Sigma (s^i_{\ j})^2)^{1/2})$:

$$(1) \qquad \bar{S} = \frac{S}{\|S\|}, \quad Y = \frac{G}{\|G\|}, \quad w = \frac{\|G\|^2}{\|S\|^3}, \quad \frac{d\tau_1}{d\tau} = \frac{\|S\|}{2(-g)^{(1-k)/2}}.$$

Система Эйнштейна в координатах (1) рассматривается на 11-мерном инвариантном подмногообразии $\mathcal{M}$, выделяемом в 16-мерном пространстве параметров (1) естественными условиями $Y^t = Y$,

$$\bar{S}^tY = Y\bar{S}, \quad \|Y\| = 1, \quad \|\bar{S}\| = 1, \quad y = \det Y < 0, \quad w > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Граница Γ многообразия $\mathcal{M}$ состоит из 4 компонент

$$\Gamma_0\,(y = 0), \qquad \Gamma_1\,(\varepsilon = 0), \qquad \Gamma_w\,(w = 0), \ \Gamma_{\bar{w}}\left(\bar{w} = \frac{1}{w} = 0\right).$$

Теорема 1. *Динамическая система Эйнштейна, в координатах* (1) *непрерывно продолжается на* $\Gamma_0, \Gamma_w, \Gamma_{\bar{w}}$ *всюду, а также во все точки* Γ_1, *кроме, быть может, точек, выделенных условиями* $y = 0$, $yy^{ij}x_ix_j = 0$ $(x_i = X_i/\|S\|)$. $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_w, \Gamma_{\bar{w}}$ *являются инвариантными многообразиями системы. Все особые точки системы лежат на границе* Γ.

Лемма. *Система Эйнштейна в координатах* (1) *на границе* Γ_w *не зависит от типа Бьянки.*

В силу леммы, особые точки $\Phi_{ЛХ}$, A, B, K, лежащие на границе Γ_w те же, что и в работе [3]. Особые точки на $\Gamma \setminus \Gamma_w$ существенно зависят от типа модели. Для VII типа они имеют вид

N. $N \subset \Gamma_0$, $\dim N = 2$, $w = 16(1-k)(1+3k)\Delta$, $s_1 = -(6+2k)\sqrt{\Delta}$,

$$s_2 = -(5-k)\sqrt{\Delta}, \quad \Delta^{-1} = 86 + 4k + 6k^2 + a^2(1+3k)^2, \quad s = a(s_1 - s_2),$$

$$\bar{S} = A^{t-1}\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ s & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix} A^t, \quad Y = A\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^t$$

(здесь A — всевозможные автоморфизмы алгебры Ли $L(\mathfrak{G})$, состоящие из матриц с определителем 1. Система (1) инвариантна относительно указанного действия этой группы).

C. $C \subset \Gamma_0$, $\dim C = 6$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{S} = A^{t-1}\begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 & s^1{}_3 \\ 0 & 0 & s^2{}_3 \\ 0 & 0 & s^1{}_1 \end{pmatrix} A^t$.

M. $M \subset \Gamma_1$, $\dim M = 3$, $w = \dfrac{1}{3a^2 y_1^2}$, $Y = A\begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} A^t$,

$$\bar{S} = -\frac{1}{\sqrt{3}}E, \quad 2y_1^2 + y_3^2 = 1.$$

D. $D \subset \Gamma_{\bar{w}} \cap \Gamma_0$, $\dim D = 8$, $\bar{w} = 0$, $y_{ij} = -\delta^3{}_i \delta^3{}_j$, $\bar{S}$ — любое.

Из рассмотрения особых точек и их сепаратрис получается

Теорема 2. *Для множества начальных данных, кроме меры нуль, в модели VII типа со скоростями, при движении по времени* (*в сторону сжатия*) *к космологической особенности* ($t \to 0$), *траектории асимптотически выходят на колебательный режим БЛХ* [4], *комбинаторная модель которого описана в* [3].

Сепаратрисная диаграмма будет приведена в подробной работе.

Теорема 3. *Почти каждая траектория динамической системы Эйнштейна в модели VII типа со скоростями имеет асимптотику* ($t \to \infty$) (λ_i — *собственные значения матрицы* G):

$$\lambda_1 = Q_1 t^{2/(1+\varkappa^2)}, \quad \lambda_2 = Q_2 t^{2/(1+\varkappa^2)}, \quad \lambda_3 = -a^2(1+\varkappa^2)^2 t^2, \quad \varkappa = \frac{Q_1 - Q_2}{2a\sqrt{Q_1 Q_2}}.$$

(Для модели VII типа без движения вещества такая асимптотика была указана в [5].)

Автор приносит глубокую благодарность С. П. Новикову за постановку задачи и О. И. Богоявленскому за постоянное внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] О. И. Богоявленский, С. П. Новиков, Особенности космологической модели Бьянки IX с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений, ЖЭТФ 64: 5 (1973), 1475—1494.

[2] О. И. Богоявленский, С. П. Новиков, Качественная теория однородных космологических моделей, Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1973, 7—44.

[3] О. И. Богоявленский, О некоторых свойствах однородной космологической модели IX типа, ЖЭТФ 70:2 (1976), 361—373.

[4] В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, Колебательный режим приближения к особой точке в однородных космологических моделях с вращением осей, ЖЭТФ 60:6 (1971), 1969—1979.

[5] А. Г. Дорошевич, В. Н. Лукаш, И. Д. Новиков, Изотропизация однородных космологических моделей, ЖЭТФ 64:5 (1973), 1457—1474.

Поступило в редакцию 16 февраля 1976 г.