А. А. Пересецкий, *SU*-кобордизмы и формальные группы, *Матем. сб.*, 1972, том 88(130), номер 4(8), 536–545

УДК 513.836

SU-кобордизмы и формальные группы

А. А. Пересецкий (Москва)

Введение

В последнее время в работах Квиллена [8] и В. М. Бухштабера и С. П. Новикова [2] был развит новый метод описания колец бордизмов. Было доказано, что кольцо Ω_U совпадает с кольцом коэффициентов формальной группы «геометрических» кобордизмов, определенной в работе [5]. В работе [2] введены понятия двузначной формальной группы $F^{\pm}(x, y)$, ее кольца коэффициентов Λ и доказано, что $\Omega_{Sp}\left[\frac{1}{2}\right] \cong \Lambda\left[\frac{1}{2}\right]$.

В настоящей статье дается описание кольца $\Omega_{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$ как кольца коэффициентов шестизначной двумерной формальной группы $F(X, Y)$.

Коротко изложим содержание статьи. В § 1 показывается, что $SU(3)$-расслоения являются в некотором смысле «элементарными» для SU^*-теории, и вычисляется минимальное значение t-характеристики (старшего числа Чженя в когомологиях) на образе кольца $H^*(MSU; \mathbf{Z})$ в $\Omega_U(\mathbf{Z})$. В § 2 строится шестизначная двумерная формальная группа, структура которой изучается в § 3. В частности, в § 3 доказывается, что $\Omega_{SU}\left[\frac{1}{2}\right] \cong \Lambda_2\left[\frac{1}{2}\right]$, где Λ_2 — кольцо коэффициентов группы.

Будем придерживаться определений и обозначений работ [1], [2], [3].

Автор приносит глубокую благодарность С. П. Новикову за постановку задачи и В. М. Бухштаберу за постоянное внимание и руководство работой.

§ 1

Характер Чженя — Дольда ch_U [1] определяет естественное преобразование $\mathrm{ch}_U : H_*(X) \to \mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(X), \Omega_U(\mathbf{Z}))$ по формуле $(\mathrm{ch}_U(h))(\alpha) = (\mathrm{ch}_U\alpha, h)$, $h \in H_*(X)$, $\alpha \in U^*(X)$, которое для комплексов без кручения в когомологиях является изоморфизмом. Вложение $\Omega_U \subset \Omega_U(\mathbf{Z})$ и канонический гомоморфизм $A^U \to U^*(MSU)$ [5] приводят к коммутативной диаграмме, аналогичной диаграмме (см. [2], стр. 103)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U) & \to & \Omega_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(MSU) & \xrightarrow{\lambda} & \Omega_U(\mathbf{Z}), \end{array}$$

в которой все гомоморфизмы являются мономорфизмами. Из диаграммы следует, что $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U) \cong \mathrm{Im}\,\lambda \cap \Omega_U$. Для того чтобы описать кольцо $\mathrm{Im}\,\lambda \cap \Omega_U$, опишем сначала образ кольца $H_*(MSU)$ в $\Omega_U(\mathbf{Z}) \subset \Omega_U \otimes Q$.

Отметим, что, как показано в работе [5], кольцо $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U)$ изоморфно кольцу $Z(\mathscr{W})$ [6]. Поэтому кольцо $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U)\left[\frac{1}{2}\right]$ изоморфно кольцу $\Omega_{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$. Далее мы будем писать $\Omega_{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$ вместо $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U)\left[\frac{1}{2}\right]$.

Градуированное кольцо $\mathrm{Im}\,\lambda$ состоит из элементов вида $(\mathrm{ch}_U v, h)$, где $h \in H_*(MSU)$, v — образующая A^U-модуля $U^*(MSU)$. До размерности $2N$ кольцо $\mathrm{Im}\,\lambda$ состоит из элементов $(\mathrm{ch}_U v_N, h)$, где $v_N \in U^{2N}(MSU(N))$ — класс Тома. Так как $H_*(MSU)$ без кручения, то $\mathrm{Im}\,\lambda$ до размерности $2N$ порождается коэффициентами $\mathrm{ch}_U v_N$ при мономах $c_{i_1}^{n_1} \dots c_{i_k}^{n_k}$.

Лемма 1.1. *Коэффициенты ряда* $\mathrm{ch}_U v_3$ *мультипликативно порождают образ* $H_*(MSU)$ *в* $\Omega_U(\mathbf{Z})$.

Доказательство. Достаточно показать, что коэффициенты $\mathrm{ch}_U v_3$ порождают кольцо коэффициентов $\mathrm{ch}_U v_N$ для любого N. Рассмотрим такое отображение $g\colon \prod_1^N BSU(3) \to BSU(3N)$, что $g^*\zeta_{3N} = \zeta_3^{(1)} + \dots + \zeta_3^{(N)}$, где ζ_n — каноническое $SU(n)$-расслоение. Имеем

$$g^*(1 + c_1 t + \dots + c_{3N} t^{3N}) = (1 + a_1 t + b_1 t^2) \dots (1 + a_N t + b_N t^2),$$

здесь $1 + a_i t + b_i t^2 = c(\zeta_3^{(i)})$.

Введем в множестве мономов от переменных a_i, b_i упорядочение. Каждый моном однозначно представляется в виде $a_1^{n_1} \dots a_N^{n_N} b_1^{m_1} \dots b_N^{m_N}$. Из двух мономов «больше» тот, у которого больше первый неравный показатель в таком представлении. Старшие члены g^*c_{2n} и g^*c_{2n+1} равны соответственно $a_1 \dots a_n$ и $a_1 \dots a_{n-1} b_n$. Отсюда ясно, что g^* в когомологиях является мономорфизмом в размерностях, не больших $2N$. Более того, старшие члены элементов g^*c_ω, $|\omega| = n \leqslant N$, все различны. Поэтому коэффициенты ряда $\mathrm{ch}_U v_{3N}$ в размерностях, не больших $2N$, совпадают с коэффициентами при старших членах элементов g^*c_ω, $|\omega| \leqslant N$, в $g^*\mathrm{ch}_U v_{3N}$. Далее, $g^*\mathrm{ch}_U v_{3N} = \mathrm{ch}_U g^* v_{3N} = \prod \mathrm{ch}_U v_3$, т. е. коэффициенты ряда $g^*\mathrm{ch}_U v_{3N}$, а следовательно, и коэффициенты ряда $\mathrm{ch}_U v_{3N}$ в размерностях, не больших $2N$, порождаются коэффициентами ряда $\mathrm{ch}_U v_3$.

С другой стороны, коэффициенты ряда $ch_U v_{3N}$ при мономах, не содержащих $c_{N+1}, \dots, c_{3N}$, совпадают с коэффициентами ряда $\mathrm{ch}_U v_N$. Следовательно, коэффициенты ряда $ch_U v_N$ в размерностях, не больших $2N$, порождаются коэффициентами ряда $\mathrm{ch}_U v_3$.

Так как коэффициенты ряда $\mathrm{ch}_U v_3$ содержатся среди коэффициентов ряда $\mathrm{ch}_U v_N$, то кольца коэффициентов рядов $\mathrm{ch}_U v_3$ и $\mathrm{ch}_U v_N$ совпадают в размерностях, не больших $2N$. Лемма доказана.

Заметим, что коэффициенты $\mathrm{ch}_U v_2$ не порождают кольцо $\mathrm{Im}\,\lambda$, так как из $v_2 = \omega \widetilde{v}_2$, $\widetilde{v}_2 \in Sp^4(MSp(1))$ следует $\mathrm{ch}_U v_2 = \omega\, \mathrm{ch}_{Sp} \widetilde{v}_2$, и коэффициенты $\mathrm{ch}_U v_2$ порождают лишь $\Omega_{Sp}(\mathbf{Z})$.

Обобщая методы работ [1], [2], [3], применения формальных групп в кобордизмах, введем понятие элементарного пространства.

Определение. Элементарным пространством для теории, определяемой мультипликативным спектром $M=\{M_n\}$, назовем такое M_n, что образ группы $H_*(M_n)$ в кольце $H_*(M)$ мультипликативно порождает это кольцо, а образ $H_*(M_{n-1})$ его не порождает, причем в группе $H_*(M)$ структура кольца определяется умножением Понтрягина.

Для U^*- и Sp^*-теорий элементарными пространствами в силу теоремы о расщеплении расслоений являлись CP^∞ и KP^∞. Как показывает лемма 1.1, для SU^*-теории элементарным пространством является $MSU(3)$.

Вычислим теперь минимальное значение t-характеристики на образе $H_*(MSU)$ в $\Omega_U(\mathbf{Z})$, т. е. на $\Omega_{SU}(\mathbf{Z})$. Напомним, что через $\Omega_U(\mathbf{Z})$, $\Omega_{SU}(\mathbf{Z})$, $\Omega_{Sp}(\mathbf{Z})$ мы обозначаем кольца, лежащие в $\Omega_U\otimes Q$, $\Omega_{SU}\otimes Q$, $\Omega_{Sp}\otimes Q$ соответственно, состоящие из элементов, все когомологические числа Чженя которых целые.

Пусть $S^1\times S^1\to SU(3)$ — вложение максимального тора, $g: CP^\infty\times CP^\infty\to \to BSU(3)$ — соответствующее отображение классифицирующих пространств. Легко видеть, что $g^*\zeta_3=\xi_1+\xi_2+\bar\xi_1\bar\xi_2$, где ξ_i — универсальное $U(1)$-расслоение над CP^∞. Далее, $g^*c_2(\zeta_3)=-t_1^2-t_1t_2-t_2^2$, $g^*c_3(\zeta_3)=-t_1^2t_2-t_1t_2^2$, где $t_i=c_1(\xi_i)$, $u_i=\sigma_1(\xi_i)\in U^2(CP^\infty)$, $v_3=\sigma_3(\zeta_3)\in U^6(BSU(3))$. (Здесь $U^*(MSU(3))$ отождествляется при помощи изоморфизма Тома с идеалом в $U^*(BSU(3))$, порожденным $\sigma_3(\zeta_3)$.) Имеем $\mathrm{ch}_U=t_i+\sum\limits_{k\geqslant 1}\alpha_{2k}t_i^{k+1}$, в обозначениях из [1] $\alpha_{2k}=\dfrac{M^{2k}}{(k+1)!}$, t-характеристика α_{2k} равна -1. Далее,

$$g^*\,\mathrm{ch}_U\,v_3=\mathrm{ch}_U\,g^*v_3=\mathrm{ch}_U\,(u_1u_2f(\bar u_1,\bar u_2))=$$

$$=\Big(t_1+\sum_{k\geqslant 1}\alpha_{2k}t_1^{k+1}\Big)\Big(t_2+\sum_{k\geqslant 1}\alpha_{2k}t_2^{k+1}\Big)\Big(-t_1-t_2+\sum_{k\geqslant 1}\alpha_{2k}(-t_1-t_2)^{k+1}\Big)\approx$$

$$\approx -t_1t_2(t_1+t_2)\Big(1+\sum_{k\geqslant 1}\alpha_{2k}(t_1^k+t_2^k+(-1)^k(t_1+t_2)^k)\Big). \qquad (1.1)$$

Здесь $\approx$ означает равенство по модулю разложимых элементов.

Из этой формулы видно, что минимальное значение t-характеристики на $2k$-мерной компоненте кольца коэффициентов ряда (1.1) равна r_k, где

$$r_k=\begin{cases}1, & k\neq p^m\\ p, & k=p^m.\end{cases}$$

Так как $v_3=\omega\tilde v_3$, $\tilde v_3\in SU^6(MSU(3))$, $\omega\,\mathrm{ch}_{SU}v_3=\mathrm{ch}_U\tilde v_3$, то

$$\mathrm{ch}_U v_3=\sum_{m,n\geqslant 0}L_{n,m}c_2^n c_3^{m+1},\qquad L_{n,m}\in \mathrm{Im}\,(\Omega_{SU}^{-4n-6m}(\mathbf{Z})\to\Omega_U^{-4n-6m}(\mathbf{Z})).$$

Имеем [7]:

$$t_1^k+t_2^k+(-1)^k(t_1+t_2)^k=\sum_{2\lambda+3\mu=k}(-1)^\lambda\frac{k(\lambda+\mu-1)!}{\lambda!\mu!}c_2^\lambda c_3^\mu. \qquad (1.2)$$

Из (1.2) следует, что наибольшие общие делители чисел $\{1+(-1)^k, C_k^l, 1 \leqslant l \leqslant k-1\}$ и $\left\{\frac{k(\lambda+\mu-1)!}{\lambda!\mu!}, 2\lambda+3\mu=k, \lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0\right\}$ совпадают.

Имеем:

$$\mathrm{ch}_U v_3 = \sum_{m,n \geqslant 0} L_{n,m} c_2^n c_3^{m+1} \approx c_3 + c_3 \sum_{k \geqslant 1} \alpha_{2k} \sum_{2\lambda+3\mu=k} (-1)^{\lambda} \frac{k(\lambda+\mu-1)!}{\lambda!\mu!} c_2^{\lambda} c_3^{\mu}.$$

Отсюда t-характеристика элемента $L_{n,m}$ равна $(-1)^{n+1}\frac{(2n+3m)(n+m-1)!}{n!m!}$.

Из предыдущего замечания и леммы 1.1 следует

Лемма 1.2. *Минимальное значение t-характеристики на кольце, порожденном в $\Omega_U(\mathbf{Z})$ элементами $L_{n,m}$, равно минимальному значению t-характеристики на образе $H_*(MSU)$ в $\Omega_U(\mathbf{Z})$ и равно r_k в размерности $2k$.*

§ 2

В этом параграфе мы дадим конструкцию шестизначной двумерной формальной группы $F(X, Y)$, обобщающую конструкции одномерной формальной группы «геометрических» кобордизмов $f(u, v)$ [5] и двузначной одномерной формальной группы $F^{\pm}(x, y)$ [2], [3].

Выберем образующие $x_1 \in U^4(BSU(3))$ и $x_2 \in U^6(BSU(3))$ такие, что $\mu_{\mathbf{Z}}(x_1) = c_2$, $\mu_{\mathbf{Z}}(x_2) = c_3$ и $U^*(BSU(3)) = \Omega_U[[x_1, x_2]]$, $H^*(BSU(3)) = \mathbf{Z}[[c_2, c_3]]$, $U^*(CP^\infty \times CP^\infty) = \Omega_U[[u_1, u_2]]$, где $u_i = \sigma_1(\xi_i)$. Возьмем расслоение $(\xi_1 + \xi_2 + \overline{\xi_1 \xi_2})(\eta_1 + \eta_2 + \overline{\eta_1 \eta_2})$ над $CP^\infty \times CP^\infty \times CP^\infty \times CP^\infty$, являющееся ограничением тензорного произведения двух канонических $SU(3)$-расслоений ξ и η над $BSU(3) \times BSU(3)$. Раскроем скобки и попытаемся сгруппировать полученные 9 одномерных расслоений на SU-расслоения. Непосредственной проверкой получаем, что это можно сделать ровно двумя способами, причем в каждом из них расслоение $\xi\eta$ раскладывается в сумму трех $SU(3)$-расслоений.

$$\begin{aligned}
&(\xi_1 + \xi_2 + \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2)(\eta_1 + \eta_2 + \bar{\eta}_1\bar{\eta}_2) = && \\
&= (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2) + && (1) && \\
&+ (\xi_1\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\eta_1 + \xi_2\eta_2) + && (2) && (\mathrm{I}) \\
&+ (\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\eta_2 + \xi_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + \xi_1\eta_1) = && (3) && \\
&= (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2) + && (4) && \\
&+ (\xi_1\eta_2 + \xi_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\eta_1) + && (5) && (\mathrm{II}) \\
&+ (\xi_1\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\eta_2 + \xi_2\eta_1). && (6) &&
\end{aligned}$$

Заметим, что здесь, как и в случае $Sp(1) = SU(2)$-расслоений

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & \xi & \bar{\xi} \\
\hline
\eta & \xi\eta & \bar{\xi}\eta \\
\hline
\bar{\eta} & \xi\bar{\eta} & \bar{\xi}\bar{\eta} \\
\hline
\end{array}, \qquad (\xi\eta + \bar{\xi}\bar{\eta}) + (\xi\bar{\eta} + \bar{\xi}\eta) = (\xi + \bar{\xi})(\eta + \bar{\eta}),$$

члены группируются по «правилу вычисления определителя»:

$\xi_1\eta_1$	$\xi_2\eta_1$	$\bar\xi_1\bar\xi_2\eta_1$
$\xi_1\eta_2$	$\xi_2\eta_2$	$\bar\xi_1\bar\xi_2\eta_2$
$\xi_1\bar\eta_1\bar\eta_2$	$\xi_2\bar\eta_1\bar\eta_2$	$\bar\xi_1\bar\xi_2\bar r_1\bar\eta_2$

.

Замечание. Рассмотрев $SU(n)$-расслоения, с помощью изложенной выше конструкции можно получить $(n-1)$-мерную $n!$-значную формальную группу.

Образующие x_1 и x_2 кольца $U^*(BSU(3))$ определяют характеристические классы $SU(3)$-расслоений. Пусть $x_i=x_i(\xi)$, $y_i=x_i(\eta)$ — характеристические классы x_1 и x_2 двух канонических $SU(3)$-расслоений ξ и η. Можно взять также классы x_1, x_2 расслоений (i), $i=1, \ldots, 6$. Обозначим $x_j((i))$ через $F_j^{(i)}(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $j=1, 2$, $i=1, \ldots, 6$, или в векторной записи

$$\begin{pmatrix} F_1^{(i)} \\ F_2^{(i)} \end{pmatrix} = F^{(i)}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = F^{(i)}(X, Y); \quad F_j^{(i)}(X, Y) \in \Omega_U[[u_1, u_2, v_1, v_2]].$$

Как будет показано далее, $F^{(i)}(X, Y)$ имеют смысл значений шестизначной двумерной формальной группы. Найдем выражение для нее через известные ряды.

Пусть

$$\mathrm{ch}_U X = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}_U x_1 \\ \mathrm{ch}_U x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^{-1}(c_2, c_3) \\ B_2^{-1}(c_2, c_3) \end{pmatrix} = B^{-1}(C), \quad C = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Ряд B^{-1} обратим. Существует такой ряд B, что $B(B^{-1}(C))=C$. Введем оператор Σ_H, выражающий c_2 и c_3 через образующие Ву t_1 и t_2. Имеем

$$C = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1^2 - t_1t_2 - t_2^2 \\ -t_1^2t_2 - t_1t_2^2 \end{pmatrix} = \Sigma_H \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \Sigma_H(T), \quad T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогичный оператор определим в кобордизмах:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2) \\ x_2(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \Sigma_U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \Sigma_U(U), \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Например, в случае $x_1=\sigma_2$, $x_2=\sigma_3$

$$\Sigma_U(U) = \begin{pmatrix} \Sigma_{U,1}(u_1, u_2) \\ \Sigma_{U,2}(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1u_2 + (u_1+u_2)f(\bar u_1, \bar u_2) \\ u_1u_2 f(\bar u_1, \bar u_2) \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти обратный оператор Σ_U^{-1}, надо решить уравнение третьей степени $u^3-\sigma_1(x_1, x_2)u^2+\sigma_2(x_1, x_2)u-\sigma_3(x_1, x_2)=0$, определенное над $\Omega_U[[x_1, x_2]]$. Это уравнение является аналогом уравнения $y^2-G(x)y+x=0$ [2] в Sp-кобордизмах. Получаем, что Σ_U^{-1} имеет шесть значений. Аналогичное уравнение $t^3+c_2t-c_3=0$ определяет шесть значений оператора Σ_H^{-1}.

Будем далее отождествлять кольцо $U^*(BSU(3))$ с его образом в $H^*(BSU(3); \Omega_U(\mathbf{Z}))$ при помощи отображения ch_U. Тогда можно написать: $U=\begin{pmatrix} g^{-1}(t_1) \\ g^{-1}(t_2) \end{pmatrix}=g^{-1}(T)$, где g — логарифм группы «геометрических» кобордизмов $f(u, v)$. Имеем:

$$X = B^{-1}(C) = \Sigma_U(U) = \Sigma_U(g^{-1}(T)) = \Sigma_U(g^{-1}(\Sigma_H^{-1}(C))).$$

Отсюда находим, что $B(X) = C = \Sigma_H(g(\Sigma_U^{-1}(X)))$.

Так как

$$\Sigma_H^{-1}\begin{pmatrix} c_2(i) \\ c_3(i) \end{pmatrix} = \Sigma_H^{-1}\begin{pmatrix} c_2(\xi) \\ c_3(\xi) \end{pmatrix} + \Sigma_H^{-1}\begin{pmatrix} c_2(\eta) \\ c_3(\eta) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 6,$$

то

$$\Sigma_H^{-1}(B(F(X, Y))) = \Sigma_H^{-1}(B(X)) + \Sigma_H^{-1}(B(Y))$$

или

$$F(X, Y) = B^{-1}(\Sigma_H(\Sigma_H^{-1}(B(X)) + \Sigma_H^{-1}(B(Y))))$$

— аналогичная формуле (см. [2], стр. 101) для $F^{\pm}(x, y)$, где роль $\Sigma_H(\ \ )$ играет $(\ \ )^2$.

Ряд $B(X)$ назовем логарифмом группы $F(X, Y)$. Группа $F(X, Y)$ коммутативна в том смысле, что два множества из шести элементов совпадают:

$$\{F^{(i)}(X, Y),\ i = 1, \ldots, 6\} = \{F^{(i)}(Y, X),\quad i = 1, \ldots, 6\}.$$

(Точнее, $F^{(i)}(X, Y) = F^{(i)}(Y, X)$, $i = 1, 2, 3, 4$, и $F^{(5)}(X, Y) = F^{(6)}(Y, X)$.) Группа $F(X, Y)$ ассоциативна в том смысле, что два множества из 36 элементов совпадают:

$$\{F^{(i)}(F^{(j)}(X, Y), Z),\ i, j = 1, \ldots, 6\} = \{F^{(i)}(X, F^{(j)}(Y, Z)),\ i, j = 1, \ldots, 6\}.$$

Это можно записать в виде равенств соответственно 6 и 36 симметрических функций от этих элементов, причем эти функции будут лежать в $\Omega_U[[x_1, x_2, y_1, y_2]]$.

§ 3

В этом параграфе мы докажем теорему, аналогичную теореме 2.22 из [2]. Для этого надо выбрать такие образующие x_1 и x_2, чтобы кольцо коэффициентов группы $F(X, Y)$ было связано с $\operatorname{Im}(\Omega_{SU} \to \Omega_U)$. Хорошо, например, было бы найти такие образующие, что $x_1 = \omega\widetilde{x}_1$ и $x_2 = \omega\widetilde{x}_2$, где $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in SU^*(BSU(3))$.

Замечание. Как будет видно далее, нам достаточно было бы иметь такие мультипликативные образующие x_1 и x_2 кольца $U^*(BSU(3))$, что $ch_U x_1$ и $ch_U x_2$ принадлежат кольцу $H^*(BSU(3); \Omega_{SU}(\mathbf{Z}))$.

Группа $F'(X', Y')$, построенная по образующим x_1', x_2', изоморфна $F(X, Y)$, а именно, существует ряд $H(X)$ такой, что $H(F(X, Y)) = F'(H(X), H(Y))$, где равенство понимается в смысле множества значений. Ряд $H(X)$ равен $\Sigma_U'(\Sigma_U^{-1}(X))$.

Выберем в качестве образующих $\sigma_3(\zeta_3) \in \operatorname{Im}(SU^6(BSU(3)) \to U^6(BSU(3)))$ и $p_U^1(\zeta_3) \in \operatorname{Im}\left(Sp^4(BSU(3))\left[\frac{1}{2}\right] \to U^4(BSU(3))\left[\frac{1}{2}\right]\right)$ (см. [3]). Из леммы 1.1

и того, что $x_1 = p_U^1$ и $x_2 = \sigma_3 \in \operatorname{Im}\left(SU^*(BSU(3))\left[\frac{1}{2}\right] \to U^*(BSU(3))\left[\frac{1}{2}\right]\right)$, следует, что $\operatorname{Hom}_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U)\left[\frac{1}{2}\right]$ совпадает с подкольцом в $\Omega_U\left[\frac{1}{2}\right]$, элементы которого являются многочленами с коэффициентами из $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ от коэффициентов ряда $B(X)$. Определим два кольца, являющихся естественными обобщениями понятия кольца коэффициентов двузначной группы.

Определение. $\Lambda_1 \subset \Omega_U\left[\frac{1}{2}\right]$ порождается коэффициентами рядов из $\mathbf{Z}[F_j^{(i)},\ j=1, 2,\ i=1, \ldots, 6] \cap \Omega_U[[X, Y]]\left[\frac{1}{2}\right]$. Кольцо $\Lambda_2 \subset \Omega_U\left[\frac{1}{2}\right]$ порождается коэффициентами рядов $\Theta_j^i \in \Omega_U[[X, Y]]\left[\frac{1}{2}\right]$, $j = 1, 2$, $i=1, \ldots, 6$, где

$$z^6 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^i \Theta_j^i (X, Y) z^{6-i} = \prod_{i=1}^{6} (z - F_j^{(i)}(X, Y)), \quad j = 1, 2. \tag{3.1}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что коэффициенты рядов из $\mathbf{Z}[F_j^{(i)},\ j = 1, 2,\ i = 1, \ldots, 6] \cap \Omega_U[[X, Y]]\left[\frac{1}{2}\right] = \mathbf{A}$ являются многочленами с целыми коэффициентами от коэффициентов ряда $B(X)$, т. е. $\Lambda_2 \subset \Lambda_1 \subset \operatorname{Hom}_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U)\left[\frac{1}{2}\right] \subset \Omega_U\left[\frac{1}{2}\right]$. Имеем:

$$\begin{aligned}\Theta_1^1\Big|_{x_2=y_2=0} &= \sum_{i=1}^{6} F_1^{(i)}\Big|_{x_2=y_2=0} = 2p_U^1((\xi + \bar{\xi} + 1)(\eta + \bar{\eta} + 1)) = \\ &= 2\Theta_1(x_1, y_1) + 2x_1 + 2y_1.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Заметим, что

$$p_U^1((\xi + \bar{\xi} + 1)(\eta + \bar{\eta} + 1)) = F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + F_1^{(3)} = \Theta_1 + x_1 + y_1 \in \mathbf{A}.$$

Из (3.2) следует, что

$$\Lambda'\left[\frac{1}{2}\right] \subset \Lambda_2\left[\frac{1}{2}\right]. \tag{3.3}$$

(Определение Λ', Λ'', Λ и Θ_i см. в [2].) Далее,

$$F_2^{(i)}\left(\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{cases} uvf(\bar{u}, \bar{v}), & \text{если } i = 1, \\ 0 & \text{если } i = 2, \\ \bar{u}\bar{v}f(u, v), & \text{если } i = 3, \\ 0 & \text{если } i = 4, \\ u\bar{v}f(\bar{u}, v), & \text{если } i = 5, \\ \bar{u}vf(u, \bar{v}), & \text{если } i = 6; \end{cases}$$

$$\left\{z^6+\sum_{i=1}^{6}(-1)^i\Theta_2^i(X, Y)\,z^{6-i}\right\}\Bigg|_{x_2=y_2=0}=$$

$$=z^2(z-uvf(\bar u, \bar v))(z-\bar u\bar v f(u, v))(z-u\bar v f(\bar u, v))(z-\bar u v f(u, \bar v)). \qquad (3.4)$$

Отсюда $\Theta_2^4\big|_{x_2=y_2=0}=x_1^2y_1^2\Theta_2(x_1, y_1)$, т. е.

$$\Lambda''\subset\Lambda_2. \qquad (3.5)$$

Из (3.3), (3.5) и [2] (лемма 2.24) следует

Предложение 3.1. *Минимальные значения t-характеристики на кольцах Λ_2, Λ_1, Λ, $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U)$, $\mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(MSp), \Omega_U)$ в размерности $4m$ совпадают с точностью до степеней двойки.*

Из уравнения (3.4) получаем:

$$\Theta_2^1\big|_{x_2=y_2=0}=uvf(\bar u, \bar v)+\bar u\bar v f(u, v)+\bar u v f(u, \bar v)+u\bar v f(\bar u, v).$$

$$\Theta_2^1\big|_{x_2=y_2=0}=\sum\alpha_{i,j}x_1^iy_1^j, \qquad \alpha_{i,j}\in\Omega_U^{-2i-2j+6}\left[\frac{1}{2}\right].$$

Непосредственно проверяется, что $\alpha_{i,j}=0$ при $i+j\leqslant 3$, т. е. отличные от нуля $\alpha_{i,j}$ имеют степень, меньшую 0. Поэтому

$$\mathrm{ch}_U\Theta_2^1\big|_{x_2=y_2=0}\approx\sum\alpha_{i,j}z_1^iw_1^j, \text{ где } z_1=c_2(\xi+\bar\xi),\ w_1=c_2(\eta+\bar\eta);$$

с другой стороны,

$$\mathrm{ch}_U\,\Theta_2^1\big|_{x_2=y_2=0}=\mathrm{ch}_U(uvf(\bar u, \bar v)+\bar u\bar v f(u, v)+u\bar v f(\bar u, v)+\bar u v f(u, \bar v))\approx$$

$$\approx\sum_{k\geqslant 1}\alpha_{2k}\{-ts(t+s)[t^k+s^k+(-1)^k(t+s)^k]+ts(t+s)[(-1)^kt^k+$$

$$+(-1)^ks^k+(t+s)^k]+ts(t-s)[t^k+(-1)^ks^k+(-1)^k(t-s)^k]-$$

$$-ts(t-s)[(-1)^kt^k+s^k+(t-s)^k]\}=$$

$$=\sum_{m\geqslant 1}\alpha_{4m-2}4(-1)^{m-1}z_1w_1\left\{-z_1^{m-1}-w_1^{m-1}+\sum_{l=0}^{m-1}C_{2m}^{2l+1}z_1^lw_1^{m-l-1}\right\},$$

т. е. минимальное значение t-характеристики на кольце коэффициентов $\Theta_2^1\big|_{x_2=y_2=0}$ в размерности $4m-2$ равно наибольшему общему делителю чисел $\{(2m-1), C_{2m}^3, \ldots, C_{2m}^{2m-3}\}$, так как

$$t(\alpha_{0,m+1})=t(\alpha_{m+1,0})=0,\ t(\alpha_{1,m})=t(\alpha_{m,1})=4(-1)^m(2m-1),$$

$$t(\alpha_{l+1,m-l})=4(-1)^mC_{2m}^{2l+1},\quad 0<l<m-1. \qquad (3.6)$$

Лемма 3.1. *По модулю степеней двойки минимальные значения t-характеристики на кольцах Λ_2, Λ_1, $\Omega_{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$ совпадают.*

Доказательство. Известно, что $\Omega_{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$ есть кольцо полиномов, за образующие которого можно взять $y_{2k}\in\Omega_{SU}$ такие, что $t(y_{2k})=r_{k+1}r_k2^{s_k}$ [4].

Поэтому в силу предложения 3.1 и (3.6) достаточно показать, что наибольший общий делитель чисел $\{(2m-1), C_{2m}^3, \ldots, C_{2m}^{2m-3}\}$ равен r_{2m-1}. Обозначим его через $\tilde{r}_{2m-1}$. Так как $(2m-1)=C_{2m-1}^1, C_{2m}^{2l+1}=C_{2m-1}^{2l}+C_{2m-1}^{2l+1}$, то $\tilde{r}_{2m-1}=r_{2m-1}n$. Далее, $C_{2m}^{2l+1}=C_{2m-1}^{2l}\frac{2m}{2l+1}=C_{2m-1}^{2l+1}\frac{2m}{2m-2l-1}$, т. е. n делит $2m$. Но n также делит $(2m-1)$, а $(2m, 2m-1)=1$, поэтому $\tilde{r}_{2m-1}=r_{2m-1}$. Лемма доказана.

Теперь из леммы 3.1 стандартными рассуждениями с t-характеристикой легко получается

Теорема 3.1. $\Omega_{SU}\left[\frac{1}{2}\right]\cong\Lambda_1\left[\frac{1}{2}\right]\cong\Lambda_2\left[\frac{1}{2}\right]$.

Замечание. Исходя из топологических соображений, мы доказали совпадение колец $\Lambda_1\left[\frac{1}{2}\right]$ и $\Lambda_2\left[\frac{1}{2}\right]$. В случае двузначной формальной группы [2] совпадение колец, определенных аналогично кольцам Λ_1 и Λ_2, следует из алгебраических соображений.

Если уравнения (3.1) приводимы, то группе $F(X, Y)$ естественно сопоставляется еще одно кольцо Λ_3 — кольцо коэффициентов множителей, на которые раскладываются уравнения (3.1). Справедливо включение $\Lambda_1\supseteq\Lambda_3\supseteq\Lambda_2$. В связи с этим далее мы рассмотрим вопрос о приводимости уравнений (3.1) над кольцом $\Omega_U[[X, Y]]\left[\frac{1}{2}\right]$.

Назовем по аналогии с работой [3] элементарными частями уравнений (3.1) соответствующие уравнения, построенные по аддитивной группе $f(u, v)=u+v$.

Для того чтобы описать элементарную часть уравнения $(3.1)_2$, введем следующие обозначения: $\varphi=F_2^{(1)}(X, Y)=(t_1+p_2)(t_2+p_1)(t_3+p_3)$, где t_i, p_i — формальные переменные такие, что

$$\begin{cases}\sigma_1(t_1, t_2, t_3)=0\\ \sigma_2(t_1, t_2, t_3)=x_1\\ \sigma_3(t_1, t_2, t_3)=x_2,\end{cases}\qquad \begin{cases}\sigma_1(p_1, p_2, p_3)=0\\ \sigma_2(p_1, p_2, p_3)=y_1\\ \sigma_3(p_1, p_2, p_3)=y_2.\end{cases}$$

Через (123), (32), (12), (13), (12) обозначим элементы группы перестановок S_3. Определим действие группы S_3 на $\mathbf{Z}[t_i, p_i]$ как перестановку индексов у p_i. В этих обозначениях элементарная часть уравнения $(3.1)_2$ имеет вид:

$$(z-\varphi)(z-(123)\circ\varphi)(z-(132)\circ\varphi)(z-(12)\circ\varphi)(z-(13)\circ\varphi)(z-(23)\circ\varphi). \quad (*)$$

Для того чтобы произведение нескольких скобок из $(*)$ было определено над $\Omega_U[[X, Y]]\left[\frac{1}{2}\right]$, необходимо, чтобы группа S_3 действовала тривиально на этом произведении.

Из вида $(*)$ ясно, что только на произведении всех скобок S_3 действует тривиально. Следовательно, уравнение $(*)$ неприводимо.

Из неприводимости элементарной части уравнения $(3.1)_2$ следует неприводимость самого уравнения $(3.1)_2$. Элементарная часть уравнения $(3.1)_1$ является квадратом многочлена третьей степени:

$$(z-F_1^{(1)})(z-F_1^{(2)})(z-F_1^{(3)}) = (z-F_1^{(4)})(z-F_1^{(5)})(z-F_1^{(6)}) =$$
$$= z^3 - 3(x_1+y_1)z^2 + 3(x_1^2+x_1y_1+y_1^2)z - (x_1+y_1)^3 -$$
$$- 4x_1y_1(x_1+y_1) + 6(x_2^2+y_2^2). \qquad (**)$$

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в доказательстве неприводимости элементарной части $(3.1)_2$, можно показать неприводимость многочлена $(**)$.

Неприводимость уравнения $(3.1)_1$ будет теперь следовать из того, что

$$(z-F_1^{(1)})(z-F_1^{(2)})(z-F_1^{(3)}) = (z-F^-(x_1, y_1))\left(z-\frac{1}{2}(x_1+y_1+F^+(x_1+y_1))\right)^2$$

имеет коэффициенты, не лежащие в $\Omega_U[[X, Y]]\left[\frac{1}{2}\right]$ (например, свободный член). Таким образом, доказана

Лемма 3.2. *Уравнения* (3.2) *неприводимы над* $\Omega_U[[X, Y]]\left[\frac{1}{2}\right]$.

Замечание. Как и в работе [3], можно рассмотреть мультипликативный проектор $\varkappa: \Omega_U\otimes Q \to \Omega_U\otimes Q$. Проектор $\varkappa$ определяется однозначно следующим образом: одномерная формальная группа над $\Omega_U\otimes Q$, соответствующая этому проектору, является минимальной в смысле кольца коэффициентов из всех таких групп над $\Omega_U\otimes Q$, конструкция § 2 по которым приводит к тем же уравнениям (3.1). В отличие от проектора $\varkappa$ из работы [3], принадлежащего $A^U\otimes\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, $\varkappa$ принадлежит $A^U\otimes Q$. Композиция $SU^*(X)\otimes Q \xrightarrow{\omega} U^*(X)\otimes Q \xrightarrow{\varkappa} \varkappa(U^*(X)\otimes Q)$ задает изоморфизм теорий $SU^*(\cdot)\otimes Q$ и $\varkappa(U^*(X)\otimes Q)$.

(Поступила в редакцию 21/VI 1971 г.)

Литература

1. В. М. Бухштабер, Характер Чженя — Дольда в теории кобордизмов. I, Матем. сб., **83** (**125**) (1970), 575—595.
2. В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса, Матем. сб., **84** (**126**) (1971), 81—118.
3. В. М. Бухштабер, Двузначные формальные группы, Некоторые приложения к кобордизмам, Успехи матем. наук, **XXVI**, вып. **3** (**159**) (1971), 195—196.
4. С. П. Новиков, Гомотопические свойства комплексов Тома, Матем. сб., **57** (**89**) (1962), 406—442.
5. С. П. Новиков, Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов, Изв. АН СССР, серия матем., **31** (1967), 855—951.
6. P. E. Conner, E. E. Floyd, Torsion in SU-bordism, Mem. Amer. Math. Soc., **60**, (1966).
7. Б. Л. ван дер Варден, Современная алгебра, Москва, ОГИЗ, 1947.
8. D. Quillen, Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, Princeton (preprint), 1970.