Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.2, с. 3–38

УДК 519.81
ББК 22.18

ПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ГОЛОСОВАНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ ПРИНЦИПАМ СОВМЕСТНОГО БОЛЬШИНСТВА И ПРОИГРАВШЕГО ПО КОНДОРСЕ

Алексей Ю. Кондратьев
ИПМИ КарНЦ РАН
185910, Россия, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: kondratev@krc.karelia.ru

Исследуется задача голосования, в которой индивидуальные предпочтения избирателей задаются ранжированными списками кандидатов. Для правил группового выбора формулируются принципы позиционного доминирования (WPD, PD), тесно связанные с балльными правилами, а также слабый принцип совместного большинства (WMM), промежуточный между принципами большинства и совместного большинства (MM). Предлагаются две модификации позиционного медианного правила, удовлетворяющие принципу проигравшего по Кондорсе. Показывается, что для одной модификации выполняются принципы WPD и WMM, а для другой выполняются принципы PD и MM. Доказывается, что не существует правила, удовлетворяющего обоим принципам WPD и MM. Для построенных правил проверяется выполнение 34 принципов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Гуманитарного Научного Фонда (грант 15-02-00352_а) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 16-51-55006 Китай_а)

Ключевые слова: позиционный метод голосования, проигравший по Кондорсе, слабый принцип совместного большинства, позиционное доминирование, правило группового выбора, медианное правило.

1. Введение

В данной работе исследуется задача голосования, в которой индивидуальные предпочтения избирателей задаются ранжированными списками кандидатов. Самым естественным способом выбрать одного из двух кандидатов является *правило простого большинства* [6], по которому набравший больше половины голосов кандидат объявляется победителем. Однако, еще в 1785 году Маркиз Кондорсе показал [7], что парное отношение простого большинства не является транзитивным в случае трех и более кандидатов, следовательно, множество кандидатов может не содержать максимального элемента.

Содержание статьи организовано следующим образом: в разделе 2 приводится математическая постановка задачи голосования.

В разделе 3 определяются демократические принципы для правил группового выбора. Ключевую роль для данного исследования играют несколько новых принципов: слабый принцип совместного большинства, занимающий промежуточное положение между известными принципами большинства и совместного большинства, а также три принципа позиционного доминирования, связанные с общим распределением позиций кандидатов в профиле предпочтений и с позиционными балльными правилами.

В разделе 4 показывается несовместность некоторых известных, а также предложенных в данной работе принципов.

В разделе 5 рассматриваются позиционные методы голосования, в которых баллы кандидатов вычисляются только на основе общего распределения позиций в индивидуальных предпочтениях избирателей. Правило Борда, которое предложил в 1770 году Жан Шарль Борда [7], занимает одно из центральных мест в данной работе. Медианное правило модифицируется с помощью добавления функции Хевисайда от баллов Борда перед первой компонентой медианы-вектора. В разделе 6 определяется медиана на основе баллов Борда и принципа слабого позиционного доминирования. В разделе 7 сравниваются позиционные правила.

2. Основные определения

Рассмотрим *задачу голосования*, в которой $n \geq 1$ избирателей должны выбрать одного победителя из $m \geq 1$ кандидатов (альтернатив). Обозначим $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ множество кандидатов, $\{1, \ldots, n\}$ множество избирателей, $R(A)$ множество всех нестрогих линейных порядков, то есть полных, транзитивных и рефлексивных бинарных отношений, и $L(A)$ множество всех линейных порядков, то есть полных, транзитивных и асимметричных отношений на множестве A.

Личное предпочтение (индивидуальное предпочтение, personal or individual preference) каждого избирателя i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, определяется линейным порядком $\succ_i \in L(A)$. Предпочтению $\succ_i$ взаимно однозначно соответствует биекция $\sigma_i : A \to \{1, \ldots, m\}$, где $\sigma_i(a)$ равно относительному месту, на которое избиратель i ставит кандидата a,

$$\sigma_i(a) = |\{b \in A : b \succ_i a\}| + 1, \quad a \in A, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Профилем предпочтений (preference profile) называются сгруппированные личные предпочтения всех избирателей, $\succ = (\succ_1, \ldots, \succ_n) \in L(A)^n$ или $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Существует $m!$ различных линейных порядков и $(m!)^n$ различных профилей.

Пример 2.1. В таблице 1 приведен пример профиля предпочтений $n = 121$ избирателей относительно $m = 5$ кандидатов. В этом примере избиратели считаются анонимными, что позволяет избирателей с одинаковыми индивидуальными предпочтениями объединить в группы. Каждому столбцу соответствует некоторая группа избирателей, причем вверху указывается количество избирателей, а кандидаты располагаются сверху вниз, начиная с наиболее предпочитаемого.

Таблица 1. Профиль предпочтений

10	10	10	17	14	10	10	20	15	5
a	b	c	d	d	a	a	b	c	c
e	e	e	e	e	b	c	c	a	b
b	a	a	a	b	c	b	a	b	a
c	c	b	b	c	d	d	d	d	d
d	d	d	c	a	e	e	e	e	e

По профилю личных предпочтений вычисляются значения функции $h(a, b)$ как количество избирателей, для которых альтернатива a

предпочтительнее, чем альтернатива b,

$$h(a,b) = |\{i : a \succ_i b, \quad 1 \leq i \leq n\}|, \quad a,b \in A, \quad a \neq b.$$

Матрица h со значениями $h(a,b)$ называется *турнирной матрицей*. Заметим, что $h(a,b) = n - h(b,a)$ для любых $a \neq b$.

Турнирная матрица для профиля предпочтений из таблицы 1 представлена в таблице 2.

Таблица 2. Турнирная матрица

	a	b	c	d	e
a		**72**	57	**90**	**70**
b	49		**81**	**90**	**70**
c	**64**	40		**90**	**70**
d	31	31	31		**91**
e	51	51	51	30	

Будем говорить, что кандидат *a доминирует* кандидата b, или *побеждает при парном сравнении*, если $h(a,b) > n/2$. Для произвольных непересекающихся подмножеств альтернатив, мы говорим, что A_1 доминирует A_2, если a доминирует b для любых $a \in A_1$, $b \in A_2$.

Для некоторого подмножества $B \subseteq A$, альтернатива называется *победителем по Кондорсе*, и обозначается $CW(B)$, если она доминирует любую другую альтернативу в этом подмножестве,

$$CW(B) = \{b \in B : h(b,a) > n/2 \quad \text{for all} \quad a \in B \setminus b\}, \quad B \subseteq A.$$

Проигравшим по Кондорсе в некотором подмножестве $B \subseteq A$ называется кандидат, который проигрывает при парном сравнении любому другому кандидату этого подмножества,

$$CL(B) = \{b \in B : h(b,a) < n/2 \quad \text{for all} \quad a \in B \setminus b\}, \quad B \subseteq A.$$

Нетрудно понять, что множество победителей (проигравших) по Кондорсе либо пустое, либо состоит из одного кандидата.

Обобщением понятия победителя по Кондорсе является *топ-цикл* [5,10]. Топ-циклом называется минимальное по включению подмножество $TC \subseteq A$, такое что TC доминирует $A \setminus TC$, то есть $h(a,b) >$

$n/2$ для всех $a \in TC, b \in A \backslash TC$. Кандидатов множества $A \backslash TC$ будем называть *проигравшими по Смиту* [11].

Позиционным вектором будем называть вектор $n(a) = (n_1(a), \ldots, n_m(a))$, где $n_i(a)$ равно числу избирателей, для которых кандидат a расположен на i-м месте в индивидуальном предпочтении,

$$n_i(a) = |\{j : \sigma_j(a) = i, \quad 1 \leq j \leq n\}|, \quad a \in A, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

где из определения следует, что $n_i(a) \geq 0$ для любого i, $\sum_{i=1}^{m} n_i(a) = n$.

Кандидат a называется *победителем по большинству*, если $n_1(a) > n/2$, и *проигравшим по большинству*, если $n_m(a) > n/2$.

Позиционной матрицей будем называть матрицу $n(\succ) = (n(a_1), \ldots, n(a_m))$, состоящую из позиционных векторов всех кандидатов.

В таблице 3 приведено распределение относительных мест кандидатов для профиля предпочтений из таблицы 1.

Таблица 3. Позиционная матрица

Место	a	b	c	d	e
1	30	30	30	31	0
2	15	15	30	0	61
3	62	49	10	0	0
4	0	27	34	60	0
5	14	0	17	30	60

Правилом группового выбора (social choice function) $C(B, \succ)$ называется отображение, которое каждому непустому подмножеству $B \subseteq A$ и каждому профилю предпочтений избирателей сопоставляет некоторое подмножество победителей (choice set),

$$C : 2^A \setminus \emptyset \times L(A)^n \to 2^A,$$

причем $C(B, \succ) \subseteq B$ для любого B; $C(B, \succ) = B$, если $|B| = 1$; $C(B, \succ) = C(B, \succ')$, если профили $\succ, \succ'$ совпадают на B.

Для любого правила C и множества кандидатов $A' \subseteq A$ сужением C' называется правило, такое что $C'(B, \succ') = C(B, \succ)$ для всех $B \subseteq A'$, $\succ' \in L(A')^n$, $\succ \in L(A)^n$, где профили $\succ, \succ'$ совпадают на B.

Правило C называется *позиционным* [8], если для любых профилей $\succ$ и $\succ'$, имеющих одинаковые позиционные матрицы на некотором подмножестве $B \subseteq A$, совпадают также множества победителей,

$C(B, \succ) = C(B, \succ')$. Правило, в котором некоторое позиционное правило последовательно применяется ко множеству альтернатив, пока оно уменьшается, будем называть *итерационным позиционным.*

Важное значение имеют *позиционные балльные правила*, в которых каждому из m кандидатов начисляется $s_1, \ldots, s_m$ баллов за соответствующее место в личном предпочтении, а затем баллы суммируются по всем избирателям. Если $s_1 > s_m$, $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_m$, то правило называется *монотонным балльным правилом (MSR).* Если $s_1 > s_2 > \ldots > s_m$, то правило называется *строго монотонным балльным правилом (SMSR).* Если разница в начисляемых баллах положительная и не убывает от m-го места до 1-го, $0 < s_{m-1} - s_m \leq s_{m-2} - s_{m-1} \leq \ldots \leq s_1 - s_2$, то такое правило будем называть *балльным правилом с неубывающими разностями (MDSR).* Заметим, что баллы нужно задать отдельно для каждого $B \subseteq A$.

Обобщенное балльное правило (GSR) состоит из конечного упорядоченного набора балльных правил [11,15], где в случае ничьей по первому правилу сравнение проводится по второму, и так далее.

Если при любом (MSR, MDSR) SMSR балльном правиле кандидат a набирает больше баллов, чем кандидат b, то будем говорить, что кандидат *a (сильно, слабо) позиционно доминирует* кандидата b. В работе [3] позиционное доминирование называлось доминированием по Борда и определялось только относительно SMSR правил.

В следующих леммах, доказательства которых находятся в Приложении, приводится равносильное определение для (сильного, слабого) позиционного доминирования.

Лемма 2.1. *Кандидат a сильно позиционно доминирует кандидата b тогда и только тогда, когда выполняются следующие строгие неравенства*

$$M_1(a) = n_1(a) > n_1(b) = M_1(b),$$
$$\ldots$$
$$M_k(a) = n_1(a) + \ldots + n_k(a) > n_1(b) + \ldots + n_k(b) = M_k(b),$$
$$\ldots$$
$$M_{m-1}(a) = n_1(a) + \ldots + n_{m-1}(a) > n_1(b) + \ldots + n_{m-1}(b) = M_{m-1}(b).$$

Лемма 2.2. *Кандидат a позиционно доминирует кандидата b тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства*

$$\begin{gathered} M_1(a) = n_1(a) \geq n_1(b) = M_1(b), \\ \dots \\ M_k(a) = n_1(a) + \ldots + n_k(a) \geq n_1(b) + \ldots + n_k(b) = M_k(b), \\ \dots \\ M_{m-1}(a) = n_1(a) + \ldots + n_{m-1}(a) \geq n_1(b) + \ldots + n_{m-1}(b) = M_{m-1}(b), \end{gathered}$$

где хотя бы одно из неравенств строгое.

Лемма 2.3. *Кандидат a слабо позиционно доминирует кандидата b тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства*

$$\begin{gathered} B_1(a) = n_1(a) \geq n_1(b) = B_1(b), \\ B_2(a) = 2n_1(a) + n_2(a) \geq 2n_1(b) + n_2(b) = B_2(b), \\ \dots \\ B_k(a) = k \cdot n_1(a) + \ldots + n_k(a) \geq k \cdot n_1(b) + \ldots + n_k(b) = B_k(b), \\ \dots \\ Bo(a) = B_{m-1}(a) = (m-1)n_1(a) + \ldots + n_{m-1}(a) > \\ > (m-1)n_1(b) + \ldots + n_{m-1}(b) = B_{m-1}(b) = Bo(b). \end{gathered}$$

3. Принципы для правил группового выбора

3.1. Базовые принципы

Каждый принцип формулируется и проверяется для всех сужений множества кандидатов. Следующие принципы (свойства, аксиомы, критерии) назовем *базовыми* для выбора победителя. В этой работе рассматриваются только правила, удовлетворяющие всем базовым принципам.

Универсальность выбора (U, universality, unrestricted domain) [13,16]. $C(B, \succ) \neq \emptyset$ для любых профиля $\succ \in L(A)^n$ и непустого $B \subseteq A$.

Полнота выбора (NI, non imposition, citizen sovereignty) [16]. Для любых множества $B \subseteq A$ и кандидата $b \in B$ существует профиль $\succ \in L(A)^n$, такой что $C(B, \succ) = \{b\}$.

Анонимность (A) [4,12-16]. Для любых множества $B \subseteq A$, профиля $\succ \in L(A)^n$ и перестановки избирателей $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ выполняется $C(B, \succ_1, \ldots, \succ_n) = C(B, \succ_{\pi(1)}, \ldots, \succ_{\pi(n)})$.

Нейтральность (N) [4,11-16]. Для любых $B \subseteq A$, перестановки кандидатов $\pi : A \to A$ и профиля $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ выполняется

$$C(\pi^{-1}(B), \sigma_1 \circ \pi, \dots, \sigma_n \circ \pi) = \pi^{-1}(C(B, \sigma_1, \dots, \sigma_n)).$$

Единогласие выбора, Парето принцип (P) [11,13,16]. Для любых множества $B \subseteq A$, кандидатов $a, b \in B$ и профиля $\succ \in L(A)^n$, в котором $a \succ_i b$ для каждого $i = 1, \dots, n$, выполняется $b \notin C(B, \succ)$.

Для анонимных правил, определенных для любого числа избирателей, рассмотрим следующие два свойства.

Принцип единственного победителя (SW). При $n \to \infty$ вероятность выбрать ровно одного победителя стремится к единице,

$$\frac{1}{(m!)^n} \sum_{\succ \in L(A)^n} \mathrm{I}\{|C(B, \succ)| = 1\} \to 1, \quad B \neq \emptyset, B \subseteq A.$$

Однородность (H, homogeneity) [11-16]. Коллективный выбор не меняется, если каждого избирателя заменить на $k > 1$ избирателей с таким же личным предпочтением.

Каждому анонимному профилю $\succ \in L(A)^n$ сопоставим точку целочисленного $m!$-мерного пространства [15], $P(\succ) \in (N \cup \{0\})^{m!}$. Для этого зафиксируем номер от 1 до $m!$ для каждого строгого порядка, начиная с $a_1 > \ldots > a_m$, и заканчивая $a_m > \ldots > a_1$. В частности, профиль примера 2.1 задается вектором длины 5!=120, состоящем из чисел $10, \dots, 5$, и остальных нулей.

Пространство профилей можно естественным образом расширить [15], рассматривая каждый профиль как точку вещественного $m!$-мерного пространства, $P \in \mathbb{R}_+^{m!}$, где $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ это все неотрицательные вещественные числа. Турнирная матрица h для нецелочисленного профиля строится так же, как и для целочисленного, то есть значение $h(a, b)$ равно сумме голосов за порядки, в которых кандидат a предпочтительнее кандидата b. Аналогично, для позиционного вектора значения $n_i(a)$ равны сумме голосов за порядки, в которых кандидат a расположен на i-м месте.

3.2. Желательные свойства

Монотонность выбора (Mon) [9,11-13]. Для любых $\succ \in L(A)^n$, $B \subseteq A$ и $a \in C(B, \succ)$, если один из избирателей в личном предпочтении поднимет a на одну позицию, не меняя положения других кандидатов, тогда для нового профиля $\succ'$ выполняется $a \in C(B, \succ')$.

Строгая монотонность (SM) [9,11]. Для любых $\succ \in L(A)^n$, $B \subseteq A$ и $a \in C(B, \succ)$, если один из избирателей в личном предпочтении поднимет a на одну позицию, не меняя положения других кандидатов, то для нового профиля $\succ'$ выполняется $a \in C(B, \succ') \subseteq C(B, \succ)$.

Позитивная откликаемость (PR, positive responsiveness) [6,13]. Для любых $\succ \in L(A)^n$, $B \subseteq A$ и $a \in C(B, \succ)$, если один из избирателей в личном предпочтении поднимет a на одну позицию относительно кандидатов множества B, не меняя положения других кандидатов, тогда для нового профиля $\succ'$ выполняется $C(B, \succ') = \{a\}$.

Кандидаты некоторого множества B называются *клонами* [12,13], если в каждом индивидуальном предпочтении любой другой кандидат $a \in A \setminus B$ располагается либо ниже, либо выше сразу всех клонов множества B. Формально, для каждого избирателя $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любого кандидата $a \in A \setminus B$ выполняется либо $a \succ_i b$ для всех $b \in B$, либо $b \succ_i a$ для всех $b \in B$. Нетрудно понять, что $h(b_1, a) = h(b_2, a)$ для любых клонов $b_1, b_2 \in B$ и любого другого кандидата $a \in A \setminus B$. Будем говорить, что некоторое множество клонов побеждает, если побеждает хотя бы один кандидат из этого множества.

Будем называть кандидата a_{ul} *единогласно проигравшим* для некоторого кандидата a, если в каждом индивидуальном предпочтении кандидат a стоит выше, чем кандидат a_{ul}, то есть $a \succ_i a_{ul}$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Легко понять, что $h(a, a_{ul}) = n$, $h(a, b) \geq h(a_{ul}, b)$ для любого другого кандидата $b \neq a, a_{ul}$.

Независимость от клонов (IC) [12,13]. Для любых профиля, $A' \subset A$, $B \subseteq A'$ и $a \in A \setminus A'$, таких что B является множеством клонов в сужении A', B побеждает в A', и $B \cup a$ является множеством клонов в сужении $A' \cup a \subseteq A$, выполняется $B \cup a$ побеждает в $A' \cup a$.

Кроме того для любых профиля, $A' \subset A$, $B \subset A'$, $A_1 \subset A'$, и $a \in A \setminus A'$, таких что B, A_1 являются множествами клонов в сужении A', $B \cap A_1 = \emptyset$, B побеждает в A', и $A_1 \cup a$ является множеством клонов в сужении $A' \cup a \subseteq A$, выполняется B побеждает в $A' \cup a$.

Независимость от единогласно проигравших (IPDA). Множество победителей не изменится при удалении единогласно проигравшего кандидата.

Независимость от единогласно проигравших клонов (IPDC, independence of Pareto dominated clones). Множество победителей не изменится при удалении единогласно проигравшего клона.

Принцип Кондорсе (C) [4,11-14,16]. Если кандидат является победителем по Кондорсе, тогда этот кандидат выбирается единолично.

Принцип проигравшего по Кондорсе (CL). Проигравший по Кондорсе кандидат не принадлежит множеству победителей.

Независимость от проигравших по Кондорсе (ICLA). Удаление проигравшего по Кондорсе не меняет множество победителей.

Принцип большинства (Maj) [13]. Если более половины избирателей ставят некоторого кандидата на первое место в личных предпочтениях, то этот кандидат побеждает единолично.

Принцип проигравшего по большинству (ML). Если более половины избирателей ставят некоторого кандидата на последнее место в личных предпочтениях, то этот кандидат не принадлежит коллективному множеству победителей.

Независимость от проигравших по большинству (IMLA). Удаление проигравшего по большинству не меняет множество победителей.

Идемпотенция (Ide). Для любых профиля $\succ \in L(A)^n$ и $B \subseteq A$ выполняется $C(C(B, \succ), \succ) = C(B, \succ)$.

Перевернутая симметрия (RS, reversal symmetry). Если кандидат является единственным победителем для некоторого профиля, то для профиля с противоположными индивидуальными предпочтениями этот кандидат не принадлежит множеству победителей.

Принцип сильного позиционного доминирования (SPD). Для любого профиля $\succ \in L(A)^n$, в котором кандидат a сильно позиционно доминирует кандидата b, выполняется $b \notin C(A, \succ)$. Более того, если кандидат a сильно позиционно доминирует любого другого кандидата, то $C(A, \succ) = \{a\}$.

Принцип позиционного доминирования (PD). Для любого профиля $\succ \in L(A)^n$, в котором кандидат a позиционно доминирует кандидата b, выполняется $b \notin C(A, \succ)$. Более того, если кандидат a позиционно доминирует любого другого кандидата, то $C(A, \succ) = \{a\}$.

Принцип слабого позиционного доминирования (WPD). Для любого профиля $\succ \in L(A)^n$, в котором кандидат a слабо позиционно доминирует кандидата b, выполняется $b \notin C(A, \succ)$. Более того, если кандидат a слабо позиционно доминирует любого другого кандидата, то $C(A, \succ) = \{a\}$.

Следующие 4 принципа будем рассматривать только для правил, удовлетворяющих базовому свойству универсальности.

Слабый принцип совместного большинства (WMM, weak mutual majority). Если больше $k/(k+1)$ от общего числа избирателей ставят кандидатов множества $B = \{b_1, \dots, b_k\}$, $1 \le k \le m$, на первые k мест (в любом порядке) в личных предпочтениях, то множество победителей содержится в B.

Принцип совместного большинства (MM, mutual majority) [13]. Если больше половины избирателей ставят кандидатов множества $B = \{b_1, \dots, b_k\}$, $1 \le k \le m$, на первые k мест (в любом порядке) в личных предпочтениях, то множество победителей содержится в B.

Принцип Смита (S) [11,13]. Победители принадлежат топ-циклу.

Независимость от проигравших по Смиту (ISDA). Удаление проигравшего по Смиту кандидата не меняет множество победителей.

Для нейтральных и анонимных правил, определенных для любого числа кандидатов и избирателей, рассмотрим следующее свойство.

Полиномиальное время (PT). Существуют не зависящие от m и n постоянные $C, k \ge 0$, такие что при любом фиксированном множестве m альтернатив,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(m!)^n} \sum_{\succ \in L(A)^n} \mathrm{I}\{time(\succ) \le Cm^k n\} = 1,$$

где $time(\succ)$ это время вычисления множества победителей.

В статье [14] рассматриваются два свойства (later-no-help, later-no-harm), связанных с нестрогим линейным ранжированием альтернатив. Так как в данной работе предполагается строгий линейный порядок кандидатов в каждом личном предпочтении, то мы объединим эти два свойства следующим образом.

Принцип перестановок слабых альтернатив (later-no-change, LNC). Если в некотором личном предпочтении переставить местами кандидатов, расположенных ниже всех кандидатов множества победителей, то в новом профиле множество победителей не изменится.

Для каждого индивидуального предпочтения $\succ_i \in L(A)$ определим его расширение $\gamma(\succ_i)$ на произвольные непустые подмножества кандидатов $B_1, B_2 \subseteq A$, $B_1 \neq B_2$, следующим образом [4]. По определению, $B_1 \gamma(\succ_i) B_2$, если $a \succ_i b$ для любых $a \in B_1 \setminus B_2$, $b \in B_2$, а также $a \succ_i b$ для любых $a \in B_1$, $b \in B_2 \setminus B_1$. Будем считать, что любое непустое множество строго предпочтительнее пустого.

Обозначим $\succ^{rev(i)}$ профиль, который получается из $\succ$ переворачиванием индивидуального предпочтения избирателя i. *Парадоксом противоположного предпочтения* называется ситуация [9,16], когда $C(A, \succ^{rev(i)})\ \gamma(\succ_i)\ C(A, \succ)$ для некоторого избирателя. Этот парадокс возникает, когда некоторому избирателю выгоднее представить противоположное предпочтение (при условии честного раскрытия личных предпочтений остальными избирателями).

Принцип противоположного предпочтения (HWM, half-way monotonicity) [9,16]. Парадокс противоположного предпочтения отсутствует для каждого профиля предпочтений.

Следующие три принципа сформулируем для анонимных правил, определяющих групповой выбор для любого числа избирателей.

Принцип пополнения (Consistency) [11,15,16]. Для любых профилей $P_1, P_2 \in (N \cup \{0\})^{m!}$, таких что $C(A, P_1) \cap C(A, P_2) \neq \emptyset$, выполняется $C(A, P_1 + P_2) = C(A, P_1) \cap C(A, P_2)$.

Принцип топ-пополнения (TCons, modified mono-add-top) [14]. Если некоторый кандидат принадлежит множеству победителей, и мы добавим личное предпочтение, в котором он находится на первом месте, то в новом профиле этот кандидат будет побеждать единолично.

Принцип Архимеда (Archimedean) [11,15]. Для любых профилей $P_1, P_2 \in (N \cup \{0\})^{m!}$ существует натуральное k, такое что
$C(A, k' \cdot P_1 + P_2) \subseteq C(A, P_1)$ для всех $k' \geq k$.

4. Взаимосвязь и совместность принципов

Для некоторых пар принципов из выполнения одного принципа следует выполнение другого принципа (рис. 1). В этом случае мы говорим, что один принцип строже (сильнее), а другой слабее.

Перечислим цепочки следствий, сразу вытекающие из определений: 1) ISDA $\Rightarrow$ S, ICLA; 2) ICLA $\Rightarrow$ IMLA, CL; 3) IMLA $\Rightarrow$ ML; 4) S $\Rightarrow$ C, MM, CL; 5) C $\Rightarrow$ Maj; 6) MM $\Rightarrow$ WMM, ML; 7) CL $\Rightarrow$ ML;

8) WMM ⇒ Maj; 9) WPD principle ⇒ PD principle ⇒ SPD principle; 10) PR ⇒ SM ⇒ Mon; 11) IPDA ⇒ P, IPDC; 12) U, P, Cons ⇒ TCons.

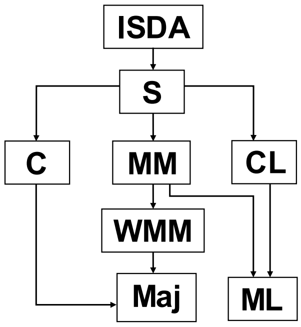

Рисунок 1. Связь некоторых принципов

Заметим, что для рассмотренных в работе правил группового выбора принципы ICLA и IMLA выполняются или не выполняются одновременно с более строгим принципом ISDA, в то время как принцип IPDC выполняется или не выполняется одновременно с более строгим принципом IPDA.

В следующих теоремах исследована совместность различных принципов. Пункт 7 теоремы 4.2 обобщает идею работы [3], где приведен пример профиля предпочтений, в котором по каждому строго монотонному балльному правилу победитель по Кондорсе проигрывает в голосовании. Пункты 14 и 15 следуют из теоремы 4.1. Доказательство теоремы 4.2 находится в Приложении.

Теорема 4.1. *(Смит [11], Янг [15]). Правило группового выбора удовлетворяет принципам универсальности (U), анонимности (A), нейтральности (N) и пополнения (Cons) тогда и только тогда, когда это правило является обобщенным балльным правилом.*

Теорема 4.2. *Существуют такие натуральные $m, n \in \mathbb{N}$, что для правил группового выбора справедливы следующие утверждения:*
1) U, A, N, PR, IMLA несовместны;
2) U, A, N, PR, IPDC несовместны;
3) U, A, N, PR, IC несовместны;
4) A, N, PD, IPDC несовместны;
5) U, A, N, IC, SPD несовместны;

6) MM, WPD несовместны;
7) C, SPD несовместны;
8) SPD, IMLA несовместны;
9) Каждое позиционное правило не удовлетворяет C и IMLA;
10) Если распределения позиций $n(a) = n(b)$, тогда по любому нейтральному позиционному методу кандидаты a, b побеждают или не побеждают одновременно;
11) U, N, SPD, Ide несовместны для позиционных правил;
12) U, ML, IPDA, SPD несовместны;
13) U, RS, IPDA, SPD несовместны;
14) U, A, N, Cons, Maj, ML несовместны;
15) U, A, N, Cons, Maj, RS несовместны;
16) PD, LNC несовместны;
17) Arc, Maj, PD несовместны;
18) Arc, Maj, PR несовместны;
19) Arc, SPD, Ide несовместны.

5. Позиционные правила группового выбора

5.1. Правило Борда

Это правило является балльным правилом с неубывающими разностями, где за первое место в индивидуальном предпочтении кандидату присваивается $m-1$, за второе $m-2$, ..., за последнее 0 баллов. По вектору позиций $n(a)$ баллы Борда вычисляются по формуле

$$Bo(a) = \sum_{i=1}^{m} n_i(a)(m-i), \quad a \in A. \tag{5.1}$$

Побеждает кандидат, набравший больше всех баллов. Легко показать, что посчитать баллы можно по турнирной матрице согласно

$$Bo(a) = \sum_{b \in A \setminus \{a\}} h(a,b), \quad a \in A. \tag{5.2}$$

Нетрудно понять, что проигравший по Кондорсе кандидат всегда набирает меньше среднего балла среди всех кандидатов, $Bo(CL(A)) < (m-1)n/2$. Аналогично, победитель по Кондорсе всегда набирает больше среднего балла, $Bo(CW(A)) > (m-1)n/2$.

5.2. Позиционный метод Блэка

Согласно правилу Блэка [2], если существует победитель по большинству, то он объявляется победителем. Иначе, побеждает кандидат, набравший наибольшее количество баллов Борда (5.1).

Пример 5.1. Пусть профиль предпочтений $n = 100$ избирателей относительно $m = 9$ кандидатов задается таблицей 4. Победителя по большинству здесь не существует. Более 3/4 общего числа избирателей ставят трех кандидатов $\{a_1, a_2, a_3\}$ на первые три места в своих личных предпочтениях. Баллы Борда $Bo(a_1) = 557 < 572 = Bo(b_1)$, и по методу Блэка победит кандидат b_1. Следовательно, не выполняется слабый принцип совместного большинства.

Таблица 4. Профиль предпочтений

26	25	25	8	8	8
a_1	a_3	a_2	b_1	b_1	b_1
a_2	a_1	a_3	b_2	b_2	b_2
a_3	a_2	a_1	b_3	b_3	b_3
b_1	b_1	b_1	b_4	b_4	b_4
b_2	b_2	b_2	b_5	b_5	b_5
b_3	b_3	b_3	b_6	b_6	b_6
b_4	b_4	b_4	a_1	a_3	a_2
b_5	b_5	b_5	a_2	a_1	a_3
b_6	b_6	b_6	a_3	a_2	a_1

5.3. Методы относительного большинства

Правила относительного большинства использовались для голосования еще до нашей эры [7]. Мы рассмотрим несколько вариантов этого метода голосования.

Метод относительного большинства (Pl, plurality). Это правило является монотонным балльным правилом с начислением 1 балла за первое место в индивидуальном предпочтении и 0 баллов за остальные места. Побеждают кандидаты с наибольшим числом первых позиций $n_1(a)$,

$$\mathrm{Pl}(A, \succ) = \{a \in A : n_1(a) \geq n_1(b) \quad \text{for all} \quad b \in A \setminus a\}.$$

Метод относительного большинства с разрешением ничьих (RT Pl). Это правило является обобщенными балльным правилом. Побеждает кандидат с наибольшим числом первых позиций. В случае ничьей между кандидатами по первым позициям далее сравниваются количество вторых, третьих, ..., последних позиций в профиле.

5.4. Медианное правило

Медиана. Для каждого кандидата a и профиля предпочтений $(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ определим следующие значения

$$r_i(a) = |\{b \in A : a \succ_i b\}| = m - \sigma_i(a), \quad a \in A, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Обозначим вектор $r(a) = (r^{(1)}(a), \ldots, r^{(n)}(a))$, состоящий из упорядоченных по убыванию значений $r_1(a), \ldots, r_n(a)$. Легко понять, что векторы $n(a), r(a)$ однозначно соответствуют друг другу.

Построим медиану-вектор $med(a)$ для нечетного n по формуле

$$med(a) = \left(r^{(\frac{n+1}{2})}(a), \frac{r^{(\frac{n-1}{2})}(a) + r^{(\frac{n+3}{2})}(a)}{2}, \ldots, \frac{r^{(1)}(a) + r^{(n)}(a)}{2} \right),$$

а для четного числа избирателей согласно

$$med(a) = \left(\frac{r^{(\frac{n}{2})}(a) + r^{(\frac{n+2}{2})}(a)}{2}, \ldots, \frac{r^{(1)}(a) + r^{(n)}(a)}{2} \right).$$

Побеждает кандидат, медиана которого лексикографически не хуже медиан остальных кандидатов. Классическая медиана не удовлетворяет принципам проигравшего по Кондорсе и идемпотенции.

Нетрудно понять, что первая компонента медианы для кандидата a выражается через значения $M_k(a)$ согласно следующей формуле

$$med_0(a) = m - \frac{\min\{k : M_k(a) \geq \frac{n}{2}\} + \min\{k : M_k(a) > \frac{n}{2}\}}{2}. \qquad (5.3)$$

CL медиана. Добавим к медиане-вектору дополнительную компоненту, $CLmed(a) = (I(a), med(a))$, зависящую от баллов Борда (5.1) следующим образом

$$I(a) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad Bo(a) > n(m-1)/2, \\ 1/2, & \text{if} \quad Bo(a) = n(m-1)/2, \\ 0, & \text{if} \quad Bo(a) < n(m-1)/2, \end{cases} \qquad a \in A. \qquad (5.4)$$

В следующей теореме, доказательство которой находится в Приложении, исследованы свойства предложенной модификации.

Теорема 5.1. *CL медиана удовлетворяет всем базовым свойствам, а также принципам совместного большинства (MM, WMM, Maj), проигравшего по Кондорсе (CL, ML), позитивного отклика (PR, SM, Mon), полиномиального времени (PT), позиционного доминирования (PD, SPD), перевернутой симметрии (RS). Для итерационного правила выполняется также принцип идемпотенции (Ide).*

Любое правило группового выбора, для которого выполняются перечисленные свойства, не удовлетворяет принципам IPDC, IPDA, IC, C, S, IMLA, ICLA, ISDA, Cons, WPD, LNC, Arc.

Кроме того для CL медианы не выполняются принципы топ-пополнения (TCons) и противоположного предпочтения (HWM).

Пример 5.2. Рассмотрим профиль предпочтений $n = 11$ избирателей относительно $m = 4$ кандидатов, задаваемый таблицей 5.

Таблица 5. Профиль предпочтений

5	2	2	2
b	d	d	c
a	c	a	a
c	b	b	b
d	a	c	d

Средний балл Борда равен $n(m-1)/2 = 16.5$. Простые вычисления для кандидата a приводят к $r(a) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,0,0)$, $n(a) = (0,9,0,2)$, $Bo(a) = 18 > 16.5$. Следовательно, $CLmed(a) = (1,2,2,2,2,1,1)$. Аналогично, CL медиана равна $(1,1,2,2,2,2,2)$ для кандидата b, $(0,1,1,1.5,1.5,1.5,1.5)$ для c, $(0,0,0,1.5,1.5,1.5,1.5)$ для d.

Здесь по CL медиане и классической медиане получается коллективное ранжирование $a > b > c > d$, и единолично побеждает кандидат a. Рассмотрим избирателя с личным предпочтением $d > c > b > a$. Если этот избиратель не будет участвовать в голосовании или укажет в бюллетене противоположный порядок $a > b > c > d$, то коллективное ранжирование изменится на $b > a > c > d$, и единолично победит кандидат b. Таким образом, не выполняются принципы участия [9] и противоположного предпочтения.

Пример 5.3. Пусть предпочтения $n = 26$ избирателей относительно $m = 5$ кандидатов задаются таблицей 6. В этом профиле по CL медиане и классической медиане единолично побеждает кандидат e. Рассмотрим избирателя с личным предпочтением $a > e > b > c > d$. Если этот избиратель не будет участвовать в голосовании, то единолично победит кандидат a. Следовательно, не выполняются принципы участия [9] и топ-пополнения.

Таблица 6. Профиль предпочтений

4	3	3	3	3	3	3	3	1
a	d	c	b	e	e	e	e	a
b	a	d	c	a	d	c	b	e
c	b	a	d	b	a	d	c	b
e	e	e	a	c	b	a	d	c
d	c	b	e	d	c	b	a	d

6. Медианное правило, удовлетворяющее принципу слабого позиционного доминирования

Определим частичные суммы Борда для любого вектора позиций $n(a)$ и вещественного $t \in (0, +\infty)$ следующим образом:

$$B_t(a) = t \cdot n_1(a) + (t-1)n_2(a) + \ldots + (t - \lfloor t \rfloor) n_{\lfloor t \rfloor + 1}(a), \quad t \in (0, +\infty), \quad (6.1)$$

где формально положим $n_i(a) = 0, i > m$. Из определения следует, что $B_{m-1}(a) = Bo(a)$. Нетрудно получить следующее тождество, связывающее вещественный $t \in [1, m-1]$ и целочисленные аргументы,

$$B_t(a) = (k+1-t)B_k(a) + (t-k)B_{k+1}(a), \; k \in \{1, \ldots, m-2\}, t \in [k, k+1]. \quad (6.2)$$

Рассмотрим функцию $B_t(a)/t$ как функцию вещественного аргумента $t \in (0, +\infty)$. Это непрерывная неубывающая функция, так как

$$\frac{B_t(a)}{t} = n_1(a) + \left(1 - \frac{1}{t}\right) n_2(a) + \ldots + \left(1 - \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\right) n_{\lfloor t \rfloor + 1}(a), \; t \in (0, +\infty). \quad (6.3)$$

При $t \in (0, 1]$ будет $B_t(a)/t = n_1(a)$, то есть функция является постоянной. При $t \in [m-1, +\infty)$ выполняется

$$\frac{B_t(a)}{t} = n_1(a) + \left(1 - \frac{1}{t}\right) n_2(a) + \ldots + \left(1 - \frac{m-1}{t}\right) n_m(a),$$

следовательно, функция строго возрастает при $t \in [m-1, +\infty)$, за исключением случая, когда $n_1(a) = n$. С другой стороны, при $t \in [m-1, +\infty)$ справедливо тождество

$$\frac{B_t(a)}{t} = \frac{t \cdot n_1(a) + (t-1)n_2(a) + \ldots + (t-m+1)n_m(a)}{t} = \\ = \frac{Bo(a) + (t-m+1)n}{t}, \quad t \in [m-1, +\infty). \quad (6.4)$$

Из формулы (6.3) следует, что при $n_1(a) < n/2$ множество $\{t : B_t(a)/t = n/2\}$ состоит из одной точки, а при $n_1(a) = n/2$ может состоять из одной точки или отрезка. По аналогии с обычной медианой, если $n_1(a) \le n/2$, то определим функцию $m(a)$ следующим образом

$$m(a) = t \in (1, 2(m-1)] : \frac{B_t(a)}{t} = \frac{n}{2}, \quad \text{if} \quad n_1(a) < \frac{n}{2}, \qquad (6.5)$$

$$m(a) = \max\left\{t \in [1, 2(m-1)] : \frac{B_t(a)}{t} = \frac{n}{2}\right\}, \quad \text{if} \quad n_1(a) = \frac{n}{2},$$

где в определении берется отрезок $[1, 2(m-1)]$, так как $B_1(a) = n_1(a) \le n/2$, а по формуле (6.4) $B_{2(m-1)}(a)/2(m-1) \ge n/2$.

Если же $n_1(a) > n/2$, то определим $m(a)$ линейным образом, чтобы $\lim_{n_1(a)\to n/2} m(a) = 1$, а при $n_1(a) = n$ выполнялось $m(a) = 0$. Следовательно,

$$m(a) = 2\left(1 - \frac{n_1(a)}{n}\right), \quad \text{if} \quad n_1(a) > \frac{n}{2}. \qquad (6.6)$$

Сильнейший кандидат $a \in A$ будет иметь при таком определении наименьшее значение $m(a)$. Поэтому, для удобства, определим баллы кандидата a по формуле $WPDmed(a) = m - 1 - m(a)/2$, то есть

$$\text{WPDmed}(a) = \begin{cases} m - 1 - \frac{1}{2}\max\left\{t \in [1,2(m-1)] : \frac{B_t(a)}{t} = \frac{n}{2}\right\}, & n_1(a) \le \frac{n}{2}, \\ m - 2 + \frac{n_1(a)}{n}, & n_1(a) > \frac{n}{2}, \end{cases} \qquad (6.7)$$

где используется максимум (а не минимум или средняя точка отрезка), чтобы выполнялся принцип перевернутой симметрии.

Учитывая (6.1), (6.4), (6.7), получаем следующие утверждения.

Лемма 6.1. *Для любого профиля предпочтений n избирателей среди m кандидатов баллы любого кандидата $a \in A$ по методу WPD медианы удовлетворяют следующим утверждениям:*
1) Если баллы Борда кандидата a не больше среднего значения, $Bo(a) \leq (m-1)n/2$, то $WPDmed(a) = Bo(a)/n$.
2) $WPDmed(a) = 0$ равносильно тому, что $Bo(a) = 0$.
3) $WPDmed(a) = (m-1)/2$ равносильно тому, что $Bo(a) = (m-1)n/2$.
4) $WPDmed(a) = m-1$ равносильно тому, что $n_1(a) = n$.
5) $WPDmed(a) > (m-1)/2$ равносильно тому, что $Bo(a) > (m-1)n/2$.
6) $WPDmed(a) < (m-1)/2$ равносильно тому, что $Bo(a) < (m-1)n/2$.
7) $WPDmed(a) > m-3/2$ равносильно тому, что $n_1(a) > n/2$.

Доказательство следующей теоремы находится в Приложении.

Теорема 6.1. *WPD медиана с двумя показателями $WPDmed(a)$ и $Bo(a)$, определенными по формулам (5.1), (6.1), (6.7), удовлетворяет принципам универсальности (U), полноты (NI), анонимности (A), нейтральности (N), однородности (H), единогласия (P), единственного победителя (SW), проигравшего по большинству (ML), большинства (Maj), слабого совместного большинства (WMM), проигравшего по Кондорсе (CL), полиномиального времени (PT), монотонности (Mon), строгой монотонности (SM), позитивного отклика (PR), перевернутой симметрии (RS) и принципу слабого позиционного доминирования (WPD, PD, SPD). Для итерационного правила выполняется также принцип идемпотенции (Ide).*

Любое правило группового выбора, для которого выполняются перечисленные свойства, не удовлетворяет принципам MM, IPDC, IPDA, IC, C, S, IMLA, ICLA, ISDA, Cons, LNC, Arc.

Кроме того для WPD медианы не выполняются принципы топпополнения (TCons) и противоположного предпочтения (HWM).

Пример 6.1. Имеется $n = 245$ избирателей и $m = 4$ кандидата. Предпочтения избирателей задаются таблицей 7.

В этом профиле побеждает кандидат c, $WPDmed(c) = 1.6 > 1.598 = WPDmed(a)$. Рассмотрим некоторого избирателя i, который голосует за порядок $a > c > b > d$. Если избиратель i не участвует в голосовании, то побеждает кандидат a, $WPDmed(a) = 1.587 > 1.5 = WPDmed(c)$. Если избиратель i укажет в бюллетене противоположный порядок $d > b > c > a$, то побеждает кандидат a, $WPDmed(a) = 1.576 > 1.4 = WPDmed(c)$. Таким образом, не выполняются принципы участия [9], топ-пополнения и противоположного предпочтения.

Таблица 7. Профиль предпочтений

60	60	59	59	7
a	b	c	c	a
b	a	d	d	c
d	d	a	b	b
c	c	b	a	d

7. Сравнение позиционных методов голосования

Применим позиционные правила к профилю примера 2.1 (таблицы 1,2,3). В этом профиле каждый кандидат побеждает хотя бы поодному из правил (таблица 8). Заметим, что классическая медиана выбирает проигравшего по Кондорсе кандидата e.

Таблица 8. Баллы кандидатов в примере 2.1

правило	a	b	c	d	e	поб.
отн. большин.	30	30	30	31	0	d
Борда, Блэка	289	290	264	184	183	b
WPD медиана	$2\frac{47}{93}$	$2\frac{48}{121}$	$2\frac{22}{87}$	$1\frac{63}{121}$	$1\frac{62}{121}$	a
CL медиана	1,2,2	1,2,2	1,2,2.5	0,1,1	0,3,1.5	c
медиана	2	2	2	1	3	e

Для понимания различий между рассмотренными правилами покажем как меняются баллы кандидатов при малом изменении вектора позиций. Предположим, что вектор $(\ldots, n_{i-1}(a), n_i(a), n_{i+1}(a), \ldots)$ изменился на $(\ldots, n_{i-1}(a) + 1, n_i(a) - 2, n_{i+1}(a) + 1, \ldots)$, то есть два одинаковых места i были заменены на соседние места $i - 1$ и $i + 1$. Баллы кандидата изменятся следующим образом:

1) по правилу Борда останутся без изменений,

2) по методам относительного большинства Pl и Ite Pl, а также WPD медианы и любому MDSR балльному правилу не ухудшатся,

3) по методу относительного большинства RT Pl строго улучшатся,

4) по произвольным MSR и SMSR правилам, по CL и классической медианам баллы кандидата могут измениться в любом направлении.

Таблица 9. Свойства позиционных методов выбора победителя

	Ite CL med	Ite WPD med	Ite Bla	Bor	Pl	RT Pl	Ite Pl	Ite RT Pl
ML	y	y	y	y	n	n	n	n
Maj	y	y	y	n	y	y	y	y
WMM	y	y	n	n	y	y	y	y
MM	y	n	n	n	n	n	n	n
CL	y	y	y	y	n	n	n	n
PT	y	y	y	y	y	y	y	y
IPDA	n	n	n	n	y	n	y	n
IC,C	n	n	n	n	n	n	n	n
Mon,SM	y	y	y	y	y	y	y	y
PR	y	y	y	y	n	y	n	y
SPD	y	y	y	y	y	y	y	y
PD	y	y	y	y	n	y	n	y
WPD	n	y	y	y	n	y	n	y
TCons	n	n	y	y	y	y	y	y
HWM	n	n	y	y	y	y	n	y
Cons	n	n	n	y	y	y	n	n
Arc	n	n	n	y	y	n	n	n
LNC	n	n	n	n	y	n	y	n
Ide	y	y	y	n	n	n	y	y
RS	y	y	y	y	n	n	n	n

Первая компонента классической медианы принадлежит конечному множеству $\{0, 1/2, \ldots, m-1\}$, в то время как WPD медиана принимает значения из вещественного отрезка $[0, m-1]$. Определение WPD медианы годится для случая, когда веса избирателей являются неотрицательными вещественными числами, профиль предпочтений представлен точкой $m!$-мерного пространства $\mathbb{R}_+^{m!}$, а позиционный вектор $n(a)$ точкой $\mathbb{R}_+^m$.

Как правило, малое изменение позиционного вектора приводит к малым изменениям WPD медианы, вычисленной по формуле (6.7). В области, где $n_1(a) > n/2$ или $n_1(a) < n/2$ функции $m(a)$ и $WPDmed(a)$, определяемые по формулам (6.5), (6.6), (6.7) будут непрерывными.

Однако, иногда непрерывность нарушается при $n_1(a) = n/2$. Например, рассмотрим позиционные векторы $(1,0,1), (1+\varepsilon, 0, 1-\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0,1)$. По лемме 6.2 для первого вектора WPD медиана равна 1, а по формуле (6.7) для второго вектора WPD медиана равняется $(3+\varepsilon)/2$. Таким образом, для $WPDmed(a)$ может нарушаться функциональная непрерывность в точках $n(a) \in \mathbb{R}_+^m : n_1(a) = \sum_{i=2}^m n_i(a) = n/2$.

В таблице 9 представлены свойства рассмотренных позиционных правил. Заметим, что позиционный метод Блэка, CL медиана и WPD медиана удовлетворяют тем же свойствам, что и соответствующие итерационные правила, за исключением свойства идемпотенции (Ide).

Слабый принцип совместного большинства (WMM) имеет важное значение для обоснования положительных свойств WPD медианы. Например, метод Блэка не удовлетворяет этому принципу.

Открытым остается вопрос о существовании правила, совмещающего положительные свойства метода Блэка и WPD медианы.

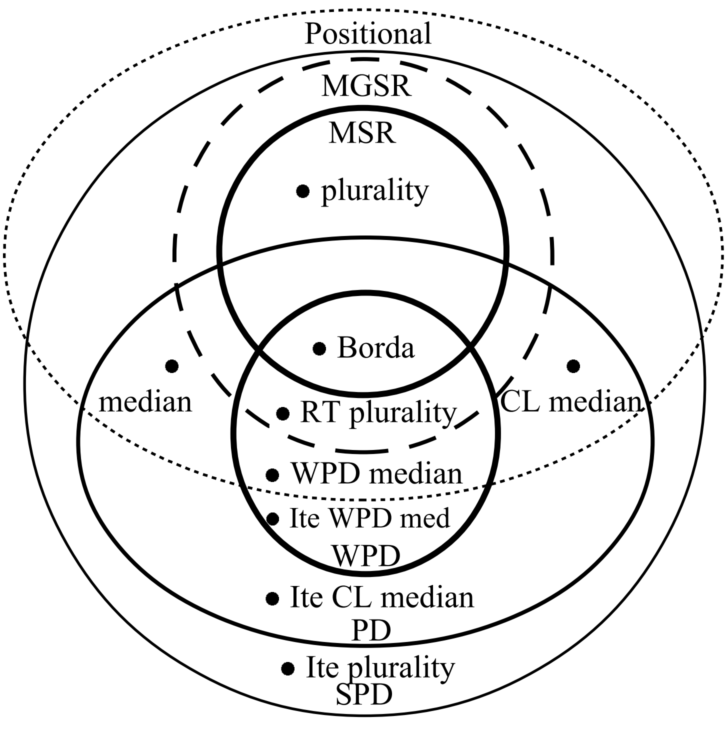

Рисунок 2. Диаграмма Венна для правил группового выбора.

8. Заключение

На рис. 2 изображены 6 классов правил группового выбора: позиционные и (обобщенные) монотонные балльные правила, а также правила, удовлетворяющие принципам позиционного доминирования (SPD, PD, WPD). Отметим, что по теореме 4.2 эти классы не пересекаются с классом методов, удовлетворяющих принципу Кондорсе.

В дальнейших исследованиях интересно проверить свойства CL медианы и WPD медианы как правил группового ранжирования. Кроме того WPD медиану можно применять для выбора комитета из k победителей, $k \leq m$. Для этого в определении правила в формуле (6.7) вместо квоты $n/2$ нужно поставить $n/(k+1)$.

Автор выражает благодарность сотрудникам Института Прикладных Математических Исследований КарНЦ РАН А.С. Румянцеву, В.В. Мазалову, А.Н. Кириллову, а также международной лаборатории теории игр и принятия решений НИУ ВШЭ в Санкт-Петербурге за ценные замечания, позволившие улучшить данную работу.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2.1.

Для любого (MSR) монотонного балльного правила $s(\cdot)$, не ограничивая общности, баллы можно представить как $s_m = 0, s_{m-1} = p_1, s_{m-2} = p_1 + p_2, \ldots, s_1 = p_1 + \ldots + p_{m-1}$, где $p_i \geq 0, i = 1, \ldots, m-1$, и $p_j > 0$ для некоторого j. Представив сумму баллов для кандидата a в виде $s(a) = n_1(a) \cdot s_1 + \ldots + n_{m-1}(a) \cdot s_{m-1} = n_1(a)(p_1 + \ldots + p_{m-1}) + n_2(a)(p_1 + \ldots + p_{m-2}) + \ldots + n_{m-1}(a)p_1$, получаем выражение

$$s(a) = p_1 \cdot M_{m-1}(a) + p_2 \cdot M_{m-2}(a) + \ldots + p_{m-1} \cdot M_1(a), \quad a \in A,$$

из которого очевидным образом следует достаточность ($\Leftarrow$).

Необходимость ($\Rightarrow$) докажем от противного. Допустим, что $s(a) > s(b)$ для любого MSR правила $s(\cdot)$, и $M_k(a) \leq M_k(b)$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, m-1\}$. Положим $p_{m-k} = 1$, и $p_i = 0$ для $i \neq m-k$. Тогда $s(a) = M_k(a) \leq M_k(b) = s(b)$.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство леммы 2.2.

Для любого строго монотонного балльного правила $s(\cdot)$, не ограничивая общности, баллы можно представить как $s_m = 0, s_{m-1} = p_1, s_{m-2} = p_1 + p_2, \ldots, s_1 = p_1 + \ldots + p_{m-1}$, где $p_i > 0, i = 1, \ldots, m-1$. Представив сумму баллов для кандидата a в виде $s(a) = n_1(a) \cdot s_1 + \ldots + n_{m-1}(a) \cdot s_{m-1} = n_1(a)(p_1 + \ldots + p_{m-1}) + n_2(a)(p_1 + \ldots + p_{m-2}) + \ldots + n_{m-1}(a)p_1$, получаем следующее выражение

$$s(a) = p_1 \cdot M_{m-1}(a) + p_2 \cdot M_{m-2}(a) + \ldots + p_{m-1} \cdot M_1(a), \quad a \in A,$$

из которого достаточность ($\Leftarrow$) следует очевидным образом.

Необходимость ($\Rightarrow$) докажем от противного. Допустим, что все неравенства из системы в условиях леммы являются равенствами. Тогда $n(a) = n(b)$, что противоречит неравенству $s(a) > s(b)$.

Допустим, что $M_k(a) < M_k(b)$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, m-1\}$. Положим $p_i = 1$ для $i \neq m-k$. Тогда $s(a) - s(b) = p_{m-k}(M_k(a) - M_k(b)) + \sum_{i \neq m-k}(M_{m-i}(a) - M_{m-i}(b)) > 0$ для любого $p_{m-k} > 0$, что невозможно при $M_k(a) < M_k(b)$.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство леммы 2.3.

Для любого MDSR балльного правила $s(\cdot)$, не ограничивая общности, баллы можно представить как $s_m = 0, s_{m-1} = p_1, s_{m-2} = 2p_1 + p_2, \ldots, s_1 = (m-1)p_1 + (m-2)p_2 + \ldots + 2p_{m-2} + p_{m-1}$, где $p_1 > 0, p_i \geq 0, i = 2, \ldots, m-1$. Представив сумму баллов для кандидата a в виде $s(a) = n_1(a) \cdot s_1 + \ldots + n_{m-1}(a) \cdot s_{m-1} = n_1(a)((m-1)p_1 + (m-2)p_2 + \ldots + 2p_{m-2} + p_{m-1}) + n_2(a)((m-2)p_1 + (m-3)p_2 + \ldots + p_{m-2}) + \ldots + n_{m-1}(a)p_1$, получаем следующее выражение

$$s(a) = p_1 \cdot B_{m-1}(a) + p_2 \cdot B_{m-2}(a) + \ldots + p_{m-1} \cdot B_1(a), \quad a \in A,$$

из которого вытекает достаточность ($\Leftarrow$).

Необходимость ($\Rightarrow$) докажем от противного. Допустим, что $s(a) > s(b)$ для любого MDSR правила $s(\cdot)$, и $B_k(a) < B_k(b)$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, m-2\}$. Метод Борда является MDSR правилом, поэтому, $Bo(a) > Bo(b)$. Положим $p_i = 0$ для $i \neq 1, m-k$, а также $p_1 = 1, p_{m-k} = (Bo(a) - Bo(b))/(B_k(b) - B_k(a)) > 0$. Тогда $s(a) - s(b) = Bo(a) - Bo(b) + p_{m-k}(B_k(a) - B_k(b)) = 0$ для некоторого MDSR правила. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 4.2.

1) Рассмотрим профиль предпочтений из таблицы 10, в котором кандидат c является проигравшим по большинству.

Таблица 10. Профиль предпочтений и турнирная матрица

2	1	1
a	b	b
b	a	c
c	c	a

	a	b	c
a		2	3
b	2		4
c	1	0	

Пусть выполняются принципы U, A, N, IMLA. Тогда множество победителей будет $\{a, b\}$. Если поднять кандидата a на одну позицию, то получается профиль, в котором по 2 личных предпочтения $a > b > c$ и $b > a > c$, значит, также побеждают оба кандидата. Следовательно, свойство позитивного отклика (PR) не выполняется.

2, 3, 4) Рассмотрим профиль предпочтений $n = 2$ избирателей с личными предпочтениями $a > b > c$ и $b > c > a$. Кандидат c здесь является единогласно проигравшим клоном кандидата b.

Пусть выполняются принципы U, A, N, IC, PR. Тогда множество победителей содержит кандидата a. Значит, если поднять кандидата a на одну позицию, то получится профиль с личными предпочтениями $a > b > c$ и $b > a > c$, в котором уже единолично побеждает кандидат a, что противоречит аксиоме нейтральности. Аналогично доказывается несовместность U, A, N, PR, IPDC.

Пусть выполняется принцип позиционного доминирования (PD). Не ограничивая общности, любое (SMSR) строго монотонное балльное правило начисляет 0 баллов за последнее место, 1 балл за предпоследнее место, $1 + p$ баллов за первое место в бюллетене, причем $p > 0$. Тогда $s(b) = 2 + p > s(a) = 1 + p > s(c) = 1$, и единолично побеждает кандидат b. С другой стороны, по принципам A, N, IPDC множество победителей либо пустое, либо $\{a, b\}$.

5) Рассмотрим профиль (таблица 11), в котором кандидат a_1 является клоном для кандидата a, кандидат b_1 - клоном для кандидата b.

Пусть выполняются принципы U, A, N, SPD. По лемме 4.1 кандидат a сильно позиционно доминирует b и b_1. Следовательно, кандидаты b, b_1 проигрывают, и множество победителей содержится в $\{a, c, a_1\}$. Если удалить из профиля кандидатов a_1 и b_1, то в новом профиле в силу симметрии побеждают все три кандидата $\{a, b, c\}$. Значит, свойство независимости от клонов (IC) не выполняется.

Таблица 11. Профиль предпочтений и распределение позиций

1	1	1	1	1	1
a	a	c	c	b_1	b
a_1	a_1	a	a	b	b_1
b_1	b	a_1	a_1	c	c
b	b_1	b_1	b	a	a
c	c	b	b_1	a_1	a_1

Место	a	b	c	a_1	b_1
1	2	1	2	0	1
1-2	4	2	2	2	2
1-3	4	3	4	4	3
1-4	6	5	4	4	5
1-5	6	6	6	6	6

6) Рассмотрим профиль предпочтений из таблицы 12, в котором кандидаты $\{a, b\}$ имеют совместное большинство.

Таблица 12. Профиль предпочтений

26	26	24	24
a	b	c	c
b	a	d	d
c	c	a	b
d	d	b	a

Пусть выполняется принцип слабого позиционного доминирования (WPD). Не ограничивая общности, любое MDSR балльное правило начисляет 0 баллов за последнюю позицию, 1 за предпоследнюю, $2 + p$ за вторую, $3 + 2p + q$ за первую, причем $p, q > 0$. Тогда $s(c) = 196 + 96p + 48q > 154 + 78p + 26q = s(a) = s(b)$, и единолично побеждает кандидат c. Следовательно, принцип совместного большинства (MM) не выполняется.

7,8) Рассмотрим профиль (таблица 13), где кандидат b является победителем по Кондорсе, и кандидат c проигрывает по большинству.

Таблица 13. Профиль предпочтений, турнирная матрица и позиционная матрица

2	3	4	2
a	a	b	c
b	c	a	b
c	b	c	a

	a	b	c
a		5	9
b	6		6
c	2	5	

Место	a	b	c
1	5	4	2
2	4	4	3
3	2	3	6

По принципу Кондорсе (C) единолично побеждает кандидат b. Учитывая лемму 4.1, по принципу сильного позиционного доминирования (SPD) единолично победит кандидат a. Следовательно, принципы SPD и C не могут выполняться одновременно. Аналогично доказывается несовместность принципов SPD и IMLA.

9) Рассмотрим профиль из таблицы 14, где кандидат a является победителем по Кондорсе, и кандидат c проигрывает по большинству.

Таблица 14. Профиль предпочтений, турнирная матрица и позиционная матрица

4	1	2	2	2
a	a	b	b	c
b	c	a	c	a
c	b	c	a	b

	a	b	c
a		7	7
b	4		8
c	4	3	

Место	a	b	c
1	5	4	2
2	4	4	3
3	2	3	6

По принципу Кондорсе для профиля из таблицы 14 должен единолично победить кандидат a, в то время как для профиля из таблицы 13 должен единолично победить кандидат b. Двум различным профилям из таблиц 13, 14 соответствует одинаковая позиционная матрица, поэтому любой позиционный метод должен давать одинаковый результат и не может удовлетворять принципу Кондорсе. Аналогично доказывается, что любое позиционное правило не удовлетворяет независимости от проигравших по большинству (IMLA).

10) Пусть $n(a) = n(b)$ в некотором профиле $\succ$. Построим профиль $\succ'$, который получается, если в $\succ$ переставить местами кандидатов a, b в каждом бюллетене. Предположим, что кандидат a побеждает в $\succ$. Тогда, в силу нейтральности, кандидат b побеждает в профиле $\succ'$. С другой стороны, нетрудно понять, что позиционные матрицы в профилях $\succ, \succ'$ совпадают, следовательно, совпадают также множества победителей. Значит, кандидат b тоже побеждает в профиле $\succ$.

11) Рассмотрим профиль предпочтений из таблицы 15.

Таблица 15. Профиль предпочтений и позиционная матрица

2	1	1	1
a	b	b	c
b	a	c	a
c	c	a	b

Место	a	b	c
1	2	2	1
2	2	2	1
3	1	1	3

Пусть выполняются принципы U, N, SPD, и метод является позиционным. Кандидат c не может победить по принципу сильного позиционного доминирования (SPD). Так как $n(a) = n(b)$, то согласно универсальности (U) и пункту 10 множество победителей равно $\{a, b\}$. С другой стороны, применение этого правила ко множеству $\{a, b\}$ по принципу SPD обеспечивает кандидату a единоличную победу, что противоречит свойству идемпотенции (Ide).

12) Рассмотрим профиль $\succ$ (таблица 16), в котором кандидат a является проигравшим по большинству.

Таблица 16. Профили $\succ$, $\succ'$ и распределение позиций в $\succ'$

4	1	4	3	1
a	a	b	c	d
c	c	c	d	a
d	b	d	b	b
b	d	a	a	c

4	1	4	3	1
a	a	b	c	d
c	c	c	e	a
e	e	d	d	b
d	b	a	b	c
b	d	e	a	e

Место	a	b	c	d	e
1	5	4	3	1	0
1-2	6	4	12	1	3
1-3	6	5	12	8	8
1-4	10	9	13	12	8
1-5	13	13	13	13	13

Профиль $\succ'$ получается из $\succ$ добавлением единогласно проигравшего кандидата e. Профиль $\succ''$ (таблица 17) получается из $\succ$ добавлением единогласно проигравших кандидатов $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$.

Таблица 17. Профиль $\succ''$ и распределение позиций

4	1	4	3	1
a	a	b	c	d
a_1	a_1	b_1	d	a
a_2	a_2	b_2	b	a_1
a_3	a_3	c	a	a_2
a_4	a_4	d	a_1	a_3
c	c	a	a_2	a_4
d	b	a_1	a_3	b
b	b_1	a_2	a_4	b_1
b_1	b_2	a_3	b_1	b_2
b_2	d	a_4	b_2	c

Место	a	b	c	d
1	5	4	3	1
1-2	6	4	3	4
1-3	6	7	3	4
1-4	9	7	7	4
1-5	9	7	7	8
1-6	13	7	12	8
1-7	13	9	12	12
1-8	13	13	12	12
1-9	13	13	12	12
1-10	13	13	13	13

Пусть выполняются U, IPDA, SPD. По независимости от единогласно проигравших $C(\succ) = C(\succ') = C(\succ'')$. По лемме 4.1 в профиле

$\succ'$ кандидат a сильно позиционно доминирует кандидата b, в то время как, кандидат c сильно позиционно доминирует d и e. Следовательно, по принципу SPD $C(\succ') \subseteq \{a, c\}$. С другой стороны, в профиле $\succ''$ кандидат a сильно позиционно доминирует кандидата c, поэтому $c \notin C(\succ'')$. Откуда по универсальности (U) следует, что $C(\succ) = \{a\}$, и принцип проигравшего по большинству (ML) не выполняется.

13) Рассмотрим профиль $\succ^{rev}$ (таблица 18), перевернутый относительно профиля $\succ$ из таблицы 16, и профиль $\succ'''$, получающийся добавлением единогласно проигравших кандидатов a_1, a_2, a_3 в $\succ^{rev}$.

Таблица 18. Профили предпочтений $\succ^{rev}$ и $\succ'''$

4	1	4	3	1
b	d	a	a	c
d	b	d	b	b
c	c	c	d	a
a	a	b	c	d

2	2	1	4	3	1
b	b	d	a	a	c
d	d	b	a_1	a_3	b
c	c	c	a_2	a_1	a
a	a	a	a_3	a_2	a_1
a_1	a_3	a_2	d	b	a_2
a_2	a_1	a_3	c	d	a_3
a_3	a_2	a_1	b	c	d

Пусть выполняются принципы U, IPDA и SPD. В пункте 12 доказано, что $C(\succ) = \{a\}$. По независимости от единогласно проигравших $C(\succ^{rev}) = C(\succ''')$, и по принципу сильного позиционного доминирования $C(\succ''') = \{a\}$. Следовательно, $C(\succ^{rev}) = C(\succ) = \{a\}$, то есть свойство перевернутой симметрии (RS) не выполняется.

Таблица 19. Распределение позиций в профиле $\succ'''$

Место	a	b	c	d	a_1	a_2	a_3
1	7	4	1	1	0	0	0
1-2	7	6	1	5	4	0	3
1-3	8	6	6	5	7	4	3
1-4	13	6	6	5	8	7	7
1-5	13	9	6	9	10	9	9
1-6	13	9	10	12	12	11	11
1-7	13	13	13	13	13	13	13

14,15) Пусть выполняются U, A, N, Cons и Maj. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ по теореме 4.1 такое правило группового выбора равносильно некоторому обобщенному балльному правилу. Обозначим $s_1, \ldots, s_m$ баллы за занятое место в личных предпочтениях. В профиле, состоящем из предпочтения одного избирателя, по принципу большинства побеждает наиболее предпочитаемый кандидат. Значит, $s_1 > s_i$ для $i = 2, \ldots, m$. Легко понять, что для $m = 1$ и $m = 2$ свойство проигравшего по большинству (ML) всегда выполняется.

Пусть $m \geq 3$. Предположим, что $s_i > s_j$ для некоторой пары $i, j \in \{2, \ldots, m\}$. Рассмотрим любой профиль $n = 2k+1$ избирателей, в котором $k > (s_1 - s_i)/(s_i - s_j)$, и $k+1$ избирателей ставят на первое место кандидата a_1 и на i-е место - a_2, в то время как, k избирателей ставят на первое место a_2 и на j-е место - a_1. В таком профиле кандидат a_1 является победителем по большинству, однако, $s(a_1) = (k+1)s_1 + ks_j < (k+1)s_i + ks_1 = s(a_2)$, что противоречит принципу большинства. Следовательно, баллы имеют вид $s_1 > s_2 = \ldots = s_m$, что равносильно обобщенному правилу относительного большинства.

Рассмотрим любой профиль $n = 7$ избирателей, в котором 3 избирателя ставят на первое место a_1, 2 избирателя ставят на первое место a_2 и на последнее место - a_1, 2 избирателя ставят на первое место a_3 и на последнее место - a_1. Проигравший по большинству кандидат a_1 набирает наибольшее количество баллов в исходном и перевернутом профилях. Таким образом, принципы ML и RS не выполняются для $m \geq 3$.

16) Рассмотрим профиль предпочтений $n = 2$ избирателей, в котором первый избиратель предпочитает $a > d > c > b$, в то время как второй избиратель предпочитает $b > c > a > d$. Пусть выполняется принцип позиционного доминирования (PD). Нетрудно понять, что в рассмотренном профиле единолично побеждает кандидат a.

Изменим личное предпочтение первого избирателя на $a > b > d > c$, переставив местами кандидатов, которые ниже единолично победившего кандидата a. В получившемся профиле по принципу PD единолично побеждает кандидат b. Таким образом, принцип перестановок слабых альтернатив (LNC) не выполняется.

17,18) Рассмотрим профиль P_1 двух избирателей с предпочтениями $a > c > b$, $b > a > c$, профиль P_1' двух избирателей с предпочтениями $a > b > c$, $b > a > c$, профиль P_2 одного избирателя с предпочтением $a > c > b$, а также профиль P_3 одного избирателя с предпочтением $b > c > a$.

Пусть выполняются принципы Arc, Maj. По принципу большинства $C(A, k \cdot P_1 + P_2) = \{a\}$, $C(A, k \cdot P_1 + P_3) = \{b\}$ для любого $k \geq 1$. По принципу Архимеда $a, b \in C(A, P_1)$. Аналогично, $a, b \in C(A, P_1')$. Нетрудно видеть, что для профиля P_1 принципы позиционного доминирования (PD) и позитивного отклика (PR) не выполняются.

19) Рассмотрим профиль P_1 из пункта 11 (таблица 15), профиль P_2 одного избирателя с предпочтением $a > c > b$, а также профиль P_3 одного избирателя с предпочтением $b > c > a$.

Пусть выполняются принципы Arc, SPD. По принципу сильного позиционного доминирования $C(A, P_1) \subseteq \{a, b\}$, $C(A, k \cdot P_1 + P_2) = \{a\}$, $C(A, k \cdot P_1 + P_3) = \{b\}$ для любого $k \geq 1$. Значит, по принципу Архимеда $C(A, P_1) = \{a, b\}$. Свойство идемпотенции (Ide) не выполняется, так как $C(\{a, b\}, P_1) = \{a\}$.

Все утверждения теоремы доказаны полностью.

Доказательство теоремы 5.1.

Если $1 \leq k \leq m - 1$, и кандидаты множества $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ имеют совместное большинство, то по формуле (5.3) $med_0(b_i) \geq m - k > med_0(a)$ для любых $a \in A \setminus B$, $i = 1, \ldots, k$. Кроме того, из совместного большинства следует, что $h(b_i, a) > n/2$ для всех $a \in A \setminus B$, $i = 1, \ldots, k$. Поэтому, согласно (5.2) баллы $Bo(b_j) > n(m-1)/2$, $I(b_j) = 1$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Таким образом, принцип совместного большинства (MM) выполняется.

Принцип проигравшего по Кондорсе (CL) выполняется, так как $I(CL(A)) = 0$. Для итерационного правила свойство идемпотенции (Ide) выполняется автоматически.

Учитывая лемму 5.1, в случае позиционного доминирования кандидата a над кандидатом b для позиционных векторов баллов выполняется $r^{(i)}(a) \geq r^{(i)}(b)$ для $i = 1, \ldots, n$, и $r^{(j)}(a) > r^{(j)}(b)$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$. Следовательно, выполняется принцип PD.

Если поднять кандидата a на одну позицию вверх в некотором личном предпочтении, опустив при этом на одну позицию кандидата b, не меняя положения других кандидатов, то позиционный вектор баллов $r(a)$ и $med(a)$ строго увеличатся, $med(b)$ строго уменьшится, в то время как CL медиана для остальных кандидатов не изменится. Значит, свойство позитивного отклика (PR) выполняется.

Для любого исходного профиля $\succ$ и перевернутого профиля $\succ^{rev}$ справедливо, что в $\succ^{rev}$ баллы $Bo^{rev}(a) = n(m-1)$ - $Bo(a)$. При переворачивании профиля значение $I(a)$ меняется с 1 на 0, и с 0 на 1, в то время как для $i = 1, \dots, n$, значения $(r^{(i)}(a) + r^{(n-i+1)}(a))/2$ меняются на $m-1-(r^{(i)}(a)+r^{(n-i+1)}(a))/2$. Следовательно, если в исходном профиле для некоторой пары кандидатов было $CLmed(a) > CLmed(b)$, то в перевернутом профиле будет, наоборот, $CLmed(a) < CLmed(b)$. Таким образом, свойство перевернутой симметрии (RS) выполняется.

Принципы топ-пополнения (TCons) и противоположного предпочтения (HWM) не выполняются в примерах 5.2, 5.3.

Для метода выполняются все базовые свойства, а также принципы совместного большинства (MM) и позиционного доминирования (PD), несовместные со следующими принципами по теореме 4.2 пунктам 4) IPDC, IPDA; 5) IC; 6) WPD; 7) C, S, ISDA; 8) IMLA, ICLA; 14) Cons; 16) LNC; 17-19) Arc, что завершает доказательство.

Доказательство теоремы 6.1.

Полиномиальная сложность (PT) и базовые принципы (U, NI, A, N, P, SW, H) выполняются очевидным образом.

CL, ML) Проигравший по Кондорсе кандидат набирает $Bo(CL) < (m-1)n/2$, следовательно, по лемме 6.2 он не может победить. Из выполнения принципа проигравшего по Кондорсе следует выполнение принципа проигравшего по большинству.

Mon) Монотонность процедуры выполняется, так как если поднять (опустить) кандидата a на одну позицию в некотором бюллетене, то $B_t(a)$ и $n_1(a)$ не уменьшатся (не увеличатся) для всех $t > 0$.

PR, SM) Ничья между кандидатами a и b возможна, только если $WPDmed(a) = WPDmed(b)$ и $Bo(a) = Bo(b)$. Если поднять кандидата a на одну позицию в бюллетене, то $Bo(a)$ станет строго больше, чем $Bo(b)$, при этом $WPDmed(a)$ останется не меньше, чем $WPDmed(b)$.

WMM, Maj) Если кандидат a является победителем по большинству, то есть $n_1(a) > n/2$, тогда по формуле (6.7) справедливо, что $WPDmed(a) > m-3/2 > WPDmed(b)$ для всех кандидатов $b \in A \setminus a$.

Пусть $k \in \{2, \dots, m-1\}$, и кандидаты $\{a_1, \dots, a_k\}$ имеют подавляющее совместное большинство, то есть более $nk/(k+1)$ избирателей ставят этих k кандидатов на первые k мест в бюллетенях. Тогда для любого кандидата $b \notin \{a_1, \dots, a_k\}$ согласно формуле (6.3) выполняется $B_k(b)/k = n_1(b)+\ldots+n_k(b)/k \le n_1(b)+\ldots+n_k(b) < n/(k+1) < n/2$, следовательно, $WPDmed(b) < m-1-k/2$.

Оценивая сумму k слагаемых $B_k(a_i)/k,\ i = 1, \ldots, k$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{B_k(a_i)}{k} = \sum_{i=1}^{k} \left(n_1(a_i) + \frac{k-1}{k} n_2(a_i) + \ldots + \frac{1}{k} n_k(a_i) \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} n_1(a_i) + \frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^{k} n_2(a_i) + \ldots + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} n_k(a_i) >$$
$$> \frac{n \cdot k}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{k} + \ldots + \frac{1}{k} \right) = \frac{n \cdot k}{2},$$

откуда следует, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$ выполняется $B_k(a_i)/k > n/2$. Значит, $WPDmed(a_i) > m-1-k/2$. Так как $WPDmed(b) < m-1-k/2$ для всех $b \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$, то множество победителей содержится в множестве $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

SPD, PD, WPD) Пусть кандидаты a, b имеют распределения позиций $n(a), n(b)$, и $s(a) > s(b)$ для любого MDSR правила $s(\cdot)$. Тогда по лемме 6.1 справедливо, что $B_k(a) \ge B_k(b)$ для всех $k = 1, \ldots, m-1$, и $Bo(a) > Bo(b)$. Следовательно, по формуле (6.2) выполняется $B_t(a) \ge B_t(b), \quad t \in [1, m-1]$, а также по формуле (6.4) для $t \in [m-1, 2(m-1)]$ выполнено $B_t(a) > B_t(b)$. Таким образом, согласно (6.7) будет $WPDmed(a) \ge WPDmed(b)$, что в совокупности со строгим неравенством для второго показателя $Bo(a) > Bo(b)$ не позволяет кандидату b победить.

RS) Если все кандидаты набирают равные баллы по Борда, $Bo(\cdot) = (m-1)n/2$, тогда по лемме 6.2 в исходном и в перевернутом профилях победят все кандидаты. Если победитель a набирает $Bo(a) > (m-1)n/2$, тогда в перевернутом профиле a получит строго меньше $(m-1)n/2$ баллов по Борда, следовательно, уже не сможет победить.

Невыполнение принципов топ-пополнения (TCons) и противоположного предпочтения (HWM) показано в примере 6.1.

Для метода выполняются все базовые свойства и принципы ML, Maj, WPD, которые несовместны со следующими принципами по теореме 4.2 пунктам 4) IPDC, IPDA; 5) IC; 6) MM; 7) C, S, ISDA; 8) IMLA, ICLA; 14) Cons; 16) LNC; 17-19) Arc, что завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balinski M., Laraki R. *Majority judgment: measuring, ranking, and electing*. MIT press, 2011.

2. Black D. et al. *The theory of committees and elections*. Cambridge University Press, 1958.

3. Fishburn P.C. *Paradoxes of voting* // American Political Science Review. 1974. V. 68. N 2. P. 537–546.

4. Gardenfors P. *Manipulation of social choice functions* // Journal of Economic Theory. 1976. V. 13. N 2. P. 217–228.

5. Good I.J. *A note on Condorcet sets* // Public Choice. 1971. V. 10. N 1. P. 97–101.

6. May K.O. *A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision* // Econometrica: Journal of the Econometric Society. 1952. P. 680–684.

7. McLean I., Urken A.B. *Classics of social choice*. University of Michigan Press, 1995.

8. Pattanaik P.K. Positional rules of collective decision-making. In Arrow K.J, Sen A.K, Suzumura K., editors, *Handbook of Social Choice and Welfare*. Elsevier Science, 2002.

9. Sanver M.R., Zwicker W.S. *Monotonicity properties and their adaptation to irresolute social choice rules* // Social Choice and Welfare. 2012. V. 39. N 2. P. 371–398.

10. Schwartz T. *Rationality and the myth of the maximum* // Nous. 1972. P. 97–117.

11. Smith J.H. *Aggregation of preferences with variable electorate* // Econometrica: Journal of the Econometric Society. 1973. P. 1027–1041.

12. Tideman T.N. *Independence of clones as a criterion for voting rules* // Social Choice and Welfare. 1987. V. 4. N 3. P. 185–206.

13. Tideman N. *Collective decisions and voting: the potential for public choice*. Ashgate Publishing, Ltd., 2006.

14. Woodall D.R. *Monotonicity of single-seat preferential election rules* // Discrete Applied Mathematics. 1997. V. 77. N 1. P. 81–98.

15. Young H.P. *Social choice scoring functions* // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1975. V. 28. N 4. P. 824–838.

16. Zwicker W. Introduction to the theory of voting. In Brandt F., Conitzer V., Endriss U., Lang J., Procaccia A., editors, *Handbook of Computational Social Choice*. Cambridge University Press, 2016.

POSITIONAL VOTING METHODS SATISFYING THE WEAK MUTUAL MAJORITY AND CONDORCET LOSER PRINCIPLES

Aleksei Yu. Kondratev, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, PhD (kondratev@krc.karelia.ru).

Abstract: We consider a voting problem, where the personal preferences of electors are defined by the ranked lists of the candidates. For the social choice functions we propose positional domination principles (WPD, PD), which is closely related to the scoring rules. Also we formulate a weak mutual majority principle (WMM), which is stronger than the majority principle, but weaker than the mutual majority principle (MM). We construct two modifications for the positional median rule, which satisfy the Condorcet loser principle. The WPD and WMM principles are shown to be fulfilled for the first modification, and the PD and MM principles for the second modification. We prove that there is no rule to satisfy both WPD and MM principles.

Keywords: positional voting method, social choice function, weak mutual majority, Condorcet loser principle, median rule, positional domination.