

УДК 517.938

О структуре резонансов 1:3 и 1:4 при обратимых возмущениях консервативных кубических отображений Эно¹

Е. А. Самылина*, А. И. Шыхмамедов**, А. О. Казаков**,*

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород 603022. *E-mail: samylina_evgeniya@mail.ru*

**Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Нижний Новгород 603155. *E-mail: aykhansh@gmail.com, kazakovdz@yandex.ru*

Аннотация. На примере кубического консервативного отображения плоскости проведено исследование локальных бифуркаций разрушения консервативной динамики, возникающих при добавлении к консервативным системам обратимых возмущений. Показано, что основными бифуркациями разрушения консервативной динамики здесь являются обратимые бифуркации вилки. В результате такой бифуркации симметричная эллиптическая точка становится седловой, а в ее окрестности рождается пара из асимптотически устойчивой и вполне неустойчивой точек. Процесс разрушения консервативной динамики продемонстрирован на примере резонансов 1:3 и 1:4, возникающих в окрестности эллиптической неподвижной точки в кубическом консервативном отображении Эно.

Ключевые слова: обратимое отображение, эллиптическая точка, резонансная орбита, бифуркация вилка.

On the structure of resonances under reversible perturbations of conservative cubic Henon maps

E. A. Samylina, A. I. Shyhmamedov, A. O. Kazakov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod 603022,

National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod 603155.

Abstract. The paper is devoted to the study of local bifurcations of symmetry breaking which arise under reversible perturbations of conservative reversible systems. We chose a perturbed conservative cubic diffeomorphism of a plane as an example of the model on which such bifurcations were investigated. It is shown that the main symmetry breaking bifurcations here are the so-called reversible pitch-fork bifurcations due to which a symmetric elliptic point becomes a symmetric saddle point and a pair of asymptotically stable and completely unstable points (one point is symmetric to another) appears in its neighborhood. The mechanism of destruction of conservative dynamics is demonstrated on the example of 1:3 and 1:4 resonances, which appear near the elliptic point of conservative cubic Henon map. In addition, in this paper we present an algorithm for constructing reversible perturbations which break down the conservative dynamics in two-dimension maps.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФ, грант No. 17-11-01041. Результаты численных экспериментов, представленные в разделах 4.2-4.3 выполнены при финансовой гранта РФФ No. 14-12-00811.

Keywords: reversible map, elliptic point, resonant orbit, pitch-fork bifurcation.

MSC 2010: 47N10, 49J20, 49J35, 93C20, 70E99

1. Введение

В работе рассматривается задача, связанная с изучением обратимых возмущений консервативных (сохраняющих площадь) двумерных отображений и исследованием в них бифуркаций разрушений симметрии, то есть бифуркаций, приводящих к рождению устойчивых и вполне неустойчивых периодических траекторий (орбит).

Напомним, что диффеоморфизм f называется *обратимым (реверсивным)*, если он сопряжен со своим обратным отображением посредством некоторого преобразования h , являющегося инволюцией ($h \circ h = id$). То есть для обратимого отображения f выполняется следующее соотношение: $f = h \circ f^{-1} \circ h$. Фазовый объем при обратимых отображениях, в отличие от консервативных, в общем случае не сохраняется². С другой стороны, в отличие от чисто диссипативных отображений, в фазовом пространстве обратимых диффеоморфизмов, помимо областей, отвечающих сжатию объемов, существуют также области отвечающие их растяжению, в результате чего в таких диффеоморфизмах для каждого аттрактора \mathcal{A} существует симметричный ему (относительно инволюции h) репеллер $\mathcal{R} = h(\mathcal{A})$, то есть аттрактор обратного отображения f^{-1} .

Характерной чертой обратимых неконсервативных отображений является сосуществование консервативных элементов динамики (эллиптических орбит и КАМ-кривых вокруг них) с диссипативными — аттракторами и репеллерами. Повидимому, впервые явление сосуществования консервативного и диссипативного поведения в обратимых системах было исследовано в работе [1], после которой появился целый ряд работ по исследованию хаотической динамики обратимых двумерных отображений (см. обзоры [2, 3] и ссылки в них).

В последнее время интерес к изучению обратимых отображений значительно усилился благодаря открытию *смешанной динамики* [4, 6, 5, 7] — третьей формы динамического хаоса, дополнительной к консервативному (гамильтонову) хаосу и странным аттракторам, для которой характерна принципиальная неотделимость аттракторов от репеллеров. Само явление смешанной динамики было открыто еще в работе Гонченко, Тураева и Шильникова [4], а специфика ее проявления в случае обратимых отображений была исследована в работах [6, 7]. Основы математической теории смешанной динамики были построены совсем недавно в работах Гонченко и Тураева [8, 9]. В этих работах, в частности, была введена новая концепция аттракторов и репеллеров, позволяющая теоретически объяснить часто наблюдаемые в численных экспериментах явления пересечения аттракторов и репеллеров. При этом, в случае обратимых систем, эти явления неизбежно сопровождаются

²В некоторых случаях, например для гамильтоновых систем, обратимые отображения могут быть консервативными.

возникновением *обратимой смешанной динамики*, характеризующейся неотделимостью не только аттракторов от симметричных им репеллеров, но также и от консервативной динамики, включающей эллиптические и консервативные периодические траектории, КАМ-кривые и т.п.

Среди работ, посвященных численным исследованиям смешанной динамики в обратимых системах, отметим работы [10, 11, 12], в которых явление обратимой смешанной динамики было обнаружено в неголономных моделях кельтского камня, резинового волчка Чаплыгина и волчка Сулова, а также работы [13] и [14], посвященные исследованию сценариев возникновения такого явления в модели связанных осцилляторов, а также в вихревой модели.

Заметим, что во всех перечисленных выше случаях смешанная динамика возникала в обратимых системах, получающихся в результате таких возмущений обратимых консервативных систем, которые сохраняют обратимость, но приводят к разрушению консервативности. В результате этого, в таких системах возникают аттракторы и репеллеры. В связи с этим, большой интерес представляют две связанные друг с другом задачи: как в конкретных примерах построить такие возмущения и какова структура соответствующих бифуркаций разрушения симметрии. В настоящей работе мы рассмотрим обе эти задачи на примере сохраняющих площадь кубических отображений плоскости. Заметим, что разрушение консервативной динамики в обратимых системах связано с бифуркациями двух типов: локальные бифуркации разрушения симметрии и глобальные бифуркации разрушения симметрии.

Основные элементы теории локальных бифуркаций обратимых отображений построены, в частности, в работе [15]. Одним из основных типов таких бифуркаций является так называемая бифуркация *обратимая вилка* (*reversible pitchfork*), в результате которой симметричная эллиптическая периодическая точка становится седловой, а в ее окрестности рождается пара из устойчивой (сток) и вполне неустойчивой (источник) точек, см. рис. 1. Напомним, что орбита называется *симметричной*, если она пересекает множество $Fix(h)$ неподвижных точек инволюции h (т.е. множество таких точек x , для которых $h(x) = x$). Кроме того заметим, что подобные локальные бифуркации разрушения симметрии служат своеобразным индикатором смешанной динамики в таких моделях, как неголономный волчок Сулова [16], модель Пиковского-Топажа [13], описывающая взаимодействие четырех связанных ротаторов, и др.

Глобальные бифуркации разрушения симметрии связаны с возникновением нетрансверсальных пересечений инвариантных многообразий либо одной и той же седловой периодической траектории (гомоклинические касания), либо разных (гетероклинические касания). При выполнении соответствующих условий бифуркации таких касаний приводят к появлению как симметричных пар периодических траекторий типа «сток-источник», так и симметричных эллиптических траекторий. К примеру, одни из основных типов таких глобальных бифуркаций связаны с образованием негрубых гетероклинических контуров, содержащих 2 седловые точки, одна из которых обладает якобианом $J < 1$, а другая — $J > 1$ (см. рис.

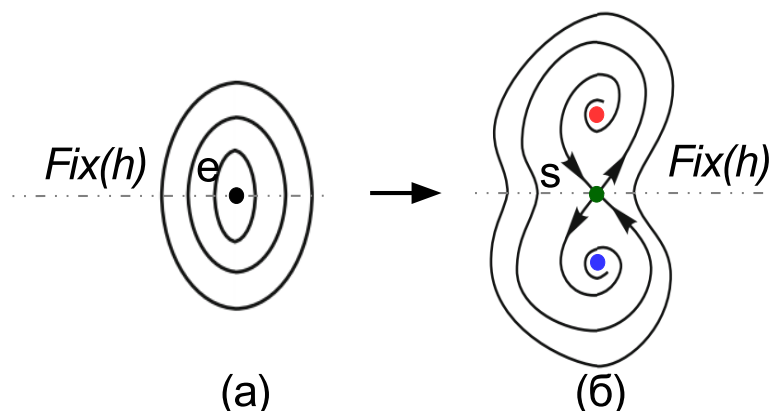


Рис. 1. Фазовые портреты в окрестности бифуркации обратимая вилка: (а) до бифуркации, (б) после бифуркации.

2а)³. В работе [4] доказано, что в окрестности любого двумерного диффеоморфизма, содержащего такой гетероклинический контур, существуют открытые области (области Ньюхауса), в которых всюду плотны диффеоморфизмы со счетными множествами устойчивых, вполне неустойчивых и седловых периодических орбит, замыкания которых имеют непустые пересечения, что и означает неотделимость в системе аттракторов от репеллеров. Позже, в работе [6], аналогичная теорема была доказана в случае, когда диффеоморфизм с таким гетероклиническим контуром является обратимым (соответствующий гетероклинический контур изображен на рис. 2б). Однако, в отличие от общего случая, в дополнение к периодическим источникам и стокам, в таких отображениях также возникают симметричные эллиптические и консервативные седловые периодические орбиты. Отметим, что такие симметричные орбиты пересекают множество $Fix(h)$ инволюции h (то есть множество таких точек x , что $h(x) = x$). Среди работ, посвященных исследованию сценариев возникновения смешанной динамики в результате глобальных бифуркаций разрушения симметрии, отметим работы [13, 14], в которых описанные выше негрубые гетероклинические контуры были найдены численно, и, тем самым, доказано возникновение смешанной динамики в исследуемых системах.

Исследования глобальных бифуркаций разрушения симметрии сводятся к построению и исследованию локальных бифуркаций в отображениях первого возвращения в окрестность седловой точки, принадлежащей негрубому гетероклиническому контуру [4, 6, 7]. Как правило, такие отображения, в некотором прибли-

³Напомним, что под негрубым гетероклиническим контуром подразумевается сепаратрисный контур, содержащий 2 седловые точки, в котором одна пара сепаратрис пересекается трансверсально (грубо), а другая пара образует негрубое касание.

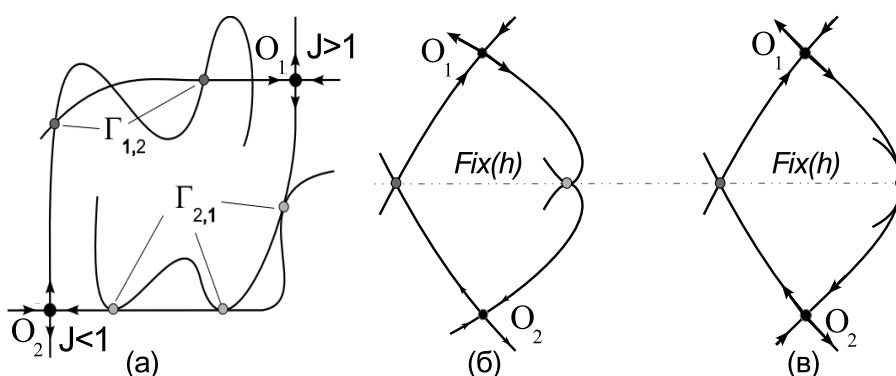


Рис. 2. Примеры негрубых гетероклинических контуров: (а) контур, исследованный в работе [4]; (б) негрубый гетероклинический контур с квадратичным касанием [6]; (в) негрубый гетероклинический контур с кубическим касанием.

жении, входят в класс обобщенных отображений Эно вида:

$$H_n : \begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = -bx + P(y), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $P(y)$ — полином n -й степени, имеющий вид $P(y) = \pm y^n + O(y^{n-2})$, а b — параметр, задающий якобиан отображения ($J = b$). Когда $P(y) = M - y^2$, отображение 1.1 является хорошо известным отображением Эно [18]. Такое отображение возникает, например, при исследовании бифуркаций квадратичных гомоклинических касаний [19].

При изучении бифуркаций кубических гомоклинических касаний (см. рис. 2в) возникает *кубическое отображение Эно* H_3 , для которого $f(y) = M \pm y^3 + M_2y$ [20, 21]:

$$H_3 : \begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = -bx + M_1 + M_2y \pm y^3. \end{cases} \quad (1.2)$$

Обратим внимание, что при $b = 1$ семейство обобщенных отображений Эно 1.1 являются консервативными и, более того, обратимыми относительно инволюции h

$$h : \begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = x. \end{cases} \quad (1.3)$$

Обозначим консервативное кубическое отображение Эно с y^3 через H_3^+ , а с $-y^3$ — через H_3^- . Именно такие отображения возникают при изучении кубических гомоклинических касаний в консервативных системах. Подробный бифуркационный анализ отображений H_3^\pm содержится в работе [22], где изучены бифуркации неподвижных, 2- и 3- периодических точек, а также в работе [23], посвященной детальному изучению резонанса 1:4 в окрестности эллиптической неподвижной точки отображения. В частности, в указанных работах показано, что эллиптические

точки резонансов 1:3 и 1:4 могут претерпевать бифуркацию вилка, в результате которой симметричная эллиптическая точка, становится седловой, а в ее окрестности рождается пара несимметричных эллиптических точек такого же периода.

О результатах работы

В настоящей работе предложен метод построения обратимых неконсервативных отображений. С помощью предложенного метода сконструировано обратимое неконсервативное отображение, являющееся возмущением суперпозиции двух одинаковых кубических консервативных отображений Эно H_3^+ (1.2). Показано, что при добавлении такого возмущения эллиптические орбиты резонансов 1:3 и 1:4 при некоторых значениях параметров претерпевают бифуркацию обратимая вилка, в результате чего в системе возникают аттракторы — устойчивые периодические точки и репеллеры — вполне неустойчивые периодические точки.

Заметим, что резонансные орбиты 1:3 (как и любые другие орбиты нечетного периода) исходного кубического отображения Эно H_3^+ , являются периодическими орбитами того же периода для суперпозиции двух таких же отображений Эно, то есть для отображения $(H_3^+)^2$. Однако, для периодических орбит четного периода ситуация иная. Периодическая орбита четного периода N для исходного отображения H_3^+ распадается на пару $N/2$ периодических орбит для квадрата отображения Эно $(H_3^+)^2$. Таким образом, неконсервативные возмущения для сконструированного нами отображения, в общем случае, по разному влияют на поведение разных орбит из этой пары, в результате чего бифуркационные диаграммы для каждой из этих орбит будут различными. В разделе 4 описанный эффект продемонстрирован для двух орбит периода 2, являющихся одной резонансной орбитой 1:4 в исходном кубическом отображении H_3 .

2. Алгоритм построения неконсервативных обратимых отображений

2.1. Построение консервативных обратимых отображений

Рассмотрим двумерное отображение, заданное в неявном виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = F(x, \bar{y}), \\ \bar{y} = F(\bar{y}, x). \end{cases} \quad (2.1)$$

В работе [7] показано, что такое отображение является обратимым относительно инволюции $h : \{\bar{x} = y, \bar{y} = x\}$ (1.3). Если функция $F(x, y)$, входящая в правую часть уравнения, зависит от переменной x линейно, то есть $F(x, y) = xG_1(y) + G_0(y)$, то отображение (2.1) может быть переписано в явном виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = xG_1(\bar{y}) + G_0(\bar{y}), \\ \bar{y} = \frac{y - G_0(x)}{G_1(x)}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Заметим, если функция $G_1(x)$ является гладкой и $G_1(x) \neq 0, x \in \mathbf{R}$, тогда отображение (2.2) является диффеоморфизмом плоскости.

Далее возьмем $F(x, y) = M_1 + M_2y + y^3 - x$ и получим отображение следующего вида:

$$H_3^2 : \begin{cases} \bar{x} = M_1 + M_2\bar{y} + \bar{y}^3 - x, \\ \bar{y} = M_1 + M_2x + x^3 - y. \end{cases} \quad (2.3)$$

Лемма 1. *Отображение (2.3) является суперпозицией двух отображений, являющихся обратными к кубическому отображению Эно H_3^+ . Верно следующее соотношение:*

$$H_3^2 = (H_3^+)^{-1} \circ (H_3^+)^{-1}.$$

Так как, при $b = 1$, кубическое отображение Эно (1.2) является консервативным, то и обратное к нему отображение тоже будет консервативным. Поэтому отображение (2.3), являющееся суперпозицией двух обратных консервативных отображений (1.2), также будет консервативным.

Замечание 1. Бифуркации периодических орбит отображения (2.3) будут соответствовать бифуркациям консервативного отображения Эно H_3^+ . Однако, орбиты четного периода N в этом отображении будут отвечать двум разным орбитам периода $N/2$ в отображении (2.3).

2.2. Построение неконсервативных обратимых отображений

Возьмем в качестве функции $F(x, y)$ в отображении (2.1) следующую:

$$F(x, y) = M_1 + M_2y + y^3 - x + \varepsilon xy$$

и запишем полученное отображение в явном виде

$$\tilde{H}_3^2 : \begin{cases} \bar{x} = M_1 + M_2\bar{y} + \bar{y}^3 - x + \varepsilon x\bar{y}, \\ \bar{y} = \frac{M_1 + M_2x + x^3 - y}{1 - \varepsilon x}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь ε — параметр возмущения. При $\varepsilon = 0$ отображение \tilde{H}_3^2 в точности совпадает с отображением H_3^2 . Сконструированное отображение является обратимым относительно инволюции (1.3). Однако, при $\varepsilon \neq 0$, полученное отображение не является консервативным, так как его якобиан J не равен единице:

$$J = \frac{1 - \varepsilon\bar{y}}{1 - \varepsilon x} \neq 1.$$

Замечание 2. Отображение (2.4) не является диффеоморфизмом на всей плоскости \mathbf{R}^2 . При этом, динамика этого отображения сосредоточена вблизи начала координат и, при малых значениях параметра ε , отображение можно считать диффеоморфизмом в достаточно большой окрестности начала координат. Более того, отображение (2.4) легко сделать диффеоморфизмом, взяв в качестве возмущения $\varepsilon x \arctan(y)$, вместо εxy .

Таким образом, отображение (2.4) можно рассматривать как неконсервативное возмущение отображения (2.3), сохраняющее свойство обратимости. Результаты исследования бифуркаций в этом отображении приведены в разделах 3.2 и 4.

3. Бифуркации неподвижных точек и резонансов в H_3^+

Подробный бифуркационный анализ кубического консервативного отображения содержится в работе [22]. На рисунке 3 приведена бифуркационная диаграмма отображения H_3^+ для некоторых неподвижных и периодических точек. Кратко

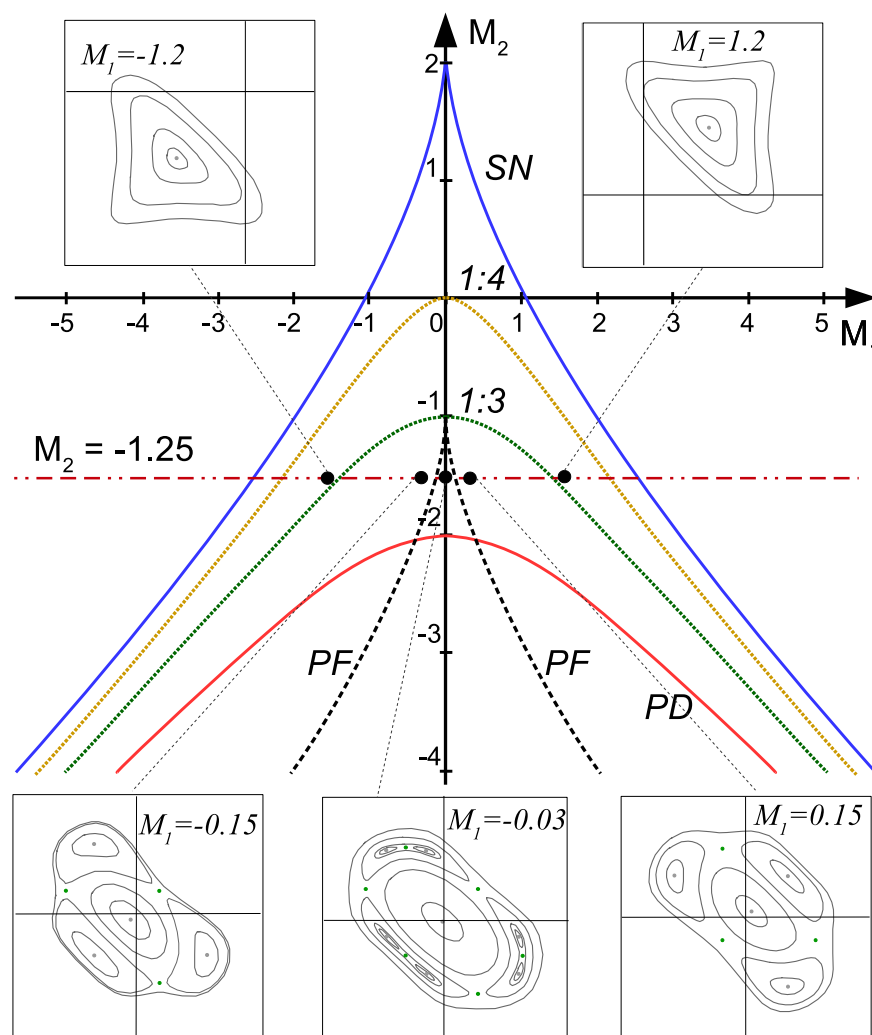


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для консервативного кубического отображения Эно H_3^+ . SN , $1:3$, $1:4$ и PD — бифуркационные кривая параболической бифуркации, резонансов $1:3$, $1:4$ и удвоения периода эллиптической точки. PF — кривые консервативной бифуркации разрушения симметрии (вилка).

опишем кривые, изображенные на этом рисунке. Кривая SN отвечает параболической бифуркации, при переходе через которую в сторону уменьшения параметра M_2 возникают эллиптическая и седловая неподвижные точки. При дальнейшем уменьшении параметра M_2 встречается кривая $1 : 4$, отвечающая возникновению точки периода четыре в окрестности эллиптической точки. Подробное исследование бифуркаций резонанса $1 : 4$ содержится в работе [23]. Следующая кривая соответствует возникновению резонанса $1:3$. Самая нижняя кривая PD отвечает бифуркации удвоения периода неподвижной эллиптической точки. При переходе через эту кривую неподвижная точка становится седловой, а в ее окрестности рождается эллиптическая точка периода 2.

Заметим, что в точке $(0, 0)$ к кривой $1 : 3$ подходит пара кривых PF , соответствующих консервативной бифуркации разрушения симметрии (вилка). При переходе в область, ограниченную двумя кривыми PF , симметричная эллиптическая точка периода 3 становится седловой, а в ее окрестности рождается пара несимметричных эллиптических точек такого же периода. Отметим, что в обратном неконсервативном случае, в результате такой бифуркации в окрестности возникает пара из устойчивой (сток) и вполне неустойчивой (источник) точек. Также обратим внимание, что изображенная на рисунке 3 бифуркационная диаграмма не является полной. На ней, например, не изображены линии, отвечающие бифуркации вилка для эллиптической точки периода 4.

На рисунке 3 также изображены фрагменты фазовых портретов в окрестности эллиптической точки при фиксированном $M_2 = -1.25$. Двигаясь вдоль линии $M_2 = -1.25$, можно проследить за эволюцией фазовых портретов при переходе через кривую $1 : 3$, а затем при переходе через кривую PF .

4. Бифуркации разрушения симметрии для возмущенного отображения \tilde{H}_3^2

Далее приведены результаты исследования бифуркаций разрушения симметрии для резонансов $1 : 3$ и $1 : 4$ обратимого неконсервативного отображения \tilde{H}_3^2 , сконструированного на основе кубического консервативного отображения Эно H_3^+ .

4.1. Бифуркации разрушения симметрии для резонанса $1 : 3$

Сперва изучим влияние неконсервативного возмущения на резонанс $1:3$, зафиксировав величину возмущения $\varepsilon = 0.01$. Соответствующая бифуркационная диаграмма изображена на рисунке 4. Как и в невозмущенном случае, на диаграмме изображена бифуркационная кривая $1 : 3$, отвечающая возникновению эллиптической точки периода 3 и две кривые PF , отвечающие бифуркации разрушения симметрии эллиптической точки периода 3. Однако, в отличие от невозмущенного случая, бифуркация разрушения симметрии здесь является неконсервативной (обратимой «вилкой»). То есть при переходе в область III, ограниченную двумя кривыми PF симметричная эллиптическая точка периода 3 становится седловой,

а рядом с ней рождается устойчивая точка периода 3 (сток) и вполне неустойчивая точка периода 3 (источник).

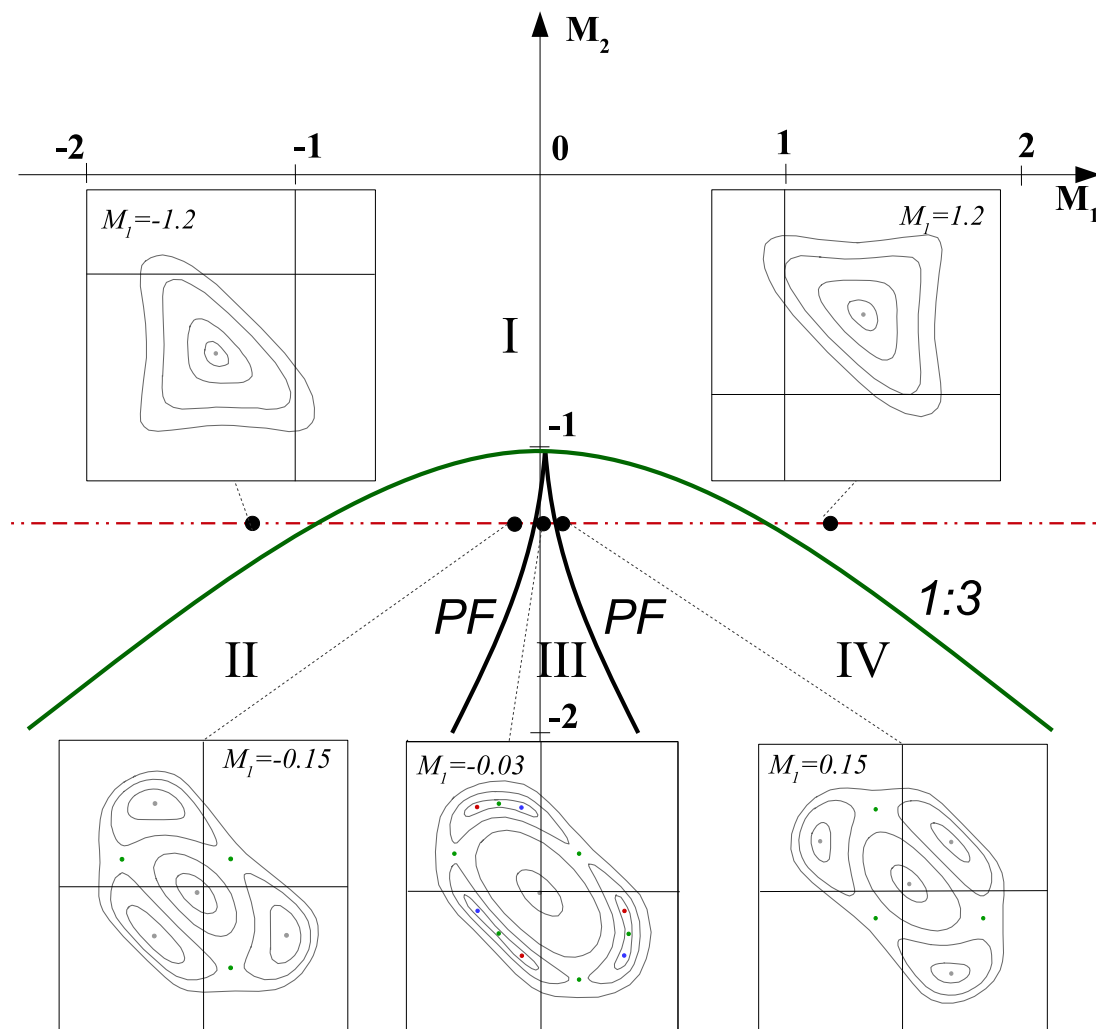


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для неконсервативного отображения \tilde{H}_3^2 при $\varepsilon = 0.01$ в окрестности резонанса 1:3. Кривая 1 : 3 отвечает возникновению точки периода 3, а кривые PF неконсервативной бифуркации потери симметрии (обратимой «вилки»).

Снова зафиксируем параметр $M_2 = -1.25$ и проследим за эволюцией фазовых портретов при возрастании параметра M_1 . Как и на диаграмме, представленной на рис. 3, после перехода через кривую резонанса 1:3, в отображении рождается эллиптическая точка периода три (см. рис. 5б). При переходе через кривую бифуркации обратимая вилка PF точка периода три распадается на устойчивую, вполне неустойчивую и седловую точки периода 3 (см. рис. 5в). При этом заметим, что в результате такой бифуркации рождается пара не симметричных точек периода

3. При дальнейшем увеличении параметра M_1 устойчивая и неустойчивая точки отходят друг от друга. При этом одна из компонент устойчивой (вполне неустойчивой) точки периода 3 отходит от линии неподвижных точек инволюции $y = x$. Однако заметим, что другие 2 компоненты этих точек приближаются друг к другу и к линии $y = x$ с другой стороны от эллиптической точки (см. рис. 5г). При переходе через вторую кривую PF возникает обратная бифуркация разрушения симметрии, в результате которой устойчивая, вполне неустойчивая и симметричная седловая точки периода 3 сливаются и снова возникает эллиптическая точка периода 3 (см. рис. 5д). Далее мы переходим через линию $1 : 3$, точка периода три исчезает (см. рис. 5е).

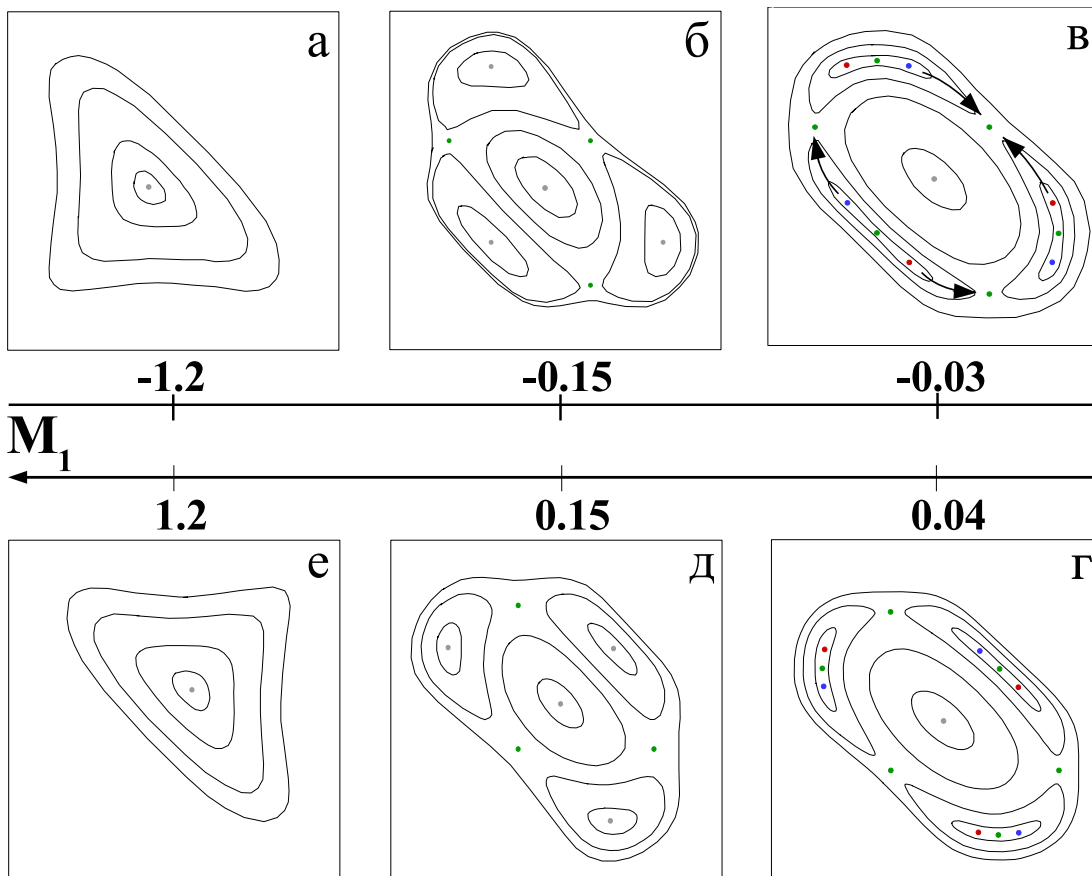


Рис. 5. Эволюция фазовых портретов при изменении параметра M_1 ($M_2 = -1.25$)

4.2. Бифуркации разрушения симметрии для резонанса $1 : 4$

Теперь изучим, как эволюционирует резонанс $1:4$ в случае возмущенного отображения \tilde{H}_3^2 (2.4). Сперва заметим, что точка периода 4 для исходного отображения H_3^+ распадается на 2 точки периода 2 для отображения $(H_3^+)^2$. В общем

случае, возмущение такого отображения будет по-разному влиять на каждую из точек периода 2. На рисунке 6 изображена бифуркационная диаграмма для возмущенной системы \tilde{H}_3^2 в окрестности резонанса 1:4.

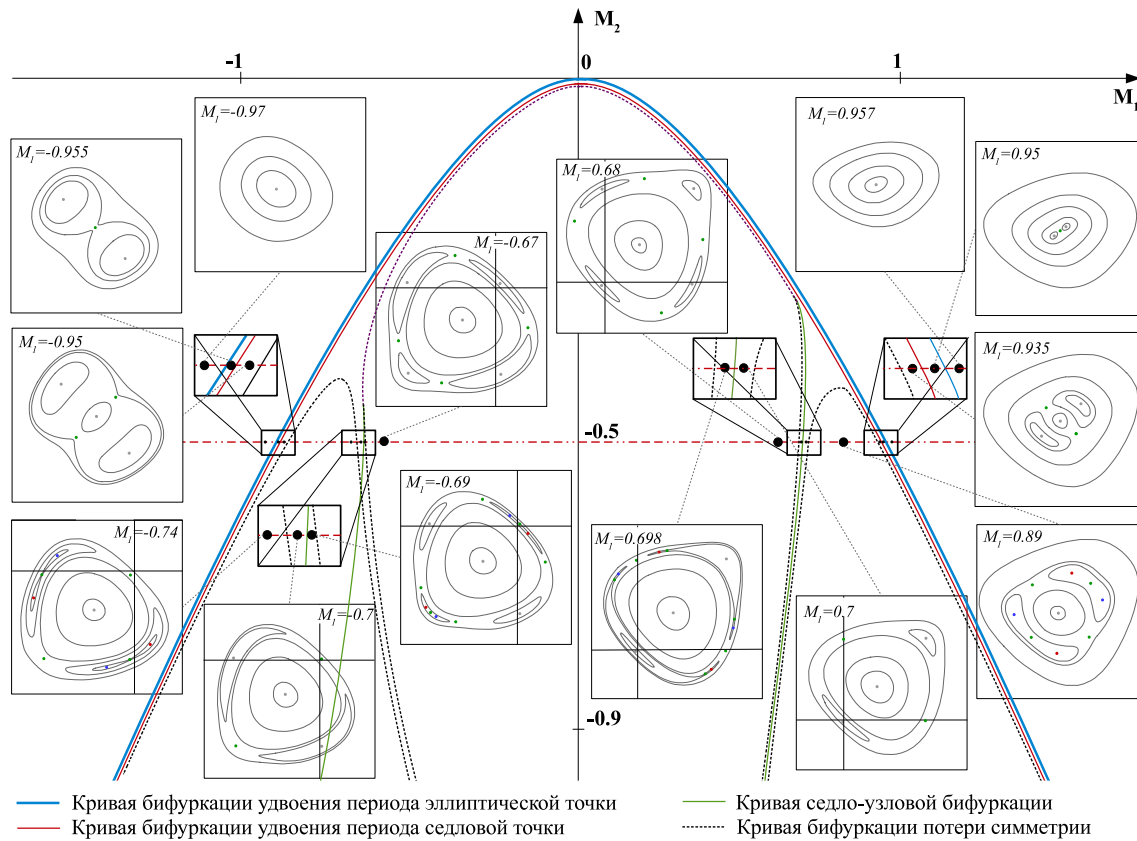


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для неконсервативного отображения \tilde{H}_3^2 при $\varepsilon = 0.01$ в окрестности резонанса 1:4. Описание бифуркационных кривых см. в легенде к рисунку.

Далее, для удобства зафиксируем параметр $M_2 = -0.5$ (пунктирная прямая линия на рис. 6 и проследим за эволюцией фазового портрета в этом случае, двигаясь в сторону увеличения параметра M_1 (см. рис. 7).

На рис. 7а изображен фазовый портрет отображения в окрестности эллиптической неподвижной точки при $M_1 = -0.97$. При пересечении первой бифуркационной кривой, отвечающей в возмущенном отображении удвоению периода эллиптической точки (напомним, что в исходном отображении такая кривая соответствовала резонансу 1:4), эта эллиптическая точка становится седловой, а рядом рождается эллиптическая точка периода 2 (см. рис. 7б). Далее, при незначительном увеличении параметра M_1 , мы пересекаем вторую бифуркационную кривую, отвечающую бифуркации удвоения периода только что образовавшейся седловой неподвижной точки. В результате этого на фазовом портрете отображения снова появляется неподвижная эллиптическая точка, а также седловая точка периода 2

(см. рис. 7в). При дальнейшем увеличении параметра M_1 пересекаем кривую, отвечающую бифуркации разрушения симметрии эллиптической точки периода 2 (на рис. 6 штриховая кривая), в результате чего эллиптическая точка периода 2 становится седловой, а в ее окрестности рождается пара источник-сток (устойчивая и вполне неустойчивая точки периода 2), см. рис. 7г. Такой фазовый портрет сохраняется до обратного пересечения этой кривой, после чего устойчивая и вполне неустойчивая точки периода 2 сливаются, а на фазовом портрете вновь появляется эллиптическая точка периода 2 (см. рис. 7д). Далее, при незначительном изменении параметра M_1 , встречается кривая седло-узловой бифуркации, в результате которой рождаются 2 седлоузла периода 2, один из которых распадается на седловую и устойчивую точку периода 2, а второй — на седловую и вполне неустойчивую точку периода 2 (см. рис. 7е). При незначительном изменении параметра M_1 пересекаем кривую бифуркации восстановления симметрии (штриховая кривая на рис. 6), в результате чего образовавшиеся устойчивая и вполне неустойчивая точки периода 2 сливаются (вместе с симметричной седловой точкой периода 2), образуется симметричная эллиптическая точка периода 2 (см. рис. 7ж). Далее, на достаточно большом интервале по параметру M_1 , фазовый портрет в окрестности двух эллиптических точек периода 2 качественно не меняется, см. фазовый портрет при $M_1 = 0.68$ при подходе к следующей бифуркационной кривой (рис. 7з).

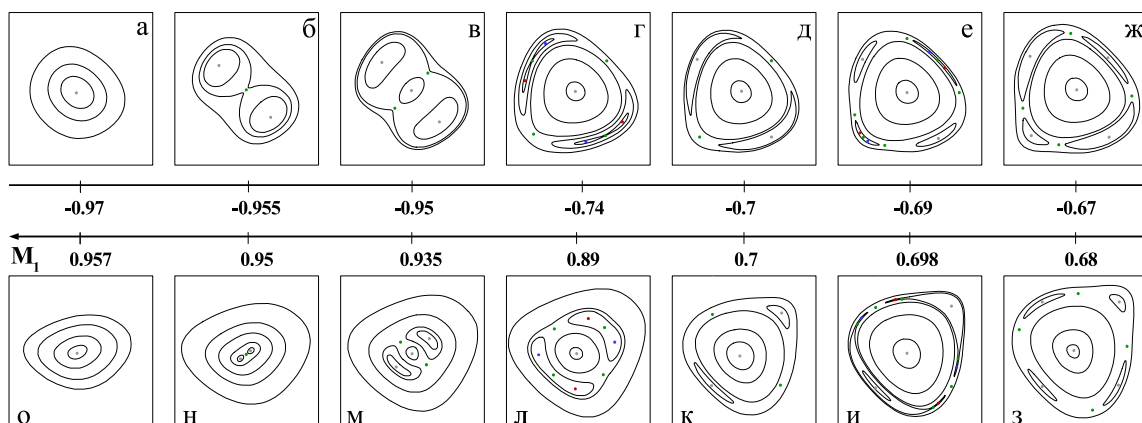


Рис. 7. Эволюция фазовых портретов при изменении параметра M_1 ($M_2 = -0.5$).

Далее эллиптическую точку периода 2, лежащую на линии $y = x$, назовем симметричной, а вторую эллиптическую точку периода 2 — несимметричной. При переходе первой бифуркационной кривой, лежащей в правой полуплоскости несимметричная эллиптическая точка периода 2 претерпевает бифуркацию потери симметрии, рождается пара несимметричных устойчивых и вполне неустойчивых точек периода 2 (см. рис. 7и). При незначительном увеличении параметра M_1 пересекаем зеленую линию, отвечающую обратной седло-узловой бифуркации. В результате этого родившаяся устойчивая точка периода 2 (как и вполне неустойчива

точка периода 2) сливается с седловой точка периода 2, а на фазовом портрете снова остаются лишь консервативные траектории (см. рис. 7к). Далее, при пересечении второй штриховой линии в правой полуплоскости (см. рис. 6), бифуркация потери симметрии возникает с симметричной парой эллиптических точек периода 2, опять возникает пара источник сток (см. рис. 7л), а при обратном пересечении этой же кривой наблюдается обратная бифуркация потери симметрии (восстановление симметрии), см. рис. 7м. В конце концов, пересекаем кривую, отвечающую бифуркации удвоения седловой точки, в результате чего седловая точка периода 2 влипаёт в эллиптическую неподвижную точку и возникает седловая неподвижная точка (см. рис. 7н). А затем пересекаем последнюю кривую, в результате которой симметричная эллиптическая точка периода 2 влипаёт в седловую неподвижную точку, возникает эллиптическая неподвижная точка (см. рис. 7о).

4.3. Бифуркации разрушения симметрии для резонансов более высокого порядка

Мы полагаем, что бифуркации разрушения симметрии для нечетных резонансов проходят в соответствии со сценарием, изложенным в разделе 4.1. В подтверждение этому на рисунке 8 приведены бифуркации потери симметрии для резонанса 1:5. С другой стороны, так как точки четного периода N для исходного отображения H_3^+ распадаются на пары точек периода $N/2$ для отображения \tilde{H}_3^2 , в соответствии с результатами, полученными для резонанса 1:4 в разделе 4.2, бифуркационные диаграммы для четных резонансов 4.2 будут устроены гораздо сложнее.

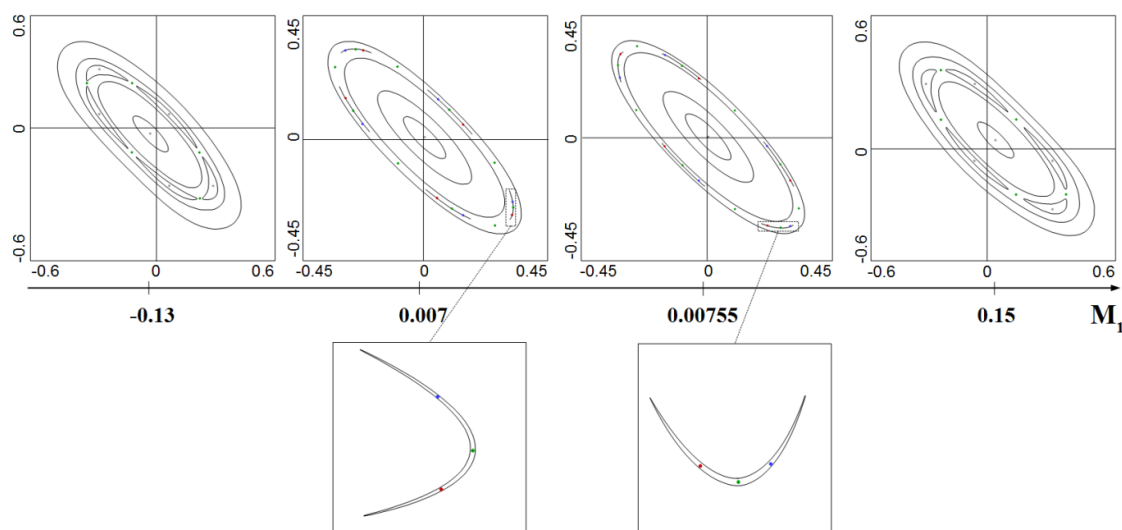


Рис. 8. Эволюция фазовых портретов при изменении параметра M_1 ($M_2 = -1.7$).

Список цитируемых источников

1. *Politi, A., Oppo, G. L., Badii, R.* Coexistence of conservative and dissipative behavior in reversible dynamical systems // *Physical Review A*. — 1986. — Vol. 33, No.6. — С. 4055.
2. *Roberts, J. A. G., Quispel, G. R. W.* Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems // *Physics Reports*. — 1992. — Vol. 216, No.2-3. — С. 63–177.
3. *Lamb, J. S. W., Roberts, J. A. G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1998. — Vol. 112, No.1. — P. 1–39.
4. *Gonchenko, S. V., Shilnikov, L. P., Turaev, D. V.* On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms which are close to a diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic cycle // *Proc. Steklov Inst. Math.* — 1997. — Vol.216. — P. 70–118.
5. *Гонченко, С. В., Стенькин, О. В., Шильников, Л. П.* О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // *Нелинейная динамика*. — 2006. — Т. 2, №1. — С. 3–25.
Gonchenko, S. V., Sten'kin, O. P., Shilnikov, L. P. On the existence of infinitely many stable and unstable invariant tori for systems from Newhouse regions with heteroclinic tangencies. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics* 2, No.1, 3-25 (2006). (in Russian).
6. *Lamb, J. S. W., Stenkin, O. V.* Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // *Nonlinearity*. — 2004. — Vol. 17, No.4. — P. 1217-1244.
7. *Delshams, A., Gonchenko, S. V., Gonchenko, V. S., Lazaro, J. T., Stenkin, O.* Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // *Nonlinearity*. — 2013. — Vol. 26, No.1. — P. 1-33.
8. *Gonchenko, S.* Reversible Mixed Dynamics: A Concept and Examples // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. — 2016. — Vol. 5, No.4. — P. 345–354.
9. *Gonchenko, S., Turaev, D.* On three types of dynamics and the notion of attractor // *Proc. Steklov Inst. Math.* — Vol.297. — P. 133–157.
10. *Gonchenko, A. S., Gonchenko, S. V., Kazakov, A. O.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2013. — Vol. 18, No.5. — P. 521–538.
11. *Kazakov, A. O.* Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2013. — Vol. 18, No.5. — P. 508–520.
12. *Kazakov, A. O.* On chaotic dynamics in the Suslov problem // *Int. Conf.–Sch. «Dynamics, bifurcations and chaos 2015 (DBC II)»* — Nizhni Novgorod: Lobachevsky State Univ., 2015. — pp. 21–30.
13. *Gonchenko, A. S., Gonchenko, S. V., Kazakov, A. O., Turaev, D. V.* On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky–Topaj system of coupled rotators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2017. — Vol. 350. — P. 45–57.
14. *Kazakov, A. O.* On a scenario of onset of strongly dissipative mixed dynamics. — 2017. — (Препринт / arxiv.org).
15. *Lerman, L. M., Turaev, D.* Breakdown of symmetry in reversible systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2012. — Vol.17, No.3-4. — P. 318–336.

16. *Бизязев, И. А., Борисов, А. В., Казаков, А. О.* Динамика задачи Суслова в поле тяжести: реверс и странные аттракторы // *Нелинейная динамика*. — 2016. — Т. 12, №2. — С. 263–287.
Bizyaev, I. A., Borisov, A. V., Kazakov, A. O. Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: reversal and strange attractors. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 12, No.2, 263–287 (2016). (in Russian).
17. *Торай, Д., Пиковский, А.* Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2012. — Vol.170, No.2. — P. 118–130.
18. *Хенон, М.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *The Theory of Chaotic Attractors*. / New York: Springer, 1976. — P. 94–102.
19. *Гаврилов, Н. К., Шильников, Л. П.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I // *Математический сборник*. — 1972. — Т. 88, №4(8). — С. 475–492.
Gavrilov, N. K., Shilnikov, L. P. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. I. *Mathematics of the USSR-Sbornik* 17, No.4, 467-485. (1972).
20. *Гонченко, С. В.* О двухпараметрическом семействе систем, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*. — Горький: 1985. — С. 55-72.
Gonchenko, S. V. On a two-parameter family of systems close to a system with a structurally unstable homoclinic curve. In *Metody kachestvennoi teorii differentsial'nykh uravnenii*, Gorkii, 1985, pp. 55-72. (in Russian)
21. *Gonchenko, S. V., Shilnikov, L. P., Turaev, D. V.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 1996. — Vol.6, No.1. — P. 15–31.
22. *Dullin, H. R., Meiss, J. D.* Generalized Henon maps: the cubic diffeomorphisms of the plane // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2000. — Vol.143, No.1. — P. 262–289.
23. *Gonchenko, M., Gonchenko, S., Ovsyannikov, I.* Bifurcations of cubic homoclinic tangencies in two-dimensional symplectic maps // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. — 2017. — Vol. 12, No.1. — P. 41–61.

Получена 03.09.2017