Оглавление

Предисловие

При переходе от пятилетнего формата обучения в вузах на двухуровневую систему "бакалавриат+магистратура" заметно изменились многие константы отечественного математического образования в сфере подготовки будущих школьных учителей математики. Некоторые базовые разделы, такие как "Геометрия" , "Математический анализ"и т.п., с некоторыми изменениями, но остались в курсах бакалавриата. Некоторые традиционные разделы перешли в узконаправленные курсы по выбору. При подобных переносах зачастую изменилось соотношение между аудиторной и самостоятельной работой студентов и отнюдь не в пользу лекционной и семинарской работы.

Но в некоторых случаях учебные дисциплины исчезли даже на уровне титула, просто как вид. Причем речь не идет о каких-то вычурных предметах, касающихся суперспецифических математических объектов, а о вещах, несомненно, базовых для более-менее полного набора математических компетентностей будущего учителя математики. Например, можно ли все точки прямой "пересчитать" , т.е. расположить в виде последовательности; или, каких чисел "больше" - рациональных или иррациональных, или, у любого ли подмножества отрезка есть его длина; или, почему площадь многоугольника не зависит от того, как именно мы разрежем его на треугольники и затем просуммируем их площади и т.п.

Итак, в данном случае, речь о дисциплине, которая ранее традиционно обозначалась аббревиатурой ТФДП - теория функций действительной переменной. С добавками "и элементы функционального анализа" или "и элементы теории меры" это был годовой курс (на третьем году обучения), обычно заканчивавшийся теоремой Рисса-Фишера или тригонометрическими рядами.

Необходимо подчеркнуть, что, в историческом плане, ТФДП как наука и как учебный материал в нашей стране явилась той питательной средой, на которой выросли многие поколения математиков, как выдающихся и широко известных, так и просто хороших математиков, которые и обеспечили стране тот высокий уровень математического образования и математической науки в целом, которым мы все еще гордимся (и правильно делаем). Подтверждением этого тезиса является тот факт, что для большинства отечественных математиков поднятие по математическому генеалогическому дереву за 2-3 шага приводит к одной из ветвей "Дерева Лузина" , а с именами Н. Н. Лузина, П. С. Александрова, А.Н. Колмогорова, Д. Е. Меньшова, П.С. Новикова, А. С. Кронрода, А. Г. Витушкина, П. Л. Ульянова, С. Б. Стечкина, их учеников и учеников их учеников и связаны многие существенные успехи в теории функций действительной переменной, и в целом в отечественной математике.

Возвращаясь к нынешним реалиям, мы сталкиваемся с серьезной методической и организационной проблемой. А именно, как, в достаточно лаконичных рамках действующих образовательных стандартов, сохранить в системе подготовки или переподготовки учителей математики изучение фундаментальных понятий ТФДП? Очевидно, ответ на этот вопрос в рамках бакалавриата, к сожалению, невозможен. Его по факту приходится относить к магистерским программам. При этом приходится адекватно менять и титул: в аббревиатуре ТФДП буква Ф (= функции) , скорее всего (и к сожалению), уже есть некоторый анахронизм

Настоящая монография дает содержательный и предметный ответ на поставленный вопрос. В пятнадцати предлагаемых лекциях, что примерно соответствует одной зачетной единице (з.е.), представлено краткое, но достаточно полное изложение основных понятий о структуре подмножеств числовой прямой. Грубо говоря, речь идет о том, из скольких элементов может "состоять"числовое множество (мощности множеств), о том, как "устроено"числовое множество (дескриптивная теория множеств) и о том, сколько места на прямой "занимает" множество (меры или длины числовых множеств). Меры плоских множеств конспективно изложены в заключительной лекции.

Изложение основано многолетнем опыте работы в Московских городском и государственном педагогических университетах, как в специалитете, так и бакалавриате и магистратуре.

Авторы.

Часть первая. Мощности множеств

Первая лекция

Сравнение множеств по мощности. Существование множеств сколь угодно большой мощности

Рассмотрим следующие множества:
(1) $\{-1, 14, 17, 37, 1999\}$;
(2) $\{\text{А}, \text{Ю}, \text{Ы}, \text{Й}, \text{Ъ}\}$;
(3) три яблока и две груши;
(4) волк и четверо козлят;
(5) $\{\forall, \exists, \flat, \sharp, \spadesuit\}$.

Что общего между ними? Ответ ясен — все они состоят из пяти различных элементов. Повторим теперь вопрос, но запретим при ответе использовать слово «пять». Такое изменение вопроса приводит к соответствующему изменению ответа — все эти множества состоят из одного и того же числа элементов. Опять повторим первоначальный вопрос, но запретим теперь использовать и слово «пять» и слова «число (количество, ...) элементов». Перед предъявлением ответа, объясним, зачем следует рассматривать такие ограничения при ответе на этот тривиальный вопрос.

Дело в том, что, практически всюду, в этих лекциях мы будем рассматривать *бесконечные* множества: множества натуральных, целых, рациональных, алгебраических, действительных чисел, множества всех интервалов, всех отрезков, всех сходящихся последовательностей на прямой, множества кругов, квадратов на плоскости и т.п.

Что такое «количество элементов» для бесконечного множества? Каких чисел больше: четных или иррациональных? Чего на плоскости больше: треугольников или паралелограммов? Можно ли все действительные числа «пересчитать», т. е. расположить по такому же порядку, что и натуральные числа? Вот примеры типичных вопросов, возникающих при сравнении бесконечных множеств.

Идеальной для ответа представляется такая схема. Каждому множеству следует приписать «нечто», некоторое качественно новое «число», отвечающее за количество элементов этого множества. После этого надо научиться сравнивать (равно, больше, меньше) эти числа. Из их сравнения и получатся ответы на вопросы о сравнении бесконечных множеств. Реализация этой схемы оказывается совсем не простой, она приводит к арифметике так называемых кардинальных чисел. Теория кардинальных чисел была в основных чертах создана Георгом Кантором в 1870—80-х годах. Заканчивая введение, ответим на первоначальный вопрос о сравнении перечисленных выше конечных множеств.

Итак, ответ. Между любыми двумя из этих множеств можно установить взаимно- однозначное соответствие. Или, несколько другими словами, каждое из этих множеств можно взаимно-однозначно отобразить на одно и то же стандартное множество числовое множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. В этом смысле все эти множества существенно отличаются, например, от множества «волк и семеро козлят»: здесь уже никакого взаимно-однозначного соответствия не существует. Переходим к непосредственному изложению.

Определение 1.1. (а) Отображение f множества X в множество Y называется **инъективным** (инъекцией) если оно переводит различные аргументы в различные значения, т.е

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

(б) Отображение f множества X в множество Y называется **сюръективным** (сюръекцией) если оно является отображением на все множество Y, т. е.

$$\forall y \in Y \exists x \in X\colon f(x) = y.$$

(в) Отображение называется **биективным** (биекцией) если оно и иньективно и сюрьективно.

Хорошим упражнением на эти понятия является следующая задача.

Задача. Пусть отображение h есть композиция отображений g и f, $h = f \circ g$ Верно ли, что:

(1) если g — инъекция и f — инъекция, то h — инъекция;
(2) если g — инъекция и f — инъекция, то h — сюръекция;
(3) если g — инъекция и f — инъекция, то h — биекция;
(4) если g — инъекция и f — сюръекция, то h — инъекция;
(5) если g — инъекция и f — сюръекция, то h — сюрекция;
...
(27) если g — биекция и f — биекция, то h — биекция?

Как минимум, хорошо для контроля проверить, что в такой задаче действительно 27 вопросов.

На русский язык слово «биекция» переводится выразительным, но несколько длинноватым термином «взаимно однозначное соответствие». Достаточно редко, но встречается такой эквивалент термина «инъекция»: «одно-однозначное соответствие». Иньективное отображение $f\colon X \to Y$ осуществляет некоторое вложение множества X в множество Y. Если забыть о конкретной структуре конкретных множеств X и Y и отождествить (= перестать различать) элементы $x \in X$ и $f(x) \in Y$, то множество X «станет» просто подмножеством множества Y. Формально это выглядит так.

Задача. Всякая инъекция $f\colon X \to Y$ является биекцией $f\colon X \to f(X)$ на свой образ $f(X) \subset Y$.

Определение 1.2. (а) Множества X и Y называются **равномощными**, если между этими множествами существует хотя бы одна биекция (синонимы: «мощность множества X равна мощности множества Y», $|X| = |Y|$, множества X и Y биективны между собой);

(б) Множество X **не мощнее** множества Y, если существует хотя бы одна инъекция из множества X в множество Y (синонимы: «мощность множества X не больше мощности множества Y», $|X| \leq |Y|$);

(в) Мощность множества X **меньше** мощности множества Y, если верно (б) и не верно (а), т. е. хотя бы одна инъекция $f\colon X \to Y$ имеется, но нет ни одной биекции из X на Y (синоним: $|X| < |Y|$).

Равномощные между собой множества X и Y часто называют также **эквивалентными**, и используют обозначение «$X \sim Y$», имея в виду результат следующей задачи.

Задача. Отношение биективности между множествами является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

«Мощностью данного множества X называется та общая идея, которая остается у нас, когда мы, мысля об этом множестве, отвлекаемся как от всех свойств его элементов, так и от их порядка». Так, в оригинале, определял понятие мощности Георг Кантор в конце девятнадцатого века.

Всюду ниже мы не будем придавать никакого точного смысла отдельно стоящему термину «мощность множества X». Содержательны будут только термины из определения 1.2 и их вариации вида «мощности множеств X и Y одинаковы, мощность множества X не превосходит мощности множества Y», и т.п.

Примеры

Пример 1. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. Требуется построить хотя бы одну биекцию f между данными множествами. Выпишем начала множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел и множества $\mathbb{Z}$ целых чисел.

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \ldots$$

$$\ldots -3\ \ -2\ \ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ \ldots$$

Естественно числу $1 \in \mathbb{N}$ поставить в соответствие число $0 \in \mathbb{Z}$. Мы так и сделаем: $f(1) = 0$. Число $2 \in \mathbb{N}$ надо «отправить» вправо или влево относительно $0 \in \mathbb{Z}$. Сохраним направление вправо и положим $f(2) = 1$. Рано или поздно придется двигаться по множеству $\mathbb{Z}$ и влево. Сделаем это прямо сейчас, положив $f(3) = -1$. Дальнейшее понятно:

$$f(4) = 2, \quad f(5) = -2, \quad f(6) = 3, \quad f(7) = -3\ldots \quad \square$$

Полезно выписать явную формулу для построенной в примере 1 биекции f, а после этого постараться ответить себе на вопрос: становится ли факт наличия биекции более ясным и понятным от задания этой биекции в виде формулы ?

Пример 2. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus \{13\}|$.

Решение. Если $f(n) = n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots, 11, 12$ и $f(n) = n + 1$ при $n \geq 13$, то f есть биекция из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N} \setminus \{13\}$. $\square$

Пример 3. Рассмотрим множество M, элементами которого являются интервалы на числовой прямой и пусть известно, что эти интервалы между собой попарно не пересекаются. Доказать, что мощность множества M не больше мощности множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Решение. В каждом числовом интервале есть хотя бы одно рациональное число: это свойство всюду плотности множества $\mathbb{Q}$ во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. Возьмем любой элемент m множества M. По условию m есть некоторый числовой интервал. В этом интервале m произвольно выберем и зафиксируем какое-нибудь рациональное число. Назовем это число $f(m)$. Поступив так с каждым интервалом $m \in M$, получим отображение $f\colon M \to \mathbb{Q}$ которое иньективно именно потому, что интервалы по условию попарно непересекаются. □

Пример 4. Доказать, что два любых невырожденных отрезка числовой прямой равномощны между собой.

Решение. Достаточно доказать биективность отрезков $[0,1]$ и $[a,b], a < b$, а после этого воспользоваться транзитивностью отношения биективности. В прямоугольнике $[0,1] \times [a,b]$ на числовой плоскости $\mathbb{R}^2$ проведем диагональ. Получим график некоторой линейной функции $f\colon [0,1] \to [a,b]$, которая и будет искомой биекцией. Если провести другую диагональ, то получим вторую линейную биекцию:

$$f_1(x) = (b-a)x + a, \quad f_2(x) = (a-b)x + b$$

Линейность здесь естественна, но, формально, совершенно не существенна. Можно определить $f\colon [0,1] \to [a,b]$ как **произвольную** непрерывную и строго возрастающую функцию с условием $f(0) = a$, $f(1) = b$. Тогда монотонность функции f гарантирует ечҷ иньективность, а непрерывность — гарантирует сюръективность по теореме о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке. □

Пример 5. Доказать, что мощность множества натуральных чисел строго меньше мощности отрезка $[0,1]$.

Доказательство. Докажем, что $|\mathbb{N}| \leq |[0,1]|$. Для этого достаточно рассмотреть любую последовательность точек отрезка (без повторений) и отобразить число 1 в первый член последовательности, число 2 во второй член последовательности, и т.д. Для конкретности, например, можно положить $f(n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Понятно, что f есть требуемая инъекция из $\mathbb{N}$ в $[0,1]$.

Докажем теперь, что $|\mathbb{N}| \neq |[0,1]|$. Для этого надо доказать, что между этими множествами не существует ни одной биекции. Как обычно, доказать, что чего-то не может быть значительно труднее, чем доказать, что что-то имеется. В данном случае мы докажем даже более сильное утверждение

Не существует ни одной сюръекции из множества $\mathbb{N}$ на отрезок $[0, 1]$.

Пусть $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1]$ — произвольное отображение. Обозначим $I_0 = [0, 1]$ выберем такой подотрезок $I_1 \subset I_0$, в котором **не** лежит число $f(1)$. В отрезке I_1 выберем такой подотрезок $I_2 \subset I_1$, в котором **не** лежит число $f(2)$ и т.д. Продолжив, получим последовательность

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset\supset I_{n+1} \supset \ldots$$

вложенных отрезков, у которых по теореме Кантора есть общая точка x. По построению $x \in I_1$ и $f(1) \notin I_1$. Значит $x \neq f(1)$. Опять же по построению $x \in I_2$ и $f(2) \notin I_2$. Значит $x \neq f(2)$. Продолжая получим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ точка x отлична от точки $f(n)$. Следовательно точка x не лежит в образе отображения $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1]$, что и доказывает несюръективность этого отображения.

Итак, любое отображение $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1]$, не сюръективно. □

Приведем несколько другую формулировку примера 5.

Пример 5'. Все точки отрезка нельзя расположить в виде последовательности.

Итак, из приведенных примеров мы видим, что бывают бесконечные множества различной мощности. Мы закончим лекцию доказательством того, что различных мощностей бесконечных множеств может быть бесконечно много.

Определение 1.3. Множество называется **конечным**, если для некоторого натурального $n \in \mathbb{N}$ это множество равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$. Непустое множество, не являющееся конечным называется **бесконечным**.

Если множество X конечно и состоит из n элементов, то количество всех его подмножеств, включая пустое множество, нетрудно посчитать. Оно равно 2^n. Это можно сделать прямо по индукции, а можно использовать сумму всех чисел в n-й строке треугольника Паскаля и вспомнить о комбинаторном определении этих чисел. Для бесконечных множеств сохраним преемственность обозначений.

Определение 1.4. Множество всех подмножеств данного множества X обозначается 2^X и называется **булеаном** множества X.

Теорема 1.5 (Кантора о мощности множества подмножеств). Множество всех подмножеств данного множества мощнее самого множества, т.е $|X| < |2^X|$.

Доказательство. Существует естественная инъекция $i\colon X \to 2^X$, которая каждому элементу x множества X ставит в соответствие одноэлементное подмножество $\{x\}$ множества X:

$$i(x) = \{x\}, \quad x \in X, \quad \{x\} \in 2^X.$$

Значит $|X| \leq |2^X|$.

Докажем теперь, что $|X| \neq |2^X|$. Для этого надо доказать, что между этими множествами не существует ни одной биекции. Как и в примере 5, мы докажем более сильное утверждение

Не существует ни одной сюръекции из множества X на множество 2^X.

Пусть $f\colon X \to 2^X$ произвольное отображение. На интуитивном, наглядном уровне можно предложить такую модель.

Курсор «мышки» бегает по экрану — по множеству X. При щелчке мышью какой-то элемент x из множества X фиксируется и тогда одновременно с этим выцвечивается какая-то часть экрана — некоторое подмножество множества X. Если это можно сделать с каждой точкой экрана, то тем самым и задано некоторое отображение из X в 2^X. Вернемся к формальному доказательству.

Для каждого $x \in X$ возможны ровно две ситуации: либо $x \in f(x)$, либо $x \notin f(x)$. Рассмотрим следующее, специальным образом определенное, подмножество A множества X:

$$A = \{x \in X | x \notin f(x)\}.$$

Докажем, что никакой $x \in X$ не может при отображении f перейти в множество A, т.е что элемент A из булеана 2^X множества X не лежит в образе отображения f. Если это будет сделано, то как раз и будет доказана несюръективность отображения f.

Доказательство — методом от противного. Допустим, что $f(x) = A$ для некоторого $x \in X$. Если $x \in A$, то по определению множества A получаем

$$(x \notin f(x) = A) \Longrightarrow (x \notin A),$$

что противоречит включению $x \in A$. В случае $x \notin A$ по определению множества A получаем

$$(x \notin A) \Longleftrightarrow (x \in f(x) = A) \Longrightarrow (x \in A),$$

в противоречии с $x \notin A$. $\square$

Следствие 1.6. Для любого множества X найдется множество Y, большей чем у X мощности.

Доказательство. Достаточно положить $Y = 2^X$ и воспользоваться теоремой 1.5. $\square$

Следствие 1.7. Существует бесконечно много различных мощностей бесконечных множеств.

Доказательство. Пусть X произвольное бесконечное множество. Тогда поочередно применяя доказанную теорему 1.5 к множествам $X, 2^X, 2^{(2^X)}, \ldots$, получаем

$$|X| < |2^X| < |2^{(2^X)}| < |2^{(2^{(2^X)})}| < \ldots.$$

Докажем, что мощности множеств X и $2^{(2^X)}$ различны. На самом деле, это следствие транзитивности отношения «мощность строго меньше» между множествами, но аккуратно доказать такую транзитивность в общем виде мы пока не в состоянии. Все же в данном конкретном случае можно выкрутиться. Множество X можно инъективно отобразить во множество 2^X, которое, в свою очередь, можно иньективно отобразить во множество $2^{(2^X)}$. Значит есть и инъекция из X в $2^{(2^X)}$, т.е. $|X| \leq |2^{(2^X)}|$. Допустим, от противного, что $|X| = |2^{(2^X)}|$. Тогда найдется некоторая биекция $g\colon X \to 2^{(2^X)}$, автоматически являющаяся и сюръекцией. Определим тогда следующее отображение $f\colon 2^X \to 2^{(2^X)}$. На одноэлементных множествах отображение f совпадает с отображением g, а все остальные множества оно переводит в какой-нибудь один-единственный элемент множества $2^{(2^X)}$. Например, в пустое множество. Тогда отображение f будет сюръекцией множества 2^X на множество $2^{(2^X)}$, чего не может быть по доказательству теоремы 1.5 (но не по ее формулировке !). Следовательно

$$|X| < |2^{(2^X)}|.$$

Аналогично доказывается, что в построенной бесконечной последовательности множеств все члены имеют попарно различные мощности. $\square$

В заключение приведем «игровую» переформулировку теоремы 1.5 и ее доказательства. Ее сообщил автору А. Я. Канель.

Теорема 1.5'. В некотором государстве любое множество подданных образует тайное общество. В этом государстве каждый подданный доносит на одно и ровно одно тайное общество. Доказать, что есть тайное общество, на которое никто не доносит.

Доказательство. Назовем подданного предателем, если он доносит на то общество, в котором сам состоит и назовем его приличным человеком, если он доносит на то общество, в котором сам не состоит. Рассмотрим тайное общество A, состоящее из всех приличных людей и только из них. Тогда на это тайное общество никто не доносит. Действительно, если x — предатель, то он не может доносить на A, т.к. сам в A не состоит. Если же x — приличный человек, то он не доносит на A именно потому, что он состоит в A. $\square$

Приведенная версия доказательства теоремы 1.5 просто показывает эквивалентность этого доказательства известному в логике парадоксу лжеца.

Вторая лекция

Счетные множества

Интуитивный смысл понятия «счетное множество» состоит в некоторой игре слов: множество счетно, если его, грубо говоря, можно пересчитать. При этом не имеется в виду некоторый окончательный пересчет. Правильнее говорить об указании некоторого правила f (закона, соответствия), по которому можно расположить элементы множества X «один за другим»:

$$X = \{f(1),\ f(2),\ f(3), \dots,\ f(n), \dots\} \quad f\colon \mathbb{N} \to X.$$

Более того, в большинстве содержательных ситуаций такое правило (закон, соответствие) и не указывается вовсе, а лишь доказывается существование такого пересчета.

Определение 2.1. Множество называется **счетным** если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Бесконечное множество, не являющееся счетным называется **несчетным**.

Практически все факты о счетных множествах основаны на следующих двух теоремах про множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Теорема 2.2. Всякое бесконечное подмножество множества натуральных чисел является счетным множеством.

Теорема 2.3. Декартово произведение $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ множества натуральных чисел на себя является счетным множеством.

Кроме того, во взаимоотношениях счетных и просто бесконечных множеств решающую роль играет следующая теорема.

Теорема 2.4. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Перед доказательствами повторим типичный пример несчетного множества — это отрезок $[0,1]$, см.предыдущую лекцию.

Доказательства основных теорем

Доказательство теоремы 2.4 Пусть $f(1)$ — произвольный элемент бесконечного множества X. Тогда множество $X \setminus \{f(1)\}$ непусто, как разность бесконечного и конечного множеств. В качестве $f(2)$ выберем произвольный элемент множества $X \setminus \{f(1)\}$. Тогда $f(2) \neq f(1)$ и множество $X \setminus \{f(1), f(2)\}$ опять же непусто, как разность бесконечного и конечного множеств. В качестве $f(3)$ выберем произвольный элемент множества $X \setminus \{f(1), f(2)\}$. Тогда $f(3) \neq f(1), f(3) \neq f(2)$ и множество $X \setminus \{f(1), f(2), f(3)\}$ непусто. Продолжая, получим инъективное отображение $f\colon \mathbb{N} \to X$, образ $f(\mathbb{N})$ которого и будет искомым счетным подмножеством множества X. $\square$

Теорему 2.4 вместе с ее доказательством удобно переформулировать в следующем виде **Следствие 2.5.** Мощность множества натуральных чисел минимальна среди мощностей бесконечных множеств, т. е. $|\mathbb{N}| \leq |X|$ для любого бесконечного множества X.

Доказательство. См. доказательство теоремы 2.4. $\square$

В знак такой уникальности мощности счетных множеств принято обозначать факт счетности множества с помощью некоторого специального значка.

Определение 2.6. Если множество X счетно, то говорят, что **мощность множества X равна алеф-ноль** и используют обозначение $|X| = \aleph_0$.

Приведенное доказательство теоремы 2.4 существенно использует так называемую аксиому выбора: **из всякого непустого множества можно выбрать один элемент**. Это далеко не безобидное утверждение. Например, польские математики С.Банах и А.Тарский с использованием аксиомы выбора доказали следующее геометрически необъяснимое утверждение. Единичный шар в трехмерном пространстве можно разбить на такие четыре попарно не пересекающиеся множества, что, перемещая эти части в пространстве с помощью движений, из них можно составить два непересекающихся шара единичного радиуса ! Анализу положения аксиомы выбора в основаниях математики можно посвятить и отдельный курс лекций. Впрочем, это будет уже, скорее, математическая логика. В дальнейшем мы много раз будем пользоваться аксиомой выбора, но уже без всякого ее специального обсуждения.

Доказательство теоремы 2.2 практически повторяет доказательство теоремы 2.4, используя дополнительно конкретику множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Доказательство теоремы 2.2. Здесь используется следующее базисное свойство множества $\mathbb{N}$. Всякое непустое подмножество множества натуральных чисел имеет минимальный элемент. На самом деле, это просто аксиома математической индукции.

Итак, пусть $X \subset \mathbb{N}$ и X бесконечно. Определим отображение $f\colon \mathbb{N} \to X$ по следующему правилу:

$$
\begin{gathered}
f(1) = \min(X);\\
f(2) = \min(X \setminus \{f(1)\});\\
f(3) = \min(X \setminus \{f(1), f(2)\});\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f(n+1) = \min(X \setminus \{f(1), f(2), \dots, f(n)\});\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
$$

Процесс никогда не оборвется, так как на каждом шаге из бесконечного множества вычитается конечное множество и значит все время остается непустое подмножество множества натуральных чисел. По построению отображение f строго возрастает и поэтому оно иньективно. До каждого $x \in X$ мы доберемся, как максимум, за x шагов, т. е. отображение f сюръективно. Поэтому $|X| = \aleph_0$. $\square$

Первое доказательство теоремы 2.3. Элементы множества $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ это просто всевозможные пары (n, m) всех натуральных чисел. Расположим эти пары в виде бесконечной прямоугольной таблицы

$$
\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \dots\\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \dots\\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \dots\\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \dots\\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

Как пересчитать все эти пары ? Начнем с угла: $f(1) = (1,1)$. Затем сдвинемся по горизонтали: $f(2) = (1,2)$. Рано или поздно нам придется учитывать и пары из второй строки. Сделаем это прямо сейчас: $f(3) = (2,1)$. Затем захватим и третью строку: $f(4) = (3,1)$.

После этого пройдем по диагонали, но уже в другом направлении: $f(5) = (2,2)$, $f(6) = (1,3)$. Дальнейшее ясно, надо сдвигаться в очередную диагональ этой таблицы и проходить эту диагональ, меняя направление по сравнению с проходом по предыдущей диагонали:

$$f(7) = (1,4), \quad f(8) = (2,3), \quad f(9) = (3,2),$$
$$f(10) = (4,1), \quad f(11) = (5,1), \quad \dots \quad \square$$

Приведенное доказательство обладает рядом несомненных достоинств. Оно красиво и естественно одновременно. Оно наглядно и «элементарно». Его автор — Георг Кантор, — считал это доказательство одним из основных своих достижений в математике. Именно этот способ пересчета элементов декартова квадрата множества натуральных чисел выбит на бронзовом обелиске барельефа Г. Кантора в г. Нойштатде, Германия.

Все же у этого доказательства есть и (формальный) недостаток. Отображение f никак не задано в виде явной формулы. Например, чему равно $f(1000)$, т. е. какая конкретно пара будет тысячной при таком пересчете? На самом деле, явную формулу для построенной биекции f не так уж и сложно получить, опираясь на характер роста числа пар на диагоналях этой таблицы.

Задача. Найти $f(20), f(100)$ и $f(200)$.

Впрочем, от предъявления формулы для f сама биекция f не станет ни хуже, ни лучше. Мы предъявим сейчас другое доказательство, в котором формальная часть совсем проста, но которое не обладает никакой геометрической наглядностью.

Второе доказательство теоремы 2.3. В отличие от предыдущего доказательства, биекцию построим как некоторое отображение g из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Определим это отображение следующим образом

$$g(n,m) = 2^{n-1} \cdot (2m-1); \quad (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Если у различных пар (n_1, m_1) и (n_2, m_2) различны первые координаты, т. е. $n_1 \neq n_2$, то в разложении натуральных чисел $g(n_1, m_1)$ и $g(n_2, m_2)$ на простые сомножители двойка стоит в разных степенях. Значит $g(n_1, m_1) \neq g(n_2, m_2)$. Если же у различных пар (n_1, m_1) и $g(n_2, m_2)$ первые координаты совпадают, т.е $n_1 = n_2 = n$, то тогда различны вторые координаты, т. е. $m_1 \neq m_2$. Значит,

$$(2m_1 - 1 \neq 2m_2 - 1) \implies$$
$$(g(n_1, m_1) = 2^{n-1} \cdot (2m_1 - 1) \neq 2^{n-1} \cdot (2m_2 - 1) = g(n_2, m_2)).$$

Итак, иньективность отображения g доказана. Для доказательства его сюръективности возьмем произвольное число $k \in \mathbb{N}$. Оно (единственным образом) представимо в виде произведения некоторой степени двойки и некоторого нечетного числа q, т. е. $k = 2^p \cdot q$. Тогда по определению отображения g пара $(n, m) = (p + 1, \frac{q+1}{2})$ переходит именно в число k.

(В качестве примера найдем пару (n, m), переходящую в число 2000. Имеем, что $2000 = 16 \cdot 125 = 2^{5-1} \cdot (2 \cdot 63 - 1)$. Значит $g(5, 63) = 2000$.)

Итак, образ отображения g совпадает со всем множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Следовательно g действительно биекция или же $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$. $\square$

Задача. Доказать, что декартово произведение двух счетных множеств счетно.

Примеры использования

Пример 1 (Критерий счетности множества). Для того, чтобы множество X было счетным необходимо и достаточно, чтобы X было бесконечным и чтобы X можно было бы иньективно отобразить в некоторое счетное множество Y.

Доказательство. Необходимость тривиальна: всякое счетное множество X бесконечно и в качестве Y можно взять само множество X. Докажем достаточность. Пусть множество X бесконечно, пусть $f\colon X \to Y$ — некоторая инъекция в некоторое счетное множество Y и пусть $g\colon Y \to \mathbb{N}$ — некоторая биекция из счетного множества Y на $\mathbb{N}$. Тогда композиция $h = g \circ f\colon X \to g(f(X)) \subset \mathbb{N}$, рассматриваемая как отображение на свой образ, иньективна и сюрьективна, т. е. является биекцией. Значит $h(X)$ есть бесконечное подмножество множества натуральных чисел и по теореме 2.2 $|h(X)| = \aleph_0$. Так как множества X и $h(X)$ равномощны, то и $|X| = \aleph_0$. $\square$

Доказанный критерий может быть записан в виде следующей эквивалентности:

$$(\aleph_0 \le |X| \le \aleph_0) \Longleftrightarrow (|X| = \aleph_0).$$

Пример 2 (Образ счетного множества). Образ любого счетного множества при любом отображении или конечен или счетен (= не более чем счетен).

Доказательство. Пусть $g\colon Y \to Z$ — некоторое отображение и пусть множество Y счетно. Если образ $X = g(Y) \subset Z$ конечен, то доказывать нечего. Если же множество X бесконечно, то используем аксиому выбора. Для каждой точки $x \in X$ произвольно выберем и зафиксируем один-единственный элемент $y \in Y$ для которого $g(y) = x$. Обозначим этот выбранный элемент $f(x)$. Тогда получим инъекцию $f\colon X \to Y$ из бесконечного множества X в счетное. По предыдущему примеру множество $X = g(Y)$ счетно. □

Пример 3 (Мощность множества рациональных чисел). Множество рациональных чисел счетно; $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Доказательство. Используем пример 1. Множество $X = \mathbb{Q}$ очевидно бесконечно. В качестве множества Y выберем декартово произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Так как множество целых чисел счетно (см. пример 1 из лекции 1) и так как декартово произведение двух счетных множеств счетно (см.задачу выше), то множество Y равномощно множеству $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и значит по теореме 2.3 само множество Y счетно. Остается построить какую-нибудь инъекцию f из X в Y. Для каждого рационального числа $x \in X$ произвольно выберем и зафиксируем какое-нибудь его представление в виде дроби $x = \frac{n}{m}$; $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Определим значение отображения f в точке x равенством $f(x) = (n, m) \in Y$. Докажем иньективность построенного отображения $f\colon X \to Y$. Пусть $f(x_1) = (n_1, m_1) = (n_2, m_2) = f(x_2)$. Но тогда у двух дробей соответственно совпадают и числители $n_1 = n_2$ и знаменатели $m_1 = m_2$. Значит эти дроби задают одно и то же рациональное число, т.е $x_1 = x_2$. Итак, из равенства двух значений отображения g следует равенство соответствующих аргументов. Следовательно $g\colon X \to Y$ — инъекция. □

Пример 4 (Теорема о мощности объединения счетных множеств). Объединение счетного числа счетных множеств само является счетным множеством.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда счетные множества $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно между собой не пересекаются. Вернемся к той части доказательства теоремы 2.3, в которой изображена бесконечная прямоугольная таблица. Расположим все элементы первого множества X_1 по первой горизонтали, т.е на местах $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, … Расположим все элементы второго множества X_2 по второй горизонтали, т.е на местах $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, …

Так как X_1 и X_2 между собой не пересекаются, то каждый элемент из их объединения будет стоять ровно на одном месте в первых двух строчках и обе строчки будут целиком заполнены. Продолжение ясно: все элементы n-го по счету множества X_n расположим в n-й горизонтальной строчке. Получаем тогда, что объединение $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ всех множеств X_n равномощно декартову произведению $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, которое по теореме 2.3 счетно. Значит и X счетно.

Рассмотрим теперь случай произвольных счетных множеств X_1, X_2, …, $X_n, \ldots$. Пусть $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ и $Y = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тогда X бесконечно, а Y счетно и по критерию счетности остается построить инъекцию из X в Y. Повторим сначала построение из предыдущего случая. Тогда все элементы множества X будут размещены в бесконечной прямоугольной таблице, т. е. во множестве Y. К сожалению, один и тот же элемент $x \in X$ может оказаться стоящим в нескольких строчках и даже в бесконечном числе горизонтальных строчек. Мы обойдем это препятствие с помощью аксиомы выбора: для каждого $x \in X$ произвольно выберем и фиксируем одно-единственное из тех мест в таблице, на которых оказался элемент x. Тем самым, мы иньективно (но, вообще говоря, не сюръективно) отобразили X в Y. Значит множество X счетно. $\square$

Заметим, что с формальной точки зрения в предыдущем примере достаточно было бы рассмотреть только второй случай.

Пример 5 (Теорема о мощности объединения не более чем счетных множеств). Если $|X_1| \le \aleph_0$, $|X_2| \le \aleph_0$, …, $|X_n| \le \aleph_0$, …, то и $|\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n| \le \aleph_0$.

Доказательство. Неравенства $|X_n| \le \aleph_0$ означают, что каждое из множеств X_n можно иньективно отобразить во множество натуральных чисел. В терминах предыдущего примера можно тогда считать, что первое множество X_1 расположено в первой строке таблицы, второе множество X_2 — во второй строке и т.д. Проблема с возможыми повторениями разрешается в точности, как в предыдущем примере. В итоге объединение $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ счетного числа не более чем счетных множеств иньективно отобразится в счетное множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Значит $|X| \le \aleph_0$. $\square$

Пример 6 (Мощность множества алгебраических чисел). Множество $\mathbb{A}$ всех алгебраических чисел счетно.

Доказательство. Напомним, что алгебраические числа — это всевозможные действительные корни всех многочленов с целыми коэффициентами. Разберемся сначала с самими многочленами.

1) Многочлены первой степени — это просто линейные функции $y = ax + b$ с целыми a, b и при этом с ненулевым коэффициентом a. Если такому многочлену поставить в соответствие пару (a, b), то, тем самым, получится биекция из множества всех многочленов первой степени с целыми коэффициентами на декартово произведение $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$. Первый его сомножитель есть счетное множество, как бесконечное подмножество счетного множества $\mathbb{Z}$. Декартово произведение двух счетных множеств равномощно декартову произведению $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ поэтому само счетно. В итоге — множество всех таких многочленов счетно.

2) Многочлены второй степени — это квадратичные функции $y = ax^2 + bx + c$ с целыми a, b, c и при этом с ненулевым коэффициентом a. Если такому многочлену поставить в соответствие тройку (a, b, c), то получится биекция из множества всех многочленов второй степени с целыми коэффициентами на декартово произведение $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Декартово произведение трех счетных множеств равномощно декартову произведению $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ потому само счетно: достаточно дважды использовать теорему 2.3. В итоге — множество всех таких многочленов счетно.

...

Продолжая, мы получим на n-м шаге, что множество всех многочленов n-й степени с целыми коэффициентами счетно. Объединяя все эти множества многочленов и используя теорему о мощности объединения счетных множеств (пример 4), получаем, что множество вообще всех многочленов с целыми коэффициентами счетно.

Перейдем теперь к корням таких многочленов. По основной теореме алгебры у каждого многочлена n-й степени имеется всего n комплексных корней. Значит действительных корней у такого многочлена не более n штук. Это хорошая оценка, но нам формально хватит только того, что у всякого многочлена имеется не более чем счетное множество корней.

Для того, чтобы получить все множество $\mathbb{A}$ алгебраических чисел нужно объединить множества корней всех многочленов с целыми коэффициентами. Значит множество есть объединение счетного числа (сколько многочленов) не более чем счетных множеств (корней многочленов). По предыдущей теореме получаем, что $\mathbb{A}$ не более чем счетно. Так как $\mathbb{A}$ очевидно есть бесконечное множество (все рациональные числа являются алгебраическими), то по критерию счетности (пример 1) получаем, что $|\mathbb{A}| = \aleph_0$. $\square$

Пример 7 (Трансцендентные числа). Существуют трансцендентные (= не алгебраические) действительные числа. Более того, множество всех трансцендентных чисел несчетно.

Доказательство. Допустим, от противного, что трансцендентных чисел нет вовсе. Тогда все действительные числа — алгебраические, а все числа из отрезка $[0,1]$ образуют бесконечное подмножество счетного (по предыдущей теореме) множества $\mathbb{A}$. Но тогда по критерию счетности получаем, что $|[0,1]| = \aleph_0$. Противоречие с несчетностью отрезка $[0,1]$. Значит множество $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ трансцендентных чисел непусто.

Допустим, что $|\mathbb{T}| \leq \aleph_0$. Положим $X_1 = \mathbb{T}, X_2 = \mathbb{A}, X_3 = X_4 = \ldots = \emptyset$ и используем теорему о мощности объединения не более чем счетных множеств (пример 5). Тогда $|\mathbb{R}| = |\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n| \leq \aleph_0$, что опять же противоречит несчетности отрезка $[0,1]$. $\square$

Последний факт весьма удивителен. Мало того, что мы доказали, что «плохих» (= трансцендентных) чисел на порядок больше чем «хороших» (= алгебраических) чисел. Так мы это, к тому же, доказали, так и **не предьявив никакого конкретного трансцендентного числа !**

Пример 8 (Теорема об удалении конечных подмножеств). Мощность бесконечного множества не меняется при удалении из него конечного подмножества.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай одноточечного удаляемого подмножества, а потом действовать по индукции. Итак, пусть множество X бесконечно, а x_0 — какой-то его элемент. Множество $Y = X \setminus \{x_0\}$ бесконечно и по теореме 2.4 содержит некоторое счетное подмножество $C = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subset Y$. Определим теперь отображение $f\colon Y \to X$ следующим образом. Точку x_1 переведем в x_0, точку x_2 переведем в x_1, x_3 в x_2 и, вообще, положим $f(x_n) = x_{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Для точек x, не попавших в счетное подмножество C поступим самым простым образом, положив $f(x) = x$. Тогда f — искомая биекция Y на X. $\square$

Задача. Доказать, что мощность бесконечного множества не меняется при добавлении к нему конечного множества.

Пример 9 (Теорема об удалении счетных подмножеств). Мощность несчетного множества не меняется при удалении из него счетного подмножества.

Доказательство. Пусть множество X несчетно, а $A \subset X$ его счетное подмножество с некоторым фиксированным пересчетом элементов $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. От противного легко показать, что тогда разность $Y = X \setminus A$ есть бесконечное множество. По теореме 2.4 эта разность содержит некоторое счетное подмножество $C = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\} \subset Y$. Определим теперь отображение $f\colon Y \to X$ следующим образом. Точками из C с нечетными номерами «займем» все множество $A \subset X$, а точками из C с четными номерами «займем» все множество $C \subset X$. Более явно, положим

$$f(y_{2n-1}) = x_n, \quad f(y_{2n}) = y_n; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для точек x, не попавших в счетное подмножество C поступим как выше: $f(x) = x$. Тогда f — искомая биекция Y на X. $\square$

Третья лекция

Множества мощности континуум. Связь со счетными множествами

Мы знаем, что бывают несчетные множества: отрезки, числовая прямая, множество трансцендентных чисел, булеан любого счетного множества, ... Оказывается, что все эти множества, встречавшиеся нам ранее, равномощны между, т. е.их мощности равны между собой. Для обозначения мощности этих множеств вводится специальный термин, являющийся транскрипцией латинского слова «continuum», которое переводится как «протяженность», «неразрывность», и т.п.

Определение 3.1. Множество X имеет мощность **континуум** (= является **континуальным** множеством), если оно равномощно отрезку $[0,1]$. Обозначение: $|X| = \rfloor$.

Примерами континуальных множеств являются наиболее употребительные в математическом анализе множества — промежутки числовой прямой.

Теорема 3.2. Любой невырожденный числовой промежуток континуален.

Доказательство. Отношение равномощности множеств «$\sim$» является отношением эквивалентности (см.первая лекция). Поэтому теорема следует из следующих утверждений (всюду ниже, $a < b$ — любые числа):

а) $[0,1] \sim [0,1)$, $[0,1] \sim (0,1]$;
б) $[0,1) \sim (0,1)$;
в) $[a,b] \sim [0,1]$, $[a,b) \sim [0,1)$, $(a,b] \sim (0,1]$, $(a,b) \sim (0,1)$;
г) $[a,+\infty) \sim [0,1)$, $(a,+\infty) \sim [a,+\infty)$;
д) $(-\infty,b] \sim (0,1]$, $(-\infty,b) \sim (-\infty,b]$;

е) $\mathbb{R} \sim (0,1)$.

Всякий полуинтервал получается из соответствующего отрезка удалением одной точки. Значит (а) верно по теореме об удалении конечных множеств (лекция 2, пример 7). Аналогично доказывается (б). Утверждение (в) для отрезков уже доказано (лекция 1, пример 4), а в остальных случаях следует использовать ту же (линейную) биекцию, что и для отрезков. В (г) и (д) эквивалентности $(a,+\infty) \sim [a,+\infty)$; и $(-\infty,b) \sim (-\infty,b]$ доказываются, как в (а).

Докажем равномощность $[a,+\infty) \sim [0,1)$. Для этого рассмотрим любую непрерывную, строго возрастающую функцию $f\colon [0,1) \to [a,+\infty)$ такую, что $f(0)=a$ и $\lim_{x\to 1-0} f(x) = +\infty$. Например, можно взять часть гиперболы

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + a;\ x \in [0,1).$$

Иньективность f следует из ее монотонности. Докажем сюръективность f. Фиксируем число $c \in [a,+\infty)$ и выберем $d \in [0,1)$ так, чтобы $f(d) > c$, что возможно в силу условия $\lim_{x\to 1-0} f(x) = +\infty$. К непрерывной функции f на отрезке $[0,d]$ применим теорему о промежуточных значениях. Получим точку $x \in [0,d]$ такую, что $f(x)=c$. Значит f — биекция.

Доказательство равномощности $(-\infty,b] \sim (0,1]$ аналогично, а для доказательства (е) следует рассмотреть любую непрерывную строго возрастающую функцию $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ такую, что и $\lim_{x\to 0+0} f(x) = -\infty$ и и $\lim_{x\to 1-0} f(x) = +\infty$. Например, можно рассмотреть линейное преобразование тангенса

$$f(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}));\ x \in (0,1). \qquad \square$$

Следствие 3.2. Конечное объединение попарно непересекающихся невырожденных числовых промежутков континуально.

Доказательство. Упорядочим имеющееся конечное число ограниченных промежутков в естественном порядке на прямой. Заменим каждый из промежутков на полуинтервал с теми же концами, смотрящий вправо: от такой замены мощность не изменится. Теперь «сдвинем» все промежутки так, чтобы соседние концы соседних полуинтервалов совпали. Получим один полуинтервал — континуальное множество.

Если же первоначально имелся один (или два) неограниченных промежутка, то аналогичным приемом можно получить луч (или прямую), т.е опять же континуальное множество. □

Если в теореме 3.1 континуальность можно доказать, предъявив явно искомую биекцию или композицию биекций, то в следующей теореме континуальность доказывается уже не конструктивным образом.

Теорема 3.3. Следующие числовые множества континуальны: множество $\mathbb{I}$ иррациональных чисел, множество $\mathbb{T}$ трансцендетных чисел, множество нецелых чисел. Континуальны и пересечения этих множеств с любым невырожденным промежутком.

Доказательство. По теореме 3.1 множество $\mathbb{R}$, как и всякий невырожденный промежуток, континуально. Так как множества рациональных ($\mathbb{Q}$), алгебраических $\mathbb{A}$, целых $\mathbb{Z}$ чисел счетны (см.лекцию 2), то каждое из перечисленных в условии теоремы множеств получается удалением из континуального множества некоторого счетного (или конечного) подмножества. Применение теоремы об удалении счетных подмножеств (лекция 2, пример 9) завершает доказательство. □

Подведем предварительный итог. Бесконечные множества «начинаются» со счетных множеств, а континуальные множества «следуют» за счетными:

$$\aleph_0 \ < \ \rfloor.$$

Кроме того, нам известно еще одно несчетное множество. Это булеан натуральных чисел, т. е. множество всех подмножеств множества натуральных чисел:

$$|\mathbb{N}| \ = \ \aleph_0 \ < \ 2^{\aleph_0} \ = \ |2^{\mathbb{N}}|.$$

Естественно спросить, какая связь существует между мощностями $2^{\aleph_0}$ и $\rfloor$? Ответ обескураживающе прост: **эти мощности равны между собой**:

$$\rfloor \ = \ 2^{\aleph_0} \ \text{!!!}$$

Этот факт также открыл и доказал Георг Кантор и написанное только что равенство есть второй математический факт, выбитый на барельефе его обелиска. Точная формулировка теоремы такова.

Теорема 3.4. Множество всех подмножеств счетного множества континуально.

Доказательство. Достаточно доказать равномощность отрезка $[0,1]$ и булеана $2^{\mathbb{N}}$. Для этого нам потребуется вспомогательное множество $\mathbb{D}$, элементами которого являются произвольные бесконечные последовательности из двух символов 0 и 1.

$$\mathbb{D} = \{a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) |\ \forall n \in \mathbb{N} a_n \in \{0,1\}\}.$$

Будем называть такие последовательности диадическими (= двоичными). Теорема будет доказана, если удастся доказать две эквивалентности: $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{D}$ и $\mathbb{D} \sim [0,1]$. Первая из них достаточно проста и использует некоторое естественное отображение $k\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{D}$, которое мы назовем **двоичной кодировкой подмножеств** натуральных чисел.

Лемма 1. $2^{\mathbb{N}} \ \sim \ \mathbb{D}$

Доказательство леммы 1. Пусть $X \in 2^{\mathbb{N}}$, т. е. $X \subset \mathbb{N}$. Определим двоичную последовательность $k(X) = \{k_1, k_2, k_3, \ldots\} \in \mathbb{D}$ следующим образом: если номер $n \in \mathbb{N}$ принадлежит данному множеству X, то $k_n = 1$, а в противном случае — $k_n = 0$. Тем самым определено некоторое отображение — двоичная кодировка элементов булеана $2^{\mathbb{N}}$:

$$k\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{D}.$$

Докажем, что k есть биекция. Пусть подмножества $X \subset \mathbb{N}$ и $Y \subset \mathbb{N}$ различны между собой. Это в точности означает, что имеется хотя бы один номер $n \in \mathbb{N}$, который лежит в одном из множеств X и Y и не лежит в другом из них. Но тогда коды $k(X)$ и $k(Y)$ этих множеств будут различаться именно на месте с номером n: в одном коде на n-м месте будет стоять единица, в то время как в другом коде на n-м месте будет стоять нуль. Значит $k(X) \neq k(Y)$, т. е. отображение k есть инъекция.

Пусть теперь дана произвольная двоичная последовательность $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{D}$. Определим подмножество $X \subset \mathbb{N}$ следующим образом:

$$(n \in X) \Longleftrightarrow (a_n = 1).$$

Тогда по определению кодировки $k\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{D}$ получаем, что $k(X) = a$. Значит k — сюръекция. Лемма 1 доказана. □

Задача. Выпишите до двадцатого места двоичные коды следующих множеств: четные числа; цифры; полные квадраты; составные числа; числа дающие три в остатке при делении на пять.

Двоично кодировать можно не только подмножества множества $\mathbb{N}$, но и числа на отрезке $[0,1]$: для этого достаточно рассмотреть представления (разложения) чисел в виде бесконечных дробей в двоичной системе счисления. Однако такая кодировка неоднозначна. Например,

$$0{,}011111\ldots = \frac{1}{2} = 0{,}100000\ldots$$

Во избежание такой неоднозначности, используем обратное отображение $d\colon \mathbb{D} \to [0,1]$, которое назовем **двоичной декодировкой**:

$$(a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in \mathbb{D}) \implies \left(\ d(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}\ \right).$$

Сходимость последнего числового ряда обеспечивается неотрицательностью его членов и ограниченностью сверху множества его частичных сумм числом 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \ \le \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ = \ 1.$$

Задача. Указать первые десять членов двоичной декодировки следующих действительных чисел: $\frac{1}{4}, \frac{7}{16}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Теперь мы сформулируем три леммы относительно свойств двоичной декодировки, из которых выведем эквивалентность $\mathbb{D} \sim [0,1]$, т. е. докажем теорему, а сами леммы докажем после этого, в конце.

Лемма 2. Двоичная декодировка $d\colon \mathbb{D} \to [0,1]$ является сюръекцией.

Двоичные последовательности $a = \{a_n\} \in \mathbb{D}$ и $b = \{b_n\} \in \mathbb{D}$ назовем для краткости «дублями», если для некоторого $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_1 &= b_1,\\
a_2 &= b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_k &= b_k,\\
a_{k+1} &= 0, \quad b_{k+1} = 1,\\
a_{k+2} &= a_{k+3} = \ldots = 1, \quad b_{k+2} = b_{k+3} = \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Лемма 3. Двоичная декодировка $d\colon \mathbb{D} \to [0,1]$ не является инъекцией. Более точно, $d(a) = d(b)$ тогда и только тогда, когда a и b являются «дублями».

Качественно, лемма 3 утверждает, что двоичная декодировка d не слишком сильно является не инъективной: прообраз $d^{-1}(x)$ любого числа $x \in [0,1]$ состоит или из одной или из двух двоичных последовательностей. Следующая лемма оценивает количество тех точек, в которых нарушается иньективность отображения d.

Лемма 4. Множество $\mathbb{D}_{\nvDash}$ всех «дублей» счетно.

Докажем теперь эквивалентность $\mathbb{D} \sim [0,1]$. Для этого удалим из множества $\mathbb{D}$ всех двоичных последовательностей подмножество $\mathbb{D}_{\nvDash}$ всех «дублей», а из отрезка $[0,1]$ удалим подмножество $d(\mathbb{D}_{\nvDash})$ всех двоичных декодировок всех «дублей». На самом деле, $d(\mathbb{D}_{\nvDash})$ — это просто все рациональные числа, представимые в виде обыкновенных дробей со степенью двойки в качестве знаменателя, т. е. двоично-рациональные числа.

И при одном и при другом удалении из несчетного множества удаляется счетное подмножество (использована лемма 4 и пример 2 из лекции 2) и значит

$$\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{\nvDash} \sim \mathbb{D}, \quad [0,1] \setminus d(\mathbb{D}_{\nvDash}) \sim [0,1].$$

С другой стороны, по леммам 2 и 3 ограничение двоичной декодировки d на множество $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{\nvDash}$ является биекцией на свой образ, т. е.

$$\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{\nvDash} \sim d(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{\nvDash}) = [0,1] \setminus d(\mathbb{D}_{\nvDash}).$$

В итоге,

$$\mathbb{D} \sim \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{\nvDash} \sim [0,1] \setminus d(\mathbb{D}_{\nvDash}) \sim [0,1].$$

Теорема 3.4. доказана. □

Задача. Доказать континуальность множества всех бесконечных подмножеств множества натуральных чисел.

Доказательство леммы 2. Доказательство состоит в конструкции разложения числа в двоичную дробь. Зафиксируем $x \in [0,1]$ и построим двоичную последовательность $a = \{a_n\}$ по следующему правилу.

Разделим отрезок $I_0 = [0,1]$ пополам. Если $x \in [0,1/2]$, то обозначим $I_1 = [0,1/2]$ и положим $a_1 = 0$. Если же $x \in (1/2,1]$, то обозначим $I_1 = [1/2,1]$ и положим $a_1 = 1$.

Разделим отрезок I_1 пополам. Если x лежит в левом отрезке деления, то обозначим I_2 именно этот подотрезок и положим $a_2 = 0$. В противном случае обозначим I_2 правый подотрезок деления и положим $a_2 = 1 \ldots$

Продолжив построения, получим некоторую последовательность $\{I_n\}$ вложенных отрезков, стягивающихся к точке x, и получим некоторую двоичную последовательность

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \mathbb{D}.$$

Ее двоичная декодировка $d(a)$ равна сумме числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, т. е. равна пределу последовательности частичных сумм этого ряда. Но n-я частичная этого ряда в точности равняется левому концу n-го отрезка I_n из построенной последовательности стягивающихся отрезков. Это равенство нетрудно проверить шаг за шагом описанного выше построения. Так как левые концы отрезков «стягиваются», как и все отрезки, к точке x, то получаем, что предел последовательности частичных сумм этого ряда равняется именно x. Значит $d(a) = x$ и, тем самым, доказана сюръективность отображения d. Лемма 2 доказана. □

Доказательство леммы 3. Для «дублей» $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\}$ совпадение чисел $d(a)$ и $d(b)$ проверяется непосредственным суммированием геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$:

$$d(b) - d(a) = \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n - a_n}{2^n} + \frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{2^{k+1}} +$$

$$+ \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{2^n} = 0 + \frac{1}{2^{k+1}} - \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть известно, что $d(a) = d(b)$ для некоторых различных a и b. Требуется доказать, что a и b — «дубли». Двоичные последовательности $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\}$ могут совпадать на некоторых первых местах, но, рано или поздно, эти последовательности начнут различаться. Пусть $k+1$ есть минимальный среди всех тех номеров $m \in \mathbb{N}$, для которых $a_m \neq b_m$. Тогда в одной последовательности на $(k+1)$-м месте стоит ноль, а в другой — единица. Не теряя общности можно считать, что $a_{k+1} = 0$ и $b_{k+1} = 1$. Остается проверить, что далее (за $(k+1)$-м местом) у a стоит хвост из единиц, а у b стоит хвост из нулей. По определению имеем

$$0 = d(b) - d(a) = \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n - a_n}{2^n} + \frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{2^{k+1}} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{2^n}.$$

Первое слагаемое в последней сумме равно нулю, так как последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ совпали на первых k местах. Числитель второго слагаемого равен 1. Перенося третье слагаемое в левую часть равенства и умножая на знаменатель 2^{k+1}, получаем

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{2^{n-(k+1)}} = \frac{a_{k+2} - b_{k+2}}{2} + \frac{a_{k+3} - b_{k+3}}{4} + \ldots = 1$$

или

$$\frac{a_{k+2} - b_{k+2}}{2} + \frac{a_{k+3} - b_{k+3}}{4} + \frac{a_{k+4} - b_{k+4}}{8} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Числители всех слагаемых в левой части последнего равенства могут принимать значения 0, -1 или 1 и поэтому это равенство возможно только если

$$a_{k+2} - b_{k+2} = a_{k+3} - b_{k+3} = a_{k+4} - b_{k+4} = \ldots = 1$$

или

$$b_{k+2} = b_{k+3} = b_{k+4} = \ldots = 0; \quad a_{k+2} = a_{k+3} = a_{k+4} = \ldots = 1.$$

Лемма 3 доказана. □

Доказательство леммы 4. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и посчитаем количество «дублей» порядка k, т. е. количество всех двоичных последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таких, что

$$\begin{aligned}
&a_1 = b_1,\\
&a_2 = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_k = b_k,\\
&a_{k+1} = 0, \quad b_{k+1} = 1,\\
&a_{k+2} = a_{k+3} = \ldots = 1, \quad b_{k+2} = b_{k+3} = \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Каждый такой «дубль» однозначно задается своими значениями на первых k местах: ведь далее все уже совершенно однозначно определено. На каждом из мест с номером от 1 до k может стоять 0 или 1. Значит всего количество вариантов равно 2^k, а двоичных последовательностей, попадающих в «дубли» k-го порядка всего имеется 2^{k+1} штук, т. е. множество таких последовательностей конечно.

Объединение счетного числа конечных множеств не более чем счетно (пример 5, лекция 2), а если эти множества попарно не пересекаются, то такое объединение, очевидно, бесконечно и поэтому счетно. Лемма 4 доказана. $\square$

Четвертая лекция

Теорема Кантора—Бернштейна — основная теорема теории мощностей множеств

Речь пойдет о следующем факте.

$$(|X| \le |Y|) \;\&\; (\;|Y| \le |X|\;) \implies (|X| = |Y|).$$

На лингвистическом уровне такое утверждение выглядит тавтологией. Напомним однако, что посылка этого утверждения состоит в наличии двух инъекций $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, а в требуется найти **биекцию** h между X и Y. Грубо говоря, из двух не очень хороших отображений f и g следует сконструировать совсем хорошее отображение h — взаимно-однозначное соответствие. При этом никакой конкретной информации ни о множествах, ни об инъекциях и не имеется, т. е. первоначальные данные задачи крайне ограничены.

Так как всякая инъекция устанавливает взаимно-однозначное соответствие между своей областью определения и областью значений, то словесная формулировка вышеприведенного факта выглядит так.

Теорема 4.1 (Кантора—Бернштейна). Если два множества равномощны подмножествам друг друга, то эти множества равномощны между собой.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда данные множества X и Y не пересекаются. Фиксируем некоторые инъекции $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$. Единственная операция, естественно возникающая при таких начальных данных, состоит в рассмотрении композиции чередующихся между собой отображений f и g:

$$f\circ g\colon Y\to Y,\quad g\circ f\colon X\to X,$$
$$g\circ f\circ g\colon Y\to X,\quad f\circ g\circ f\colon X\to Y,$$
$$f\circ g\circ f\circ g\colon Y\to Y,\quad g\circ f\circ g\circ f\colon X\to X\dots$$

Пусть a и b два произвольных элемента из объединения $Z = X\cup Y$. Назовем b «учеником» a, если элемент b получается из элемента a применением композиции некоторого числа инъекций f и g. Симметричным образом, назовем в этой ситуации a «учителем» b.

Определим X_k (соответственно Y_k) как подмножество всех тех элементов множества X (множества Y), которые имеют ровно k «учителей»; $k = 0,1,2,3,\dots,\infty$. Подчеркнем, что возможны ситуации, когда какой-то элемент вообще не имеет «учителей» (т. е. $k = 0$) или же когда у него имеется бесконечное число «учителей» (т. е. $k = \infty$) Обозначим также X^+ и X^- (соответственно Y^+ и Y^-) объединение $X_0\cup X_2\cup X_4\cup\dots$ и $X_1\cup X_3\cup X_5\cup\dots$ (соответственно объединение $Y_0\cup Y_2\cup Y_4\cup\dots$ и $Y_1\cup Y_3\cup Y_5\cup\dots$). Тогда нетрудно проверить (сделайте это самостоятельно!), что:

1) инъекция f переводит множество X^+ на множество Y^- (более конкретно, $f(X_0) =$
$= Y_1, f(X_2) = Y_3,\dots)$);

2) инъекция f переводит множество X_∞ на множество Y_∞;

3) инъекция g переводит множество Y^+ на множество X^-.

Так как все множество X (соответственно, множество Y) есть объединение $X = X^+\cup X^-\cup X_\infty$ попарно непересекающихся множеств X^+, X^-, X_∞ (соответственно Y^+, Y^-, Y_∞), то искомую биекцию $h\colon X\to Y$ можно определить следующим образом:

$$h(x) = f(x),\quad x\in X^+\cup X_\infty;$$
$$h(x) = g^{-1}(x), x\in X^-.$$

Случай пересекающихся множеств X и Y сводится к разобранному случаю с помощью следующего формального приема. Пусть:

$$X' = X\times\{7\} = \{(x,7)|x\in X\}, Y' = Y\times\{9\} = \{(y,9)|y\in Y\}.$$

Тогда множества X' и Y' не пересекаются, так как различны вторые координаты и $X'\sim X$, $Y'\sim Y$. Тогда по разобранному выше случаю $X'\sim Y'$ и поэтому $X\sim Y$. □

Задача. Доказать пункты 1), 2), 3) из приведенного доказательства теоремы 4.1.

Теорема Кантора—Бернштейна (иногда, в той или иной комбинации, добавляют еще Шредера) имеет многочисленные приложения и в совершенно конкретных и в абстрактных ситуациях. Практически все оставшиеся результаты этой лекции и результаты следующей лекции основаны на применении этой теоремы. В приложениях часто бывает удобно пользоваться не самой теоремой 4.1, а следующими, эквивалентными ей, утверждениями.

Теорема 4.2 (Теорема о промежуточных мощностях) .

Следующие два утверждения эквивалентны между собой и эквивалентны теореме Кантора—Бернштейна.

(а) Если $|A| \leq |X| \leq |B|$ и $A \sim B$, то $X \sim A \sim B$.

(б) Если $A \subset X \subset B$ и $A \sim B$, то $X \sim A \sim B$.

Доказательство. Докажем сначала импликацию (а) $\Longrightarrow$ (б). В условиях (б) в качестве инъекции $f\colon X \to B$ следует рассмотреть тождественное отображение $f(x) = x$. Тогда $|X| \leq |B|$. С другой стороны, можно рассмотреть в качестве другой инъекции $g\colon A \to X$ опять же следует тождественное отображение $g(a) = a; a \in A$. Тогда $|A| \leq |X|$ и, применяя (a), получаем,что $X \sim A \sim B$.

Теперь из теоремы 4.1 Кантора—Бернштейна выведем (a). По условию (а) имеется инъекция $f\colon X \to B$ и значит множество X равномощно подмножеству $f(X)$ множества B. Опять же по условию (а), имеется биекция $h\colon B \to A$ и имеется инъекция $g\colon A \to X$. Тогда множество B равномощно своему иньективному образу $g(h(B))$, который лежит в множестве X. Значит множества X и B равномощны подмножествам друг друга и поэтому равномощны между собой.

Наконец, из (б) выведем теорему 4.1. Фиксируем две инъекции $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, существующие по условию теоремы 4.1. Пусть $B = Y$, $C = f(X) \subset B$, $A = f(g(Y)) \subset f(X) = A \subset B$. В итоге, $A \subset C \subset B$ и множества A и B равномощны между собой, так как одно из них есть образ другого при инъекции. Значит $A \sim B$ и по (б) получаем $C \sim A \sim B$. Но $C \sim X$ так как C есть иньективный образ $f(X)$ множества X. Поэтому $X \sim C \sim A \sim B$. □

Довольно часто в приложениях строго не уточняют каким именно из эквивалентных утверждений 4.1, 4.2.(а), 4.2.(б) пользуются и все эти утверждения (или каждое из них) называют теоремой Кантора—Бернштейна.

Примеры использования

Пример 1 (Декартово произведение континуальных множеств). Декартово произведение конечного числа континуальных множеств само континуально.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай двух континуальных множеств, а далее действовать по индукции. Кроме того, каждое из континуальных множеств можно заменить на равномощное ему; например — на отрезок или прямую и т.п. Мы используем замену на множество $\mathbb{D}$ всех **двоичных последовательностей**, континуальность которого доказана в предыдущей лекции.

Итак теорема сводится к доказательству равномощности декартова квадрата $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ множества $\mathbb{D}$ и самого множества $\mathbb{D}$. Неравенство $|X| \le |X \times X|$ очевидно верно *вообще для любого* множества X, так как в квадрате $X \times X$ всегда есть копия множества X. Более формально, можно, например, определить инъекцию $f\colon X \to X \times X$ равенством $f(x) = (x, x_0)$, где x_0 — произвольно зафиксированный элемент множества X.

По теореме Кантора—Бернштейна для доказательства равномощности $\mathbb{D}$ и $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ осталось построить инъекцию $g\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Для произвольной пары $(a, b) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ составим двоичную последовательность $c \in \mathbb{D}$, в которой все члены последовательностей $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\}$ чередуются через один, т. е.

$$g(a, b) = c = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots).$$

Если $g(a, b) = g(a', b')$, то двоичные последовательности $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3,$ и $(a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, a'_3, b'_3, \ldots)$ совпали и на четных и на нечетных местах. Но это значит, что $a = a'$ и $b = b'$ и следовательно построенное отображение $g\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ есть инъекция. □

Задача. Доказать, что если $X \sim X_1$ и $Y \sim Y_1$, то $X \times Y \sim X_1 \times Y_1$.

Разобранный пример допускает обобщение и на случай декартова произведения **счетного** числа континуальных множеств. Для определенности напомним, что декартово произведение $X_1 \times X_2 \times$

$\ldots \times X_n \times \ldots$ счетного числа множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ по определению состоит из множества всех бесконечных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, в которых $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots x_n \in X_n, \ldots$.

Пример 1'. Декартово произведение счетного числа континуальных множеств само континуально.

Доказательство. По аналогии с предыдущим примером нам достаточно доказать равномощность множества $\mathbb{D}$ всех двоичных последовательностей и декартова произведения $\mathbb{D}^\infty = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \ldots$ счетного числа копий этого множества. Единственное отличие от предыдущего примера состоит в изменении процедуры «перемешивания».

Пусть есть двоичные последовательности $a^1 = \{a_n^1\}$, $a^2 = \{a_n^2\}$, $a^3 = \{a_n^3\}, \ldots$ Для их перемешивания выпишем все координаты первой последовательности в первую строчку, координаты второй последовательности — во вторую строчку и т.д. бесконечной прямоугольной таблицы. После этого выпишем вообще все нули и единицы, стоящие в этой таблице, ровно в том порядке, как это было сделано при (первом) доказательстве счетности $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, лекция 2. Более формально,

$$g(a^1, a^2, a^3, \ldots) = (a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_1^3, a_2^2, a_3^1, \ldots).$$

Тогда отображение g иньективно. $\square$

Следующий пример является частным случаем примеров 1 и $1'$. Однако его результат, во-первых, выделяется неожиданностью ответа. Г. Кантор в письме Р. Дедекинду (1874 г.) писал ровно про этот результат следующее: «Я это вижу, но я этого не понимаю». Во-вторых, этот результат часто будет использоваться в дальнейшем как отдельное утверждение.

Пример 2 (Мощность векторных пространств). Числовая прямая $\mathbb{R}$, плоскость $\mathbb{R}^2$, пространство $\mathbb{R}^3$, n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ и пространство $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ всех числовых последовательностей равномощны между собой; все они континуальны.

Пример 3 (Континуальные подмножества прямой, плоскости, пространства). Пусть подмножество X прямой $\mathbb{R}$ (или плоскости, или пространства) содержит хотя бы один невырожденный промежуток. Тогда само множество X континуально.

Доказательство. Достаточно использовать теорему 4.2.(б) о промежуточных мощностях и континуальность прямой (плоскости, пространства) и невырожденного промежутка. $\square$

Пример 3′. Пусть подмножество X плоскости $\mathbb{R}^2$ (или пространства) содержит хотя бы одну кривую Γ, допускающую иньективное параметрическое задание $g\colon I \to \Gamma$; I — невырожденный числовой промежуток. Тогда само множество X континуально.

Доказательство. Так как имеется инъекция $g\colon I \to \Gamma \subset X$, то $\rfloor = |I| \leq |X|$. Так как $X \subset \mathbb{R}^2$, то $|X| \leq |\mathbb{R}^2| = \rfloor$. По теореме 4.2.(a) о промежуточных мощностях получаем континуальность X. □

Примеры 3 и 3’ показывают, континуальность любого подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, содержащего хоть одну, сколь угодно малую «протяженность».

Задача. Доказать, что объединение счетного и континуального множеств континуально.

Пример 4 (Объединение континуальных множеств). Объединение конечного числа континуальных множеств континуально. Объединение счетного числа континуальных множеств континуально. Объединение континуального числа континуальных множеств континуально.

Доказательство. Каждое из трех объединений содержит континуальное подмножество и значит само не менее, чем континуально. Так как первые два объединения содержатся в третьем, то достаточно оценит сверху мощность объединения $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ континуального числа $A, |A| = \rfloor$ континуальных множеств $X_\alpha, |X_\alpha| = \rfloor$. Фиксируем биекции $f_\alpha\colon X_\alpha \to [0,1]$ и $f\colon A \to [0,1]$ и используя их построим инъекцию $g\colon X \to [0,1] \times [0,1]$. Тогда $|X| \leq |[0,1] \times [0,1]| = \rfloor$ и по теореме Кантора—Бернштейна получим $|X| = \rfloor$.

Для каждого $x \in X$ произвольно фиксируем (по аксиоме выбора) какой-нибудь один индекс $\alpha \in A$ для которого $x \in X_\alpha$. Обозначим этот индекс $\alpha(x)$ и определим отображение $g\colon X \to [0,1] \times [0,1]$ равенством

$$g(x) = (f(\alpha(x)), f_{\alpha(x)}(x)) \in [0,1] \times [0,1].$$

Если $x \neq x'$ и $\alpha(x) \neq \alpha(x')$, то у $g(x)$ и $g(x')$ различны первые координаты в силу иньективности отображения f. Если же $\alpha(x) = \alpha(x') = \alpha \in A$, то $x \in X_\alpha$ и $x' \in X_\alpha$ и тогда у $g(x)$ и $g(x')$ различны вторые координаты в силу иньективности отображения f_α. Значит g — инъекция. □

Пример 5 (Повороты плоскости). Множество всех поворотов плоскости континуально.

Доказательство. Обозначим R — множество всех поворотов плоскости $\mathbb{R}^2$. Удалим из R поворот r_0 на нулевой угол, т. е. тождественное преобразование плоскости. Мощность от этого не изменится. Тогда каждый оставшийся поворот r однозначно задается своим центром $c_r = (x(r), y(r))$ и величиной $\alpha(r) \in (0, 2\pi)$ угла поворота r, измеренной в радианах. Тогда равенство

$$f(r) = (x(r), y(r), \alpha(r)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$$

очевидно определяет инъекцию f множества $R_0 = R \setminus \{r_0\}$ в континуальное множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ Значит $|R_0| \leq \rfloor$. Оценка снизу совсем проста. Зафиксируем центр поворота, например, в точке $(11, 13)$ и пусть R_1 — все повороты вокруг этого центра на все углы $\alpha \in (0, 2\pi)$. Таких поворотов столько же, сколько и углов, а их — континуум. Значит $\rfloor = |R_1| \leq |R_0|$. По теореме Кантора—Бернштейна $|R_0| = \rfloor$. Значит и $|R| = |R_0| = \rfloor$. □

Задача. Доказать континуальность множества всех гомотетий плоскости.

Пример 6 (Треугольники на плоскости). Множество всех треугольников на плоскости континуально.

Доказательство. Обозначим T множество всех треугольников на плоскости. Оценим мощность множества T снизу. Для этого зафиксируем какой-нибудь треугольник и будем переносить его параллельно оси абсцисс. Пусть T_0 — множество треугольников, полученных такими переносами. Во множестве T_0 столько элементов, сколько было всего параллельных переносов. А их было столько, сколько есть точек на оси абсцисс, т. е. — континуум. Значит $\rfloor = |T_0| \leq |T|$.

Для оценки мощности множества T сверху для каждого треугольника $t \in T$ произвольно выберем и зафиксируем какой-нибудь порядок пересчета его вершин (всего таких пересчетов — шесть). Теперь определим отображение $f\colon T \to \mathbb{R}^6$ равенством

$$f(t) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3),$$

где (x_1, y_1) — первая вершина треугольника t, (x_2, y_2) — вторая вершина и (x_3, y_3) — третья вершина треугольника t. Отображение иньективно: если $f(t) = f(t')$, то совпали соответствующие координаты первых, вторых и третьих вершин треугольников t и t', т. е. совпали и сами треугольники t и t'. Значит $|T| \leq |\mathbb{R}^6| = \rfloor$ и по теореме Кантора—Бернштейна получаем континуальность множества T. □

В задачах типа примера 6 типично следующее недопонимание условия и, соответственно, следующее неверное решение. «Всякий треугольник содержит какой-нибудь отрезок и сам лежит на плоскости. Отрезок и плоскость континуальны. По теореме Кантора—Бернштейна и сам треугольник континуален. Все». В этом рассуждении **нет ошибок** — это в точности частный случай примера 3 этой лекции. Неприятность состоит в том, что это рассуждение **не имеет отношения к поставленной задаче**: в ней не идет речь о мощности отдельного треугольника, как подмножества плоскости, а оценивается количество (мощность) множества самих треугольников. Еще раз, элементом множества T является весь треугольник целиком, а не точки, составляющие этот треугольник. Рассмотрим еще одну задачу «про треугольники».

Пример 7 (Непересекающиеся треугольники). Пусть T есть бесконечное множество, элементами которого являются попарно непересекающиеся треугольники на плоскости. Доказать, что T счетно.

Доказательство. Так как T бесконечно, то $\aleph_0 \leq |T|$. Осталось доказать, что $|T| \leq \aleph_0$ и после этого использовать теорему Кантора—Бернштейна.

В каждом треугольнике $t \in T$ выберем и зафиксируем внутреннюю точку A_t. А у этой внутренней точки A_t выберем и зафиксируем некоторый квадратик S_t с центром в этой точке, целиком лежащий внутри треугольника t и со сторонами, параллельными осям координат. Спроектируем стороны квадратика S_t на оси координат и внутри полученных отрезков выберем и зафиксируем по одной рациональной точке. Тогда для каждого треугольника $t \in T$ внутри него однозначно выбрана некоторая точка, обе координаты которой рациональны. Обозначим эту точку $f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Тем самым определено некоторое отображение $f\colon T \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Оно иньективно именно потому, что различные треугольники $t \in T, t' \in T$ между собой не пересекаются. Значит $|T| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$. □

Заметим, что пример 7 можно было бы решить и без явного использования теоремы Кантора—Бернштейна, так как версия этой теоремы для счетных множеств уже была доказана в лекции 2. Ясно, также что аналогичные примерам 6 и 7 факты верны и для многоугольников, кругов, эллипсов и т.п.

Последний пример в этой лекции — теоретического плана.

Пример 8 (Тразитивность отношения «меньше» для мощностей).

$$(|X| < |Y|)\&(|Y| < |Z|) \implies (|X| < |Z|).$$

Доказательство. Так как «меньше», в частности, означает «меньше или равно» и так как последнее отношение транзитивно, то $|X| \leq |Z|$. Докажем, что $|X| \neq |Z|$.

Допустим от противного, что $|X| = |Z|$. Тогда по теореме о промежуточных мощностях получаем $|Y| = |X| = |Z|$, что противоречит условию. □

Задача. Доказать, что $(|X| < |Y|)\&(|Y| \leq |Z|) \Longrightarrow (|X| < |Z|)$.

Пятая лекция

Мощность пространств функций. Гиперконтинуальные множества. Континуум — гипотеза

В этой лекции мы по существу продолжим примеры использования теоремы Кантора—Бернштейна. Однако, в первую очередь, применим ее не к «точечным» множествам, но к множествам, элементами которых являются некоторые функции.

Теорема 5.1 (Непрерывные функции на отрезке).

Множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ континуально.

Доказательство. Обозначим $X = C[a, b]$ — множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Требуется доказать, что $|X| = \rfloor$.

Докажем неравенство $|X| \geq \rfloor$. Для этого рассмотрим в X подмножество Z, состоящее из всех константных функций:

$$Z = \{f \in X | f(\cdot) \equiv const\}.$$

Ясно, что таких функций f — столько же, сколько и констант. А констант именно столько, сколько имеется действительных чисел. Значит $|Z| = |\mathbb{R}| = \rfloor$ и поэтому $|X| \geq |Z| = \rfloor$.

Докажем неравенство $|X| \leq \rfloor$. Для этого достаточно построить некоторую инъекцию $F\colon X \to Y$ в некоторое континуальное множество Y. В качестве такого континуального множества рассмотрим декартово произведение $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ счетного числа сомножителей, каждый из которых совпадает с числовой прямой $\mathbb{R}$.

В предыдущей лекции доказано (пример $1'$), что такое произведение Y континуально. Фиксируем некоторый пересчет $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ всех рациональных чисел отрезка $[a, b]$ (без повторений) и каждой непрерывной функции $f \in X = C[a, b]$ поставим в соответствие последовательность ее значений в этих рациональных точках:

$$F(f) = \{f(r_1), f(r_2), f(r_3), \ldots\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots = Y.$$

Получим некоторое отображение $F\colon X \to Y$. Проверим его иньективность. Допустим, что $F(f) = F(g)$ или, другими словами, что значения непрерывных функций f и g совпали во всех рациональных точках, т. е. $f(r_n) = g(r_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем тогда, что значения функций f и g совпадут тогда и в каждой иррациональной точке $x \in [a, b]$. В силу плотности множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ найдется некоторая последовательность $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ рациональных точек r_{n_k}, сходящаяся к x при $k \to \infty$. Тогда $f(x) = f(\lim_{k\to\infty} r_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(r_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} g(r_{n_k}) = g(\lim_{k\to\infty} r_{n_k}) = g(x)$, где знак предела последовательности и знаки функций f и g можно менять местами именно из-за непрерывности f и g. В итоге, $f(x) = g(x)$ для всех точек $x \in [a, b]$. Значит f и g есть один и тот же элемент множества X, т. е. отображение F иньективно.

По теореме Кантора—Бернштейна получаем $|X| = \rfloor$. $\square$

Итак, непрерывных функций на отрезке столько же, сколько и точек на самом отрезке. Ясно, впрочем, что отрезок в теореме 5.1 можно заменить и на любой невырожденный промежуток и на квадрат или круг на плоскости и т.п. В последнем случае вместо рациональных чисел на прямой достаточно рассмотреть точки, обе координаты которых рациональны. Следующая теорема устанавливает, что *всех функций* на отрезке по мощности все же *больше* чем точек на отрезке.

Теорема 5.2 (Все функции на отрезке). Множество всех функций на отрезке $[a, b]$ равномощно булеану $2^{[a,b]}$ отрезка $[a, b]$.

Доказательство. Обозначим $F = F[a, b]$ — множество всех функций на отрезке $[a, b]$. Требуется доказать, что $|F| = |2^{[a,b]}|$.

Докажем неравенство $|F| \geq |2^{[a,b]}|$. Для этого рассмотрим в F подмножество G, состоящее из всех функций, принимающих только два значения 0 или 1:

$$G = \{g \in F | \forall x \in [a, b] \quad (f(x) = 0) \vee (f(x) = 1)\}.$$

Если мы проверим равномощность G и $2^{[a,b]}$, то тогда $|F| \geq |G| = |2^{[a,b]}$. Построение биекции между $2^{[a,b]}$ и G по существу повторяет построение биекции между $2^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{D}$ (третья лекция, лемма 1). Каждому элементу булеана $2^{[a,b]}$, т.е. каждому подмножеству $A \subset [a,b]$ поставим в соответствие функцию $g_A \in G$, которая для всех точек $x \in A$ равна нулю, а для всех точек $x \in [a,b] \setminus A$ равна единице. Получим, тем самым, некоторое отображение $A \mapsto g_A, g\colon 2^{[a,b]} \to G$. Если множества $A \subset [a,b]$ и $B \subset [a,b]$ различны, то имеется точка x, лежащая в одном из этих множеств и не лежащая в другом из них. Но тогда одна из функций g_A и g_B в этой точке равна нулю, а другая равна единице. Значит $g_A \neq g_B$, т.е. g — инъекция. Проверим сюръективность g. Для каждой функции $h \in G$ обозначим A_h множество всех тех $x \in [a,b]$ в которых функция h равна нулю. По построению отображения g получаем, что $g_{A_h} = h$: если $h(x) = 0$,то $x \in A_h$ и $g_{A_h}(x) = 0$, а если $h(x) = 1$,то $x \notin A_h$ и $g_{A_h}(x) = 1$. Итак, отображение g есть биекция.

Докажем неравенство $|F| \leq |2^{[a,b]}|$. Для этого в плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим вертикальную полосу $V = [a,b] \times \mathbb{R}$. Эта полоса континуальна, т.е. равномощна отрезку $[a,b]$ и следовательно $|2^V| = |2^{[a,b]}|$. Остается построить некоторую инъекцию из F в 2^V и после этого воспользоваться теоремой Кантора—Бернштейна. Искомая инъекция состоит в отождествлении функции с ее графиком. Точнее, любой функции $f \in F$ поставим в соответствие ее график

$$\Gamma_f = \{(x,y) | x \in [a,b], y = f(x)\}.$$

Ясно, что у различных функций различны и их графики. Значит отображение $f \mapsto \Gamma_f$; $\Gamma\colon F \to 2^V$ иньективно и поэтому $|F| \leq |2^V| = |2^{[a,b]}|$. $\square$

Задача. Доказать, что из равномощности множеств A и B следует равномощность их булеанов 2^A и 2^B.

Достаточно удобна следующая терминология, корректность которой следует из предыдущей задачи.

Определение 5.3. Множество X называется **гиперконтинуальным**, если оно равномощно множеству всех подмножеств (= булеану) какого- нибудь континуального множества. Обозначение $|X| = 2^{\rfloor}$.

Следовательно теорему 5.2. можно переформулировать так.

Теорема 5.2'. Если множество X континуально, то множество всех числовых функций на X гиперконтинуально.

Про гиперконтинуальные множества можно доказать теоремы о мощности их объединений и декартовых произведений, аналогичные теоремам о счетных (вторая лекция) и континуальных (третья и четвертая лекции) множествах. Мы не будем этого подробно делать: гиперконтинуальные множества в реальной математической практике достаточно редки. Отметим только следующее утверждение.

Теорема 5.4. Удаление континуального подмножества из гиперконтинуального множества сохраняет гиперконтинуальность множества.

Доказательство. Пусть $|X| = 2^{\rfloor}$ и A — континуальное подмножество X. Требуется доказать, что $|X \setminus A| = 2^{\rfloor}$. Если бы $|X \setminus A| \leq \rfloor$, то разность $X \setminus A$ можно было бы иньективно отобразить в отрезок $[0,1]$, а само подмножество A — биективно отобразить на полуинтервал $(1,2]$. Но тогда все множество X иньективно отображается в $[0,2]$, т. е. $2^{\rfloor} = |X| \leq |[0,2]| = \rfloor$. Противоречие.

Значит $|X \setminus A| > \rfloor$ и в разности $X \setminus A$ имеется континуальное подмножество $B \subset X \setminus A$. Тогда объединение $A \cup B$ двух континуальных множеств A и B само континуально и следовательно имется биекция между $A \cup B$ и B. Оставив все точки из разности $X \setminus (A \cup B)$ на месте, получим биекцию между X и $X \setminus A$.

Заметим, что в этой теореме от мощности $2^{\rfloor}$ реально потребовалось лишь то, что $2^{\rfloor} > \rfloor$ (теорема 1.5). □

Как следствие получаем, что разрывных функций на отрезке *качественно больше* непрерывных.

Следствие. Множество разрывных функций на отрезке $[a;b]$ гиперконтинуально.

Задача. Доказать, что множество функций на отрезке $[a;b]$, имеющих единственную точку разрыва континуально.

В следующей теореме (без доказательства) собраны факты о мощности различных множеств функций.

Теорема 5.5 (Множества функций). (а) Множество всех отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ (т. е. множество всех последовательностей натуральных чисел) континуально;

(б) Множество всех возрастающих отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ (т. е. множество всех возрастающих последовательностей натуральных чисел) континуально;

(в) Множество всех отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$ (т. е. множество всех последовательностей действительных чисел) континуально;

(г) Множество всех отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (т.е. множество всех числовых всюду определенных функций) гиперконтинуально;

(д) Множество всех отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{N}$ (т.е. множество всех функций с натуральными значениями) гиперконтинуально;

(е) Множество всех монотонных отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (т.е. множество всех возрастающих или убывающих функций) континуально;

В этой теореме (а)—(д) получаются простыми комбинациями известных уже фактов и теоремы Кантора—Бернштейна, а вот пункт (е) — действительно нетривиален.

Задача. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.

Итак, мы в первых пяти лекциях встретились с тремя (и только с тремя) различными мощностями бесконечных множеств:

$$\aleph_0 < \rfloor < 2^{\rfloor}.$$

Может быть, мы что-то пропустили ? Может быть имеются множества, мощности которых лежат строго между этими тремя мощностями ??

Проблема 5.6 (Континуум-гипотеза). Не существует множества X такого, что $\aleph_0 < |X| < \rfloor$.

Проблема 5.7 (Отрицание континуум-гипотезы). Есть множества X такие, что $\aleph_0 < |X| < \rfloor$.

Вопрос о разрешимости проблемы континуум-гипотезы (или ее отрицания) возник у Г. Кантора практически в самом начале разработки основ теории мощностей бесконечных множеств. Примерно, начиная с 1873 по 1885 гг. эта теория, с фрагментами которой мы и познакомились в первых пяти лекциях, была в основном построена и принципиальные работы были опубликованы. Однако CH-проблема (= «Continuum Hypothesis Problem») оставалась нерешенной и осталась неразрешенной при жизни Кантора. Имеющаяся неопределенность в столь фундаментальном вопросе тяжело сказалась и на внутреннем самочувствии автора новой теории и на его взаимоотношениях с рядом коллег-математиков.

Дело дошло до того, что Кантор в течении следующих почти десяти лет отошел от реальной творческой работы в математике. Отвлекали и семейные дела: в 1886 году появился шестой ребенок. К этому периоду относятся ряд его статей по теософии, философии Лейбница и по чисто литературоведческой проблеме авторства части, так называемых «великосветских», пьес Шекспира. Дело в том, что реальных публикаций этих пьес, подписанных Шекспиром нет, и Кантор, как и многие другие исследователи, полагал, что простой директор театра не мог столь точно знать порядки, обычаи и нравы королевского двора. Кантор полагал, что автором этих пьес является Фрэнсис Бэкон.

Основная сложность в (не)разрешимости CH-проблемы, как представляется сейчас, состояла в отсутствии к тому времени явно и точно формулируемого понятия доказательства. Подробный рассказ об истории исследований по CH-проблеме привел бы к полной смене тематики настоящих лекций. Вкратце отметим, все же, что теория множеств была поставлена на аксиоматическую основу (подобно гильбертовской аксиоматике геометрии) примерно к 1920—30 гг. Аксиоматическая теория множеств (= теория Цермело—Френкеля или ZF-теория) позволила переформулировать CH-проблему, как доказуемость некоторого утверждения в рамках формально описанной (с помощью задания языка, аксиом, правил вывода и т.п.) математической теории. Тем не менее и такой перевод еще долгое время не поддавался никакому (ни положительному, ни отрицательному) решению. Только в 1963 г. американец Дж. П. Коэн (и чуть позже, но независимо, чех П. Вопенка) смогли предложить окончательное решение CH-проблемы. Зная этот ответ, становится совершенно ясно, почему Кантор не смог ответить на вопрос какая из проблем 5.6 или 5.7 имеет положительное решение. Итоговый ответ краток: **никакая!** Оказывается, что в рамках ZF-теории утверждение, задающее континуум гипотезу **не доказуемо**. И это было бы, как говорится, полбеды. Недоказуемым оказывается и отрицание континуум-гипотезы. Тем самым, сама континуум-гипотеза является **неразрешимым** (в рамках теории множеств) утверждением. Ситуация полностью аналогична положению пятого постулата Евклида в планиметрии.

В специальной научной литературе по теории множеств, теоретико-множественной топологии, математической логике к настоящему времени уже сложилось направление исследований, при формулировке результатов которых авторы явно указывают (CH) или $(\neg CH)$, подчеркивая, тем самым, что формулируемое ими утверждение верно в предположении о положительном решении проблемы 5.6 или же, соответственно, в предположении о положительном решении проблемы 5.7.

Мы закончим эту лекцию теоремой, естественное (но неверное) доказательство которой использует континуум-гипотезу, а верное доказательство основано на континуальности квадрата на плоскости.

Теорема 5.8. Если объединение двух множеств континуально, то хотя бы одно из этих множеств континуально.

Доказательство. Используем «олимпиадную» терминологию. Можно считать, что одно множество выкрашено в красный цвет, второе множество выкрашено в синий цвет, а их объединение есть квадрат.

Если в этом квадрате есть целиком «красная» вертикаль, то «красное» множество континуально по теореме о промежуточных мощностях: оно содержит отрезок и содержится в квадрате, а отрезок и квадрат континуальны.

Если же в этом квадрате нет ни одной целиком «красной» вертикали, то на каждой вертикали имеется хотя бы одна «синяя» точка. Но тогда «синих» точек никак не меньше, чем вертикалей, а вертикалей — континуум. Еще раз применяем теорему о промежуточных мощностях и получаем континуальность «синего» множества. $\square$

(*Неверный подход.* Если оба составляющих множества менее, чем континуальны, то они не более чем счетны: использована континуум-гипотеза. В таком случае и их объединение не более чем счетно. Противоречие.)

Часть вторая. Числовые множества

Шестая лекция

Свойства открытых множеств. Структура открытых числовых множеств

Так как проблема континуум-гипотезы в общем виде на протяжении ряда лет не поддавалась никакому решению, то естественно возникла такая идея. Попробовать тем или иным образом перечислить всевозможные типы числовых множеств, дать их описание (= «description») и решать эту проблему для каждого типа множеств в отдельности. Сразу же следует сказать (с нашей, исторически выигрышной, позиции), что этот подход не дал и не мог дать решения проблемы континнум-гипотезы. Однако были введены в рассмотрение и изучены основные классы числовых множеств, их свойства и их структура. Затем выяснилось, что определения этих множеств (открытых, замкнутых, компактых, F_σ- и G_δ-множеств, борелевских множеств, ...) имеют смысл и содержательны не только в случае прямой, но и в произвольных метрических пространствах. Такое описательное изучение различных множеств и называется **дескриптивной** теорией множеств.

Определение 6.1. Точка x называется **внутренней** точкой числового множества $X \subset \mathbb{R}$, если эта точка входит в X вместе с некоторой своей окрестностью ($= \exists \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$). Числовое множество называется **открытым**, если все его точки являются внутренними. Пустое множество по определению считается открытым.

В определении 6.1 практически никак не использована специфика именно числовой прямой: по существу важно только наличие окрестностей у точек. И в самом деле, определение 6.1 может быть дословно сформулировано для произвольного метрического пространства

(M, ρ). Напомним, что **метрическое пространство** — это множество M вместе с отображением $\rho\colon M \times M \to [0, +\infty)$, которое каждой паре (x, y) точек x и y из M ставит в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$ так, что для любых x, y, z из M:

(1) $(x \neq y) \implies (\rho(x, y) > 0)$;

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Отображение $\rho(\cdot, \cdot)$ со свойствами (1)—(3) называется **метрикой**, а число $\rho(x, y)$ называется **расстоянием** между x и y. Свойства (1)—(3) повторяют те свойства расстояния между точками плоскости, которые изучаются в средней школе: разница состоит просто в использовании греческой буквы ρ и рассмотрении некоторого абстрактного множества M. Соответственно, свойство (3) называют **неравенством треугольника**. Метрические пространства, обычно встречающиеся в стандартном курсе математического анализа, нетрудно перечислить. Это, как правило, пространства $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ вместе с евклидовой метрикой

$$\rho((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Эти метрические пространства одновременно являются векторными пространствами и они — **конечномерные** векторные пространства. Есть и два примера **бесконечномерных** векторных пространства, в которых имеются некоторые весьма естественные метрики. Первое из них получается заменой n на ∞ в предыдущем случае. А именно, гильбертово пространство H есть множество всех бесконечных числовых последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ вместе с метрикой

$$\rho((x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

Задача. Доказать неравенство треугольника для евклидовой метрики на плоскости, в пространстве $\mathbb{R}^n$ и в пространстве H.

Второе пространство уже встречалось нам в пятой лекции. Это пространство $C[a, b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Метрика в $C[a, b]$ определяется так

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

В терминах этой метрики удобно, например, формулировать определение равномерной сходимости функциональной последовательности. Оказывается, что функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда сходится к функции f, когда последовательность расстояний $\{\rho(f_n, f)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к нулю.

Задача. Доказать неравенство треугольника в пространстве $C[a;b]$. Найти стороны треугольника с вершинами в функциях $\sin x, \cos x, x^2$.

В произвольном метрическом пространстве множество всех тех точек, которые удалены от фиксированной точки x на расстояние меньшее ε, называется **ε-окрестностью** точки x:

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Определение 6.1'. Пусть (M, ρ) — метрическое пространство. Точка x называется **внутренней** точкой подмножества $X \subset M$, если эта точка входит в X вместе с некоторой своей ε-окрестностью ($= \exists \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon(x) \subset X$). Подмножество метрического пространства называется **открытым**, если все его точки являются внутренними. Пустое множество по определению считается открытым.

Нетрудно проверить, используя неравенство треугольника, что любая ε-окрестность любой точки в любом метрическом пространстве является открытым множеством. Следующая теорема дает еще больший запас открытых множеств.

Теорема 6.2 (Операции над открытыми множествами). В произвольном метрическом пространстве: (а) объединение любого числа открытых множеств открыто;

(б) пересечение конечного числа открытых множество открыто.

Доказательство. (а) Пусть есть семейство $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ открытых подмножеств G_α метрического пространства (M, ρ). Возьмем любую точку x из объединения $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Это значит, что имеется индекс $\alpha_0 \in A$ такой, что $x \in G_{\alpha_0}$. Множество G_{α_0} открыто и значит точка x лежит в нем вместе с некоторой своей ε-окрестностью. Вместе с этой же окрестностью она будет лежать и в объединении $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Следовательно, все точки этого объединения — внутренние, т. е. само объединение $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открыто в M.

(б) Пусть имеется конечное множество $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ открытых подмножеств метрического пространства (M, ρ). Если пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ пусто, то оно открыто по определению. В противном случае возьмем любую точку x из пересечения $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$. По условию для каждого индекса $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеется $\varepsilon_i > 0$ так, что $U_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$.

Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} > 0$. Тогда для каждого индекса i выполняется $\varepsilon \le \varepsilon_i$ и следовательно получаем

$$x \in U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i,$$

т. е. точка x лежит в пересечении $\bigcap_{i=1}^n G_i$ вместе со своей ε-окрестностью. Значит само пересечение $\bigcap_{i=1}^n G_i$ — открыто в M. □

В произвольных метрических пространствах сказать что-то отличное (и верное) от теоремы 6.2 про операции с открытыми множествами нельзя.

Теорема 6.3. (а) Если в метрическом пространстве имеется хотя бы одна нетривиальная сходящаяся последовательность, то в этом пространстве имеется счетное число открытых множеств пересечение которых не открыто.

(б) Если метрическое пространство выпукло, то дополнение до любого непустого открытого его подмножества или пусто или не открыто.

Доказательство. (а) Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ точек пространства (M, ρ) сходится к x, т. е. $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$ и пусть все точки x_n отличны от x. Обозначим G_n — ε_n-окрестность точки x, где $\varepsilon_n = 2\rho(x_n, x) > 0$. Тогда пересечение $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ состоит ровно из точки x. Действительно, если $y \in \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, то

$$(\rho(x, y) < \varepsilon_n = 2\rho(x_n, x)) \Longrightarrow (0 \le \rho(x, y) \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n =, 0) \Longrightarrow (x = y).$$

В то же время, одноточечное множество $G = \{x\} = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ не открыто, т.к. его единственная точка — не внутренняя. Действительно для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(x)$ можно подобрать $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\varepsilon_n < \varepsilon$ и тогда точка x_n лежит в $U_{\varepsilon_n}(x)$, а значит и лежит в $U_\varepsilon(x)$, но точка не x_n лежит в G.

(б) Доказательство от противного. Допустим, что метрическое пространство (M, ρ) выпукло, т. е. вместе с любыми точками $x \in M$ и $y \in M$ целиком содержит и отрезок $[a, b]$. Далее допустим, что подмножество $G \subset M$ открыто в M, а его дополнение $M \setminus G$ непусто и также открыто. Используем «красочную» терминологию. Все точки множества G назовем «красными», а точки дополнения $M \setminus G$ назовем «синими». По предположению имеется хотя бы одна красная точка a и хотя бы одна синяя точка b. Проведем отрезок $[a,b] \subset M$ и будем считать, что движение от a к b есть движение слева направо. Каждая точка отрезка — или красная или синяя и двуцветность точек невозможна. Более того, каждая красная (синяя) точка входит в отрезок вместе с некоторой своей красной (соотв., синей) окрестностью.

Пусть c есть супрэмум множества «красных» точек. Если c — красная точка, то у нее есть красная окрестность и значит правее c есть красные точки. Противоречие с тем, что c есть верхняя граница множества красных точек. Если же c — синяя точка, то у нее есть синяя окрестность и значит все синие точки из этой левой полуокрестности также являются верхними границами для множества красных точек. Противоречие с тем, что c есть наименьшая верхняя граница множества красных точек. □

Перейдем к открытым подмножествам числовой прямой. Всякий интервал есть открытое множество просто потому, что он является окрестностью своей середины. Объединение двух пересекающихся интервалов — снова интервал и поэтому есть открытое множество. Объединение двух непересекающихся интервалов — уже не интервал, но, по теореме 6.2 все равно есть открытое множество. Впрочем, можно аналогичным образом рассмотреть и три, и четыре интервала и, вообще, любое конечное или даже счетное число интервалов. Напомним, (первая лекция, пример 3) что на прямой невозможно расположить несчетное число попарно непересекающихся интервалов. К интервалам можно также добавлять и луч (или два луча) без начала — опять получится открытое множество. Удобно будет открытый луч называть **неограниченным** интервалом. *А бывают ли другие открытые подмножества на числовой прямой ?* Ответ прост: **нет.**

Теорема 6.4 (Структура открытых числовых множеств). Всякое непустое открытое подмножество числовой прямой явдяется объединением некоторого не более чем счетного множества попарно непересекающихся между собой интервалов.

Доказательство. Начнем со следующей леммы.

Лемма. Пусть дано некоторое множество $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ интервалов, пересечение $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$ которых непусто. Тогда их объединение $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ также является интервалом.

Доказательство леммы. Каждый интервал I_α имеет левый конец (обозначим его a_α) и правый конец (обозначим его b_α). Пусть b (соответственно a) есть супрэмум (соотв. инфимум) множества всех правых концов (соотв. всех левых концов). Докажем, что

$$\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = (a,b).$$

Подчеркнем, что рассматриваются и случаи, когда $b=+\infty$ или $a=-\infty$. Включение $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha \subset (a,b)$ верно, так как $a \le a_\alpha < b_\alpha \le b$ для всех $\alpha \in A$ и поэтому

$$I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \subset (a,b).$$

Докажем обратное включение $(a,b) \subset \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$, для чего зафиксируем точку $x \in \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$. Рассмотрим произвольную точку c из интервала (x,b). По определению супрэмума $b = \sup\{b_\alpha | \alpha \in A\}$ найдется индекс $\alpha \in A$ для которого $c < b_\alpha \le b$. Но тогда точка c лежит в интервале $I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$ и значит лежит в объединении $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. Для точек $d \in (a,x)$ доказательство аналогично. $\square$

Докажем теперь теорему. Для каждой точки x непустого открытого числового множества G рассмотрим множество всех интервалов, которые, во-первых, содержат точку x и, во-вторых, содержатся в G. Такие интервалы имеются именно в силу открытости множества G. По лемме объединение всех таких интервалов также является интервалом. Обозначим его I_x и назовем **составляющим интервалом**, содержащим точку x. Ясно, что $I_x \subset G$.

(На интуитивном уровне можно предложить такую модель. Множество G сделано из промокашки и в точку x наливают чернила. Тогда они разольются по множеству G и займут как раз интервал I_x.)

Составляющие интервалы для различных точек $x \in G$ и $y \in G$, конечно же, могут пересекаться. Оказывается, что в таком случае они совпадают. Модель с чернилами хорошо иллюстрирует ситуацию.

Допустим от противного, что составляющие интервалы I_x и I_y различны и при этом пересекаются между собой. Тогда их объединение также является некоторым интервалом I. Этот интервал I содержится в G, содержит и точку x и точку y и при этом содержит строго внутри себя хотя бы один из интервалов I_x или I_y. Но это противоречит определению составляющего интервала (I_x или I_y).

Объединение всех составляющих интервалов содержится в G, так как каждый составляющий интервал лежит в G. Наоборот, каждая точка x из G лежит в соответствующем составляющем интервале. Значит все множество G совпадает с объединением всех составляющих интервалов. В этом объединении возьмем каждый составляющий интервал ровно по одному разу. Тогда получаем, что множество G представлено в виде объединения попарно непересекающихся между собой интервалов. Но таких интервалов на прямой не более чем счетно (см. первая лекция). $\square$

Задача. Пусть $q \in (0; 1)$. У каждой точки $n = 1; 2; 3; \ldots 9$ возьмем окрестность радиуса, соответственно, $q; q^2; q^3; \ldots; q^9$ и пусть множество G есть объединение этих окрестностей. При каких q число составляющих интервалов множества G равно 9? равно 8? равно 1?

Каждое непустое открытое числовое множество континуально, так как содержит некоторый интервал и содержится в $\mathbb{R}$. Теорема 6.4 позволяет доказать более серьезный факт о мощности множества всех открытых числовых множеств.

Теорема 6.5. Множество всех открытых числовых множеств континуально.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{G}$ множество всех открытых числовых множеств. Каждый элемент множества $\mathcal{G}$ есть некоторое окрытое подмножество прямой. Неравенство $|\mathcal{G}| \geq \rfloor$ тривиально: достаточно рассмотреть в $\mathcal{G}$ континульное подмножество $\mathcal{G}'$, элементами которого являются интервалы $(x, x+1), x \in \mathbb{R}$.

Для доказательства неравенства $|\mathcal{G}| \leq \rfloor$ достаточно построить некоторую инъекцию $f\colon \mathcal{G} \to Y$ в некоторое континуальное множество Y. В качестве такого множества Y возьмем декартово произведение $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \ldots$ счетного числа сомножителей $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\} \cup \{*\}$, где $\{*\}$ — некоторый спецзнак. Ясно, что $\mathbb{R}^*$ континуально и поэтому континуально Y (см. четвертая лекция, пример 1').

Пусть $G \in \mathcal{G}$, т.е G есть открытое числовое множество. По теореме 6.4 G есть объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов. Выберем и зафиксируем некоторый пересчет всех этих интервалов, т. е.

$$G = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3) \cup \ldots$$

Поставим в соответствие множеству G последовательность концов этих пересчитаных интервалов:

$$f(G) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots).$$

При этом, если G есть объединение некоторого конечного числа n интервалов, то на местах, начиная с $(2n+1)$-го поставим спецзнак $*$.

Значит, определено некоторое отображение $f\colon \mathcal{G} \to Y$. Ясно, что оно иньективно: ведь совпадение $f(G)$ с $f(G')$ означает, что соответственно, совпали составляющие интервалы, на которые разбиты открытые множества G и G'. Следовательно $|\mathcal{G}| \le |Y| = \rfloor$. $\square$

В терминах открытых множеств очень удобно дать следующий критерий непрерывности отображения между метрическими пространствами. Напомним, что отображение $f\colon X \to Y$ из метрического пространства $(X;\rho)$ в метрическое пространство $(Y;d)$ непрерывно в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \quad (\rho(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Теорема 6.6. Для того, чтобы отображение $f\colon X \to Y$ из метрического пространства $(X;\rho)$ в метрическое пространство $(Y;d)$ было непрерывно во всех точках необходимо и достаточно, чтобы прообраз $f^{-1}(G)$ каждого открытого в Y множества G был открыт в X.

Доказательство. Проверим сначала необходимость. Пусть x_0 — произвольная точка прообраза $f^{-1}(G)$ и G открыто в Y. Это значит, что значение $f(x_0)$ лежит в G. Но тогда и некоторая ε-окрестность точки $f(x_0)$ лежит во множестве G. Используя непрерывность f в точке x_0, найдем подходящую δ-окрестность точки x_0. Образ этой δ-окрестности при отображении f целиком лежит в ε-окрестности точки $f(x_0)$ и поэтому лежит во множестве G. Значит точка x_0 входит в прообраз $f^{-1}(G)$ вместе со своей δ-окрестностью, т. е. является внутренней точкой этого прообраза. Произвольность точки x_0 доказывает открытость прообраза $f^{-1}(G)$.

Теперь докажем достаточность. Для любой (открытой) ε-окрестности значения $f(x_0)$ прообраз этой окрестности по предположению открыт в пространстве X. Это значит, что точка x_0 является внутренней точкой этого прообраза, что, в свою очередь, гарантирует наличие такой δ-окрестности точки x_0, образ которой при отображении f целиком лежит в первоначальной ε-окрестности точки $f(x_0)$. Наличие такого $\delta > 0$ в точности и означает непрерывность f в точке x_0.

Произвольность точки x_0 доказывает непрерывность отображения $f\colon X \to Y$. $\square$

Седьмая лекция

Замкнутые множества и их свойства

Некоторой противоположностью к открытым множествам являются замкнутые множества.

Определение 7.1. Точка x называется **предельной** точкой подмножества X метрического пространства (M, ρ), если эта точка является пределом некоторой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек из X, отличных от x:

$$(x = \lim_{n\to\infty} x_n, x_n \neq x) \Longleftrightarrow (\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0, \rho(x_n, x) > 0).$$

Подмножество F метрического пространства (M, ρ) называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

Замкнутые множества традиционно обозначают буквой F: от французского «ferme» — «закрыто». Подчеркнем, что если у множества нет ни одной предельной точки, то оно по определению является замкнутым. Примерами таких множеств являются конечные подмножества метрических пространств.

Теорема 7.2 (Операции над замкнутыми множествами). В произвольном метрическом пространстве:

(а) пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто;

(б) объединение конечного числа замкнутых множество замкнуто.

Доказательство. (а) Пусть есть семейство $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ замкнутых подмножеств F_α метрического пространства (M, ρ). Возьмем любую предельную точку x пересечения $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$. Это значит, что имеется последовательность точек $\{x_n\}$ из этого пересечения таких, что $x =$

$\lim_{n\to\infty} x_n$ и $x_n \neq x$. В частности, точка x является предельной точкой каждого из замнутых множеств F_α. Значит эта точка x лежит в каждом из замкнутых множеств F_α, т. е. лежит в их пересечении.

(б) Достаточно рассмотреть случай двух множеств и дальше действовать по индукции. Пусть все точки замкнутого множества F_1 — «красные», а все точки замкнутого множества F_2 — «синие» и пусть x — предельная точка объединения $F_1 \cup F_2$. Это значит, что имеется последовательность точек $\{x_n\}$ этого объединения таких, что $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $x_n \neq x$. В этой последовательности все точки или красные или синие или покрашены в оба цвета. Но в любом случае найдется подпоследовательность какого-то одного цвета. Предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности. Значит точка x есть или предельная точка F_1 или есть предельная точка F_2. В силу замкнутости F_1 и F_2 получаем, что x лежит или в F_1 или в F_2, т. е. лежит в их объединении. $\square$

Как и в предыдущем параграфе, больше, нежели в теореме 7.2, про операции с замкнутыми множествами ничего гарантировать нельзя. Например, каждое одноточечное множество $F_n = \{1/n\}$ замкнуто на прямой, но объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ счетного числа этих множеств не замкнуто, так как не содержит свою предельную точку, равную нулю. Аналогичным образом, дополнение до замкнутого множества $F = [a, \infty)$ есть луч $(-\infty, a)$, который не замкнут, так как не содержит свою предельную точку, равную a.

Следующая теорема уточняет тезис о противоположности замкнутых и открытых множеств.

Теорема 7.3 (Связь между открытыми и замкнутыми множествами). Подмножество F метрического пространства (M, ρ) замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $G = M \setminus F$ открыто в M.

Доказательство. Пусть подмножество $F \subset M$ замкнуто и пусть x — любая точка дополнения $G = M \setminus F$. Докажем, что x — внутренняя точка G. Рассмотрим последовательность проколотых ε_n-окрестностей $G_n = U_{\varepsilon_n}(x) \setminus \{x\}$ для некоторой последовательности положительных чисел ε_n, стремящейся к нулю. Например, $\varepsilon_n = 1/n$. Если бы в каждой из этих окрестностей G_n нашлась бы точка x_n из множества F, то тогда

$$(0 < \rho(x_n, x) \leq \varepsilon_n) \implies (\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0, x_n \neq x)$$

и точка x оказалась бы, лежащей в замкнутом множестве F, как его предельная точка. Но $x \in G$, т. е. $x \notin F$. Противоречие. Следовательно, хотя бы для одного $n \in \mathbb{N}$ в проколотой окрестности G_n нет точек из множества F. Но тогда и во всей окрестности U_{ε_n} нет точек из F: ведь сама точка x также не лежит в F. Значит вся окрестность U_{ε_n} лежит в G. Итак, всякая точка из G является внутренней точкой G, т. е. G открыто.

Наоборот, допустим, что дополнение $G = M \setminus F$ открыто в M и докажем, что само множество F замкнуто. От противного, предположим, что имеется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек из множества F, сходящаяся к некоторой точке x не из F и при этом $x_n \neq x$. Тогда x лежит в открытом множестве G вместе с некоторой своей ε-окрестностью. Значит в этой окрестности нет ни одной точки из F. Но $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ и по определению предела последовательности получаем, что в этой ε-окрестности все же есть точки $x_n \in F$. Противоречие. Теорема доказана. □

Примеры

Пример 1. Всякое замкнутое числовое множество получается из прямой удалением не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

Доказательство. Замкнутое числовое множество F получается удалением из прямой $\mathbb{R}$ своего дополнения $G = \mathbb{R} \setminus F$, которое открыто по теореме 7.3 и представимо в виде соответсвующего объединения интервалов по теореме 6.4 □

Пример 2. Отрезок $[a, b]$ — замкнутое подмножество прямой.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая сходящаяся последовательность точек отрезка $[a, b]$. По теореме о переходе к пределу в неравенстве получаем

$$(a \leq x_n \leq b) \Longrightarrow (a \leq x = \lim_{n\to\infty} x_n \leq b) \Longrightarrow (x \in [a, b]).$$

□

Пример 3. Прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$ — замкнутое подмножество евклидовой плоскости $\mathbb{R}^{\nvDash}$.

Доказательство. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая сходящаяся последовательность точек прямоугольника $[a,b]\times[c,d]$. Обозначим $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ и пусть $A_n = (x_n, y_n), A = (x,y)$. Тогда $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Применяя к последовательностям координат $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ предыдущий пример, получаем, что $a \le x \le b, c \le y \le d$, т. е. $A = (x,y) \in [a,b]\times[c,d]$. □

Пример 4. Полуплоскость с граничной прямой — замкнутое подмножество плоскости.

Доказательство. Пусть прямая m, задана каноническим уравнением $m = \{(x,y) | Ax + By + C = 0\}$. Тогда прямая m разбивает плоскость на две полуплоскости $\Pi_+ = \{(x,y)|Ax + By + C > 0\}$ и $\Pi_- = \{(x,y)|Ax + By + C < 0\}$. Добавление самой прямой к одной из полуплоскостей, например к Π_+, дает множество $F = \{(x,y)|Ax+By+C \ge 0\}$. Докажем его замкнутость. Пусть $(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ и $(x_n, y_n) \in F$, т. е. $\{Ax_n + By_n + C \ge 0\}$. Числовая функция $\varphi(x,y) = Ax + By + C$ двух переменных линейна и, в частности, непрерывна на всей области определения. Значит

$$\varphi(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n, y_n)$$

Снова используя переход к пределу в неравенстве, получаем $\varphi(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C \ge 0$. Значит $(x_0, y_0) \in F$. □

Пример 5. Любой выпуклый многоугольник — замкнутое подмножество плоскости.

Доказательство. Выпуклый многоугольник есть пересечение конечного числа некоторых замкнутых полуплоскостей. Остается использовать предыдущий пример и теорему 7.2.(a). □

Пример 6. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^{\nvDash} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция двух действительных переменных. Тогда множества

$$\{(x,y)|\varphi(x,y) \ge 0\}, \{(x,y)|\varphi(x,y) \le 0\}, \{(x,y)|\varphi(x,y) = 0\}$$

замкнуты в плоскости.

Доказательство. Для множества $\{(x,y)|\varphi(x,y) \ge 0\}$ следует дословно повторить доказательство примера 4, опустив слова про линейность функции. Для $\{(x,y)|\varphi(x,y) \le 0\}$ доказательство аналогично, а множество $\{(x,y)|\varphi(x,y) = 0\}$ есть пересечение двух замкнутых множеств $\{(x,y)|\varphi(x,y) \ge 0\}$ и $\{(x,y)|\varphi(x,y) \le 0\}$. □

Вот совсем конкретный пример. Пусть

$$\varphi(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2.$$

Функция $\varphi(\cdot, \cdot)$ непрерывна, как многочлен. Замкнутое множество $\{(x, y) | \varphi(x, y) \le 0\}$ есть просто круг (с границей) радиуса R с центром в точке (a, b).

Задача. Доказать замкнутость множества точек плоскости равноудаленных от двух данных непересекающихся кругов

Пример 7. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ — непрерывная неотрицательная функция и F — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, лежащее в области определения функции f. Тогда криволинейная трапеция

$$T_f = \{(x, y) | x \in F, 0 \le y \le f(x)\}$$

замкнута в плоскости.

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ и $(x_n, y_n) \in T_f$, т. е. $x_n \in F$ и $0 \le y_n \le f(x_n)$. Тогда $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ и значит $x_0 \in F$ в силу замкнутости F. Переходя к пределу в неравенстве и используя непрерывность функции f получаем

$$(0 \le y_n \le f(x_n)) \Longrightarrow (0 \le y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n \le \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)).$$

Значит $(x_0, y_0) \in T_f$. $\square$

Объединения и конечные пересечения множеств из примеров 1—7 дают еще больший запас примеров замкнутых множеств. Кроме того, все эти примеры есть и примеры открытых множеств: достаточно перейти к дополнениям. Отметим также, что замена нестрогих неравенств в примерах 3—7 на строгие приводит к открытым множествам.

Аналоги примеров 4—7 разумеется есть и в евклидовых пространствах высоких размерностей. Изменения в доказательствах минимальны: надо просто рассматривать непрерывные функции от n действительных переменных; $n = 3, 4, \ldots$

Приведем примеры замкнутых множеств в бесконечномерных метрических векторных пространствах. Ограничимся пространством $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

Пример 8. В пространстве $C[a, b]$ с метрикой $\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| | x \in [a, b]\}$ замкнуты следующие подмножества:

(а) $F_1 = \{f | f(a) = 0\}$;

(б) $F_2 = \{f | f(a) = f(b)\}$;

(в) $F_3 = \{f | f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]\}$, где $g \in C[a,b]$ — фиксированная функция;

(г) F_4 — множество всех функций, значения $f(x)$ которых при $x \in [a', b'] \subset [a,b]$ лежат в некотором отрезке $[c,d]$.

Доказательство. (а) Пусть f — предельная точка множества F_1. Тогда для некоторой последовательности $\{f_n\}$ функций из множества F_1 получаем

$$0 \leq |f(a)| = |f(a) - f_n(a)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| = \rho(f, f_n) \to 0.$$

Значит $f(a) = 0$, т. е. $f \in F_1$.

(б) Пусть f — предельная точка множества F_2. Тогда для некоторой последовательности $\{f_n\}$ функций из множества F_1 получаем

$$0 \leq |f(a) - f(b)| = |f(a) - f_n(a) + f_n(b) - f(b)| \leq |f(a) - f_n(a)| + \\ + |f_n(b) - f(b)| \leq 2 \max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| = 2\rho(f, f_n) \to 0.$$

Значит $f(a) = f(b)$, т. е. $f \in F_2$.

(в) Пусть f — предельная точка множества F_3. Тогда для некоторой последовательности $\{f_n\}$ функций из множества F_3 в каждой точке $x \in [a,b]$ выполняется

$$(0 \leq f_n(x) - g(x)) \Longrightarrow (0 \leq \lim_{n \to \infty} (f_n(x) - g(x)) = f(x) - g(x)).$$

Значит в каждой точке x отрезка получаем $f(x) \geq g(x)$, т. е. $f \in F_3$.

(г) Пусть $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ и x — произвольная точка отрезка $[a', b']$. Тогда $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ и $c \leq f_n(x) \leq d$. Переходя к пределу в неравенстве, получаем $c \leq f(x) \leq d$. Значит $f \in F_4$.

Отметим, что замкнутость такого типа множеств существенно используется в доказательстве теоремы Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной. $\square$

Завершим эту лекцию перечислением различных типов расположения точки относительно подмножества. Пока что мы встречались с внутренними и предельными точками.

Определение 7.4. Пусть A подмножество метрического пространства (M, ρ). Тогда точка $a \in M$ называется:

(а) **внешней** точкой множества A, если точка a является внутренней точкой дополнения $M \setminus A$ множества A;

(б) **граничной** точкой множества A, если эта точка и не внутренняя и не внешняя точка множества A;

(в) **изолированной** точкой множества A, если эта точка, во-первых, лежит в A и, во-вторых, в некоторой ее окрестности нет больше точек из A;

(г) **точкой прикосновения** множества A, если эта точка или изолированная точка множества A или же предельная точка этого множества;

(д) **точкой конденсации** множества A, если несчетно пересечение этого множества с любой окрестностью этой точки.

Имеется достаточно разветвленная сеть взаимоотношений между этими типами точек и между различными подходами к их определениям. Мы выделим только критерий для предельных, граничных точек и точек прикосновения в явных терминах окрестностей этих точек.

Теорема 7.5. Пусть A подмножество метрического пространства (M, ρ). Тогда точка $a \in M$ является:

(а) предельной точкой множества A тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в проколотой окрестности $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ точки a имеется хотя бы одна точка x из множества A;

(б) граничной точкой множества A тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a имеется хотя бы одна точка x из множества A и имеется хотя бы одна точка y не из множества A;

(в) точкой прикосновения множества A тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a имеется хотя бы одна точка x из A.

Доказательство. (а) Пусть a предельная точка множества A, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0, x_n \neq a$$

для некоторой последовательности точек $x_n \in A$. По определению предела числовой последовательности это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ в окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a имеется хотя бы одна точка x_n. Но тогда эта точка x_n и есть та точка множества A, которая лежит в проколотой окрестности $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Наоборот, пусть для любого $\varepsilon > 0$ в проколотой окрестности $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ точки a имеется хотя бы одна точка x из множества A. Положим $\varepsilon_n = 1/n$ и произвольно выберем и зафиксируем точку $x_n \in (U_{\varepsilon_n}(a) \setminus \{a\})$. Тогда

$$(0 < \rho(x_n, a) < \varepsilon_n) \Longrightarrow (\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0, x_n \neq a; x_n \in A).$$

Значит a предельна для множества A.

(б) Отрицание того факта, что a есть внутренняя точка множества A выглядит так: в любой окрестности точки a имеется хотя бы одна точка y не из множества A. Симметричным образом, отрицание того факта, что a есть внешняя точка множества A выглядит так: в любой окрестности точки a имеется хотя бы одна точка x не из дополнения $M \setminus A$, т.е точка x из самого множества A. Конъюнкция этих двух отрицаний как раз и доказывает (б).

(в) Пусть a точка прикосновения множества A. Если она изолированная точка множества A, то в любой ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ лежит она сама и, тем самым, в любой ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ имеются точки из A. Если же точка a предельная точка множества A, то в любой окрестности $U_\varepsilon(a)$ имеются точки из A просто потому, что они имеются в соответствующей проколотой окрестности $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Наоборот, пусть для любого $\varepsilon > 0$ в окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a имеется хотя бы одна точка x из множества A. Если точка a изолированная точка множества A, то она по определению является точкой прикосновения. Допустим, что точка a не изолированная точка множества A. По определению это означает, что либо она не лежит в A, либо в любой ее проколотой окрестности окрестности $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ есть точка из множества A. Во втором случае по определению получаем, что a есть предельная точка множества A. В первом случае также получаем, что a есть предельная точка A. Ведь в этом случае точки x из множества A, лежащие в ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$, автоматически лежат в проколотой окрестности $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ точки a так как $x \in A$ и при этом $a \notin A$, т. е. $x \neq y$. Следовательно в любом случае a — точка прикосновения множества A. $\square$

Задача. Доказать, что критерием непрерывности отображения метрических пространств является замкнутость прообраза любого замкнутого множества.

В заключение отметим, что характеризация предельных точек, данная в теореме 7.5.(а), верна только в метрических пространствах.

В более общих, **топологических**, пространствах эта характеризация не имеет места. В таких пространствах предельные точки подмножеств определяются не как в определении 7.1, а именно через наличие точек подмножества в произвольных проколотых окрестностях этих точек.

Восьмая лекция

Решение CH-проблемы для замкнутых числовых множеств

Основной целью настоящей лекции является доказательство того, что непустое замкнутое числовое множество либо конечно, либо счетно, либо континуально, т. е.решение CH-проблемы не для всех числовых множеств (что вообще, в принципе, невозможно), а для одного из наиболее естественно возникающих классов числовых множеств. Если замкнутое множество конечно или счетно, то доказывать, собственно, нечего. Остается рассмотреть несчетные множества.

Теорема 8.1. Несчетное замкнутое числовое множество континуально.

Изложим план доказательства теоремы 8.1.

Теорема 8.2 (Лемма Линделефа). Всякое несчетное числовое множество имеет хотя бы одну точку конденсации, принадлежащую этому множеству.

Множество всех точек конденсации данного множества X назовем **ядром множества** X и обозначим $K(X)$ («Kernel» — ядро). Назовем числовое множество **совершенным**, если оно, во-первых, замкнуто и, во-вторых, у него нет ни одной изолированной точки.

Теорема 8.3 (Структура ядра числового множества). Ядро любого числового множества совершенно.

Теорема 8.4 (Мощность совершенных числовых множеств). Всякое непустое совершенное числовое множество континуально.

Вывод теоремы 8.1 из теорем 8.2—8.4. Пусть F несчетное замкнутое числовое множество. Так как $F \subset \mathbb{R}$, то $|F| \leq |\mathbb{R}| = \rfloor$. Докажем неравенство $|F| \geq \rfloor$. По теореме 8.2 ядро $K(F)$ множества

F непусто. По теореме 8.3 ядро $K(F)$ совершенно и по теореме 8.4 это ядро континуально. Так как само множество F замкнуто, то оно содержит все свои предельные точки и, в частности, содержит все свои точки конденсации. Значит $K(F) \subset F$ и поэтому $\rfloor = |K(F)| \leq |F|$. По теореме Кантора—Бернштейна получаем, что $|F| = \rfloor$. $\square$

Еще одним следствием теорем 8.2—8.4 является следующая теорема.

Теорема 8.5 (Структура замкнутых числовых множеств). Всякое замкнутое числовое множество представимо в виде объединения некоторого совершенного множества и непересекающегося с ним не более чем счетного множества.

Доказательство. Пусть F замкнутое числовое множество. Тогда его ядро $K(F)$ совершенно и лежит в F. Остается доказать, что разность $F \setminus K(F)$ не более чем счетна: тогда искомое разложение замкнутого множества F выглядит так

$$F = K(F) \cup (F \setminus K(F)).$$

От противного допустим, что множество $F \setminus K(F)$ несчетно. Тогда по лемме Линделефа у этого множества есть точка конденсации x, принадлежащая самому множеству $F \setminus K(F)$. Но эта точка конденсации x будет, очевидно, и точкой конденсации всего множества F: ведь $(F \setminus K(F)) \subset F$. Значит одновременно получаем, что $x \in K(F)$ и что $x \in F \setminus K(F)$. Противоречие. $\square$

На самом деле про разность $F \setminus K(F)$ имеется и дополнительная информация. Остаток $R(F) = F \setminus K(F)$ **нигде не плотен** на $\mathbb{R}$, т. е. в любом числовом интервале I найдется подинтервал $I' \subset I$, в котором нет ни одной точки из $R(F)$.

Действительно, предположив противное, мы найдем некоторый интервал I, внутри которого точки остатка $R(F)$ плотны (= существуют внутри любого подинтервала $I' \subset I$). Точки остатка $R(F)$ есть точки и множества F, замкнутость которого гарантирует включение $I \subset F$. Но тогда все точки интервала I есть точки конденсации множества F, что противоречит наличию внутри интервала точек из остатка $R(F) = F \setminus K(F)$.

Доказательства теорем 8.2—8.4

Доказательство теоремы 8.2. От противного допустим, что X несчетное числовое множество и что никакая точка x этого множества не является его точкой конденсации. Это значит, что у любой точки $x \in X$ имеется окрестность $U_\varepsilon(x)$, в которой содержится не более чем счетное число точек из множества X: $\exists \varepsilon > 0 |U_\varepsilon(x) \cap X| \leq \aleph_0$. Окрестность $U_\varepsilon(x)$ — это просто интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, содержащий эту точку. Произвольно выберем и зафиксируем некоторые **рациональные** числа $p_x \in (x-\varepsilon, x)$ и $q_x \in (x, x+\varepsilon)$, что возможно в силу плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$. Тогда очевидно, что множество X содержится в объединении $\bigcup_{x\in X}(p_x, q_x)$ и

$$(p_x, q_x) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \Longrightarrow |(p_x, q_x) \cap X| \leq |U_\varepsilon(x) \cap X| \leq \aleph_0.$$

Множество всех пар рациональных чисел счетно: $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$. Значит счетно и множество вообще **всех интервалов с рациональными концами**. Расположим все эти интервалы (без повторений) в виде некоторой последовательности и выделим в ней (конечную или бесконечную) подпоследовательность $\{I_1, I_2, \ldots\}$, состоящую из всех тех интервалов, которые совпадают с интервалами $(p_x, q_x), x \in X$. В каждом из интервалов $\{I_1, I_2, \ldots\}$ по построению — не более чем счетно точек из множества X и множество X содержится в объединении этих интервалов. Значит $|X| \leq \aleph_0$, (пример 5, вторая лекция). Противоречие. $\square$

Задача. Доказать, что во множестве всех интервалов

$\{(p_x, q_x)\}_{x\in X}$ хотя бы один из интервалов повторяется несчетное число раз.

Доказательство теоремы 8.3. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $K(X)$ — ядро X. Докажем сначала замкнутость $K(X)$. Пусть последовательность $\{x_n\}$ точек ядра $K(X)$ сходится к точке x, не лежащей в этой последовательности. Требуется проверить, что тогда и $x \in K(X)$, т.е x есть точка конденсации множества X. Рассмотрим произвольную окрестность $U_\varepsilon(x)$ точки x. Так как $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, то $x_n \in U_\varepsilon(x)$ для некоторой точки x_n отличной от x. Но тогда у точки x_n есть окрестность $U_\delta(x_n)$, которая, во-первых, лежит в окрестности $U_\varepsilon(x)$ и, во-вторых, не содержит точки x. По условию точка x_n есть точка конденсации множества X. Значит множество $X \cap U_\delta(x_n)$ несчетно. Но тогда несчетно и содержащее его множество $X \cap U_\varepsilon(x)$. Другими словами, точка x есть точка конденсации множества X и, тем самым, множество $K(X)$ замкнуто.

Докажем теперь, что никакая точка множества $K(X)$ не является его изолированной точкой. Рассмотрим произвольную окрестность $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ произвольной точки $x \in K(X)$. По условию множество $X \cap U_\varepsilon(x)$ несчетно. Так как

$$X \cap U_\varepsilon(x) = (X \cap (x-\varepsilon, x)) \cup \{x\} \cup (X \cap (x, x+\varepsilon)),$$

то или множество $X \cap (x-\varepsilon, x)$ или множество $X \cap (x, x+\varepsilon)$, также несчетны. Применим к несчетному из этих множеств (или к обоим множествам) лемму Линделефа — теорему 8.2. Тогда найдем точку конденсации множества X, лежащую в окрестности $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = U_\varepsilon(x)$ и отличную от точки x. В силу произвольности окрестности $U_\varepsilon(x)$, получаем неизолированность точки $x \in K(X)$. Значит ядро $K(X)$ совершенно. □

Задача. Доказать, что если объединение трех множеств несчетно, то хотя бы одно из них также несчетно.

Наиболее нетривиально доказательство теоремы о континуальности непустого совершенного множества.

Доказательство теоремы 8.4. Пусть P непустое совершенное подмножество $\mathbb{R}$. Тогда $|P| \leq |\mathbb{R}| = \rfloor$. Для доказательства обратного неравенства $\rfloor \leq |P|$ достаточно построить некоторую инъекцию $f\colon X \to P$ из некоторого континуального множества X. В качестве такого континуального множества X возьмем уже встречавшееся ранее (см. третья лекция) множество $\mathbb{D}$ всех бесконечных двоичных последовательностей:

$$\mathbb{D} = \{a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) |\ \forall n \in \mathbb{N} a_n \in \{0, 1\}\}.$$

Шаг 0. Непустое совершенное множество бесконечно: в противном случае у него были бы изолированные точки. Произвольно выберем и зафиксируем две различные точки $x(0) \in P$ и $x(1) \in P$. Можно считать, что $x(0) < x(1)$.

Шаг 1. Произвольно выберем и зафиксируем отрезки $J(0)$ и $J(1)$ так, чтобы:

(а) точка $x(0)$ была серединой отрезка $J(0)$, а точка $x(1)$ была серединой отрезка $J(1)$;

(б) отрезки $J(0)$ и $J(1)$ не пересекались между собой;

(в) длины отрезков были меньше единицы.

Обозначим $I(0)$ (соответственно $I(1)$) интервал состоящий из всех внутренних точек отрезка $J(0)$ (соотв. $J(1)$).

Точка $x(0)$ по предположению является предельной точкой множества P. В частности, в интервале $I(0)$ есть две различные между собой и отличные от $x(0)$ точки множества P. Обозначим их $x(0,0)$ и $x(0,1)$. Можно для определенности считать, что $x(0,0) < x(0,1)$. Аналогичным образом выберем различные две точки $x(1,0) < x(1,1)$ в интервале I_1, отличные от точки $x(1) \in P$.

Шаг 2. Произвольно выберем и зафиксируем отрезки

$$J(0,0), J(0,1), J(1,0), J(1,1)$$

так, чтобы:

(а) точки $x(0,0), x(0,1), x(1,0), x(1,1)$ были бы серединами соответствующих отрезков $J(0,0), J(0,1), J(1,0), J(1,1)$;

(б) отрезки $J(0,0), J(0,1), J(1,0), J(1,1)$ не пересекались между собой;

(в) длины этих отрезков были меньше одной второй;

(г) отрезки $J(0,0), J(0,1))$ содержались бы в отрезке $J(0)$, а отрезки $J(1,0), J(1,1)$ содержались бы в отрезке $J(1)$.

Обозначим $I(a_1, a_2)$ интервал, состоящий из всех внутренних точек отрезка $J(a_1, a_2)$, где каждый из индексов a_1 и a_2 равен нулю или единице.

Точка $x(a_1, a_2)$ по предположению является предельной точкой множества P. В частности, в интервале $I(a_1, a_2)$ есть две различные между собой и отличные от $x(a_1, a_2)$ точки множества P. Обозначим их $x(a_1, a_2, 0)$ и $x(a_1, a_2, 1)$. Можно для определенности считать, что $x(a_1, a_2, 0) < x(a_1, a_2, 1)$.

Всего таким образом будет выбрано восемь точек $x(a_1, a_2, a_3)$ из множества P; $a_i \in \{0, 1\}$.

Шаг 3. Произвольно выберем и зафиксируем восемь отрезков $J(a_1, a_2, a_3)$ так, чтобы для каждого двоичного набора (a_1, a_2, a_3):

(а) точки $x(a_1, a_2, a_3)$ были бы серединами соответствующих отрезков $J(a_1, a_2, a_3)$;

(б) отрезки $J(a_1, a_2, a_3)$ для различных двоичных наборов не пересекались между собой;

(в) длины этих отрезков были меньше одной трети;

(г) отрезки $J(a_1, a_2, 0)$ и $J(a_1, a_2, 1)$ содержались бы в отрезке $J(a_1, a_2)$, выбранном на втором шаге.

. . .

Продолжая по индукции, мы получим для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого двоичного набора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ некоторый отрезок $J(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ так что:

(А) в каждом отрезке имеется точка из множества P;

(Б) при фиксированном n для различных двоичных наборов длины n соответствующие отрезки между собой не пересекаются;

(В) длина отрезка $J(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ меньше $1/n$;

(Г) $J(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \subset J(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Наконец, определим отображение $f\colon \mathbb{D} \to P$ равенством

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = J(a_1) \cap J(a_1, a_2) \cap \ldots \cap J(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cap \ldots$$

По теореме Кантора о вложенных отрезках, условия (В) и (Г) гарантируют, что $f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ состоит из одной точки. Докажем, что эта точка действительно лежит во множестве P. Для каждого n на отрезке $J(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ лежит и точка $f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ и точка $x(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P$. Значит расстояние между этими точками меньше $1/n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что точка $f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ является точкой прикосновения множества P. В силу замкнутости множества P получаем, что $f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in P$.

Осталось проверить иньективность построенного отображения $f\colon \mathbb{D} \to P$. Пусть две двоичные последовательности $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ и $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ совпадают на первых N местах, а на следующем, $(N+1)$-м месте их члены различны: $a_{N+1} \neq b_{N+1}$. Тогда по условию (Б) отрезки $J(a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1})$ и $J(a_1, a_2, \ldots, a_N, b_{N+1})$ между собой не пересекаются. Значит, различны и числа

$$f(a) = J(a_1) \cap J(a_1, a_2) \cap \ldots \cap J(a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}) \cap \ldots$$

и

$$f(b) = J(a_1) \cap J(a_1, a_2) \cap \ldots \cap J(a_1, a_2, \ldots, a_N, b_{N+1}) \cap \ldots$$

Иньективность отображения $f\colon \mathbb{D} \to P$ доказана и значит доказано неравенство $\rfloor \leq |P|$. По теореме Кантора-Бернштейна, получаем $|P| = \rfloor$. $\square$

Задача. Доказать, что составляющие интервалы дополнения до совершенного множества не имеют общих граничных точек.

Завершим эту лекцию разбором одного замечательного и широко используемого в различных областях математики совершенного множества.

Канторовское совершенное множество $\mathbb{K}$.

Шаг 0. Обозначим J единичный отрезок $[0, 1]$.

Шаг 1. Разделим отрезок J на три равные подотрезка и выкинем все внутренние точки средней трети. Останутся два отрезка, которые мы обозначим в естественном (слева направо) порядке: $J(0)$ и, соответственно, $J(1)$.

Шаг 2. Разделим каждый из отрезков $J(0)$ и $J(1)$ на три равные подотрезка и выкинем в каждом из них все внутренние точки средней трети. Останутся четыре отрезка, которые мы обозначим в естественном порядке: $J(0,0), J(0,1), J(1,0), J(1,1)$.

Шаг 3. Разделим каждый из четырех оставшихся отрезков на три равные подотрезка и выкинем в каждом из них все внутренние точки средней трети. Останутся восемь отрезков, которые мы обозначим в естественном порядке:

$$J(0,0,0),\ J(0,0,1),\ J(0,1,0),\ \ldots,\ J(1,1,0),\ J(1,1,1).$$

. . .

Продолжив по индукции, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого двоичного набора $(a_1, \ldots, a_n)$ получим некоторый отрезок $J(a_1, \ldots, a_n)$ так что отрезки $J(a_1, \ldots, a_n, 0)$ и $J(a_1, \ldots, a_n, 1)$ являются первой и, соответственно, третьей третями отрезка $J(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

По аналогии с доказательством теоремы 8.4 определим некоторое отображение $f\colon \mathbb{D} \to [0,1]$ из множества $\mathbb{D}$ двоичных последовательностей следующим равенством

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = J(a_1) \cap J(a_1, a_2) \cap \ldots \cap J(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cap \ldots$$

Как и в доказательстве теоремы 8.4, отображение f иньективно.

Определение 8.6. Канторовским множеством (= канторовским дисконтинуумом) $\mathbb{K}$ называется образ $f(\mathbb{D})$ построенной инъекции f.

Несколько менее формально, канторовское множество $\mathbb{K}$ определяется как все те точки отрезка $[0,1]$, которые останутся после поочередного выкидывания:

- сначала интервала $(1/3, 2/3)$;
- затем интервалов $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$;
- затем интервалов $(1/27, 2/27)$, $(7/27, 8/27)$, $(19/27, 20/27)$, $(25/27, 26/27)$.

В этом месте обычно произносят стандартное заклинание «и т.д.». Определение 8.6 просто придает корректный смысл этим словам.

Задача. Какие из следующих чисел лежат в канторовском множестве: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{64}{81}$?

Теорема 8.7 (Свойства канторовского множества).

(а) Канторовское множество замкнуто и ограничено.

(б) Сумма длин интервалов, выкидываемых при построении $\mathbb{K}$, равна единице.

(в) Канторовское множество континуально.

(г) Канторовское множество совершенно.

(д) Канторовское множество нигде не плотно.

(е) Отрезок $[0, 1]$ является образом канторовского множества при некотором непрерывном отображении.

Доказательство. (а) $\mathbb{K} \subset [0, 1]$ и значит ограничено. Дополнение $\mathbb{R} \backslash \mathbb{K}$ состоит из объединения лучей $(-\infty, 0), (1, +\infty)$ и счетного числа выкидываемых при построении $\mathbb{K}$ интервалов. Значит дополнение до $\mathbb{K}$ открыто, а само $\mathbb{K}$ — замкнуто.

(б) На первом шаге выкидывается интервал длины $1/3$. Сумма длин интервалов, выбрасываемых на втором шаге равна $2/9$. На третьем шаге выбрасываются четыре интервала длины $1/27$ и т.д. В итоге получаем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $2/3$ и первым членом $1/3$. Ее сумма равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{2^n}{3^{n+1}} + \ldots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

(в) По определению 8.6 канторовское множество $\mathbb{K}$ биективно множеству $\mathbb{D}$.

(г) Так как $\mathbb{K}$ замкнуто, то остается доказать, что в $\mathbb{K}$ нет изолированных точек. Удобно сделать это, перестав по существу различать точки $x \in \mathbb{K}$ и их прообразы $f^{-1}(x) \in \mathbb{D}$ при построенной выше биекции $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{K}$.

Назовем прообраз $f^{-1}(x) \in \mathbb{D}$ **кодом точки** $x \in \mathbb{K}$. Если коды двух точек $x \in \mathbb{K}$ и $y \in \mathbb{K}$ совпадают на первых N местах, то геометрически это значит, что обе эти точки лежат в каком-то одном из отрезков $J(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, полученных на N-м шаге построения канторовского множества. Но в таком случае расстояние между точками x и y не больше чем 3^{-N}.

Рассмотрим точку $x \in \mathbb{K}$, код которой имеет «хвост» из нулей:

$$f^{-1}(x) = (a_1, a_2 a_3, \ldots, a_N, 0, 0, 0, \ldots) = a.$$

Для каждого $n \geq N$ рассмотрим двоичную последовательность $b \in \mathbb{D}$, совпавшую с кодом $(a_1, a_2 a_3 \ldots, a_N, 0, 0, 0, \ldots)$ на всех местах, кроме $(n + 1)$-ого. На этом месте $b_{n+1} = 1$. Тогда точки $f(b) \in \mathbb{K}$ и

$x = f(a)$ канторовского множества различны и при этом расстояние между $f(b)$ и x не больше 3^{-n}, как было объяснено в предыдущем абзаце. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что x — предельная точка канторовского множества $\mathbb{K}$.

Рассмотрим точку x, код которой $f^{-1}(x) = a$ не имеет хвоста из нулей. Это значит, что на сколь угодно больших местах у этого кода встретятся единицы. Рассмотрим тогда такую последовательность точек канторовского множества: $x_1 = f(a_1, 0, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = f(a_1, a_2, 0, 0, 0, \ldots)$, …, $x_n = f(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots)$, …

Коды этих точек имеют хвосты из нулей и поэтому точки x_n отличны от x. Кроме того, расстояние между x_n и x не больше 3^{-n}, так как коды этих точек совпадают на первых n местах. Значит $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

(д) Фиксируем некоторый интервал $I \subset [0; 1]$ и выберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы 3^{-N} было меньше половины длины этого интервала. Разобъем отрезок $[0, 1]$ на 3^N равных подотрезков длины 3^{-N}. Тогда один из этих подотрезков целиком попадет внутрь интервала I. Для выбранного подотрезка возможны два случая.

Если этот подотрезок не совпадает ни с каким из отрезков $J(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ из N-го шага построения канторовского множества $\mathbb{K}$, то внутренность этого подотрезка как раз и будет тем подинтервалом $I' \subset I$, в котором нет точек из $\mathbb{K}$.

Если же этот подотрезок совпадает с одним из отрезков $J(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, то на следующем, $(N + 1)$-м шаге деления из этого отрезка выкинут среднюю треть и тогда в качестве подинтервала $I' \subset I$, в котором нет точек из $\mathbb{K}$, можно взять именно эту треть.

(е) Сюрьекцию $c\colon \mathbb{K} \to [0, 1]$ определим как композицию биекции $f^{-1}\colon \mathbb{K} \to \mathbb{D}$ и отображения $d\colon \mathbb{D} \to [0, 1]$ двоичной декодировки чисел отрезка $[0, 1]$, см. третья лекция. В этой же лекции доказана сюрьективность отображения d, лемма 2. Следовательно отображение $c\colon \mathbb{K} \to [0, 1]$ есть сюръекция. Докажем его непрерывность.

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^{-N} < \varepsilon$ и положим $\delta = 3^{-N}$. Если расстояние между двумя точками x и y канторовского множества $\mathbb{K}$ меньше δ, то они обязательно лежат в одном и том же отрезке $J(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ из N-го шага построения канторовского множества $\mathbb{K}$. Действительно, если они лежат в разных отрезках такого типа, то между этими отрезками есть, как минимум, один отрезок длины 3^{-N}, внутри которого не точек канторовского множества. Но тогда расстояние между x и y не меньше 3^{-N}. Противоречие. Следовательно коды $a = f^{-1}(x)$ и $b = f^{-1}(y)$

совпадают на первых N местах. Но тогда

$$|c(x) - c(y)| = |d(a) - d(b)| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{2^n}| \leq$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

$\square$

Одним из других удивительных свойств канторовского множества является тот факт, что не только отрезок, но и вообще, любое замкнутое и ограниченное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (и, более общо, — любой метрический компакт) есть образ $g(\mathbb{K})$ канторовского множества $\mathbb{K}$ при некотором непрерывном отображении g. Вообще все компакты можно получить из **одного-единственного компакта** $\mathbb{K}$! Это теорема П. С. Александрова.

Задача. Доказать, что канторовское множество в точности совпадает со множеством тех чисел из единичного отрезка, у которых имеется разложение в бесконечную троичную дробь, содержащую в своей записи только нули и двойки.

Девятая лекция

Компактные множества и их свойства

В этой лекции мы займемся новым типом множеств — *компактными множествами*. Правда новизна эта относительна. Во-первых, все компактные множества замкнуты, т. е. мы не выйдем за рамки класса множеств, изученного в предыдущей лекции. Во-вторых, с компактными множествами (в той или иной формулировке) встречался всякий, кто детально изучал тему «Интегрирование функций нескольких переменных».

Необходимость изучения компактных множеств может быть аргументирована по-разному. Например, на компактных (и только на компактных) множествах любая непрерывная функция ограничена и достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Для компактных (и только для компактных) множеств справедлив аналог теоремы Больцано—Вейерштрасса о существовании сходящейся подпоследовательности. Или же, именно на компактных квадрируемых областях определения интегрируема по Риману любая непрерывная числовая функция. В дальнейшем мы встретимся также с примерами того, как некоторые важные утверждения относительно замкнутых множеств сводятся к такому же утверждению про компактные множества.

Напомним необходимые определения. **Сходящейся последовательностью** в метрическом пространстве (M, ρ) называется всякая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющая предел, т. е. точку $x \in M$ такую, что $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Подмножество X метрического пространства (M, ρ) называется **ограниченным**, если оно содержится в каком-нибудь шаре этого пространства:

$$(X - \text{ограничено}) \iff (\exists x_0 \in M, \exists r > 0\colon X \subset U_r(x_0)).$$

Если $X \subset M$ есть подмножество метрического пространства (M, ρ), то **открытым покрытием** множества X называется всякое множество $\omega = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ открытых в M подмножеств таких, что объединение $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ содержит (= покрывает) множество X. Типичный пример открытых покрытий: у каждой точки $x \in X$ можно взять какую-нибудь ее окрестность $U(x)$; множество $\{U(x)\}_{x \in X}$ этих окрестностей будет покрывать все множество X. Может так случиться, что в покрытии $\omega = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ некоторые из открытых множеств U_α излишни,т. е. их можно убрать, а оставшиеся открытые множества по-прежнему будут покрывать все множество X. Если для некоторого множества индексов $B \subset A$ множество $\lambda = \{U_\beta\}_{\beta \in B}$ само является покрытием множества X, то говорят, что λ есть **подпокрытие** данного покрытия ω.

Задача. Каждая точка единичного отрезка покрыта своей окрестностью радиуса $0,1$. Выделить из такого открытого покрытия отрезка конечное подпокрытие. Доказать, что менее шести элементов такое подпокрытие не может содержать.

Рассмотрим следующие свойства подмножества X метрического пространства (M, ρ):

(А) множество X замкнуто и ограничено;

(Б) из любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества X можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке x множества X;

(В) из любого открытого покрытия множества X можно выделить его конечное подпокрытие.

(Г) любая непрерывная числовая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена на X.

На первый взгляд, никакой особой связи между этими свойствами не наблюдается. Однако, такая связь есть и, более того, свойства (А)—(Г) описывают практически один и тот же класс подмножеств метрических пространств.

Теорема 9.1 (Эквивалентность определений компактности в $\mathbb{R}^n$). Для любого подмножества X евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ условия (А)—(Г) эквивалентны между собой:

$$(\text{А}) \Longleftrightarrow (\text{Б}) \Longleftrightarrow (\text{В}) \Longleftrightarrow (\text{Г}).$$

Теорема 9.2 (Эквивалентность определений компактности в метрическом пространстве). Для любого подмножества X любого метрического пространства (M, ρ) условия (Б)—(Г) эквивалентны между собой и из них следует условие (А); обратная импликация при этом не верна:

$$(\text{Б}) \Longleftrightarrow (\text{В}) \Longleftrightarrow (\text{Г}) \Longrightarrow (\text{А}).$$

Перед доказательствами приведем два показательных примера.

Пример 9.3 (Компактность отрезка). Числовой отрезок $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ обладает всеми свойствами (А)—(Г) теоремы 9.1.

Доказательство. Замкнутость и ограниченность отрезка очевидны. Докажем свойство (Б). Всякая последовательность точек отрезка является ограниченной последовательностью. По теореме Больцано—Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Предел этой подпоследовательности будет лежать в отрезке $[a, b]$ в силу его замкнутости. Свойство (Г) совпадает с одной из трех основных теорем о непрерывных функциях на отрезке. Осталось доказать свойство (В): его часто называют леммой Бореля—Лебега.

Допустим от противного, что имеется некоторое открытое покрытие $\omega = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ отрезка $[a, b]$ такое, что для любого конечного множества индексов $K \subset A$ конечное множество открытых множеств $\lambda = \{U_\alpha\}_{\alpha \in K}$ уже не покрывает весь отрезок целиком.

Обозначим $J_0 = [a, b]$ и разделим J_0 пополам. Если бы для каждой из двух половинок мы смогли бы найти конечное множество элементов покрытия ω, покрывающих эту половинку, то мы смогли бы найти и конечное подпокрытие всего отрезка, что противоречит нашему предположению.

Обозначим J_1 ту половинку J_0, для которой не найдется конечного подпокрытия данного покрытия ω. Разделим J_1 пополам и аналогичным образом выберем отрезок J_2 и т.д.

Получим систему стягивающихся отрезков:

$$J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots, \quad \text{длина}(J_n) = \frac{b-a}{2^n}.$$

Рассмотрим общую точку x_0 всех этих отрезков. Выберем и зафиксируем элемент U_{α_0} покрытия, в котором лежит эта точка. Кроме того, зафиксируем число $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы интервал $(x-\varepsilon_0, x+\varepsilon_0)$ целиком лежал бы в открытом множества U_{α_0}. Рассмотрим отрезок J_N с номером $N \in \mathbb{N}$ настолько большим, что $b - a < \varepsilon_0 \cdot 2^N$. Тогда, с одной стороны, отрезок J_N содержит точку x_0 и по выбору номера

N сам отрезок J_N лежит в интервале $(x-\varepsilon_0, x+\varepsilon_0)$, а значит и лежит в открытом множестве U_{α_0}. Короче, отрезок J_N покрыт одним-единственым элементом покрытия ω. С другой стороны, по построению отрезков $J_0, J_1, J_2, \ldots$ никакой из этих отрезков не может быть покрыт конечным числом элементов покрытия ω. Противоречие. $\square$

Пример 9.4. Замкнутое,ограниченное множество без свойств (Б)—(Г).

Построение. По теореме 9.1 такое множество не может быть построено в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим метрическое пространство $C[a,b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с равномерной метрикой

$$\rho(f,g) = \max\{|f(t)-g(t)| \mid t \in [a,b]\}.$$

На отрезке $[a,b]$ произвольно расположим последовательность попарно не пересекающихся отрезков $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n, \ldots$ Для каждого из этих отрезков произвольно выберем непрерывную функцию f_n, равную нулю вне отрезка J_n и принимающую на самом отрезке J_n значения от 0 до 1 включительно.

Найдем расстояние $\rho(f_n, f_m), n \neq m$. Функция $|f_n - f_m|$ по построению равна нулю вне отрезков J_n и J_m, а на этих отрезках ее множество значений равно $[0,1]$. Значит

$$(n \neq m) \Longrightarrow (\rho(f_n, f_m) = 1).$$

Аналогичным образом, если $\bar{0}$ — тождественно нулевая функция, то $\rho(\bar{0}, f_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $F \subset C[a,b]$ есть последовательность всех этих функций:

$$F = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots\}.$$

Тогда все элементы множества F удалены от нуля в $C[a,b]$ (т. е. от тождественно нулевой функции) на расстояние 1. Поэтому множество F ограничено. Кроме того, все попарные расстояния $\rho(f_n, f_m), n \neq m$ равны единице. Это значит, что все элементы множества F являются его изолированными точками. В частности, у множества F нет вообще ни одной предельной точки и поэтому F замкнуто.

Докажем, что свойство (Б) не верно для F. В качестве последовательности элементов множества F возьмем само множество F. Если бы имелась сходящаяся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, то расстояния $\rho(f_{n_{k+1}}, f_{n_k})$ стремились бы к нулю при $k \to \infty$, а это не так: ведь все эти расстояния равны 1.

Докажем, что свойство (В) не верно для F. У каждой точки $f_n \in F$ возьмем открытый шар U_n радиуса $1/2$ с центром в этой точке. Все эти шары попарно не пересекаются, а все вместе — покрывают множество F. При этом всякое конечное число этих шаров содержит только конечное число элементов из множества F, а именно — только свои центры. Значит никакое конечное подмножество этих шаров не образует покрытия всего множества F.

Неограниченная сверху непрерывная числовая функция $\varphi\colon F \to \mathbb{R}$ строится совсем просто. Достаточно положить, например, $\varphi(f_n) = n$. $\square$

Какое же из свойств (А)—(Г) *следует выбрать в качестве определения компактности?*

Если речь идет о подмножествах прямой, плоскости или пространств $\mathbb{R}^n$, то проще всего компактность определить как коньюнкцию замкнутости и ограниченности (= свойство (А) теоремы 9.1). Тогда (Б)—(Г) будут просто некоторыми свойствами компактных множеств. Для произвольных метрических пространств, как это следует из примера 9.4, приходится выбирать другой подход к определению компактности. Исторически первым был способ определения компактности, аксиоматизирующий теорему Больцано—Вейерштрасса (= свойство (Б)). Довольно скоро математики столкнулись с необходимостью рассмотрения класса не только метрических пространств, но и более широкого класса **топологических** пространств. При этом оказалось, что в таких пространствах имеются подмножества, для которых верно свойство (Б), но при этом неверно свойство (Г), т. е. непрерывная функция на таком подмножестве может и не быть ограниченной. Советские математики П. С. Александров и П. С. Урысон в начале двадцатых годов XX века нашли то свойство компактных метрических пространств, которое и для топологических пространств «отвечает» и за ограниченность непрерывных функций и за многие другие естественные факты. Это (в наших обозначениях) — свойство (В). Они назвали это свойство «бикомпактностью», а компактами предложили называть метрические бикомпакты. С течением времени, термин «бикомпактность» все более вытесняется более кратким термином «компактность», а компактность в прежнем смысле (через сходящиеся подпоследовательности) стали называть **секвенциальной компактностью** («sequence» = последовательность). Итак, выбирая наиболее общее определение, получаем

Определение 9.5. Подмножество X метрического пространства (M, ρ) называется компактным, если из любого открытого покрытия множества X можно выделить его конечное подпокрытие.

Переходим к доказательствам теорем.

Доказательства теорем 9.1 и 9.2

Ясно, что удобнее начать с теоремы 9.2: если это будет сделано, то для доказательства теоремы 9.1 останется тогда только доказать импликацию (А) $\Longrightarrow$ (Б).

Доказательство (В) $\Longrightarrow$ (Г) теоремы 9.2. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. Для каждой точки $x \in X$ в определении непрерывности функции f в точке x положим $\varepsilon = 1$ и найдем число $\delta(x) > 0$ так, чтобы

$$f(U_{\delta(x)}(x)) \subset (f(x) - 1, f(x) + 1) = U_1(f(x)).$$

Тогда множество $\{U_{\delta(x)}(x)\}_{x \in X}$ всех найденных окрестностей образует открытое покрытие множества X. По свойству (в) из этого открытого покрытия можно выделить некоторое конечное подпокрытие. Пусть это подпокрытие состоит из N открытых множеств. По построению функция f переводит каждое из этих открытых множеств внутрь некоторого интервала длины 2. Значит образ $f(X)$ всего множества X лежит в объединении N интервалов длины 2. Следовательно множество $f(X)$ ограничено (и сверху и снизу), что и означает ограниченность функции $f\colon X \to \mathbb{R}$. $\square$

Доказательство (Г) $\Longrightarrow$ (А) теоремы 9.2. От противного допустим, что X неограниченное подмножество (M, ρ). Фиксируем точку x_0 и рассмотрим функцию

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \rho(x, x_0).$$

Неограниченность множества X означает, что оно не лежит целиком ни в каком шаре $U_R(x_0)$. Значит, функция f неограничена сверху. Прверим ее непрерывность.

$$|f(x) - f(y)| = |\rho(x, x_0) - \rho(y, x_0)| \le \rho(x, y).$$

Следовательно f даже равномерно непрерывна: в качестве $\delta_\varepsilon > 0$ всегда можно взять само число $\varepsilon > 0$. Итак, для неограниченного множества X свойство (Г) не выполняется.

Далее, допустим, что X не замкнутое подмножество (M, ρ). Это значит, что имеется предельная точка $x_0 \in M$, не лежащая во множестве X. Тогда функция

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\rho(x, x_0)}$$

всюду определена на X, непрерывна как частное непрерывных функций и неограничена сверху, так как знаменатель $\rho(x, x_0)$ принимает сколь угодно малые значения. Итак, для не замкнутых множеств X свойство (Г) неверно.

В итоге, из выполнимости свойства (Г) для множества X следует и ограниченность и замкнутость X. □

Доказательства импликаци (Б) $\Longrightarrow$ (В) не столь просто и требует рассмотрения новых свойств подмножества X метрического пространства:

(Бзамкн) всякое замкнутое подмножество F множества X имеет свойство (Б);

(БКант) всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых подмножеств $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ множества X имеет непустое пересечение;

(Бсеть) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется конечное число точек $x_1 \in X, x_2 \in X, \ldots, x_n \in X$ такое,что для любой точки $x \in X$ неравенство $\rho(x, x_i) < \varepsilon$ выполняется хотя бы для одной точки x_i; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Второе свойство есть некоторый заменитель обычной теоремы Кантора о вложенных отрезках. Конечное множество $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из третьего свойства называется **ε-сетью** множества X.

Задача. Из какого минимального числа точек состоит $0,03$-сеть для единичного отрезка? Тот же вопрос для $0,5$-сети для единичного квадрата.

Лемма. Все три свойства (Бзамкн), (БКант) и (Бсеть) являются следствиями свойства (Б).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек замкнутого подмножества $F \subset X$. По свойству (Б) для множества X из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$. В силу замкнутости F получаем, что $x_0 \in F$. Значит и для F верно свойство (Б).

Пусть дана последовательность вложенных замкнутых подмножеств $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ множества X. Произвольно выберем в каждом из них по одной точке:

$$x_1 \in F_1 \subset X, \quad x_2 \in F_2 \subset X, \quad x_3 \in F_3 \subset X \ldots$$

Из полученной последовательности точек множества X выделим сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Докажем, что точка x_0 лежит в каждом из замкнутых множеств $F_1, F_2, F_3, \ldots$ Имеем, что

$$x_{n_1} \in F_{n_1} \subset F_1, \quad x_{n_2} \in F_{n_2} \subset F_1, \quad x_{n_3} \in F_{n_1} \subset F_1, \quad \ldots$$

Значит $x_0 \in F_1$ в силу замкнутости множества F_1.

Аналогичным образом, все точки x_{n_k} с номерами $n_k \geq 2$ лежат во множестве F_2 и поэтому $x_0 \in F_2$ в силу замкнутости множества F_2. Продолжая аналогично, получаем, что x_0 лежит в пересечении $\cap F_n$.

Осталось вывести из свойства (Б) свойство (Бсеть). Допустим от противного, что для некоторого $\varepsilon > 0$ во множестве X нет ни одной ε-сети. Возьмем произвольно точку $x_1 \in X$. Она не есть ε-сеть и значит имеются точки, удаленные от x_1 на расстояние $\geq \varepsilon$. Пусть $x_2 \in X$ — любая такая точка. Множество $\{x_1, x_2\}$ не есть ε-сеть. Значит имеется точка $x_3 \in X$ такая, что $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. Множество $\{x_1, x_2, x_3\}$ опять не ε-сеть и поэтому можно найти точку $x_4 \in X$ такую, что $\rho(x_i, x_4) \geq \varepsilon$; $i = 1, 2, 3$. Продолжая, получим последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$, для которой все попарные расстояния между различными точками больше или равны ε. Из такой последовательности нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности. □

Импликация (Б) $\Longrightarrow$ (В) теоремы 9.2. Допустим от противного, что из некоторого открытого покрытия $\omega = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множества X нельзя выбрать никакого конечного подпокрытия. Отметим, что выполнимость условия (Б) для множества X автоматически влечет замкнутость этого множества.

Зафиксируем $0 < \varepsilon < 1/2$ и найдем ε-сеть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ множества X (см. свойство (Бсеть)). Для каждой точки x_i рассмотрим пересечение $X_i = X \cap \bar{U}_\varepsilon(x_i)$ замкнутого множества X и замкнутого шара

$$\bar{U}_\varepsilon(x_i) = \{x \in X | \rho(x, x_i) \leq \varepsilon\}.$$

Тогда замкнутые множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$ покрывают все множество X именно потому что $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ есть ε-сеть множества X.

Хотя бы одно из этих замкнутых множеств не может быть покрыто конечным числом элементов покрытия ω: ведь в противном случае и для всего множества X нашлось бы конечное подпокрытие. Обозначим F_1 именно такое замкнутое подмножество множества X. Ясно, что расстояние между любыми двумя точками множества F_1 не больше 1: ведь это множество лежит в некотором шаре радиуса меньше $\frac{1}{2}$.

Замкнутое множество $F_1 \subset X$ имеет свойство (Б) и значит имеет свойство (Бсеть). Применим к этому множеству аналогичное рассуждение для некоторого положительного числа $\varepsilon_1 < 1/4$ и найдем замкнутое множество $F_2 \subset F_1$ для которого из данного покрытия ω нельзя выделить конечного подпокрытия. При этом расстояние между любыми двумя точками множества F_2 не больше $1/2$. После этого построим аналогично замкнутое множество $F_3 \subset F_2$ так, чтобы все расстояния между его точками не превосходили $1/3$ и т.д.

Теперь самое время вспомнить о свойстве (БКант) для множества X (см. лемма) и найти точку $x_0 \in \cap F_n$. Зафиксируем элемент U_{α_0} открытого покрытия ω, покрывающий точку x_0 и зафиксируем число $\varepsilon_0 > 0$ для которого $U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset U_{\alpha_0}$. Выберем теперь замкнутое множество F_N с номером $N \in \mathbb{N}$ настолько большим, что $1 < 2 \leq N\varepsilon_0$. Так как $x_0 \in F_N$ и так как расстояния между точками множества F_N не больше $1/N$, то все множество F_N лежит в $U_{\varepsilon_0}(x_0)$:

$$F_N \subset U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset U_{\alpha_0}.$$

Как и в примере 9.3 получаем теперь, что, с одной стороны, множество F_N покрыто одним-единственным элементом U_{α_0} покрытия ω, а с другой стороны, по построению множеств $F_1, F_2, F_3, \ldots$, из покрытия ω нельзя выделить конечного числа элементов, покрывающих множество F_N. Противоречие. $\square$

Задача. Доказать, что всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых подмножеств $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ компактного множества X имеет единственную точку пересечения, если диаметры этих множеств стремятся к нулю.

Импликация (Г) $\Longrightarrow$ (Б) теоремы 9.2. Допустим от противного, что из некоторой последовательности $\{x_n\}$ точек множества X нельзя выделить никакой подпоследовательности, сходящейся к какой-нибудь точке множества X. В частности, для каждого $n \in \mathbb{N}$ нельзя выделить и подпоследовательности, сходящейся к точке $x_n \in X$. Значит для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое число $\varepsilon_n > 0$, что в окрестности $U_{\varepsilon_n}(x_n)$ имеется единственная точка данной последовательности — сама точка x_n. Отметим, что в два раза меньшие окрестности $U_{\varepsilon_n/2}(x_n) = U_n$ между собой попарно не пересекаются. Действительно, если $x \in U_n \cap U_m$, то

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x, x_n) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon_n + \varepsilon_m}{2} \le \max\{\varepsilon_n, \varepsilon_m\}.$$

Но тогда или в $U_{\varepsilon_n}(x_n)$ лежит точка x_m или в $U_{\varepsilon_m}(x_m)$ лежит точка x_n, что противоречит выбору чисел ε_n и ε_m.

Построим кусочно некоторую функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, повторяя по существу конструкцию примера 9.4. Зададим функцию f сначала на каждом из множеств U_n равенством

$$f(x) = \left(\frac{\varepsilon_n}{2} - \rho(x, x_n)\right) \cdot \frac{2n}{\varepsilon_n}, \quad x \in U_n.$$

Тогда функция f непрерывна на каждом из множеств U_n, равна n в точке x_n и $f(x) \to 0$ если $\rho(x, x_n) \to \varepsilon_n/2$, т. е. если точка x стремится к границе множества U_n. Доопределив функцию f вне объединения $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ как тождественно равную нулю, получим непрерывную на всем множестве X функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, которая не ограничена сверху:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Противоречие со свойством (Г). □

Итак в теоремах 9.1 и 9.2 осталось доказать одну импликацию.

Импликация (А) $\Longrightarrow$ (Б) теоремы 9.1. Разберем случай $n = 2$, т. е. докажем эту импликацию для подмножеств евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

Итак, пусть в замкнутом и ограниченном плоском множестве F имеется последовательность точек $\{A_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Ограниченность F означает, что ограничены проекции множества F на координатные оси. Значит найдутся два отрезка $[a, b] \subset OX$ и $[c, d] \subset OY$ такие, что множество F лежит в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ первых координат лежит в отрезке $[a, b]$. Компактность отрезка (пример 9.3) позволяет выбрать подпоследовательность, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in [a, b]$. Забудем про все члены последовательности, кроме членов этой подпоследовательности. Теперь аналогично поступим с последовательностью $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ вторых координат: выберем из нее подпоследовательность, $\{y_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ сходящуюся к некоторой точке $y_0 \in [c, d]$.

В итоге получим подпоследовательность $\{A_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ первоначальной последовательности, первые координаты членов которой сходятся к x_0, а вторые координаты сходятся к y_0. Значит сама подпоследовательность сходится к точке $A_0(x_0, y_0)$. Так все члены подпоследовательности $\{A_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ лежат во множестве F, то A_0 — предельная точка множества F. Так как F замкнуто, то $A_0 \in F$.

В пространстве $\mathbb{R}^n, n > 2$ покоординатный переход к сходящимся подпоследовательностям следует повторить n раз: здесь как раз и важна конечность $n \in \mathbb{N}$.

Теоремы 9.1 и 9.2 доказаны. □

Так как с доказательствами в этой лекции имеется некоторый перебор, то остальные свойства компактных множеств приведем без доказательства, собрав их в одну общую теорему.

Теорема 9.6 (Свойства компактных множеств).

(1) Всякое непустое компактное числовое множество получается удалением из некоторого отрезка не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

(2) Всякое непустое компактное числовое множество или конечно или счетно или континуально.

(3) Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ может быть представлено в виде объединения последовательности вложенных друг в друга компактов $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$: $\mathbb{R}^n = \cup_{m=1}^{\infty} K_m$.

(4) Пересечение любого числа компактных множеств компактно; объединение конечного числа компактных множеств компактно.

(5) Любое непрерывное отображение $f\colon K \to Y$ компакта K в метрическое пространство Y имеет компактный образ $f(K) \subset Y$.

(6) Замкнутое подмножество компакта — компакт.

(7) Любая непрерывная числовая функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ на компакте K достигает на нем наибольшего и наименьшего значения.

(8) Любое непрерывное отображение $f\colon K \to Y$ компакта K в метрическое пространство (Y, d) равномерно непрерывно.

(9) Любая непрерывная числовая функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ на квадрируемом компакте $K \subset \mathbb{R}^2$ интегрируема по Риману.

(10) Если непрерывное отображение $f\colon K \to Y$ компакта K в метрическое пространство Y иньективно, то обратное отображение $f^{-1}\colon f(K) \to K$ также непрерывно.

(11) Метризуемое декартово произведение любого числа компактов — компакт (теорема А. Н. Тихонова в классе метрических пространств).

(12) Для любого компакта K найдется непрерывное отображение $f\colon \mathbb{K} \to K$ канторовского множества $\mathbb{K}$ такое, что $f(\mathbb{K}) = K$ (теорема П. С. Александрова).

Задача. Доказать пункты 1)—8) теоремы 9.6.

Десятая лекция

Борелевские числовые множества

Итак, на числовой прямой выделены два основных типа множеств: открытые множества и их дополнения — замкнутые множества. В попытке классификации числовых множеств, предложенной Э. Борелем в 1898 году, эти множества явились фундаментом построения всей классификации.

Определение 10.1. Борелевским числовым множеством **нулевого класса** называется числовое множество, которое или открыто или замкнуто.

Мы знаем, что объединение (пересечение) *конечного* числа замкнутых (открытых) множеств замкнуто (открыто) и что при этом объединение (пересечение) *счетного* числа замкнутых (открытых) множеств уже может не быть замкнутым (открытым). Другими словами, операции счетного объединения и счетного пересечения приводят к новым типам множеств.

Определение 10.2. Множество, которое можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств называется множеством типа F_σ. Множество, которое можно представить в виде пересечения счетного числа открытых множеств называется множеством типа G_δ. Борелевским числовым множеством **первого класса** называется числовое множество, которое есть или множество типа F_σ или множество типа G_δ.

Отметим, что отдельное рассмотрение операции несчетного объединения достаточно бессмысленно: *любое* несчетное множество есть объединение несчетного числа замкнутых множеств. А именно, всех своих одноточечных подножеств.

Простейшие свойства борелевских множеств первого класса соберем в следующей теореме. Эти свойства похожи на свойства открытых и замнутых множеств, т. е. борелевских множеств нулевого класса.

Теорема 10.3.

(а) Любое борелевское множество нулевого класса является борелевским множеством первого класса. Более точно, любое открытое и любое замкнутое множество являются и множеством типа F_σ и множеством типа G_δ.

(б) Числовой полуинтервал или замкнутый луч есть борелевское множество первого, но не нулевого класса.

(в) Объединение счетного числа множеств типа F_σ есть множество типа F_σ.

(г) Пересечение счетного числа множеств типа G_δ есть множество типа G_δ.

(д) Дополнение до множества типа F_σ есть множество типа G_δ и, наоборот, дополнение до множества типа G_δ есть множество типа F_σ.

Доказательство. (а) Пусть дан интервал (a, b) и $l = b - a$ — его длина. Тогда объединение отрезков

$$I_n = \left[a + \frac{l}{n+1}, b - \frac{l}{n+1}\right], \quad n \in \mathbb{N}$$

равно интервалу (a, b). В случае неограниченного интервала (т. е. в случае отрытого луча) следует отрезки заменить на соответствующие замкнутые лучи.

Если открытое множество G есть объединение дизьюнктных интервалов (a_n, b_n), то каждый из этих интервалов представим в виде объединения счетного числа замкнутых множеств:

$$(a_1, b_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^1, \quad (a_2, b_2) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^2, \quad \ldots \quad (a_n, b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^n \ldots$$

Тогда

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = F_1^1 \bigcup (F_1^2 \cup F_2^1) \bigcup (F_1^3 \cup F_2^2 \cup F_3^1) \bigcup \ldots$$

и все множества, стоящие в скобках, являются замкнутыми. Значит любое открытое множество есть множество типа F_σ. Тривиальное равенство $G = \cap G_n, G_n = G$ показывает, что G есть также множество типа G_δ.

Всякое замкнутое множество есть множество типа F_σ так как $F = \cup F_n, F_n = F$. Обозначим U_n — $(1/n)$-окрестность множества F, т. е.

$$U_n = \bigcup \{U\left(x, \frac{1}{n}\right) | x \in F\}$$

Тогда все множества U_n открыты и из замкнутости F легко следует равенство $F = \bigcap U_n$. Значит F есть множество типа G_δ.

(б)

$$[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{n+1}, b - \frac{b-a}{n+1}\right].$$

(в) Доказательство такое же, как доказательство в п. (а) с использованием равенства

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F_1^1 \bigcup (F_1^2 \cup F_2^1) \bigcup (F_1^3 \cup F_2^2 \cup F_3^1) \bigcup \ldots$$

(г) Следует в предыдущем пункте объединения заменить на пересечения.

(д) Следует из теоретико-множественных тождеств

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus F_n), \quad \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_n)$$

□

Вот более нетривиальное утверждение.

Теорема 10.4. Множество рациональных чисел есть множество типа F_σ, не являющееся множеством типа G_δ.

Доказательство. Любое счетное множество и, в частности, множество рациональных чисел есть объединение всех своих одноточечных подмножеств, т.е объединение счетного числа замкнутых множеств. Значит $\mathbb{Q}$ есть множество типа F_σ.

Вместо доказательства того, что $\mathbb{Q}$ не есть множество типа G_δ можно эквивалентным (по предыдущей теореме) образом доказывать, что множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел не есть множество типа F_σ. Доказательство от противного.

Допустим, что $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где все множества F_n замкнуты. Если бы множество F_n было бы хоть где-нибудь (т. е. на каком-нибудь интервале) плотно, то, в силу замкнутости F_n, получилось бы, что весь этот интервал лежал бы в F_n. Но на этом интервале есть и рациональные точки, которые не могут лежать в $F_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Значит каждое замкнутое множество F_n нигде не плотно на числовой прямой. Фиксируем некоторую нумерацию рациональных чисел $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$. Тогда множества $E_n = F_n \cup \{r_n\}$ нигде не плотны на $\mathbb{R}$ и

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Покажем, что последнее равенство находится в противоречии с теоремой Кантора о вложенных отрезках.

Возьмем произвольно интервал (a_1, b_1). Так как множество E_1 не плотно в интервале (a_1, b_1), то имеется подинтервал $(c_1, d_1) \subset (a_1, b_1)$, в котором нет точек множества E_1. Обозначим I_1 любой отрезок, лежащий в интервале (c_1, d_1).

Возьмем произвольно интервал $(a_2, b_2) \subset I_1$. Так как множество E_2 не плотно в интервале (a_2, b_2), то имеется подинтервал $(c_2, d_2) \subset (a_2, b_2)$, в котором нет точек множества E_2. Обозначим I_2 любой отрезок, лежащий в интервале $(c_2, d_2 \subset (a_2, b_2) \subset I_1$.

Возьмем произвольно интервал $(a_3, b_3) \subset I_2$. Так как множество E_3 не плотно в интервале (a_3, b_3), то имеется подинтервал $(c_3, d_3) \subset (a_3, b_3)$, в котором нет точек множества E_3. Обозначим I_3 любой отрезок, лежащий в интервале $(c_3, d_3) \subset (a_3, b_3) \subset I_2 \ldots$.

Продолжая по индукции, получим последовательность вложенных отрезков, общая точка которых не лежит в объединении множеств E_n, что противоречит предположению о справедливости равенства $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. $\square$

Следующая теорема выразительно показывает различие множеств $\mathbb{Q}$ рациональных и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел и во второй своей части является прямым следствием теоремы 10.4.

Теорема 10.5. (а) Существует функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывная во всех иррациональных точках и разрывная во всех рациональных точках.

(б) Не существует функции $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных точках.

Доказательство. Фиксируем нумерацию множества

$$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}.$$

Единичную массу разобъем на счетное множество положительных «гирек» $p_1, p_2, p_3, \dots$ Например,

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots, \quad p_n = 2^{-n}.$$

В точку r_n поместим гирьку веса p_n и определим значение функции $f\colon \mathbb{R} \to [0,1)$ в точке x как вес открытого луча $(-\infty, x)$. Формально,

$$f(x) = \sum_{\{n \mid r_n < x\}} p_n$$

Этот ряд сходится так как его члены положительны и он мажорируется сходящимся рядом $\sum_n 2^{-n}$. Отметим, что функция f по своему определению получается строго возрастающей:

$$(y > x) \implies (f(y) - f(x) = \sum_{\{n \mid x \le r_n < y\}} p_n > 0).$$

Докажем разрывность f в рациональной точке r_k. По определению для всех $y > r_k$ получаем

$$f(y) - f(r_k) = \sum_{\{n \mid r_k \le r_n < y\}} p_n > p_k > 0.$$

Поэтому правый предел функции f в точке r_k больше значения функции f в этой точке

$$\lim_{y \to r_k + 0} f(y) \ge f(r_k) + p_k > f(r_k).$$

Докажем непрерывность f в иррациональной точке x. Для любого положительного ε отметим номер $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\sum_{n>N} p_n < \varepsilon$ и удалим из числовой прямой рациональные точки $r_1, r_2, \dots, r_N$. Точка x при таком удалении останется нетронутой и будет лежать в некотором из оставшихся открытых промежутков. Возьмем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы вся δ-окрестность точки x лежала в этом же промежутке. Тогда для любого y из такой δ-окрестности точки x модуль разности $|f(y) - f(x)|$ не превосходит веса оставшихся рациональных точек $r_{N+1}, r_{N+2}, \dots$, т. е. $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

(б) Как обычно, доказать, что чего-то не существует значительно сложнее, нежели показать, что что-то существует. Нам потребуется новое понятие колебания функции f в точке. Для каждого $\varepsilon > 0$ пусть

$$M_\varepsilon = \sup\{f(y)|y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\}, m_\varepsilon = \inf\{f(y)|y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\}.$$

Тогда **колебанием** функции f в точке x называется инфимум множества всех разностей $M_\varepsilon - m_\varepsilon$ по всем $\varepsilon > 0$:

$$\omega(f, x) = \inf\{M_\varepsilon - m_\varepsilon | \varepsilon > 0\}.$$

Задача 1. Множество $\{x \in \mathbb{R} | \omega(f, x) < \sigma\}$ открыто для любого $\sigma > 0$.

Задача 2. Функция f непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда колебание $\omega(f, x)$ этой функции в этой точке равно нулю.

Задача 3. $\{x|\omega(f, x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|\omega(f, x) < \frac{1}{n}\}$.

Задача 4. Множество всех точек непрерывности любой всюду определенной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть множество типа G_δ.

Доказательство части (б) теоремы теперь сразу получается методом от противного. Допустим, что имеется функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных точках. Но тогда по задаче 4 множество $\mathbb{Q}$ является множеством типа G_δ, что противоречит предыдущей теореме 10.4. □

Вернемся к классификации борелевских множеств. Так как множество всех борелевских множеств нулевого класса континуально, то и множество всех борелевских множеств первого класса континуально: множество всех последовательностей элементов континуального множества также континуально. Так как всех числовых множеств имеется гиперконтинуум, то имеются и множества не первого класса.

Определение 10.6. Множество, которое можно представить в виде объединения счетного числа множеств типа G_δ называется множеством типа $F_{\sigma\delta}$. Множество, которое можно представить в виде пересечения счетного числа множеств типа F_σ называется множеством типа $G_{\delta\sigma}$. Борелевским числовым множеством **второго класса** называется числовое множество, которое есть или множество типа $F_{\sigma\delta}$ или множество типа $G_{\delta\sigma}$.

Разумеется, для борелевских множеств второго класса легко доказать аналог теоремы 10.3 и показать континуальность множества всех таких множеств. После чего приходит естественный черед борелевских множеств **третьего класса**, **четвертого класса** и т.д.

$$F_{\sigma\delta\sigma}, \quad G_{\delta\sigma\delta}, \quad F_{\sigma\delta\sigma\delta}, \quad G_{\delta\sigma\delta\sigma}, \quad \dots$$

Обычно под словами «и т.д.» понимается процесс, продолжаемый «по индукции» на множество шагов, занумерованных натуральными числами. Однако здесь можно двигаться и дальше ! Обозначим

$$F_\omega = F_{\delta\sigma\delta\sigma\dots}, \quad G_\omega = G_{\delta\sigma\delta\sigma\dots}$$

борелевские множества **натурального класса** или, как более принято говорить, **типа омега**. К таким множествам можно опять же применять всю описанную счетную процедуру и получать борелевские множества типа «омега плюс один», «омега плюс два», ..., «два омега», «два омега плюс один», и т.д.:

$$F_{\omega\sigma}, \quad G_{\omega\delta}, \quad F_{\omega\sigma\delta}, \quad G_{\omega\delta\sigma}, \quad F_{\omega\omega\sigma}, \quad \dots$$

Под этим термином «и т.д.» теперь уже понимается, так называемая трансфинитная индукция, которая проводится по множеству всех счетных порядковых (ординальных) чисел. Хоть сколько-нибудь содержательное изложение теории порядковых чисел слишком далеко увело бы нас от предмета настоящих лекций. Мы ограничимся приведенным описательным изложением.

Можно дать значительно более короткое определение множества $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ всех борелевских множеств. Краткость его — конечно же преимущество. Но имеется существенный недостаток: определяется **семейство** всех борелевских множеств, а не сами борелевские множества. Из такого определения затруднительно извлечь какую-нибудь информацию о структуре самих борелевских множеств. Все же, во многих доказательствах удобнее пользоваться именно таким таким подходом.

Определение 10.7. Пусть X некоторое множество и пусть $\mathcal{A}$ некоторое множество подмножеств множества X, т. е. $\mathcal{A} \subset 2^X$. Тогда $\mathcal{A}$ называется **σ-алгеброй** подножеств множества X, если:

(1) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$;
(2) $(A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A} \dots) \implies (\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A})$;
(3) $(A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A} \dots) \implies (\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A})$;
(4) $X \in \mathcal{A}$.

Свойство (3) формально излишне так как оно следует из (1), (2), (4). Примером σ-алгебры является множество 2^X всех подмножеств множества X. Ясно также, что если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — две σ-алгебры подмножеств множества X, то их пересечение

$$\mathcal{A} = \{A \subset X | A \in \mathcal{A}_1, A \in \mathcal{A}_2\}$$

также является σ-алгеброй: все свойства (1)—(4) выполняются и в $\mathcal{A}_1$ и в $\mathcal{A}_2$.

Более того, совсем не существенно что берутся именно две σ-алгебры. Количество σ-алгебр может быть любым, но всегда **пересечение любого числа σ-алгебр есть σ-алгебра.**

Определение 10.8. Множество $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских числовых множеств есть пересечение всех тех σ-алгебр числовых множеств, которые содержат все открытые множества.

Несколько другими словами, наименьшая σ-алгебра числовых множеств, содержащая все открытые множества, в точности состоит из всех борелевских множеств. Или же, борелевские множества — это все те множества, которые можно получить из открытых с помощью счетного использования операций счетного объединения, счетного пересечения и перехода к дополнению.

Мы завершим эту лекцию (и вторую часть всего курса лекций) следующей теоремой П. С. Александрова, которую он доказал в двадцатилетнем возрасте в 1916 году в качестве курсовой работы. (Примерно в это же время и независимым образом этот же факт доказал и Ф. Хаусдорф).

Теорема 10.9. Всякое несчетное числовое борелевское множество содержит иньективный образ канторовского множества и поэтому, в частности, является континуальным.

Тем самым CH-проблема была положительно решена не только для борелевских множеств нулевого класса (это сделали и мы в восьмой лекции), но и, вообще, для произвольных борелевских множеств. Грубо говоря, среди «нормальных» числовых множеств нет такого, мощность которого строго заключена между $\aleph_0$ и $\rfloor$.

Часть третья. Теория меры числовых множеств

Одиннадцатая лекция

Аксиоматическое определение меры

Когда говорят об измерении, то, явно или неявно, подразумевают наличие ответов на следующие вопросы:

(1) Что является объектом измерения, т. е.что именно измеряют?

(2) Что является результатом измерения??

(3) Каким образом происходит (или определяется) процесс измерения???

В таком общем смысле всякое измерение просто задает некоторое отображение, которое некоторым объектам измерения по некоторому правилу ставит в соответствие некоторые значения — результаты измерения. Например, измерением является всякий процесс голосования. Его итоги можно формализовать как некоторое отображение $\mu\colon X \to Y$, где X есть множество избирателей, Y есть список кандидатов, включающий и «пустого» кандидата (= «против всех»), а само измерение μ осуществляет соотнесение каждому избирателю $x \in X$ выбранного им кандидата $\mu(x)$.

Мы оставим общие слова и перейдем к конкретной задаче — измерению длины числовых множеств. По крайней мере один ответ здесь ясен. А именно, ответ на второй из поставленных выше вопросов: результатом здесь является **неотрицательное число или $+\infty$.** Ясно также, что мы именно будем измерять — **числовые множества**. Это означает, что мы будем рассматривать отображения (не обязательно всюду определенные)вида $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ Кроме того, разумным представляется еще ряд ограничений (аксиом), гарантирующих, например, согласованность со стандартным определением длины отрезка, как модуля разности его концов. Или же соблюдение свойства аддитивности: если отрезок разрезать на подотрезки, то сумма длин подотрезков должна равняться длине всего отрезка. Так как измерять мы хотим максимально большое количество множеств, то, во избежание недоразумений, термин «длина» будем использовать только для простейших множеств — промежутков и их дизъюнктных объединений. Для произвольных же числовых множеств будем использовать термин «мера».

Определение 11.1 (Аксиомы меры числовых множеств).

Мера — это отображение $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$, которое некоторым (не обязательно всем) числовым множествам, называемым μ-измеримыми, ставит в соответствие неотрицательное число или плюс бесконечность так, что при этом выполняются следующие аксиомы:

(M1) любой отрезок $[a, b]$ измерим и его мера $\mu([a, b])$ равна $b - a$;

(M2) мера любого измеримого множества не меняется при параллельном переносе этого множества;

(M3) для любой последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно непересекающихся измеримых множеств их объединение также измеримо и мера объединения равна сумме мер $\mu(A_n)$ множеств A_n;

(M4) разность любых двух измеримых множеств есть измеримое множество.

Аксиомы меры числовых множеств имеют персональные наименования. Мы приведем их вместе с чуть более формализованной версией аксиом M1—M4.

Обозначим $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ аксиоматически заданную меру и $\mathcal{M} = D(\mu)$ — область ее определения.

(M1) — аксиома нормировки.

$$(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b) \implies ([a, b] \in \mathcal{M}, \mu([a, b]) = b - a);$$

(M2) — аксиома инвариантности относительно сдвигов.

$$(A \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}) \implies (A + t \in \mathcal{M}, \mu(A + t) = \mu(A));$$

(M3) — аксиома счетной аддитивности.

$$(\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{M}) \,\&\, (\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset) \implies$$

$$\implies \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}\right) \& \left(\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\right)$$

(M4) $(A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{M}) \implies (A \setminus B \in \mathcal{M})$.

Последняя аксиома (M4) носит технический характер и не имеет специального названия. Рассмотрим подробнее аксиому счетной аддитивности (=сложения) M3. Во-первых, точные повторения ее вышеприведенной формулировки внутри различных доказательств с чисто технической стороны затруднительны. Используют более краткий вариант:

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Использование специального знака объединения молчаливо подразумевает, что рассматриваются объединения попарно непересекающихся (= дизъюнктных) множеств. Во-вторых, в этой аксиоме существенно использован следующий факт из теории числовых рядов. Ряд, составленный из неотрицательных чисел можно суммировать **в произвольном порядке**: сумма ряда (конечная или бесконечная) при таких перестановках не меняется. Просто ряд из неотрицательных чисел всегда сходится или расходится **абсолютно**. Это замечание существенно, так как левая часть $\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ последнего равенства не зависит от перестановки или перенумерации множеств A_n. Поэтому для корректности формулировки аксиомы счетной аддитивности требуется проверять, что этим же свойством обладает и правая часть $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. этого равенства.

Как обычно, из аксиом выводятся некоторые следствия.

Свойства измеримых множеств, вытекающие из аксиом

Покажем, что измеримых множеств — «много». Коротко это звучит так.

Теорема 11.2 (Свойства измеримых множеств). Измеримые числовые множества образуют σ-алгебру, содержащую все борелевские множества.(= $\mathcal{M}$ – σ-алгебра и $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$).

Доказательство теоремы 11.2 разбивается на большое количество достаточно простых шагов — отдельных свойств меры. Мы и будем их доказывать и формулировать отдельно, продолжив нумерацию из определения 11.1.

M5. Пустое множество измеримо.

$[a,b] \setminus [a,b] = \emptyset$ и остается использовать $M1$ и $M4$. □

M6. Пересечение двух измеримых множеств измеримо.

$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ и достаточно дважды использовать $M4$. $\square$

M7. Объединение двух измеримых множеств измеримо.

$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \ldots$

Первое слагаемое измеримо по $M4$, второе — по условию, а остальные — по $M5$. Остается использовать аксиому $M3$ счетной аддитивности (вернее, ее часть без равенства). $\square$

M8. Объединение конечного числа измеримых множеств измеримо и пересечение конечного числа измеримых множеств измеримо.

Индукция по числу множеств с использованием свойств $M6$ и $M7$. $\square$

M9. Объединение счетного числа измеримых множеств измеримо.

Требуется проверить, что

$$(A_1 \in \mathcal{M}, A_2 \in \mathcal{M}, A_3 \in \mathcal{M}, \ldots) \Longrightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}.$$

Мы представим то же множество A, но в виде объединения счетного числа **дизъюнктных** измеримых множеств, после чего останется использовать счетную аддитивность меры. Итак, положим

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_1 \cup A_2, \quad B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \quad \ldots$$

Тогда все множества B_n измеримы по $M8$ и при этом

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Далее, пусть

$$C_1 = B_1, \quad C_2 = B_2 \setminus B_1, \quad C_3 = B_3 \setminus B_2, \quad \ldots$$

Тогда все множества C_n измеримы по $M4$, попарно не пересекаются и при этом

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n. \quad \square$$

M10. Вся числовая прямая $\mathbb{R}$ есть измеримое множество.

$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$ и остается использовать $M9$. $\square$

M11. Дополнение до измеримого множества измеримо.

Дополнение $\mathbb{R} \setminus A$ до измеримого множества A измеримо по $M10$ и $M4$. $\square$

M12. Пересечение счетного числа измеримых множеств измеримо.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus A_n) \right)$$

и остается в правой части поочередно использовать $M11$, $M9$, $M11$. $\square$

M13. Множество $\mathcal{M}$ всех измеримых множеств есть σ-алгебра. См. $M9$—$M12$. $\square$

M14. Любое конечное и любое счетное числовое множество измеримо.

Любое одноточечное множество $\{a\}$ измеримо как пересечение двух отрезков $[a-1, a]$ и $[a, a+1]$. Остается использовать или $M8$ или $M9$. $\square$

M15. Любой промежуток измерим.

Полуинтервалы и интервалы получаются из соответствующих отрезков удалением одной или двух точек и значит измеримы по $M1, M4, M14$. Лучи (открытые или замкнутые) есть объединения счетного числа интервалов или отрезков, один из концов которых совпадает с началом луча. $\square$

M16. Любое открытое и любое замкнутое числовое множество измеримы.

Открытое множество измеримо, как объединение не более чем счетного числа интервалов, а замкнутое множество измеримо, как дополнение до открытого. $\square$

M17. Любое борелевское числовое множество измеримо.

Борелевские множества нулевого класса измеримы по $M16$. Множества типа G_δ (типа F_σ) измеримы, как пересечения счетного числа открытых множеств (соответственно, объединения счетного числа замкнутых множеств). Значит, измеримы и борелевские множества первого класса. Борелевские множества второго класса измеримы, так как получаются из множеств первого класса операциями счетных объединеий и пересечений. Далее доказательство проводится по индукции (трансфинитной !). $\square$

Доказательство теоремы 11.2. См. $M13$ и $M17$. $\square$

Свойства меры

Во всех предыдущих свойствах мы говорили об измеримых множествах, но не о значениях меры на конкретных измеримых множествах. Начнем теперь со следующего простого свойства самой меры μ.

M18. Мера пустого множества равна нулю.

Так как

$$(b-a)+\mu(\emptyset)+\mu(\emptyset)+\ldots=\mu([a,b]\sqcup\emptyset\sqcup\emptyset\sqcup\ldots)=\mu([a,b])=b-a<\infty,$$

то $\mu(\emptyset)+\mu(\emptyset)+\mu(\emptyset)+\ldots=0$.

Следовательно $\mu(\emptyset)$ не может быть ни бесконечностью, ни положительным числом. Значит $\mu(\emptyset)=0$. □

M19. Мера μ конечно аддитивна, т. е.

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{N}A_n\right)=\sum_{n=1}^{N}\mu(A_n).$$

Использовать $M18$ и счетную аддитивность для последовательности измеримых множеств, в которой все члены, начиная с $(N+1)$-го — пустые множества. □

Очень важными свойствами меры μ являются ее монотоность, непрерывность сверху и непрерывность снизу.

Теорема 11.3 (Монотонность меры). Если $A\subset B$ — два измеримых множества, то $\mu(A)\le\mu(B)$.

Доказательство.

$$B=A\sqcup(B\setminus A).$$

По конечной аддитивности ($N=2$) получаем, в силу неотрицательности значений меры, что

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)\ge\mu(A).$$

□

Теорема 11.4 (Непрерывность меры снизу). Если $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots$ — последовательность вложенных по возрастанию измеримых множеств, то

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Доказательство. Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset \ldots \supset A_3 \supset A_2 \supset A_1.$$

Если мера одного из множеств A_n бесконечна, то по монотонности бесконечна и мера множества A и требуемое равенство очевидно.

Если меры всех множеств A_n конечны, то, используя разложения

$$A = \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_{k+1} \setminus A_k) \right) \sqcup A_1, A_n = \left(\bigsqcup_{k=1}^{n-1} (A_{k+1} \setminus A_k) \right) \sqcup A_1,$$

в дизъюнктные объединения, получаем по счетной и по конечной аддитивности меры

$$\mu(A) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{k+1} \setminus A_k) \right) + \mu(A_1) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_{k+1} \setminus A_k) + \mu(A_1) \right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

$\square$

В качестве следствия получаем вычисления мер промежутков, отличных от отрезка.

M20. $\mu([a,b)) = b-a$, $\mu((a,b)) = b-a$, $\mu([a,+\infty)) = \mu((a,+\infty)) = \mu((-\infty,a)) = \mu((-\infty,a]) = \mu(\mathbb{R}) = +\infty$.

Доказательство. Для фиксированных $a < b$ при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого N, верно неравенство $1 < n(b-a)$. Тогда

$$\left[a, b - \frac{1}{N}\right] \subset \left[a, b - \frac{1}{N+1}\right] \subset \left[a, b - \frac{1}{N+2}\right] \subset \ldots \subset [a,b)\,,$$

$$\bigcup_{n=N}^{\infty} \left[a, b - \frac{1}{n}\right] = [a,b)\,.$$

Значит, по непрерывности меры снизу

$$\mu([a,b) = \lim_{n\to\infty} \left(b - a - \frac{1}{n} \right) = b - a.$$

Для интервала (a,b) надо использовать отрезки вида $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n})$, для замкнутого луча $[a,+\infty)$ надо использовать отрезки вида $[a, a+n]$, для открытого луча $(a,+\infty)$ — отрезки $[a+\frac{1}{n}, a+n]$ и для прямой $\mathbb{R}$ — отрезки $[-n,n]$. $\square$

Теорема 11.5 (Непрерывность меры сверху). Если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ — последовательность вложенных по убыванию измеримых множеств и мера $\mu(A_1)$ конечна, то

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Доказательство. Сразу же приведем пример, показывающий, что без условия конечности меры первого множества утверждение теоремы, вообще говоря, неверно:

$$A_n = [n,+\infty) \Longrightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq +\infty = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Пусть $\mu(A_1) < +\infty$ и пусть

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \ldots \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1.$$

Используя разложение

$$A_1 = \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1})\right) \sqcup A$$

в дизъюнктное объединение, получаем по счетной аддитивности меры

$$\mu(A_1) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})\right) + \mu(A) < +\infty.$$

Значит предел остатка $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$ сходящегося числового ряда равен нулю при $n \to \infty$.

Используя разложение

$$A_n = \left(\bigsqcup_{k=n}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1})\right) \sqcup A,$$

в дизъюнктное объединение, получаем по счетной аддитивности меры

$$\mu(A_n) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})\right) + \mu(A).$$

Но первое слагаемое в правой части последнего равенства как раз и равно остатку сходящегося ряда. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

□

M21. Мера любого конечного и мера любого счетного множества равны нулю; при этом бывают и континуальные множества нулевой меры — например, канторовское множество $\mathbb{K}$.

Доказательство. Всякое одноточечное множество $\{a\}$ есть пересечение последовательности вложенных по убыванию отрезков $[a, a+\frac{1}{n}]$. Из непрерывности меры сверху получаем

$$\mu(\{a\}) = \lim_{n\to\infty} \left[a; a + \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Если множество A счетно, то оно есть объединение счетного числа попарно непересекающихся одноточечных множеств — всех своих элементов. По счетной аддитивности меры получаем, что $\mu(A) = 0$. Аналогично с конечным множеством.

Разберемся с мерой канторовского множества. Так как $\mathbb{K} \sqcup ([0,1] \setminus \mathbb{K}) = [0,1]$, то $\mu(\mathbb{K}) + \mu([0,1] \setminus \mathbb{K}) = 1$. Но дополнение $[0,1] \setminus \mathbb{K}$ состоит из счетного числа непересекающихся интервалов, сумма длин которых, как мы уже считали, равна единице. Так как длина интервала совпадает с его мерой (см. $M20$), то и мера $\mu([0,1] \setminus \mathbb{K})$ дополнения $[0,1] \setminus \mathbb{K}$ также равна единице. Значит по конечной аддитивности меры получаем $\mu(\mathbb{K}) = 1 - \mu([0,1] \setminus \mathbb{K}) = 1 - 1 = 0$. □

Мера дизъюнктного объединения множеств находится по счетной(или по конечной) аддитивности. А что можно сказать про меру объединения **пересекающихся** множеств ? Оказывается, что в таком случае равенство из аддитивности меры следует заменить неравенством. Получается **полуаддитивность** меры. Предварительно рассмотрим случай двух множеств.

M22. Для любых двух измеримых множеств A и B верно равенство

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

В частности, $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

Доказательство. Так как $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$, то

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B).$$

Так как $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$, то

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

□

Теорема 11.6 (Счетная полуаддтивность меры). Если множества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ измеримы, то

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Доказательство. Пусть

$$B_1 = A_1 \subset B_2 = B_1 \cup A_2 \subset, \ldots \subset B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1} \subset \ldots$$

Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и по монотонности меры снизу получаем

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Индуктивно применяя предыдущее свойство (M22) меры, получаем, что

$$\mu(B_n) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n).$$

Следовательно

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

□

В заключение подчеркнем, что в этой лекции нам ни разу не понадобилась аксиома $M2$ инвариантности меры относительно сдвигов, т. е. все утверждения этой лекции выводятся **только из аксиом** $M1, M3, M4$.

Двенадцатая лекция

Проблема реализуемости аксиом $M1$—$M4$. Другие меры и меры в других множествах

В предыдущей лекции мы установили около трех десятков различных свойств меры $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ числовых множеств. И все бы хорошо, да только неизвестно, а **существует ли хотя бы одна мера** $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ для которой действительно верны свойства $M1$—$M4$, т. е. реализуемы ли аксиомы $M1$—$M4$? Несколько другими словами, существует ли хотя бы одна модель аксиоматики $M1$—$M4$?

Если оставить этот вопрос без ответа (или, хотя бы, обсуждения), то не совсем понятно, чем именно мы занимались в предыдущей лекции. Быть может, тем, чего на самом деле и не бывает вовсе ? Ситуация довольна типична для современного образования: аксиоматический подход к изложению того или иного раздела математики достаточно прочно утвердился за последние десятилетия. И действительно, такой подход быстрее всего ведет к цели — он позволяет наиболее лаконично изложить основные результаты. Однако, «аксиоматический подход имеет те же преимущества перед непосредственным построением, что и воровство перед честным трудом», (Б. Рассел).

В нашем конкретном случае существовние хотя бы одной меры $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ оказывается вопросом на порядок сложнее, нежели вывод из аксиоматики тех или иных свойств. Ответ все же положителен, но он займет **три** последующие лекции. Для подтверждения нетривиальности ситуации рассмотрим еще одну очень естественную аксиому:

($M0$): мера $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ всюду определена, т. е. $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{R}}$.

Оказывается, что добавление этой внешне безобидной аксиомы к аксиомам $M1$—$M4$ приводит к тому, что **таких** мер уже просто не существует.

Теорема 12.1. Не существует ни одного отображения $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ обладающего всеми свойствами $M0$—$M4$.

Доказательство. Разумеется, от противного. Допустим, что такое отображение $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ все же существует.

Назовем числа x и y эквивалентными, если их разность есть рациональное число. Обозначение: $x \sim y$. Нетрудно видеть, что «$\sim$» действительно есть отношение эквивалентности: это следует из того, что $\mathbb{Q}$ — группа по сложению. Тогда вся числовая прямая $\mathbb{R}$ разобьется на непересекающиеся между собой классы эквивалентности по такому отношению эквивалентности. Класс эквивалентности фиксированной точки x образуют все сдвиги этой точки на рациональные числа. Классы эквивалентности по описанному отношению эквивалентности называются **классами рациональности**. Как следует из теории мощностей, различных классов рациональности — несчетно и, на самом деле, континуально. Кроме того, каждый класс рациональности всюду плотен на числовой прямой именно потому, что $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Для каждого класса рациональности произвольно выберем и зафиксируем ровно одну точку из этого класса, лежащую на отрезке $[-1, 1]$. Сделав такую операцию (возможную по аксиоме выбора!) для всех классов рациональности, мы получим некоторое подмножество $A \subset [-1, 1]$ отрезка $[-1, 1]$. Вот с этим-то множеством A и возникнут основные проблемы. Оно измеримо по $M0$ и его мера конечна по монотонности меры (теорема 11.3): ведь мера всего отрезка $[-1, 1]$ равна двум ($M1$). Значит возможны две ситуации: либо $\mu(A) = 0$, либо $0 < \mu(A) < +\infty$. Мы докажем, что в первом случае мера отрезка $[-1, 1]$ равна нулю, а во втором случае мера отрезка $[-3, 3]$ бесконечна, что и даст искомое противоречие. Переходим к реализации этого плана.

Обозначим R множество всех рациональных чисел на отрезке $[-2, 2]$. Это множество счетно. Фиксируем некоторый его пересчет: $R = \{r_1, r_2, \dots r_n, \dots\}$.

Для каждого $r_n \in R$ рассмотрим множество

$$A_n = A + r_n = \{a + r_n | a \in A\}.$$

Ясно, что каждое множество A_n расположено в отрезке $[-3, 3]$. Докажем следующие два факта:

(a) $(n \neq m) \implies (A_n \cap A_m = \emptyset)$;

(*б*) $[-1,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Допустим, что $z \in A_n \cap A_m$. Это означает, что точка z получается при сдвиге на $r_n \in R$ из некоторого числа $a \in A$ и, симметричным образом, эта же точка z получается при сдвиге на $r_m \in R$ из некоторого числа $a' \in A$. Но тогда $z = a + r_n = a' + r_m$. Значит разность между a и a' есть рациональное число, т. е. $a \in A$ и $a' \in A$ лежат в одном и том же классе рациональности. Однако по построению множества A, в каждом классе рациональности выбиралась ровно одна точка. Поэтому $a = a'$. Но тогда уже получается $r_n = r_m$, что противоречит условию.

Возьмем любую точку $x \in [-1,1]$ и рассмотрим ее класс рациональности. По построению множества A в этом классе рациональности уже зафиксирована некоторая точка $a \in A$, лежащая в отрезке $[-1,1]$. Это значит, что разность $x - a$ есть некоторое рациональное число $r \in \mathbb{Q}$. Так как $x \in [-1,1]$ и $a \in [-1,1]$, то $r = x - a \in [-2,2]$. Значит $r \in R$ и $r = r_n$ для некоторого индекса $n \in \mathbb{N}$. Тогда получаем, что

$$x = a + r = a + r_n \in A + r_n = A_n.$$

Итак, мы получили, что

$$[-1,1] \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [-3,3].$$

Используем теперь (впервые за две лекции !) аксиому $M2$. Она гарантирует, что $\mu(A_n) = \mu(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если допустить, что $\mu(A) = 0$, то по счетной аддитивности ($M3$) и монотонности получаем, что мера отрезка $[-1,1]$ равна нулю. Если же $\mu(A) > 0$, то опять же по счетной аддитивности и монотонности получаем, что мера отрезка $[-3,3]$ бесконечна. Противоречие. □

Следствие 12.2 (Существование неизмеримых множеств). Для всякой меры $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,+\infty]$ с аксиомами $M1$—$M4$ найдется хотя бы одно неизмеримое множество, т. е. $\mathcal{M} \neq 2^{\mathbb{R}}$.

Как уже отмечалось, аксиома $M2$ нами почти не использовалась. Следующая теорема уточняет это наблюдение. Оказывается, что для реально встречающихся множеств (т. е. для борелевских множеств) свойство $M2$ выводится из свойств $M1, M3, M4$. Краткое объяснение таково: инвариантность относительно сдвигов для отрезков уже включена в формулировку свойства $M1$.

Теорема 12.3. Для всякого отображения $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ определенного на σ-алгебре всех борелевских числовых множеств из свойств $M1, M3, M4$ следует свойство $M2$.

Доказательство. По $M20$ верно что $\mu((a,b)) = b - a$. Значит

$$\mu((a,b)+t) = \mu((a+t, b+t)) = (b+t) - (a+t) = \mu((a,b)),$$

т. е. для интервалов инвариантность относительно сдвигов проверена. Она тогда получается для открытых числовых множеств. Если $G \subset \mathbb{R}$ открыто, то G есть объединение не более чем счетного числа дизъюнктных интервалов. Так как при сдвиге на $t \in \mathbb{R}$ меры этих составляющих интервалов не меняются, то не изменится при таком сдвиге и мера множества G.

Рассмотрим теперь компактное (= замкнутое и ограниченное) числовое множество K. Оно лежит в некотором отрезке $[\min K, \max K] = [a,b]$ и разность $[a,b] \setminus K = G$ есть открытое множество. Тогда по конечной аддитивности меры получаем

$$\mu(K+t) = \mu([a+t, b+t] \setminus (G+t)) = \mu([a+t, b+t]) - \mu(G+t) = \\ = \mu([a,b]) - \mu(G) = \mu(K).$$

Рассмотрим теперь замкнутое и неограниченное числовое множество F. Представим его в виде объединения растущей последовательности компактных множеств:

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad K_n = F \cap [-n, n].$$

Тогда нетрудно видеть, что $F + t = \bigcup_{n=1}^{\infty}(K_n + t)$ и по непрерывности меры снизу получаем

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n + t) = \mu(F+t).$$

Итак, инвариантность меры относительно сдвигов доказана для борелевских множеств нулевого класса.

Для F_σ-множеств, т. е. для объединений счетного числа замкнутых множеств F_n доказательство сразу получается из непрерывности меры снизу, т.к. всегда можно перейти к множествам $F_1, F_1 \cup F_2, F_1 \cup F_2 \cup F_3, \ldots$ и с самого начала считать, что $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$. С G_δ-множествами надо поступить как выше: сначала разобраться с ограниченными множествами, а потом, используя счетные объединения перейти и к неограниченным.

После того, как доказана инвариантность относительно сдвигов для борелевских множеств первого класса следует двигаться по индукции (трансфинитной). $\square$

При любом способе построения меры основные технические сложности связаны с проверкой свойства счетной аддитивности. Следующий стандартный прием понадобится позже и нам: он выводит счетную аддитивность из **конечной** аддитивности и еще некоторых свойств меры.

Теорема 12.4 (Счетная аддитивность из конечной аддитивности). Пусть отображение $\nu\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,+\infty]$ определено на некоторой σ-алгебре $\mathcal{N} \subset 2^{\mathbb{R}}$ числовых множеств и пусть оно:

(а) монотонно, т. е.

$$(A, B \in \mathcal{N})\&(A \subset B) \implies (\nu(A) \le \nu(B));$$

(б) конечно аддитивно, т. е.

$$(A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathcal{N}) \implies \nu\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n)$$

(в) счетно полуаддитивно, т. е.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, \in \mathcal{N} \implies \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

Тогда отображение ν счетно аддитивно, т. е.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, \in \mathcal{N} \implies \nu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

Доказательство. Обозначим $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Тогда для каждого $N \in \mathbb{N}$ по монотонности и конечной аддитивности получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \nu\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n\right) \le \nu(A).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \le \nu(A).$$

Свойство счетной полуаддитивности автоматически гарантирует справедливость обратного неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \geq \nu(A).$$

$\square$

Другие меры

Пример 12.5 (Мера с аксиомами $M0, M3, M4$ и без $M1, M2$).

Построение. Такая мера естественно возникает в теории вероятностей при рассмотрении конечных (или счетных) вероятностных пространств.

Разобъем единичную массу на гирьки веса $p_1, p_2, p_3, \ldots$, зафиксируем на прямой точки $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и поместим вес p_1 в точку x_1, вес p_2 поместим в точку x_2, …

Для произвольного числового множества $A \in 2^{\mathbb{R}}$ вычислим его «вес»:

$$p(A) = \sum_{\{i | x_i \in A\}} p_i.$$

Получаем некоторое отображение $p\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,1]$. Любое числовое множество тогда p-измеримо и его p-мера не превосходит единицы. Так что $M0, M4$ очевидно верны, а $M1, M2$ столь же очевидно не имеют места: при сдвиге отрезка $[a,b]$ его «вес» конечно же может измениться и этот вес никак не связан с длиной $b-a$ отрезка. Счетная аддитивность интуитивно понятна, а формально следует из теорем о перестановках и группировках абсолютно сходящихся рядов:

$$p\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{\{i|x_i \in A_1\}} p_i + \sum_{\{i|x_i \in A_2\}} p_i + \sum_{\{i|x_i \in A_3\}} p_i + \ldots =$$

$$= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \ldots \quad \square$$

Пример 12.6 (Мера с аксиомами $M3, M4$ и без $M0, M1, M2$).

Построение. Этот пример меры опять же естественно возникает в теории вероятностей. На этот раз единичную массу мы рассредоточим не в дискретном множестве $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а «размажем» по всей числовой прямой (или по промежутку числовой прямой). Стандартный прием состоит в введении некоторой непрерывной функции плотности $p\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ для которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1.$$

Тогда «вес» множества $A \in 2^R$ определится так:

$$P(A) = \int_A p(t)dt.$$

Например, вес всей прямой $A = \mathbb{R}$ равняется единице и это есть максимально возможный вес. На отрезке $[a,b]$ будет «размазана» масса веса $\int_a^b p(t)dt$ и т.п. Счетная аддитивность возникающего отображения $P\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,1]$ следует из аддитивности римановского интеграла, а дополнительные сложности возникают с областью определения отображения P, т. е. со свойством $M0$. Дело в том, что не удается понять, как можно интегрировать функцию плотности p по **произвольному числовому множеству** A. Обычно ограничиваются рассмотрением борелевских множеств A, хотя уже и в этом случае приходится детально рассматривать обобщенные версии интегрирования числовых функций.

Типичный конкретный пример функции плотности дает функция

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

плотности нормального распределния вероятности с математическим ожиданием равным a и дисперсией (=степенью рассеяния) равной σ. При этом распределении вероятности вес лучей $(-\infty, a]$ и $[a, +\infty)$ равен по $1/2$, а вес отрезка $[a-3\sigma, a+3\sigma]$ составляет более $0,99$ (= правило «трех сигма»). □

По аналогии с мерой числовых множеств можно аксиоматически подойти и к определению меры плоских множеств.

Определение 12.7 (Аксиомы меры плоских множеств).

Мера — это отображение $\mu\colon 2^{\mathbb{R}^2} \to [0, +\infty]$, которое некоторым (не обязательно всем) плоским множествам, называемым μ-измеримыми, ставит в соответствие неотрицательные числа или плюс бесконечность так, что при этом выполняются следующие аксиомы:

(M1) любой квадрат $[a,b]\times[a,b]$ измерим и его мера равна $(b-a)^2$;

(M2) мера любого измеримого множества не меняется при движении этого множества;

(M3) для любой последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно непересекающихся измеримых множеств их объединение также измеримо и мера объединения равна сумме мер $\mu(A_n)$ множеств A_n;

(M4) разность любых двух измеримых множеств есть измеримое множество.

Большинство свойств меры плоских множеств автоматически выводятся из аксиом дословно также, как это было сделано в предыдущей лекции. Различия коснутся только мер конкретных поских множеств. Дело в том, что на плоскости нет теоремы, описывающей структуру ее открытых подмножеств. В этом смысле, числовая прямая есть уникальное метрическое пространство, в котором построение меры может быть проведено намного более экономными средствами, нежели в общем случае. Как и в случае прямой, именно построении модели для такой аксиоматики является наиболее сложным и содержательным вопросом. Отметим также, что во второй аксиоме можно, как и в случае прямой, ограничиться более слабым утверждением про инвариантности относительно только параллельных переносов: из нее выводится инвариантность относительно произвольных движений.

Аналогичен подход и к определению меры в трехмерном пространстве и т.д. Меры можно определять и не только на «прямолинейных» множествах типа прямой и плоскости.

Определение 12.8 (Аксиомы меры подмножеств единичной окружности S). Мера — это отображение $\mu\colon 2^S \to [0, +\infty)$, которое некоторым (не обязательно всем) подмножествам окружности, называемым μ-измеримыми, ставит в соответствие неотрицательные числа так, что при этом выполняются следующие аксиомы:

(M1) любая дуга $[a, b]$ измерима и ее мера равна радианной мере этой дуги;

(M2) мера любого измеримого множества не меняется при поворотах этого множества относительно центра окружности;

(M3) для любой последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно непересекающихся измеримых множеств их объединение также измеримо и мера объединения равна сумме мер $\mu(A_n)$ множеств A_n;

(M4) разность любых двух измеримых множеств есть измеримое множество.

Для таких мер на окружности мера всегда принимает только конечные значения, так как она монотонна, а вся окружность имеет конечную меры просто потому, что является дугой.

Если же говорить о мерах в произвольных множествах X без какой-либо заранее имеющейся структуры, то общее аксиоматическое определение меры принадлежит А. Н. Колмогорову.

Определение 12.9 (Аксиоматика А. Н. Колмогорова). Мера в произвольном множестве X — это счетно-аддитивное отображение

$$\mu\colon 2^X \to [0, +\infty]$$

область определения которого является некоторой σ-алгеброй $\mathcal{A}$ подмножеств множества X.

Мера называется вероятностной, если $\mu(X) = 1$. В таком случае тройку $(X, \dagger A, \mu)$ называют вероятностным пространством, а элементы σ-алгебры $\mathcal{A}$ называют событиями; значение меры $\mu(A)$ при этом называют вероятностью события $A \in \mathcal{A}$.

Тринадцатая лекция

Схема построения меры Лебега числовых множеств. Свойства длины открытых множеств

В следующих трех лекциях будет построена модель аксиоматики $M1$—$M4$. Построенная мера носит название **меры Лебега** в честь Анри Лебега, впервые предложившего ее явную и полную конструкцию в начале этого века. Мы будем обозначать меру Лебега буквой m, во избежание путаницы с обозначением μ аксиоматически заданной меры. Эта конкретная мера m обладает не только свойствами $M1$—$M4$, но и рядом других полезных качеств. Например, она **полна**, т. е.

$$(A \subset B)\&(m(B) = 0) \implies m(A) = 0.$$

Общая схема построения меры Лебега такова.

Шаг I. Сначала определяется длина $l\colon \{G\} \to [0, +\infty]$ открытых множеств и изучаются ее свойства. Существенным образом используется при этом теорема о структуре открытых числовых множеств и компактность отрезка.

Шаг II. Определяется внешняя мера Лебега $m^*\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$. Она всюду определена и ее значение для произвольного числового множества A равно инфимуму множества длин всех открытых покрытий этого множества

$$m^*(A) = \inf\{l(G) | G - \text{открыто},\ G \supset A\}.$$

К сожалению, выясняется, что внешняя мера Лебега не счетно-аддитивна и даже не конечно-аддитивна.

Шаг III. Определяются измеримые по Лебегу множества, как множества, которые с любой степенью точности могут быть приближены сверху открытыми множествами:

$$(A \text{ — измеримо по Лебегу}) \iff \\ \iff (\forall \varepsilon > 0 \exists G\colon G \text{ — открыто}, \quad G \supset A, m^*(G \setminus A) < \varepsilon).$$

Доказывается, что измеримые по Лебегу множества образуют σ-алгебру.

Шаг IV. Мера Лебега m определяется как ограничение внешней меры Лебега m^* на σ-алгебру всех измеримых по Лебегу множеств.

Известны различные подходы к построению меры Лебега. Из них принципиально различных — не менее четырех, см. список литературы. Подчеркнем пока общий момент. Во всех случаях сначала используется внешняя мера Лебега и только потом конструируется сама мера Лебега. В оригинальном изложении А. Лебега используется кроме того и внутренняя мера. Предлагаемая схема по мнению автора нова: она не встречалась в известной по теории меры литературе. Причина здесь, скорее всего, проста. При систематическом изложении теории меры авторы стремятся к наибольшей общности. Мы же ограничиваемся только числовой прямой.

Длина открытых множеств

Определение 13.1 (Длина открытых множеств).

(а) $l(\emptyset) = 0$;

(б) $l((a, b)) = b - a$;

(в) длина неограниченного интервала (= луча) равна $+\infty$;

(г) длина непустого открытого числового множества равна сумме длин составляющих его интервалов:

$$G = \bigsqcup I_n \implies l(G) = \sum l(I_n).$$

В последнем пункте (г) суммирование ведется по конечному или счетному множеству индексов n. Самым существенным образом при этом использована теорема 6.4 о структуре открытых числовых множеств. Приведем несколько примеров.

Пример 13.2. Найти длину открытого множества G, образованного окрестностями U_n натуральных чисел n радиусов $0,6^n$; $n \in \mathbb{N}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
&U_1 = U(1, 0.6) = (0.4, 1.6);\\
&U_2 = U(2, 0.36) = (1.64, 2.36);\\
&U_3 = U(3, 0.216) = (2.784, 3.216);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Следовательно окрестности U_n между собой попарно не пересекаются и поэтому являются составляющими интервалами открытого множества G. Значит по определению

$$l(G) = \sum_{n=1}^{\infty} l(U_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(0.6)^n = 2 \cdot \frac{0.6}{1-0.6} = 3. \quad \square$$

Пример 13.3. Найти длину открытого множества G, образованного окрестностями U_n натуральных чисел n радиусов $0,7^n$; $n \in \mathbb{N}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
&U_1 = U(1; 0{,}7) = (0{,}3; 1{,}7);\\
&U_2 = U(2; 0{,}49) = (1{,}51; 2{,}49);\\
&U_3 = U(3; 0{,}343) = (2{,}657; 3{,}343);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Дословное повторение предыдущего вычисления невозможно, так как первые две окрестности пересекаются между собой. А вот их объединение вместе с остальными окрестностями $U_3, U_4, \dots$ как раз и дает разложение множества G на составляющие интервалы. Значит

$$l(G) = l(U_1 \cup U_2) + \sum_{n=3}^{\infty} l(U_n) = (2{,}49 - 0{,}3) + 2\sum_{n=3}^{\infty}(0{,}7)^n = 2{,}19 + 2\frac{0{,}343}{0{,}3} \approx 4{,}47. \quad \square$$

Ясно, что для радиусов $0.8^n, 0.9^n, 0.99^n, \dots$ вычисления существенно усложнятся. Вот, видимо, самый «плохой» пример такого рода.

Пример 13.4. Существует открытое множество G длины меньшей единицы, содержащее все рациональные числа.

Решение. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно. Фиксируем какую-нибудь его нумерацию (без повторений):

$$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}.$$

Пусть I_1 — любой интервал длины 0.5 с иррациональными концами и содержащий точку r_1. Вычеркнем из имеющегося списка рациональных чисел все числа, лежащие в I_1. Среди оставшихся возьмем точку с наименьшим номером n_2.

Пусть I_2 — любой интервал длины меньшей 0.25 с иррациональными концами, содержащий точку r_{n_2} и непересекающийся с первым интервалом. Среди рациональных чисел, не лежащих в объединении $I_1 \sqcup I_2$, выберем точку с наименьшим номером n_3.

Пусть I_3 — любой интервал длины меньшей 0,125 с иррациональными концами, содержащий точку r_{n_3} и непересекающийся с первыми двумя интервалами. Среди рациональных чисел, не лежащих в объединении $I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3$, выберем точку с наименьшим номером n_4

...

Объединение всех этих попарно непересекающихся интервалов даст открытое множество G, которое конечно же содержит все рациональные числа и, кроме них, много и иррациональных чисел. Так как рациональные числа всюду плотны на прямой, то множество G покрывает «почти» всю прямую. В то же время, по построению

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n \implies l(G) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Так как длина всей прямой бесконечна, то какие-то точки заведомо останутся не покрытыми множеством G. Однако явно указать их нет никакой возможности. Во-первых, нумерация рациональных чисел не задана никаким явным образом. Во-вторых, даже при наличии формулы для такой нумерации явное указание точки $x \notin G$ также затруднтельно. □

Свойства длины открытых множеств

Теорема 13.5 (Инвариантность относительно сдвигов).

$$l(G + t) = l(G).$$

Доказательство. По определению длины интервала

$$l((a, b) + t) = l((a + t, b + t)) = b - a = l((a, b)).$$

Значит,

$$l(G+t) = l\Big(\Big(\bigsqcup_n (a_n, b_n)\Big) + t\Big) = l\Big(\bigsqcup_n (a_n + t, b_n + t)\Big) =$$
$$= \sum_n (b_n - a_n) = l(G).$$

□

Теорема 13.6 (Счетная аддитивность длины).

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} G_n \implies l(G) = \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n).$$

Доказательство. Каждое из открытых множеств G_n разобъем на составляющие интервалы:

$$G_1 = I_{11} \sqcup I_{12} \sqcup I_{13} \sqcup \ldots; G_2 = I_{21} \sqcup I_{22} \sqcup I_{23} \sqcup \ldots; \quad G_3 = I_{31} \sqcup I_{32} \sqcup I_{33} \sqcup \ldots$$

Так как множества G_n попарно не пересекаются, то и все интервалы I_{nk} попарно не пересекаются, т. е. все эти интервалы и есть составляющие интервалы открытого множества G. Значит

$$l(G) = \sum_{n,k} l(I_{nk}) = [l(I_{11}) + l(I_{12}) + l(I_{13}) + \ldots] +$$
$$+ [l(I_{21}) + l(I_{22}) + l(I_{23}) + \ldots] + \ldots = \sum_n l(G_n).$$

Отметим, что еще раз использованы теоремы о перестановках и группировках числовых рядов с неотрицательными членами. □

Теорема 13.7 (Монотонность длины).

$$G_1 \subset G_2 \implies l(G_1) \leq l(G_2).$$

Доказательство. В случае, когда $l(G_2) = \infty$ доказывать нечего. Значит можно рассматривать только открытые множества конечной длины.

(a) Пусть G_2 состоит из одного интервала (a, b), а $G_1 = \sqcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n)$. Так как интервалов конечно, то можно считать, что они пронумерованы в естественном порядке «слева направо»:

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq a_3 < \ldots \leq a_N < b_N \leq b.$$

Тогда

$$l(G_2) = b - a = (a_1 - a) + (b_1 - a_1) + (a_2 - b_1) + \ldots + \\ + (b_N - a_N) + (b - b_N) \geq \sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n) = l(G_1).$$

(*б*) Пусть G_2 состоит из одного интервала (a, b), а $G_1 = \sqcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$. Тогда длина $l(G_1)$ множества G_1 равна сумме сходящегося числового ряда, все частичные суммы которого не превосходят числа $l(G_2)$ (см. (а)). Значит $l(G_1) \leq l(G_2)$.

(*в*) Пусть

$$G_1 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_{1n} \quad \subset \quad G_2 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_{2k}.$$

Тогда, применяя (*б*) к каждому из составляющих интервалов множества G_2, получаем

$$l(G_1) = \sum_{\{n | I_{1n} \subset I_{21}\}} l(I_{1n}) + \sum_{\{n | I_{1n} \subset I_{22}\}} l(I_{1n}) + \\ + \sum_{\{n | I_{1n} \subset I_{23}\}} l(I_{1n}) \ldots \leq l(I_{21}) + l(I_{22}) + l(I_{23}) \ldots = l(G_2).$$

$\square$

Теорема 13.8 (Счетная полуаддитивность длины).

$$G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \implies l(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n).$$

Доказательство. В предыдущей лекции счетную полуаддитивность аксиоматически заданной меры удалось вывести из счетной аддитивности. Но удалось это, так как область определения такой меры являлась σ-алгеброй множеств. Для открытых множеств (= области определения длины l) это уже не так: разность двух открытых множеств, как правило, не открыта.

Доказательство этой теоремы разобъем на несколько шагов.

Лемма 1. Если отрезок покрыт конечным или счетным числом интервалов, то сумма длин этих интервалов больше разности концов этого отрезка (= длины отрезка).

Доказательство. Так как отрезок — компактное множество, то из покрытия отрезка счетным числом интервалов всегда можно оставить только конечное число интервалов, покрывающих отрезок. Значит, достаточно рассматривать только конечные покрытия отрезка интервалами. Для них доказательство проводится индукцией по числу n интервалов покрытия. □

$n = 1$. Тогда

$$[a, b] \subset (c, d) \implies b - a < d - c.$$

Индукционный переход. Пусть утверждение верно **для любого** отрезка и любых покрытий, состоящих из n интервалов. Докажем утверждение для любого отрезка $[a, b]$ и его покрытия, состоящего из любых $(n+1)$ интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_n, I_{n+1}$. Можно считать, что $a \in I_1$.

Если интервалы $I_2, I_3, \ldots, I_{n+1}$ покрываают весь отрезок $[a, b]$, то по индукционному предположению

$$b - a < l(I_2) + l(I_3) + \ldots + l(I_{n+1}) < \sum_{k=1}^{n+1} l(I_k).$$

В противном случае, перенумеруем интервалы так, чтобы второй по номеру из них I_2 пересекался бы с первым. При этом $a \notin I_2$. Возьмем в пересечении $I_1 \cap I_2$ произвольную точку $c \in (a, b)$. Тогда к отрезку $[c, b]$ применимо индукционное предположение и значит

$$b - c < l(I_2) + l(I_3) + \ldots + l(I_{n+1}).$$

Складывая с очевидным неравенством $c - a < l(I_1)$, получаем требуемое

$$b - a = (c - a) + (b - c) < l(I_1) + l(I_2) + l(I_3) + \ldots + l(I_{n+1}).$$

□

Лемма 2. Если интервал I покрыт конечным или счетным числом интервалов, то сумма длин этих интервалов больше или равна длины $l(I)$ этого интервала.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай ограниченного интервала $I = (a, b)$. Произвольно выберем $\varepsilon < (b - a)/2$ и к отрезку

$[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ применим лемму 1. Получим, что сумма длин интервалов покрытия больше чем $(b-\varepsilon)-(a+\varepsilon)=b-a-2\varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое (не строгое) неравенство.

Для луча $(-\infty, b)$ (или луча $(a, +\infty)$) достаточно использовать предыдущий абзац для интервалов (a, b) с $a \to -\infty$ (или интервалов (a, b) с $b \to +\infty$). □

Лемма 3. Теорема верна в случае, когда G есть интервал (a, b).

Доказательство. Каждое из открытых множеств G_n разобъем на составляющие интервалы:

$$G_1 = I_{11} \sqcup I_{12} \sqcup I_{13} \sqcup \ldots; G_2 = I_{21} \sqcup I_{22} \sqcup I_{23} \sqcup \ldots; G_3 = I_{31} \sqcup I_{32} \sqcup I_{33} \sqcup \ldots; \ldots$$

Ко множеству всех этих интервалов I_{nk} и интервалу I применим лемму 2. Получим

$$b-a \leq \sum_{n,k} l(I_{nk}) = [l(I_{11})+l(I_{12})+l(I_{13})+\ldots]++[l(I_{21})+l(I_{22})+l(I_{23})+\ldots]+\ldots =$$

□

Доказательство теоремы 13.8. Пусть G произвольное непустое открытое числовое множество. Разобъем его на составляющие интервалы

$$G = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup \ldots = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Обозначим $G_n \cap I_k = G_{nk}$ — открытое множество. При фиксированном n и меняющемся k множества G_{nk} дизъюнктны. Тогда

$$I_1 \subset \left(\bigcup_n G_{n1}\right) \bigcap I_1 = \bigcup_n \left(G_n \bigcap I_1\right) = \bigcup_n G_{n1};$$

$$I_2 \subset \bigcup_n G_{n2}; \quad I_3 \subset \bigcup_n G_{n3} \ldots;$$

К каждому из этих включений применим лемму 3, сложим полученные неравенства и поменяем порядок суммирования

$$l(G) = \sum_k l(I_k) \leq \sum_{nk} l(G_{nk}) = \sum_k l(G_{1k}) + \sum_k l(G_{2k}) + \sum_k l(G_{3k}) + \ldots$$

К каждой из сумм из правой части последнего неравенства применима счетная аддитивность длины:

$$\sum_k l(G_{nk}) = l\left(\bigsqcup_k G_{nk}\right).$$

Из монотонности длины следует

$$\bigsqcup_k G_{nk} \subset G_n \implies l\left(\bigsqcup_k G_{nk}\right) \leq l(G_n).$$

Складывая все эти неравенства по всем n, получаем, что

$$l(G) \leq \sum_n l(G_n).$$

$\square$

Последнюю теорему этой лекции мы оставим без строгого доказательства, а лишь проиллюстрируем ее содержание.

Теорема 13.9 (Длина объединения двух множеств).

$$l(G_1) + l(G_2) = l(G_1 \cup G_2) + l(G_1 \cap G_2).$$

Если равномерно замазать множество G_1 красной краской, а множество G_2 — синей краской, то можно считать, что в левой части равенства стоит вес использованных двух красок. При этом точки пересечения $G_1 \cap G_2$ будут покрашены дважды. Значит, если считать вес всей краски, то надо к весу краски, необходимой для покрытия объединения $G_1 \cup G_2$ еще добавить вес краски для пересечения. Но эта сумма как раз равна правой части равенства.

Вообще, равенства типа равенства из теоремы 13.9 весьма распространены. Например, если рассматривать только конечные множества и вместо длины говорить о числе элементов множества, то получится:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

(Если в классе 30 учеников, каждый из которых или умный или красивый и если из них 23 умных и 17 красивых, то ровно 10 учеников одновременно и умные и красивые.)

Четырнадцатая лекция

Внешняя мера Лебега и измеримые по Лебегу множества

Определение 14.1 (Внешняя мера Лебега). Внешней мерой $m^*(A)$ числового множества $A \subset \mathbb{R}$ называется инфимум множества длин открытых множеств, покрывающих множество A:

$$m^*(A) = \inf\{l(G) | G - \text{открыто},\ G \supset A\}.$$

Перед конкретными примерами сразу же отметим важное общее свойство внешней меры: *внешняя мера Лебега всюду определена.* Действительно, для любого числового множества A имеется хотя бы одно открытое множество G, покрывающее его. Например, $G = \mathbb{R}$. Следовательно, в определении 14.1 инфимум берется у *непустого* множества длин всех покрытий и именно поэтому всегда существует (хотя может быть и бесконечным).

Пример 14.2. $m^*([a,b]) = m^*([a,b)) = m^*((a,b]) = b - a$.

Рассмотрим случай отрезка $[a,b]$. Если открытое множество G содержит отрезок $[a,b]$, то оно содержит и интервал (a,b). Значит по монотонности длины открытых множеств получаем

$$l(G) \geq l((a,b)) = b - a.$$

Для любого положительного ε рассмотрим интервал $G = (a - \varepsilon/3, b + \varepsilon/3)$, покрывающий отрезок $[a,b]$. По определению длины интервала получаем

$$l(G) = (b-a) + \frac{2\varepsilon}{3} < (b-a) + \varepsilon.$$

Значит, мы проверили два факта:

$$\begin{aligned} &(1) \quad (G \supset [a,b]) \Longrightarrow (l(G) \geq b-a);\\ &(2) \quad \varepsilon > 0 \exists G \supset [a,b] \colon l(G) < (b-a)+\varepsilon. \end{aligned}$$

По определению инфимума, это и означает, что $m^*([a,b]) = b - a$. □

Пример 14.3. Внешняя мера любого конечного и любого счетного множества равна нулю.

Рассмотрим случай счетного множества $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. По определению 14.1 внешняя мера Лебега вообще любого множества неотрицательна. Значит остается проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists G \supset A \colon l(G) < \varepsilon.$$

Примерно как в примере 13.4., покроем точку a_1 интервалом I_1 длины меньше $\varepsilon/2$, точку a_2 — интервалом I_2 длины меньше $\varepsilon/4$ и т.д. Открытое множество G, равное объединению всех этих (быть может, и пересекающихся) интервалов, очевидно, покрывает все счетное множество $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, а длина множества G оценивается сверху с помощью счетной полуаддитивности длины открытых множеств:

$$l(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \quad \square$$

Следующий пример показывает, что нулю может равняться и внешняя мера *континуального* множества. Нам потребуется канторовское множество $\mathbb{K}$, лежащее на отрезке $[0,1]$, см. восьмую лекцию.

Пример 14.4. Внешняя мера канторовского множества $\mathbb{K}$ равна нулю.

Как и в предыдущем примере, достаточно проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists G \supset \mathbb{K} \colon l(G) < \varepsilon.$$

Выберем натуральное n настолько большим, чтобы

$$\frac{2^n}{3^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

и рассмотрим n-й шаг построения канторовского множества. После его выполнения на отрезке $[0,1]$ останутся 2^n отрезочков длины 3^{-n}. При этом минимальное расстояние между этими отрезками опять же равно 3^{-n}. Левые концы всех этих отрезков сдвинем влево на $0,5\cdot 3^{-n}$, а правые концы — на столько же увеличим и сосчитаем сумму длин «раздутых» интервалов. Длина каждого из этих интервалов равна длине отрезочка плюс удвоенная длина увеличения, количество всех этих интервалов равно 2^n и они, по построению, между собой не пересекаются. Значит, в итоге мы построили открытое множество G, покрывающее канторовское множество и при этом

$$l(G) = 2^n \cdot (\frac{1}{3^n} + 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{3^n}) = 2 \cdot \frac{2^n}{3^n} < \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 14.5 (Свойства внешней меры Лебега).

Внешняя мера Лебега m^*:

(1) открытого множества G совпадает с его длиной $l(G)$;

(2) инвариантна относительно сдвигов, т. е. $m^*(A+t) = m^*(A), A \subset \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$;

(3) счетно полуаддитивна;

(4) монотонна;

(5) полна, т. е. $(A \subset B)\&(m^*(B) = 0) \Longrightarrow m^*(A) = 0$;

(6) не является счетно аддитивной;

(7) не является конечно аддитивной.

Доказательство. (1). Если открытое множество G' покрывает G, то по монотонности длины $l(G') \geq l(G)$. В частном же случае $G' = G$ получаем $l(G') = l(G)$. Значит

$$l(G) = \min\{l(G') | G' \supset G\}.$$

(2). Если все открытые покрытия множества A сдвигать на t, то получатся все открытые покрытия множества $A + t$. Остается вспомнить, что длины открытых множеств при сдвигах не меняются.

(3). Мы хотим проверить, что $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

Зафиксируем положительное ε и по определению внешней меры найдем для каждого $n \in \mathbb{N}$ открытое покрытие G_n множества A_n так, чтобы

$$l(G_n) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Тогда открытое множество $G = \cup G_n$ покрывает объединение $\cup A_n$ и при этом по счетной полуаддитивности длины и по выбору множеств G_n получаем

$$l(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Значит
$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le l(G) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$
Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое неравенство.

(4). Следует из всюду определенности, счетной полуаддитивности внешней меры и того простого факта, что внешняя мера пустого множества равна нулю.

(5). По монотонности и всюду определенности внешней меры получаем $0 \le m^*(A) \le m^*(B) = 0$, т. е. $m^*(A) = 0$.

(6). От противного, допустим, что $m^*\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ счетно аддитивна. Но тогда она обладает всеми свойствами $M0$—$M4$ из аксиоматического определения меры, см.лекции 11 и 12. Получаем противоречие с теоремой 12.1.

(7). От противного, допустим, что $m^*\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ конечно аддитивна. Так как m^* уже счетно полуаддитивна и монотонна, то по теореме 12.4 m^* счетно аддитивна, что противоречит предыдыущему пункту (6). □

Измеримые по Лебегу множества

Измеримые по Лебегу числовые множества определяются, как множества, которые с любой степенью точности (относительно внешней меры Лебега) могут быть приближены сверху открытыми множествами.

Определение 14.6.
$$(A \text{ — измеримо по Лебегу}) \iff$$
$$\iff (\forall \varepsilon > 0 \exists G\colon G \text{ — открыто}, \quad G \supset A, m^*(G \setminus A) < \varepsilon).$$

Пример 14.7. Любое открытое множество и любой промежуток являются измеримыми по Лебегу множествами

Если множество G открыто, то оно само есть свое открытое покрытие и при этом
$$m^*(G \setminus G) = m^*(\emptyset) = 0 < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь случай отрезка $[a,b]$. Пусть $G = (a - \varepsilon/3, b + \varepsilon/3)$. Тогда, учитывая совпадение внешней меры и длины для открытых множеств, получаем $G \supset [a,b]$ и
$$m^*(G \setminus [a,b]) = l((a - \varepsilon/3, a) \cup (b, b + \varepsilon/3)) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Пример 14.8. Любое множество, внешняя мера которого равна нулю, измеримо по Лебегу. Например, измеримо любое конечное множество, любое счетное множество, канторовское множество $\mathbb{K}$

Равенство $m^*(A) = 0$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists G \supset A \colon l(G) < \varepsilon.$$

По монотонности внешней меры получаем тогда, что

$$m^*(G \setminus A) \leq m^*(G) = l(G) < \varepsilon.$$

Пример 14.9. При сдвиге измеримые множества переходят в измеримые.

Пусть множество A измеримо и пусть $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ верна импликация

$$(m^*(G \setminus A) < \varepsilon) \Longrightarrow (m^*((G + t) \setminus (A + t)) < \varepsilon),$$

т. е. если открытое множество G покрывает множество A с точностью ε, то сдвиг $G + t$ покрывает множество $A + t$ с той же точностью. Значит множество $A + t$ измеримо, как только измеримо множество A. $\square$

Наша основная цель теперь — доказать, что, во-первых, измеримых множеств «много» и, во-вторых, все обычно встречающиеся в практике числовые множества измеримы. Формально это звучит так.

Теорема 14.10 (Свойства измеримых по Лебегу множеств). Множество $\mathcal{L}$ всех измеримых по Лебегу числовых множеств образует σ-алгебру, содержащую σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ всех борелевских числовых множеств.

Доказательство. Доказательство разобьем на ряд лемм. При этом нам понадобится следующее теоретико-множественное включение, верное для любых, не обязательно числовых, множеств:

$$\bigcup_n X_n \setminus \bigcup_n Y_n \ \subset \ \bigcup_n (X_n \setminus Y_n).$$

Проверим сначала это включение. Если x лежит в его левой части, то для какого-то индекса n_0 верно $x \in X_{n_0}$ и ни при каком индексе n неверно $x \in Y_n$. В частности, $x \notin Y_{n_0}$. Но тогда $x \in X_{n_0} \setminus Y_{n_0}$ и поэтому x лежит в правой части этого включения.

Лемма 1. Объединение счетного числа измеримых множеств измеримо

Пусть множества $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ измеримы. Тогда для любого положительного ε и для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ найдется открытое покрытие G_n множества A_n такое, что

$$m^*(G_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Объединение $G = \cup G_n$ всех этих покрытий будет, очевидно, открытым покрытием объединения $A = \cup A_n$ и при этом по счетной полуаддитивности, монотонности внешней меры и с учетом доказанного ранее теоретико-множественного включения, получаем

$$m^*(G \setminus A) == m^*(\bigcup_n G_n \setminus \bigcup_n A_n) \leq m^*(\bigcup_n G_n \setminus A_n) \leq$$

$$\leq \sum_n m^*(G_n \setminus A_n) < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Следовательно, объединение $A = \cup_n A_n$ измеримо по Лебегу.

Лемма 2. Любое компактное числовое множество измеримо по Лебегу

Пусть K — компакт на числовой прямой. Тогда K ограничено и замкнуто (см. теорема 9.1). В частности, существуют $a = minK$ и $b = maxK$ и весь компакт K лежит в отрезке $[a, b]$.

Разность $G = [a, b] \setminus K$ есть открытое множество и поэтому есть объединение не более чем счетного числа попарно не пересекающихся интервалов (a_n, b_n).

(a) Пусть этих интервалов конечно, т. е. $G = \bigcup_{n=1}^{N}(a_n, b_n)$. Тогда компакт K получен из отрезка $[a, b]$ удалением дизъюнктных интервалов $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_N, b_N)$, не содержащих концы a и b отрезка $[a, b]$. Но в таком случае весь компакт K есть просто объединение конечного числа каких-то отрезков и точек. Отрезки и точки измеримы; измеримо и пустое множество (см.примеры 14.7, 14.8). По лемме 1 получаем измеримость K.

(б) Пусть этих интервалов счетно, т. е. $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$. Тогда сумма их длин не превосходит длины интервала (a, b), т. е. числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ сходится. Для любого положительного ε выберем индекс $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} (b_n - a_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $G_N = \bigcup_{n=1}^N (a_n, b_n)$. и $K_N = [a, b] \setminus G_N$. Тогда (см. (a)) множество K_N измеримо и значит для некоторого открытого множества G верно

$$(G \supset K_N)\&(m^*(G \setminus K_N) < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Так как $K_N \supset K$, то G есть также открытое покрытие всего компакта K. Оценим внешнюю меру разности $G \setminus K$. Заметим для этого, что разность $K_N \setminus K$ есть просто объединение всех интервалов (a_n, b_n) с индексами n, большими индекса N. Итак,

$$m^*(G \setminus K) = m^*((G \setminus K_N) \cup (K_N \setminus K)) \leq m^*((G \setminus K_N)+$$

$$+m^*(K_N \setminus K)) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Лемма 3. Любое замкнутое числовое множество измеримо.

Пусть F — замкнутое числовое множество. Тогда

$$F = F \bigcap \mathbb{R} = F \bigcap (\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \bigcap [-n, n]).$$

Каждое из множеств $F \bigcap [-n, n]$ замкнуто и ограничено, т. е. компактно и по лемме 2 каждое такое множество измеримо. Тогда F измеримо по лемме 1. □

Лемма 4. Дополнение до измеримого множества измеримо.

Пусть множество A измеримо и $B = \mathbb{R} \setminus A$ — его дополнение. Для доказательства измеримости множества B возьмем любое положительное ε и зафиксируем открытое покрытие G измеримого множества A так, чтобы

$$m^*(G \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По определению внешней меры Лебега последнее неравенство означает наличие открытого покрытия G' разности $G \setminus A$ такого, что

$$l(G') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Дополнение $F = \mathbb{R} \setminus G$ открытого множества G замкнуто и по лемме 3 — измеримо. Значит найдется открытое покрытие G'' множества F такое, что

$$m^*(G'' \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По построению верны импликации $(x \in B) \Longrightarrow (x \notin A)$ и $(x \notin F) \Longrightarrow (x \in G)$. Значит

$$B = (B \setminus F) \cup F \subset (G \setminus A) \cup F \ \subset \ G' \cup G''.$$

Рассмотрим открытое покрытие $\tilde{G} = G' \cup G''$ множества B и оценим внешнюю меру разности $\tilde{G} \setminus B$.

$$m^*(\tilde{G} \setminus B) = m^*((G' \cup G'') \setminus ((B \setminus F) \cup F)) \leq m^*(G' \setminus (B \setminus F)) +$$

$$+ m^*(G'' \setminus F) \leq l(G') + m^*(G'' \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Лемма 5. Пересечение счетного числа измеримых множеств измеримо.

Используем известное теоретико-множественное равенство («закон де Моргана»)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus A_n).$$

Все множества $\mathbb{R} \setminus A_n$ измеримы по лемме 4, их объединение измеримо по лемме 1, а дополнение до этого объединения измеримо опять же по лемме 4. $\square$

Леммы 1-5, а также очевидные включения $\emptyset \in \mathcal{L}$ и $\mathbb{R} \in \mathcal{L}$ доказывают, что множество $\mathcal{L}$ всех измеримых по Лебегу числовых множеств является σ-алгеброй.

Все открытые и все замкнутые множества измеримы, т. е. борелевские множества нулевого класса лежат в σ-алгебре $\mathcal{L}$. Операции счетных объединений и пересечений и перехода к дополнениям не выводят за рамки σ-алгебры $\mathcal{L}$. Значит, и *все* борелевские множества лежат в $\mathcal{L}$. Чуть более формально: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — есть *наименьшая* σ-алгебра, содержащая все открытые числовые множества. Раз все открытые множества лежат в σ-алгебре $\mathcal{L}$, то $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$. Теорема 14.10 доказана. $\square$

В заключение лекции остановимся на следующем вопросе. Каких числовых множеств «больше»: борелевских или же измеримых по Лебегу ? Так как $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$, то, почти эквивалентным образом, можно сформулировать вопрос и так. Существуют ли не борелевские, но измеримые по Лебегу числовые множества ?

Теорема 14.11 (Мощность множества всех измеримых множеств). Множество всех измеримых по Лебегу числовых множеств гиперконтинуально. Следовательно существуют измеримые по Лебегу, но не борелевские множества.

Доказательство. Так как $\mathcal{L} \subset 2^{\mathbb{R}}$, то

$$|\mathcal{L}| \leq |2^{\mathbb{R}}| = 2^{\rfloor}.$$

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим канторовское множество $\mathbb{K}$. Его внешняя мера $m^*(\mathbb{K})$ равна нулю (пример 14.4) и поэтому $\mathbb{K}$ измеримо (пример 14.8). Более того, в силу полноты внешней меры m^* (теорема 14.5 (5)) и *любое* подмножество $H \subset \mathbb{K}$ канторова множества $\mathbb{K}$ также имеет нулевую внешнюю меру и, значит, также измеримо. Но $\mathbb{K}$ континуально и поэтому $2^{\mathbb{K}}$ гиперконтинуально. Значит

$$(2^{\mathbb{K}} \subset \mathcal{L}) \implies (2^{\rfloor} = |2^{\mathbb{K}}| \leq |\mathcal{L}|).$$

По теореме Кантора—Бернштейна $|\mathcal{L}| = 2^{\rfloor}$. Так как $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = \rfloor$, то σ-алгебры всех борелевских и всех измеримых множеств различны между собой, т. е. существуют не борелевские, но измеримые по Лебегу множества.

На самом деле, $|\mathcal{L} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R})| = 2^{\rfloor}$, т. е. не борелевских измеримых множеств «на порядок» больше, чем борелевских. $\square$

Пятнадцатая лекция

Счетная аддитивность меры Лебега числовых множеств. Схема построения меры Лебега плоских множеств

Всем хороша внешняя мера Лебега! И монотонна она, и инвариантна относительно сдвигов, и совпадает с длиной, где надо, и счетно полуаддитивна и даже — всюду определена. Но слишком хорошо — тоже нехорошо: именно из-за большого числа хороших свойств внешняя мера Лебега m^* не счетно аддитивна и даже не конечно аддитивна. Более конкретно, существуют числовые множества, которые можно так разбить на непересекающиеся части A и B, что

$$m^*(A \sqcup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

Таково краткое содержание предыдущей лекции.

Остается ответить на два классических вопроса: «кто виноват?» и «что делать??» Внешняя мера — не виновата, просто числовых множеств оказывается жутко много. Отсюда и ответ на второй вопрос: надо рассматривать не все вообще числовые множества, а только «достаточно хорошие» числовые множества. В нашей ситуации в роли хороших множеств выступают измеримые по Лебегу множества.

Определение 15.1 (Мера Лебега). Мерой Лебега m называется ограничение внешней меры Лебега m^* на σ-алгебру $\mathcal{L}$ всех измеримых по Лебегу множеств:

$$m^*\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty], \quad m\colon \mathcal{L} \to [0,\infty], \quad m = m^*|_{\mathcal{L}}.$$

Теорема 15.2. Мера Лебега конечно аддитивна.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых *двух* непересекающихся измеримых по Лебегу множества A_1 и A_2 верно равенство

$$m(A_1 \sqcup A_2) = m(A_1) + m(A_2),$$

а далее действовать по индукции.

По полуаддиивности внешней меры сразу же получаем неравенство

$$m(A_1 \sqcup A_2) = m^*(A_1 \sqcup A_2) \leq m^*(A_1) + m^*(A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

Остается доказать, что

$$m(A_1 \sqcup A_2) \geq m(A_1) + m(A_2),$$

Рассмотрим положительное ε и, используя определение измеримости, выберем открытое покрытие G_1 множества A_1 и открытое покрытие G_2 множества A_2 так, чтобы

$$m^*(G_1 \setminus A_1) < \varepsilon, \quad m^*(G_2 \setminus A_2) < \varepsilon.$$

Тогда открытое множество $G = G_1 \cup G_2$ покрывает объединение $A_1 \sqcup A_2$. Монотонность внешней меры гарантирует неравенство

$$m(A_1) + m(A_2) = m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(G_1) + m^*(G_2).$$

Совпадение внешней меры с длиной для открытых множеств и свойства длины дают равенство

$$m^*(G_1) + m^*(G_2) = l(G_1) + l(G_2) = l(G_1 \cup G_2) +$$

$$+ l(G_1 \cap G_2) = m^*(G_1 \cup G_2) + l(G_1 \cap G_2).$$

Из полуаддитивности внешней меры следует неравенство

$$m^*(G_1 \cup G_2) = m^*((A_1 \sqcup A_2) \cup [(G_1 \cup G_2) \setminus (A_1 \sqcup A_2)]) \leq$$

$$\leq m(A_1 \sqcup A_2) + m((G_1 \cup G_2) \setminus (A_1 \sqcup A_2)).$$

В итоге, получаем неравенство

$$m(A_1) + m(A_2) \leq m(A_1 \sqcup A_2) + C + D, \quad \text{где}$$
$$C = m((G_1 \cup G_2) \setminus (A_1 \sqcup A_2)), D = l(G_1 \cap G_2).$$

Оценим слагаемые C и D.

$$C = m((G_1 \cup G_2) \setminus (A_1 \sqcup A_2)) \le m((G_1 \setminus A_1) \cup (G_2 \setminus A_2)) \le \\ \le m(G_1 \setminus A_1) + m(G_2 \setminus A_2) < 2\varepsilon.$$

Для оценки слагаемого D мы в первый и единственный раз используем дизъюнктность множеств A_1 и A_2.

Лемма. $G_1 \cap G_2 \ \subset \ (G_1 \setminus A_1) \cup (G_2 \setminus A_2)$.

Пусть $x \in G_1 \cap G_2$. Если $x \notin A_1$, то $x \in G_1 \setminus A_1$. Если же $x \in A_1$, то $x \notin A_2$ именно потому, что множества A_1 и A_2 не пересекаются между собой. Но тогда $x \in G_2 \setminus A_2$. Лемма доказана. □

Из доказанной леммы следует, что оценка для слагаемого D в точности такая же, как и для слагаемого C. Следовательно

$$m(A_1) + m(A_2) \le m(A_1 \sqcup A_2) + 4\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое неравенство

$$m(A_1 \sqcup A_2) \ge m(A_1) + m(A_2),$$

□

Теорема 15.3. Мера Лебега счетно аддитивна.

Доказательство. Мера Лебега m монотонна и счетно полуаддитивна так как этими свойствами обладает внешняя мера Лебега m^*, а мера m по определению есть ограничение внешней меры m на σ-алгебру $\mathcal{L}$. По теореме 15.2 мера Лебега m конечно аддитивна. Следовательно по теореме 12.4 мера Лебега счетно аддитивна. □

Следующая теорема, с одной стороны, является основной целью изложения в последних трех лекциях. С другой стороны, никакого отдельного ее доказательства не предполагается: все, что нужно уже доказано выше.

Теорема 15.4. Мера Лебега m является моделью аксиоматики $M1$—$M4$ меры числовых множеств.

Для удобства соберем вместе все свойства меры Лебега m.

СВОЙСТВА МЕРЫ ЛЕБЕГА ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

(m1) мера Лебега нормированна, $m([a, b]) = b - a$;

(m2) мера Лебега инвариантна относительно сдвигов, $m(A + t) = m(A)$;

(m3) мера Лебега счетно аддитивна,

$$m(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n);$$

(m4) разность двух измеримых по Лебегу множеств измерима по Лебегу;

(m5) множество $\mathcal{L}$ измеримых по Лебегу множеств является σ-алгеброй;

(m6) любое борелевское множество измеримо по Лебегу;

(m7) существуют измеримые по Лебегу, не борелевские множества;

(m8) существуют неизмеримые по Лебегу числовые множества;

(m9) мера Лебега открытого множества совпадает с его длиной;

(m10) мера Лебега монотонна, $(A \subset B) \Longrightarrow (m(A) \leq m(B))$;

(m11) мера Лебега счетно полуаддитивна,

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n);$$

(m12) мера Лебега полна,$(m(A) = 0)\&(B \subset A) \Longrightarrow (m(B) = 0)$;

(m13) мера Лебега конечно аддитивна;

(m14) мера Лебега непрерывна сверху и непрерывна снизу;

(m15) измеримые по Лебегу множества аппроксимируются открытыми и замкнутыми множествами.

В этом списке первые четыре свойства просто повторяют утверждение теоремы 15.4. Остальные свойства либо есть следствия этих четырех аксиом, либо выводятся из самой конструкции меры Лебега. Правда, о последнем, пятнадцатом свойстве еще не было никакой речи. Ликвидируем этот пробел.

Теорема 15.5. Для любого измеримого по Лебегу множества A и любого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество G и замкнутое множество F такие, что

$$(F \subset A \subset G)\&(m(G \setminus A) < \varepsilon)\&(m(A \setminus F) < \varepsilon).$$

Доказательство. По определению измеримости множества A найдется его открытое покрытие $G \supset A$ такое, что $m^*(G \setminus A) < \varepsilon$. Так как множества G и A измеримы, то измерима и их разность $G \setminus A$.

Поэтому внешняя мера Лебега такой разности совпадает с мерой Лебега, т. е. $m(G \setminus A) = m^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

Теперь используем измеримость дополнения $B = \mathbb{R} \setminus A$. Опять же по определению измеримости найдем открытое покрытие $G \supset B$ так, чтобы $m(G \setminus B) < \varepsilon$. Тогда дополнение $F = \mathbb{R} \setminus G$ открытого множества есть множество замкнутое и, очевидно, содержащееся во множестве A. Кроме того, $A \setminus F = (\mathbb{R} \setminus B) \setminus (\mathbb{R} \setminus G) = G \setminus B$ и поэтому $m(A \setminus F) = m(G \setminus B) < \varepsilon$. □

Следствие 15.6. (1) Множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда $A = F \cup H$ для некоторого множества F типа F_σ и для некоторого множества H нулевой меры;

(2) Множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда $A = G \setminus H$ для некоторого множества G типа G_δ и для некоторого множества H нулевой меры;

Доказательство. (1) Если $A = F \cup H$, то A измеримо, как объединение двух измеримых множеств. Для доказательства обратной импликации по теореме 15.5 для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$ найдем замкнутое множество $F'_n \subset A$ так, чтобы $m(A \setminus F'_n) < 1/n$. Пусть $F_1 = F'_1, F_2 = F'_1 \cup F'_2, F_3 = F'_1 \cup F'_2 \cup F'_3, \ldots$ Тогда $F'_n \subset F_n \subset A$ и $m(A \setminus F_n) \leq m(A \setminus F'_n) < 1/n$. Кроме того, $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ По аддитивности и по непрерывности меры Лебега снизу получаем, что

$$m(A) - \frac{1}{n} \leq m(F_n) \leq m(A), m(\bigcup_n F_n) = \lim_{n \to \infty} m(F_n) = m(A).$$

Значит F_σ-множество $F = \bigcup_n F_n$ лежит во множестве A и имеет такую же меру $m(F) = m(A)$. Но тогда $H = A \setminus F$ есть нужное множество нулевой меры. □

Наш курс лекций закончим кратким обзором того, как можно (и зачем нужно) строить меру Лебега на плоскости.

Мера Лебега плоских множеств

Начнем со школьного вопроса по геометрии. Что такое многоугольник и как найти (вычислить, определить) его площадь?

Кратко говоря, многоугольник — это плоская фигура, которую можно разрезать на треугольники. А для нахождения площади многоугольника следует осуществить такое разрезание, вычислить площадь каждого полученного треугольника («половина произведения высоты на сторону», «половина произведения сторон на синус угла между ними», по формуле Герона, и т.п.) и после этого все эти площади сложить.

В такой процедуре все правильно и хорошо за исключением того, что она (процедура) зависит от того, кто ее выполняет. Другими словами, каждый человек может по своему разрезать данный многоугольник на какие-то треугольники. В то же время, ответ, т. е. площадь многоугольника, очевидно, не должен от кого-либо зависеть. Проблема здесь имеется не только на уровне каких-то очень сложных многоугольников, но даже просто на уровне четырехугольников и треугольников: ведь их тоже можно по разному разрезать на треугольники. Итак, возникает следующий вопрос.

Почему площадь многоугольника не зависит от того, каким именно способом разрезать этот многоугольник на треугольники ?

Ответ на этот вопрос по элементарной планиметрии крайне затруднительно дать находясь в рамках самой элементарной планиметрии . По крайней мере, автору не известно ни одной успешной реализации такого ответа при таких ограничениях. Другими словами реальная ситуация такова, что ответ на элементарно поставленный вопрос удается дать только с использованием не элементарных средств, т. е. приходится использовать некоторую «науку».

Один из возможных подходов состоит в следующем. Строится некоторое отображение

$$m\colon 2^{\mathbb{R}^2} \to [0,\infty]$$

называемое плоской мерой Лебега, которое обладает следующими свойствами.

Во-первых, область определения меры m является σ-алгеброй, в которую входят практически все реально встречающиеся плоские множества: и многоугольники, и непрерывные кривые, и криволинейные трапеции, и, вообще, все открытые и все замкнутые плоские множества, и, соответственно их счетные пересечения и дополнения и т.п. Во-вторых, для треугольников такая мера m совпадает с их обычной площадью, а мера любого прямолиненого промежутка на плоскости равна нулю. В-третьих, мера эта счетно аддитивна. И наконец, определение этой меры ни от каких разбиений на какие-либо треугольники по построению не зависит. Как же, имея такую меру, ответить на вышепоставленный вопрос? Очень просто.

Допустим, что многоугольник P разбит на треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Для придания термину «разбиение» более точного смысла несколько преобразуем эти треугольники, удалив из P все стороны всех треугольников. Обозначим оставшиеся открытые и попарно не пересекающиеся треугольники, соответственно $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n'$, а удаленную из P часть обозначим Γ. Тогда мера $m(\Gamma)$ этой удаленной части равна нулю, так как Γ есть дизъюнктное объединение конечного числа прямолинейных промежутков меры которых равны нулю и можно использовать (конечную) аддитивность меры m. Тогда

$$\text{пл.}\Delta_1 + \text{пл.}\Delta_2 + \ldots + \text{пл.}\Delta_n =$$

$$= \text{пл.}\Delta_1' + \text{пл.}\Delta_2' + \ldots + \text{пл.}\Delta_n' + m(\Gamma) = m(\Delta_1') + m(\Delta_2') + \ldots +$$
$$+ m(\Delta_n') + m(\Gamma) = m(\Delta_1' \sqcup \Delta_2' \sqcup \ldots \sqcup \Delta_n' \sqcup \Gamma) = m(P).$$

Но ведь ровно такое же рассуждение можно провести и для разбиения многоугольника P на другие треугольники $\nabla_1, \ldots, \nabla_k$ и получить, что

$$\text{пл.}\nabla_1 + \text{пл.}\nabla_2 + \ldots + \text{пл.}\nabla_k = m(P).$$

Итак, для любого разбиения многоугольника на треугольники сумма их площадей оказывается равной одному и тому же числу. А именно, плоской мере Лебега данного многоугольника.

Как и в случае числовой прямой, остается теперь открытым только вопрос о существовании плоской меры Лебега. Мы ограничимся только самой конструкцией, опустив доказательства.

Шаг 0. (Кирпичики)

Открытым кирпичиком в евклидовой плоскости назовем любой открытый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, т. е. декартово произведение двух интервалов $(a, b) \times (c, d)$. Площадью открытого кирпичика назовем произведение длин его сторон.

Кирпичиком назовем и любой открытый кирпичик и любой открытый кирпичик, объединенный с какими-либо одной, двумя, тремя или всеми четырьмя его сторонами. Площадью кирпичика называется площадь соответствующего открытого кирпичика. Площадь кирпичиков конечно аддитивна: если $K = K_1 \sqcup \ldots \sqcup K_n$ есть разбиение кирпичика K на непересекающиеся кирпичики $K_1, \ldots, K_n$, то пл.$K =$ пл.$K_1 +$ пл.$K_2 + \ldots +$ пл.K_n.

Шаг 1. (Элементарные множества)

Плоское множество E, которое можно хоть одним способом представить в виде дизъюнкного объединения конечного числа кирпичиков называется *элементарным.* Оказывается, что объединение, пересечение и разность двух элементарных множеств также является элементарным множеством. Если $E = K_1 \sqcup K_2 \sqcup \ldots \sqcup K_n$ есть разбиение элементарного множества на кирпичики, то его площадью называется сумма площадей соответствующих кирпичиков:

$$\text{пл.}E = \text{пл.}K_1 + \text{пл.}K_2 + \ldots + \text{пл.}K_n.$$

Определение площади элементарного множества корректно, т. е.не зависит от способа его разбиения на кирпичики. Площадь элементарных множеств уже счетно аддитивна. Если $E, E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ - элементарные множества и $E = E_1 \sqcup E_2 \sqcup \ldots$, то

$$\text{пл.}E = \text{пл.}E_1 + \text{пл.}E_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \text{пл.}E_n.$$

Последнее утверждение совсем не тривиально: в его доказательстве существенна *компактность* замкнутых кирпичиков.

Шаг 2. (Внешняя мера Лебега плоских множеств)

Пусть плоское множество A покрыто конечным или счетным числом кирпичиков: $A \subset K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n \cup \ldots$ Найдем сумму площадей пл.$K_1 +$ пл.$K_2 + \ldots +$ пл.$K_n + \ldots$ покрывающих множество A кирпичиков. Наконец, рассмотрим инфимум множества таких сумм площадей, взятый по всем возможным таким покрытиям:

$$m^*(A) = \inf\{\sum_n \text{пл.}K_n | A \subset \bigcup_n K_n\}.$$

Полученное число называется *внешней мерой Лебега* множества A.

Как и в случае прямой, внешняя мера счетно полуаддитивна, монотоннна, определена для всех ограниченных множеств, инвариантна относительно параллельных переносов и для элементарных множеств совпадает с их площадью. Подчеркнем основное различие между случаями прямой и плоскости. На прямой имеется теорема о структуре открытых множеств (теорема 6.4) и тут при построении меры Лебега удается ограничиться только открытыми покрытиями. На плоскости такой теоремы нет. Например, открытый круг никак не представишь в виде дизъюнктного объединения счетного числа кирпичиков. Именно по этой причине при определении внешней меры Лебега приходится рассматривать более сложные покрытия. Несколько более сложно определяются и измеримые множества.

Шаг 3. (Измеримые по Лебегу плоские множества)

Объединение разностей $(A \setminus B) \cup (B \cup A)$ называется симметрической разностью множеств A и B, а величина

$$d^*(A, B) = m^*((A \setminus B) \cup (B \cup A))$$

называется «различием» этих множеств. «Различие» похоже на расстояние (метрику). Оно симметрично и для него выполняется неравенство треугольника:

$$d^*(A, B) = d^*(B, A), d^*(A, C) \leq d^*(A, B) + d^*(B, C).$$

К сожалению, бывает так, что $d^*(A, B) = 0$ для отличных друг от друга множеств $A \neq B$. Множество A называется ***измеримым по Лебегу***, если оно с любой степенью точности (относительно «различия» d^*) может быть приближено элементарными множествами

$$(A\text{ — измеримо по Лебегу}) \iff$$
$$\iff (\forall \varepsilon > 0 \exists E\colon E\text{ — элементарно}, \quad d^*(A, E) < \varepsilon).$$

Основной факт здесь состоит в том, что множество всех измеримых по Лебегу плоских множеств является σ-алгеброй, которая содержит все открытые (и значит, все замкнутые) плоские множества и которая инвариантна относительно параллельных переносов и относительно вообще любых движений евклидовой плоскости.

Шаг 4. (Мера Лебега плоских множеств)

Этот шаг дословно переносится со случая прямой.

Мерой Лебега m называется ограничение внешней меры Лебега m^* на σ-алгебру $\mathcal{L}$ всех измеримых по Лебегу плоских множеств:

$$m^*\colon 2^{\mathbb{R}^2} \to [0, \infty], \quad m\colon \mathcal{L} \to [0, \infty], \quad m = m^*|_{\mathcal{L}}.$$

И основная теорема теории меры на плоскости утверждает, что таким образом построенная плоская мера Лебега счетно аддитивна и инвариантна относительно движений плоскости.

Литература

[1] *Брудно А. Л.* Теория функций действительного переменного (Избранные главы). М.: Наука, 1971.

[2] *Кириллов А. А.*, *Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.

[3] *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функциольнального анализа, 4-е изд. М.: Наука, 1976.

[4] *Люмис Л.* Введение в абстрактный гармонический анализ. М.: ИЛ, 1956.

[5] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.

[6] *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1966.

[7] *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Физматгиз, 1965.