УДК 512.745

И. В. Аржанцев, М. Г. Зайденберг, К. Г. Куюмжиян

Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности

Будем говорить, что группа G действует на множестве X бесконечно транзитивно, если для любого $m \in \mathbb{N}$ диагональное действие группы G транзитивно на $X^m \setminus \Delta$, где $X^m \setminus \Delta$ – дополнение к объединению диагоналей в m-й декартовой степени множества X. Описываются три класса аффинных алгебраических многообразий, для которых группа автоморфизмов действует на множестве гладких точек бесконечно транзитивно. Первый класс образуют нормальные конусы над многообразиями флагов, второй – невырожденные торические многообразия, третий – итерированные надстройки над аффинными многообразиями с бесконечно транзитивной группой автоморфизмов описанного типа.

Библиография: 42 названия.

Ключевые слова: аффинное алгебраическое многообразие, автоморфизм, бесконечная транзитивность, дифференцирование.

Введение

Все рассматриваемые алгебраические многообразия предполагаются приведенными и неприводимыми. Если не оговорено противное, основное поле $\Bbbk$ считается алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики.

Эффективное действие аддитивной группы $G_{\mathrm{a}}(\Bbbk)$ на алгебраическом многообразии X определяет однопараметрическую унипотентную подгруппу в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. Обозначим через $\mathrm{SAut}(X)$ подгруппу группы $\mathrm{Aut}(X)$, порожденную всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами. В дальнейшем нам потребуются следующие определения.

Определение 0.1. Пусть X – алгебраическое многообразие над полем $\Bbbk$. Будем говорить, что точка $x \in X$ является *гибкой*, если касательное пространство T_xX порождено касательными векторами к орбитам $H.x$ однопараметрических унипотентных подгрупп $H \subseteq \mathrm{Aut}(X)$. Назовем многообразие X *гибким*, если все гладкие точки $x \in X_{\mathrm{reg}}$ являются гибкими.

Определение 0.2. Действие группы G на множестве A называется *m-транзитивным*, если для любых двух наборов попарно различных точек $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ из A найдется такой элемент $g \in G$, что $g(a_i) = b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. Действие, являющееся m-транзитивным для всех $m \in \mathbb{N}$, будем называть *бесконечно транзитивным*.

Первый автор поддержан грантом Пьера Делиня, первый и третий авторы поддержаны фондом Дмитрия Зимина “Династия”, третий автор частично поддержан Лабораторией алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, Правительством РФ (договор № 11.G34.31.0023), EADS Foundation Chair in Mathematics и Русско-французской лабораторией Понселе (UMI 2615 CNRS). Основная часть работы была выполнена во время визита первого автора в Институт Фурье, г. Гренобль.

Ясно, что при $m > \dim G$ связная группа Ли G не может действовать на многообразии m-транзитивно. Более того, следующая теорема показывает, что такая группа не может действовать на гладком односвязном многообразии даже 4-транзитивно.

Теорема 0.1 (см. [1; теоремы 5, 6]). *Не существует 3-транзитивных действий вещественной группы Ли G на односвязном некомпактном многообразии, а 2-транзитивные действия существуют только на евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$. Не существует 4-транзитивных действий группы Ли G на компактном односвязном многообразии, а 3-транзитивные действия существуют только на сферах S^n при $n \geqslant 2$.*

Дальнейшие результаты о 2- и 3-транзитивных действиях групп Ли можно найти в работах [2] и [3]. В работе [4] изучается свойство "типичной транзитивности" для действий алгебраических групп G, т.е. наличие открытой по Зарискому орбиты в декартовых степенях данного алгебраического G-многообразия.

В то же время хорошо известно, что полная группа автоморфизмов аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ над полем $\Bbbk$ при $n \geqslant 2$ действует на $\mathbb{A}^n$ бесконечно транзитивно (аналитическую версию и обобщение этого утверждения см. в [5] и [6]). Этот эффект имеет место и для гиперповерхностей X в $\mathbb{A}^{n+1}$, заданных уравнением $uv - f(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$, где $n \geqslant 3$ и $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_{n-1}]$ – непостоянный многочлен (см. [7; § 5]). Мы называем такое многообразие X *надстройкой* над $Y = \mathbb{A}^{n-1}$. В аналитической категории близкие факты были получены в рамках теории Андерсена–Лемперта–Варолина (см. [6], [8], а также [9]–[12]). В частности, обсуждается бесконечная транзитивность на гладких аффинных многообразиях некоторых подгрупп биголоморфных преобразований, порожденных полными регулярными векторными полями (см. обзор [13], в особенности § 2, (B) и замечание 2.2).

Следуя [7; § 5], ниже мы изучаем аффинные алгебраические многообразия X, для которых группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ действует бесконечно транзитивно на множестве гладких точек X_{reg}. Среди прочего мы показываем, что это свойство сохраняется при переходе к надстройке.

Определение 0.3. Назовем *надстройкой* над аффинным многообразием Y гиперповерхность $X \subseteq Y \times \mathbb{A}^2$, заданную уравнением $uv - f(y) = 0$, где $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} \Bbbk[u, v]$ и $f \in \Bbbk[Y]$ отлично от константы. В частности, $\dim X = 1 + \dim Y$.

Сформулируем основные результаты работы. Будем называть аффинное многообразие *невырожденным*, если каждая обратимая регулярная функция на нем постоянна.

Теорема 0.2. 1. *Рассмотрим многообразие флагов G/P, где G – полупростая алгебраическая группа и P – параболическая подгруппа в G. Тогда любой нормальный аффинный конус X над G/P является гибким и группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на множестве гладких точек X_{reg} бесконечно транзитивно.*

2. *Аналогичное утверждение справедливо для невырожденного аффинного торического многообразия X размерности не ниже 2.*

3. *Предположим, что аффинное многообразие X является гибким и либо $X = \mathbb{A}^1$, либо $\dim X \geqslant 2$ и группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ действует на X_{reg} бесконечно транзитивно. Тогда все итерированные надстройки над X также обладают свойствами гибкости и бесконечной транзитивности для группы специальных автоморфизмов.*

Соответствующие части теоремы 0.2 доказываются в § 1–§ 3.

Гладкие компактные вещественные алгебраические поверхности с бесконечно транзитивными группами автоморфизмов были классифицированы в работах [14]–[17]. В теореме 3.3 мы распространяем часть 3 теоремы 0.2 на вещественные алгебраические многообразия при некоторых дополнительных ограничениях. Эти ограничения удалось ослабить в недавней работе [18]. В частном случае надстройки над аффинной прямой полученный результат справедлив над произвольным полем нулевой характеристики (см. теорему 3.1).

Напомним (см. [19; § 9]), что инвариант Макар-Лиманова $\mathrm{ML}(X)$ аффинного многообразия X – это пересечение ядер всех локально нильпотентных дифференцирований алгебры $\Bbbk[X]$, или, другими словами, подалгебра в $\Bbbk[X]$, состоящая из функций, инвариантных относительно всех однопараметрических унипотентных подгрупп в $\mathrm{Aut}(X)$. Из этого определения непосредственно следует, что $\mathrm{ML}(X) = \Bbbk[X]^{\mathrm{SAut}(X)}$. Поэтому инвариант Макар-Лиманова многообразия X тривиален (т.е. $\mathrm{ML}(X) = \Bbbk$), если группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ действует на X с плотной открытой орбитой (ср. [20]). В частности, это выполняется для многообразий всех трех видов из теоремы 0.2 (для первых двух из них см. также [20], [21; 3.16] и [22]). С другой стороны, если X гибко, то инвариант $\mathrm{ML}(X)$ тривиален. Действительно, если $f \in \Bbbk[X]^{\mathrm{SAut}(X)}$, то дифференциал df равен нулю вдоль орбит всех унипотентных подгрупп, поэтому он равен нулю в касательном пространстве к любой гибкой точке X_{reg}. Так как X гибкое, функция f является константой.

Интересно прояснить связь между гибкостью и бесконечной транзитивностью. Хотя аффинная прямая $X = \mathbb{A}^1$ является гибкой, аффинная группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1)$ всего лишь 2-транзитивна. Тем не менее можно предположить, что в высших размерностях для многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль транзитивность группы $\mathrm{SAut}(X)$ влечет гибкость многообразия X, а гибкость X влечет бесконечную транзитивность $\mathrm{SAut}(X)$. После того как настоящая работа появилась в качестве препринта, эта гипотеза была доказана в [23]. Кроме того в нашем препринте мы предлагали охарактеризовать те аффинные многообразия, на которых группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует бесконечно транзитивно на открытом по Зарискому подмножестве. Это также сделано в [23] (см. теорему 2.2 и предложение 5.1) в терминах полевого инварианта Макар-Лиманова $\mathrm{FML}(X)$, введенного А. Льендо (см. [24]). В работе [25] доказана гибкость для аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степеней 4 и 5, из чего следует бесконечная транзитивность действия группы $\mathrm{SAut}(X)$ на этих многообразиях.

Авторы благодарны Д. Н. Ахиезеру, Ш. Калиману и А. Льендо за полезные обсуждения и важные библиографические ссылки. Авторы рады возможности поблагодарить Институт Фурье за гостеприимство и замечательные условия для работы.

§ 1. Аффинные конусы над многообразиями флагов

Пусть G – связная односвязная полупростая алгебраическая группа над полем $\Bbbk$. Рассмотрим неприводимое представление $V(\lambda)$ группы G со старшим весом λ и старшим вектором $v_0 \in V(\lambda)$. Обозначим через Y замкнутую G-орбиту точки $[v_0]$ в ассоциированном проективном представлении,

$$Y = G[v_0] \subseteq \mathbb{P}(V(\lambda)),$$

а через

$$X = \mathrm{AffCone}(Y) = \overline{Gv_0} = Gv_0 \cup \{0\}$$

– аффинный конус над Y. Отметим, что в терминологии работы [26] такие конусы называются *HV-многообразиями*.

Замечание 1.1. Каждое проективное вложение $\varphi\colon G/P \xrightarrow{\cong} Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ с проективно нормальным образом Y, где $P \subseteq G$ – параболическая подгруппа, может быть построено таким способом. В самом деле, поскольку Y проективно нормально, оно также линейно нормально, т.е. $\varphi = \varphi_{|D|}$, где дивизор $D \in \mathrm{Pic}(G/P)$ очень обилен. Поэтому $D \sim \sum_{i=1}^{s} a_i D_i$, где $D_1, \dots, D_s$ – дивизориальные циклы Шуберта на G/P, и $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, s$. Тогда $V(\lambda) = H^0(G/P, \mathscr{O}_{G/P}(D))^*$ – простой G-модуль со старшим весом $\lambda = \sum_{i=1}^{s} a_i \omega_i$, где $\omega_1, \dots, \omega_s$ – фундаментальные веса, и $Y = G[v_0]$ для вектора старшего веса v_0 (см. [27; теорема 5]).

Замечание 1.2. Напомним, что *концом* в смысле Фрейденталя топологического многообразия M называется класс эквивалентности убывающих последовательностей связных открытых подмножеств в M, границы которых компактны и пересечение дополнений к которым пусто. Пусть X – аффинный конус, введенный выше, и пусть $\Bbbk = \mathbb{C}$. Тогда однородное пространство $X \setminus \{0\}$ имеет два конца. Предположим, что G – связная группа Ли и $H \subseteq G$ – замкнутая связная подгруппа. Как показал А. Борель (см. [1; теорема 2]), однородное пространство G/H имеет не более двух концов. Д. Н. Ахиезер в [28] доказал[1], что если G – комплексная линейная алгебраическая группа и $H \subseteq G$ – алгебраическая подгруппа (не обязательно связная), то G/H имеет два конца в точности тогда, когда H является ядром нетривиального характера $\chi\colon P \to G_{\mathrm{m}}(\mathbb{C})$, где P – параболическая подгруппа в G и $G_{\mathrm{m}}(\mathbb{C})$ – мультипликативная группа поля комплексных чисел. Однородное расслоение $G/H \to G/P$ реализует G/H как главное $G_{\mathrm{m}}(\mathbb{C})$-расслоение над однородным проективным многообразием[2] G/P. Далее, G/H допускает проективное пополнение двумя непересекающимися дивизорами E_0 и E_∞, где $E_0 \cong E_\infty \cong G/P$, и $\widetilde{X} := G/H \cup E_0 \to G/P$ определяет линейное расслоение L над G/P. Его нулевое сечение E_0 стягиваемо тогда и только тогда, когда двойственное линейное расслоение L^{-1} обильно, а значит, и очень обильно. В последнем случае стягивание E_0 приводит к аффинному конусу X над образом $Y = \varphi_{|L^{-1}|}(G/P) \subseteq \mathbb{P}^n$. При $\Bbbk = \mathbb{C}$ любой аффинный конус X из теоремы 1.1 реализуется посредством этой конструкции, причем $H \subseteq P$ – это стабилизатор гладкой точки на конусе X, $\widetilde{X}$ – раздутие конуса X в вершине и E_0 – исключительный дивизор.

Следующий результат влечет утверждение 1 теоремы 0.2.

Теорема 1.1. *Пусть X – аффинный конус над многообразием флагов G/P в некотором вложении $G/P \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ с проективно нормальным образом. Тогда*

[1] См. также [29] и [30], где получен комплексно-аналитический аналог в контексте комплексных групп Ли.

[2] Вообще говоря, ни пара (G,P), ни пара (G,H) не определяются многообразием флагов G/P однозначно.

многообразие X является гибким и группа $\mathrm{SAut}(X)$ *действует на* $X \setminus \{0\}$ *m-транзитивно для любого* $m \in \mathbb{N}$.

Гибкость вытекает из следующего общего наблюдения.

Предложение 1.1. *Если полупростая линейная алгебраическая группа G действует на аффинном многообразии X и это действие транзитивно на X_{reg}, то X является гибким.*

Доказательство. Группа G действует на X с открытой орбитой $X_{\mathrm{reg}} = G.x_0$. Орбитное отображение $\varphi\colon G \to X$, $g \longmapsto g.x_0$, определяет сюръекцию $d\varphi\colon \mathfrak{g} \to T_{x_0}X$, где $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Достаточно показать, что $\mathfrak{g}$ порождено над $\Bbbk$ нильпотентными элементами. Рассмотрим разложение $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{g}_i$ в сумму простых идеалов. Пусть $\mathfrak{h}$ – линейная оболочка множества нильпотентных элементов в $\mathfrak{g}$. Это ad-подмодуль в $\mathfrak{g}$ и, значит, идеал в $\mathfrak{g}$. Тем самым, $\mathfrak{h}$ совпадает с прямой суммой некоторых из простых идеалов $\mathfrak{g}_i$. Однако каждый простой идеал $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \ldots, k$, содержит ненулевой нильпотентный элемент. Значит, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, что и требовалось доказать.

В условиях теоремы 1.1 $X_{\mathrm{reg}} = X$, если $X \cong \mathbb{A}^n$, и $X_{\mathrm{reg}} = X \setminus \{0\}$ в противном случае. В любом случае группа G действует на $X \setminus \{0\}$ транзитивно (см. [26; теорема 1]). Тем самым, гибкость многообразия X следует из предложения 1.1.

Для доказательства бесконечной транзитивности нам потребуются некоторые предварительные сведения.

Пусть $P \subseteq G$ – стабилизатор прямой $\langle v_0 \rangle \subseteq V(\lambda)$, $B = TB_{\mathrm{u}} \subseteq P$ – подгруппа Бореля в G с максимальным тором T и унипотентным радикалом B_{u} и $\mathbb{X}(T)$ – решетка характеров тора T. Рассмотрим весовое разложение

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{X}(T)} V(\lambda)_\nu = \langle v_0 \rangle \oplus H(\lambda),$$

где $\langle v_0 \rangle = V(\lambda)_\lambda$, а $H(\lambda) \subseteq V(\lambda)$ – гиперплоскость, заданная как

$$H(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{X}(T) \setminus \{\lambda\}} V(\lambda)_\nu.$$

Координатная функция $l_\lambda \in V(\lambda)^*$, отвечающая первой проекции $p_1\colon v \longmapsto l_\lambda(v)v_0$, определяет нетривиальный характер подгруппы P.

Пусть $B^- = TB_u^-$ – подгруппа Бореля в G, противоположная к $B = B^+$. Многообразие флагов G/P содержит открытую B^--орбиту (открытую клетку Шуберта), изоморфную аффинному пространству $\mathbb{A}^n$, где $n = \dim G/P$. Ее дополнение совпадает с объединением дивизориальных циклов Шуберта $D_1, D_2, \ldots, D_s$ (см. [31; с. 22–24].

Орбитный морфизм $G \to \mathbb{P}(V(\lambda))$, $g \mapsto g.[v_0]$, отображает G/P на подмногообразие $Y \subseteq \mathbb{P}(V(\lambda))$. Пусть $\omega_\lambda \subseteq Y$ – образ открытой клетки Шуберта при этом вложении. Согласно [27; теорема 2] гиперплоскость

$$\mathscr{H}(\lambda) = \mathbb{P}(H(\lambda)) = l_\lambda^{-1}(0) \subseteq \mathbb{P}(V(\lambda))$$

содержит объединение дивизоров Шуберта $\bigcup_{i=1}^{s} D_i$. В частности, получаем $\omega_\lambda = Y \setminus \mathscr{H}(\lambda)$.

Пусть $\sigma\colon \widehat{X} \to X$ – раздутие конуса X в вершине 0. Исключительный дивизор $E \subseteq \widehat{X}$ изоморфен Y. Более того, естественное отображение $\pi\colon X \setminus \{0\} \to Y$

соответствует проекции $p\colon \widehat{X} \to Y$ линейного расслоения $\mathscr{O}_Y(-1)$ на Y, для которого E является нулевым сечением. Поскольку $\omega_\lambda \cong \mathbb{A}^n$, ограничение $\mathscr{O}_Y(-1)$ на ω_λ тривиально. Тем самым, открытое подмножество

$$\Omega_\lambda := \pi^{-1}(\omega_\lambda) = X \setminus H(\lambda) \subseteq X \setminus \{0\} \cong \widehat{X} \setminus E$$

изоморфно $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1_*$, где $\mathbb{A}^1_* = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

Для любого $c \in \mathbb{A}^1_*$ обратимая функция $l_\lambda(\,\cdot\,, c)$ постоянна на аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$. Поэтому на Ω_λ, изоморфном $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1_*$, получаем $l_\lambda = az^k$ для некоторого $a \in G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)$, где z – координата на $\mathbb{A}^1_*$. Здесь $k = 1$, поскольку l_λ является координатой на $\langle v_0 \rangle$. Также можно считать, что $a = 1$, и, значит, $l_\lambda|_{\Omega_\lambda}\colon \Omega_\lambda \to \mathbb{A}^1_*$ совпадает со второй проекцией.

Для доказательства бесконечной транзитивности действия группы $\mathrm{SAut}(X)$ на $X \setminus \{0\}$ в условиях теоремы 1.1 докажем вначале бесконечную транзитивность действия группы $\mathrm{SAut}(X)$ на каждом гиперплоском сечении $\Omega_\lambda(c_0) := l_\lambda^{-1}(c_0) \subseteq X$, где $c_0 \neq 0$ (ср. [7; лемма 5.6]). Более точно, для каждого набора $c_1, \dots, c_k \in \Bbbk$ попарно различных точек, отличных от c_0, рассмотрим подгруппу $\mathrm{Stab}^\lambda_{c_1,\dots,c_k} \subseteq \mathrm{SAut}(X)$ всех автоморфизмов, стабилизирующих поточечно подмногообразия $\Omega_\lambda(c_i)$ для всех $i = 1, \dots, k$ и оставляющих инвариантной функцию l_λ.

Предложение 1.2. *В данных обозначениях для любого $n \geqslant 2$ и любого $m \in \mathbb{N}$ группа $\mathrm{Stab}^\lambda_{c_1,\dots,c_k}$ действует на $\Omega_\lambda(c_0) \cong \mathbb{A}^n$ m-транзитивно.*

Доказательство. Рассмотрим два набора попарно различных точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ и $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m$ в $\Omega_\lambda(c_0)$. Для любого $n \geqslant 2$ группа $\mathrm{SAut}(\mathbb{A}^n)$ действует на $\mathbb{A}^n$ m-транзитивно (см., например, [7; лемма 5.5]). Поскольку $\Omega_\lambda(c_0) \cong \mathbb{A}^n$, существует автоморфизм $g \in \mathrm{SAut}(\Omega_\lambda(c_0))$, отображающий $(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$ в $(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m)$. По определению $g = \delta_1(1)\delta_2(1)\dots\delta_s(1)$ для некоторых однопараметрических унипотентных подгрупп $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s \subseteq \mathrm{SAut}(\Omega_\lambda(c_0))$. Пусть $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_s$ – соответствующие локально нильпотентные дифференцирования[3] (сокращенно ЛНД) алгебры $\Bbbk[\Omega_\lambda(c_0)]$. Вначале продолжим их до ЛНД $\overline{\partial}_1, \overline{\partial}_2, \dots, \overline{\partial}_s$ алгебры $\Bbbk[\Omega_\lambda] \cong \Bbbk[\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1_*]$, положив $\overline{\partial}_i(l_\lambda) = 0$.

Напомним, что Ω_λ является главным открытым по Зарискому подмножеством в X, задаваемым функцией l_λ. В частности, для любого $i = 1, \dots, s$ имеем $\overline{\partial}_i\colon \Bbbk[X] \to \Bbbk[X][1/l_\lambda]$. Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порожденная, найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $(l_\lambda)^N \overline{\partial}_i$ является ЛНД алгебры $\Bbbk[X]$ для всех $i = 1, \dots, s$ (ср. [21; утверждение 3.5]).

Пусть $q[z] \in \Bbbk[z]$ – многочлен, для которого $q(c_0) = 1$, элементы $c_1, \dots, c_k$ являются простыми корнями и корень $z = 0$ имеет кратность N (напомним, что $c_0 \neq 0$). Тогда для любого $i = 1, \dots, s$ ЛНД $q(l_\lambda)\overline{\partial}_i$ алгебры $\Bbbk[X]$ таково, что соответствующая однопараметрическая подгруппа в $\mathrm{Stab}^\lambda_{c_1,\dots,c_k}$ продолжает подгруппу δ_i. Тем самым, g продолжается до элемента группы $\mathrm{Stab}^\lambda_{c_1,\dots,c_k}$ и требуемое утверждение доказано.

Рассмотрим экстремальный вес μ простого G-модуля $V(\lambda)$, отличный от λ. Вес μ определяет параболическую подгруппу P', сопряженную с P, линейную форму $l_\mu \in V(\lambda)^*$ и главное открытое по Зарискому подмножество $\Omega_\mu = \{l_\mu \neq 0\}$ в X, где $X \setminus \Omega_\mu = H(\mu) := l_\mu^{-1}(0)$.

[3] Дифференцирование ∂ кольца A называется *локально нильпотентным*, если для любого $a \in A$ справедливо $\partial^n a = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 1.1. *Для любого множества из m попарно различных точек Q_1, $Q_2, \dots, Q_m \in X \setminus \{0\}$ найдется такое $g \in \mathrm{SAut}(X)$, что $g(Q_i) \in \Omega_\mu$ для всех $i = 1, \dots, m$.*

Доказательство. Поскольку группа G полупроста, она содержится в $\mathrm{SAut}(X)$ (см. [20; лемма 1.1]). Ясно, что $G_i := \{g \in G \mid g(Q_i) \in H(\mu)\}$, $i = 1, \dots, m$, являются собственными замкнутыми подмножествами в G. Значит, утверждение леммы выполнено для любого $g \in G \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{\mathrm{m}})$.

Лемма 1.2. *Для любого $c \neq 0$ ограничение $l_\lambda|\Omega_\mu(c)$ не является константой.*

Доказательство. Если бы ограничение $l_\lambda|\Omega_\mu(c)$ было константой, скажем, равной b, то конус X содержался бы в гиперплоскости $bl_\mu - cl_\lambda = 0$ в $V(\lambda)$, что приводит к противоречию.

Доказательство теоремы 1.1. Если $n = \dim G/P = 1$ (и, тем самым, $G/P \cong \mathbb{P}^1$), то X – нормальная аффинная торическая поверхность, или, иными словами, конус Веронезе. Бесконечная транзитивность следует в этом случае из теоремы 2.1, которую мы докажем в § 2.

Далее считаем, что $n \geqslant 2$. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и набор попарно различных точек $Q_{10}, Q_{20}, \dots, Q_{m0} \in \Omega_\lambda(1)$. Покажем, что для любого набора попарно различных точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m \in X \setminus \{0\}$ найдется такое $\psi \in \mathrm{SAut}(X)$, что $\psi(Q_1) = Q_{10}, \dots, \psi(Q_m) = Q_{m0}$.

По лемме 1.1 можно считать, что $Q_i \in \Omega_\mu$ для всех $i = 1, \dots, m$. Разобьем множество $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$ на подмножества в соответствии со значениями $l_\mu(Q_i)$:

$$\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\} = \bigsqcup_{j=1}^{k} M_j, \qquad M_j = \{Q_i \mid Q_i \in \Omega_\mu(c_j)\},$$

где $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{A}^1_*$ попарно различны. Из леммы 1.2 следует, что каждое пересечение $\Omega_\lambda(1) \cap \Omega_\mu(c_i)$ содержит бесконечно много точек. Действуя подгруппами $\mathrm{Stab}^\mu_{c_1,\dots,\widehat{c}_i,\dots,c_k} \subseteq \mathrm{SAut}(X)$ (см. предложение 1.2), мы можем последовательно отобразить подмножества M_i, $i = 1, \dots, k$, в аффинное гиперплоское сечение $\Omega_\lambda(1)$. Получившийся набор из m точек можно отобразить далее в стандартный набор $(Q_{10}, Q_{20}, \dots, Q_{m0})$, полагая $c_0 = 1$, $k = 0$ и используя автоморфизм из предложения 1.2. Это завершает доказательство теоремы.

§ 2. Автоморфизмы аффинных торических многообразий

Как и выше, основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль. В этом параграфе рассматривается аффинное торическое многообразие X над $\Bbbk$ с эффективным действием тора $\mathbb{T}$. Мы предполагаем, что X является невырожденным, т.е. обратимыми регулярными функциями на X являются только константы, или, что эквивалентно, $X \ncong Y \times \mathbb{A}^1_*$, где $\mathbb{A}^1_* = \mathrm{Spec}\, \Bbbk[t, t^{-1}] \cong G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)$.

Следующий результат составляет часть 2 теоремы 0.2.

Теорема 2.1. *Каждое невырожденное аффинное торическое многообразие X размерности $n \geqslant 1$ является гибким. Если $n \geqslant 2$, то для любого $m \in \mathbb{N}$*

группа $\mathrm{SAut}(X)$ *действует на множестве гладких точек* X_{reg} *многообразия* X *m-транзитивно.*

Заметим, что X является гибким, если $\mathrm{Aut}(X)$ действует на X_{reg} транзитивно и хотя бы одна гладкая точка на X является гибкой. Оба этих условия будут проверены ниже. Сначала напомним необходимые сведения об аффинных торических многообразиях.

1. *Порождающие на лучах.* Пусть N – решетка однопараметрических подгрупп тора $\mathbb{T}$, $M=\mathbb{X}(\mathbb{T})$ – двойственная к ней решетка характеров и $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$: $N\times M\to\mathbb{Z}$ – каноническое спаривание. Пусть χ^m обозначает характер тора $\mathbb{T}$, отвечающий точке $m\in M$. При этом $\chi^m\chi^{m'}=\chi^{m+m'}$, так что групповую алгебру

$$\Bbbk[M]=\bigoplus_{m\in M}\Bbbk\chi^m$$

можно отождествить с алгеброй $\Bbbk[\mathbb{T}]$ регулярных функций на торе $\mathbb{T}$. Обозначим через $\mathbb{T}.x_0$ открытую $\mathbb{T}$-орбиту на X. Поскольку орбитное отображение $\mathbb{T}\to X$, $t\longmapsto t.x_0$, доминантно, мы можем отождествить $\Bbbk[X]$ с подалгеброй в $\Bbbk[M]$. Более точно, найдется такой выпуклый полиэдральный конус $\sigma^\vee\subseteq M_\mathbb{Q}:=M\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Q}$, что $\Bbbk[X]$ совпадет с полугрупповой алгеброй полугруппы $\sigma^\vee\cap M$, т.е.

$$\Bbbk[X]=\bigoplus_{m\in\sigma^\vee\cap M}\Bbbk\chi^m \tag{2.1}$$

(подробности см. в [32]). Двойственный конус σ к конусу $\sigma^\vee$ является острым конусом в $N_\mathbb{Q}$ полной размерности. Пусть $\Xi=\{\rho_1,\dots,\rho_r\}$ – множество порождающих на лучах, т.е. множество примитивных векторов на одномерных гранях конуса σ. С каждым вектором $\rho\in\Xi$ связана однопараметрическая подгруппа R_ρ тора $\mathbb{T}$.

2. *Соответствие между орбитами и гранями* (см. [33; § 3.2]). Имеются естественные взаимно однозначные соответствия $\delta\overset{1\div 1}{\longleftrightarrow}\tau\overset{1\div 1}{\longleftrightarrow}O_\tau$ между гранями δ конуса σ, двойственными гранями[4] $\tau=\delta^\perp$ конуса $\sigma^\vee$ и $\mathbb{T}$-орбитами O_τ на X, при которых $\dim O_\tau=\dim\tau=\dim\sigma-\dim\delta$. В частности, единственная $\mathbb{T}$-неподвижная точка на X соответствует вершине конуса $\sigma^\vee$, а открытая $\mathbb{T}$-орбита – самому конусу $\sigma^\vee$. Эти соответствия сохраняют включения: $\mathbb{T}$-орбита O_μ содержится в замыкании $\overline{O_\tau}$ тогда и только тогда, когда $\mu\subseteq\tau$, или, равносильно, $\mu^\perp\supseteq\tau^\perp$ (см. [33; § 3.2]).

Каждая грань $\tau\subseteq\sigma^\vee$ определяет разложение

$$\Bbbk[X]=\Bbbk[\overline{O_\tau}]\oplus I(\overline{O_\tau}),$$

где $\Bbbk[\overline{O_\tau}]=\bigoplus_{m\in\tau\cap M}\Bbbk\chi^m$, а

$$I(\overline{O_\tau})=\bigoplus_{m\in(\sigma^\vee\setminus\tau)\cap M}\Bbbk\chi^m \tag{2.2}$$

является идеалом подмногообразия $\overline{O_\tau}$ в $\Bbbk[X]$.

Стабилизатор $\mathbb{T}_p=\mathrm{Stab}_\mathbb{T}(p)$ любой точки $p\in X$ связен, т.е. $\mathbb{T}_p\subseteq\mathbb{T}$ является подтором. Далее, $\mathbb{T}_p\subseteq\mathbb{T}_q$ в точности тогда, когда $\mathbb{T}.q\subseteq\overline{\mathbb{T}.p}$, и $\overline{\mathbb{T}.p}=X^{\mathbb{T}_p}$, где X^G обозначает, как обычно, множество неподвижных точек действия группы G на X.

[4]Для упрощения грань $\delta^\perp\cap\sigma^\vee$ мы обозначаем просто как $\delta^\perp$.

3. *Корни и ассоциированные однопараметрические подгруппы.*

Определение 2.1 (см. [34]). *Корень* конуса σ – это такой вектор $e \in M$, что для некоторого i, где $1 \leqslant i \leqslant r$ и $r = \operatorname{card} \Xi$, выполнены соотношения

$$\langle \rho_i, e \rangle = -1, \quad \langle \rho_j, e \rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, j \neq i. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\mathscr{R}(\sigma)$ множество всех корней конуса σ. Имеется взаимно однозначное соответствие $e \xleftrightarrow{1\div 1} H_e$ между корнями конуса σ и однопараметрическими унипотентными подгруппами в $\operatorname{Aut}(X)$, нормализуемыми действующим тором (см. [22] и [34]). Положим $\rho_e := \rho_i$. Корень $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ определяет ЛНД ∂_e на M-градуированной алгебре $\Bbbk[X]$, заданное как

$$\partial_e(\chi^m) = \langle \rho_e, m \rangle \chi^{m+e}. \tag{2.4}$$

Его ядро является (конечно порожденной) однородной подалгеброй в $\Bbbk[X]$ (см. [22]):

$$\ker \partial_e = \bigoplus_{m \in \rho_e^{\perp} \cap M} \Bbbk \chi^m, \tag{2.5}$$

где $\rho_e^{\perp} = \{m \in \sigma^{\vee} \cap M,\ \langle \rho_e, m \rangle = 0\}$ – гипергрань (т.е. грань коразмерности 1) конуса $\sigma^{\vee}$, ортогональная ρ_e.

Определение 2.2 (см. [19], [22]). Корни e и e', для которых $\rho_e = \rho_{e'}$, называются *эквивалентными*; будем записывать $e \sim e'$. Корни e и e' эквивалентны тогда и только тогда, когда $\ker \partial_e = \ker \partial_{e'}$.

Замечание 2.1. Нумерация порождающих на лучах $\Xi = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ определяет разбиение

$$\mathscr{R}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathscr{R}_i,$$

где $\mathscr{R}_i = \{e \in \mathscr{R}(\sigma) \mid \rho_e = \rho_i\}$ непусты. В самом деле, рассмотрим гипергрань τ_i конуса $\sigma^{\vee}$, ортогональную лучу, порожденному ρ_i. Для любого v из относительной внутренности $\operatorname{Int}_{\mathrm{rel}}(\tau_i)$ неравенство $\langle \rho_j, m \rangle > 0$ выполнено при всех $j \neq i$. Предположим, что $e_0 \in M$ таково, что $\langle \rho_i, e_0 \rangle = -1$ и что $v_0 \in \operatorname{Int}_{\mathrm{rel}}(\tau_i) \cap M$. Положив $e = e_0 + k v_0$ для $k \gg 1$, мы получим $\langle \rho_j, e \rangle > 0$ для всех $j \neq i$ и $\langle \rho_i, e \rangle = -1$. Тем самым, $e \in \mathscr{R}_i$.

В качестве примера рассмотрим аффинную плоскость $X = \mathbb{A}^2$ со стандартным действием двумерного тора. Здесь конусы σ и $\sigma^{\vee}$ совпадают с положительными квадрантами. Множество $\mathscr{R}(\sigma)$ состоит из двух классов эквивалентности

$$\mathscr{R}_1 = \{(x, -1) \mid x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}, \qquad \mathscr{R}_2 = \{(-1, y) \mid y \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}.$$

4. *Однопараметрические группы автоморфизмов.* Дифференцирование ∂_e порождает однопараметрическую унипотентную подгруппу $H_e = \lambda_e(G_{\mathrm{a}}(\Bbbk)) \subseteq \operatorname{Aut}(X)$, где $\lambda_e \colon t \longmapsto \exp(t\partial_e)$. Алгебра инвариантов $\Bbbk[X]^{H_e}$ совпадает с $\ker \partial_e$. Вложение $\Bbbk[X]^{H_e} \subseteq \Bbbk[X]$ индуцирует морфизм $\pi \colon X \to Z = \operatorname{Spec} \Bbbk[X]^{H_e}$, типичными слоями которого являются одномерные H_e-орбиты, изоморфные прямой $\mathbb{A}^1$ (см. [35; теоремы 2.3 и 3.3]). Тор $\mathbb{T}$ нормализует подгруппу H_e. В частности, $\mathbb{T}$ оставляет инвариантным множество неподвижных точек X^{H_e}.

Пусть $R_e = R_{\rho_e} \subseteq \mathbb{T}$ – одномерный подтор, соответствующий вектору $\rho_e \in N$. Действие R_e на градуированной алгебре $\Bbbk[X]$ при подходящей параметризации $\rho_e \colon G_{\mathrm{m}}(\Bbbk) \ni t \longmapsto \rho_e(t) \in R_e$ задается как

$$t.\chi^m = t^{\langle \rho_e, m\rangle} \chi^m, \qquad t \in G_{\mathrm{m}}(\Bbbk). \tag{2.6}$$

В частности, $\Bbbk[X]^{R_e} = \Bbbk[X]^{H_e}$. Поэтому морфизм $\pi \colon X \to Z$ совпадает с морфизмом факторизации $X \to X/\!/R_e$ и типичные H_e-орбиты совпадают с замыканиями типичных R_e-орбит. Предложение 2.1 ниже показывает, что это утверждение справедливо для любой одномерной H_e-орбиты[5].

Имеется разложение

$$\Bbbk[X] = \Bbbk[X]^{R_e} \oplus \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M \setminus \rho_e^\perp} \Bbbk\chi^m = \Bbbk[X]^{R_e} \oplus I(D_e), \tag{2.7}$$

где $D_e := X^{R_e} \cong Z$. Дивизор D_e совпадает с множеством предельных точек действия R_e на X. Тем самым, каждая одномерная R_e-орбита имеет предельную точку на D_e. Следующая простая лемма дополняет картину.

Лемма 2.1. *Пусть τ – грань конуса $\sigma^\vee$, $\mathscr{O}_\tau$ – соответствующая орбита, $\mathbb{T}_\tau$ – стабилизатор точки в $\mathscr{O}_\tau$ и Ξ_τ – множество порождающих на лучах двойственной грани $\tau^\perp \subseteq \sigma$. Тогда выполнены следующие условия.*

a) *Замыкание орбиты $\overline{\mathscr{O}_\tau}$ инвариантно относительно H_e тогда и только тогда, когда*

$$m + e \in \sigma^\vee \setminus \tau \qquad \forall\, m \in (\sigma^\vee \setminus \tau) \cap M \colon \langle \rho_e, m\rangle > 0. \tag{2.8}$$

b) *Замыкание $\overline{\mathscr{O}_\tau}$ является $H_{e'}$-инвариантным для любого корня $e' \sim e$ конуса σ, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий*:

(i) $\rho_e \notin \Xi_\tau$;

(ii) $\overline{\mathscr{O}_\tau} \nsubseteq D_e$;

(iii) $R_e \nsubseteq \mathbb{T}_\tau$.

Доказательство. a) Согласно (2.4) идеал $I(\overline{\mathscr{O}_\tau})$ является ∂_e-инвариантным тогда и только тогда, когда

$$\chi^{m+e} \in I(\overline{\mathscr{O}_\tau}) \qquad \forall\, \chi^m \in I(\overline{\mathscr{O}_\tau}) \colon \langle \rho_e, m\rangle > 0, \tag{2.9}$$

что равносильно (2.8) (см. (2.2)). Это доказывает условие a).

b) Для $m \in M$ выполнено

$$m \in \sigma^\vee \setminus \tau \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \rho, m\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, \rho \in \Xi \ \text{ и } \ \exists\, \rho \in \Xi_\tau \colon \langle \rho, m\rangle > 0.$$

Для любого $\rho \neq \rho_e$ имеем $\langle \rho, m+e\rangle \geqslant \langle \rho, m\rangle$. Поэтому из (i) следует (2.8).

Имеем $\overline{\mathscr{O}_\tau} = X^{\mathbb{T}_\tau}$ и $D_e = X^{R_e} = \overline{\mathscr{O}_{\rho_e^\perp}}$, где $\rho_e^\perp = (\mathbb{R}_+\rho_e)^\perp$. Таким образом, эквивалентность (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) следует из соответствия между орбитами и гранями.

Замечание 2.2. Если $\overline{\mathscr{O}_\tau}$ не является H_e-инвариантным, то $\rho_e \in \Xi_\tau$. Обратное в общем случае неверно. Например, рассмотрим $X = \mathbb{A}^2$ со стандартным действием двумерного тора. Здесь $\Xi = \{(1,0),(0,1)\}$. Пусть $\tau = \{0\}$ и

[5] Если X – поверхность, то каждый слой морфизма π изоморфен $\mathbb{A}^1$ и совпадает с замыканием R_e-орбиты (см. параболический случай в [36]). В то же время для трехмерного аффинного торического многообразия X вырожденные слои π могут оказаться двумерными.

$e = (0, -1)$, $e' = (a, -1) \sim e$, где $a > 0$ и $\rho_e = (0, 1)$. Тогда (2.8) выполнено для $H_{e'}$, но не для H_e. Тем самым, $\rho_e \in \Xi_\tau$ и $\mathbb{T}$-неподвижная точка $\overline{\mathscr{O}_\tau} = \{(0,0)\}$ является $H_{e'}$-неподвижной, но не H_e-неподвижной. Можно также построить пример, в котором $\dim X = 4$ и замыкание $\overline{\mathscr{O}_\tau}$ является $H_{e'}$-инвариантным для любого корня $e' \sim e$, в то время как эквивалентные условия (i)–(iii) не выполнены.

Для доказательства бесконечной транзитивности нам понадобится более точная информация о действии однопараметрических групп автоморфизмов на торических многообразиях; см. предложение 2.1 и леммы 2.2, 2.3 ниже.

Предложение 2.1. *Пусть $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ и $H_e \subseteq \mathrm{SAut}(X)$ – ассоциированная однопараметрическая унипотентная подгруппа. Тогда выполнено следующее.*

a) *Для любой точки $x \in X \setminus X^{H_e}$ орбита $H_e.x$ пересекает в точности две $\mathbb{T}$-орбиты $\mathscr{O}_1$ и $\mathscr{O}_2$ на X, причем $\dim \mathscr{O}_1 = 1 + \dim \mathscr{O}_2$.*

b) *Пересечение $\mathscr{O}_2 \cap H_e.x$ состоит из единственной точки, тогда как*

$$\mathscr{O}_1 \cap H_e.x = R_e.y \qquad \forall\, y \in \mathscr{O}_1 \cap H_e.x.$$

Доказательство. a) Поскольку число $\mathbb{T}$-орбит на X конечно, найдется $\mathbb{T}$-орбита $\mathscr{O}_1$, для которой пересечение $\mathscr{O}_1 \cap H_e.x$ открыто по Зарискому в $H_e.x$. Тогда $H_e.x \subseteq \overline{\mathscr{O}_1}$. Найдется другая $\mathbb{T}$-орбита $\mathscr{O}_2$, пересекающая $H_e.x$. В самом деле, если $H_e.x \cong \mathbb{A}^1$ содержится в единственной $\mathbb{T}$-орбите $\mathscr{O}_1$, то обратимые регулярные функции разделяют точки на $\mathscr{O}_1$, а значит, и на $H_e.x$, противоречие. Поскольку $\mathscr{O}_2$ пересекает $\overline{\mathscr{O}_1}$, мы получаем $\mathscr{O}_2 \subseteq \overline{\mathscr{O}_1}$ и $\dim \mathscr{O}_2 < \dim \mathscr{O}_1$.

Мы знаем, что тор $\mathbb{T}$ нормализует унипотентную подгруппу H_e, а значит, элементы $\mathbb{T}$ отображают H_e-орбиты в H_e-орбиты. В частности, для любой точки $q \in H_e.x$ стабилизатор $\mathbb{T}_q$ сохраняет орбиту $H_e.x$. Все точки $q \in \mathscr{O}_1 \cap H_e.x$ имеют одинаковые стабилизаторы. Поскольку $H_e.x \subseteq \overline{\mathscr{O}_1} = X^{\mathbb{T}_q}$, этот стабилизатор действует на $H_e.x$ тривиально. Поэтому $\mathbb{T}_r \supseteq \mathbb{T}_q$ для любой точки $r \in H_e.x$, и $\mathbb{T}_r = \mathbb{T}_q$ тогда и только тогда, когда $r \in \mathscr{O}_1 \cap H_e.x$.

Зафиксируем точку $p \in \mathscr{O}_2 \cap H_e.x$. Если $\mathbb{T}_p \subseteq \mathbb{T}_q$, то $\mathbb{T}_p = \mathbb{T}_q$ и $\dim \mathscr{O}_2 = \dim \mathscr{O}_1$, противоречие. Следовательно, стабилизатор $\mathbb{T}_p$ действует на $H_e.x$ с двумя орбитами, т.е. $H_e.x = \mathbb{T}_p.q \cup \{p\}$, где $q \in H_e.x \setminus \{p\}$. Из наличия точной последовательности

$$1 \to \mathbb{T}_q \to \mathbb{T}_p \to G_{\mathrm{m}}(\Bbbk) \to 1$$

следует, что $\dim \mathbb{T}_p = 1 + \dim \mathbb{T}_q$. Наконец, $H_e.x \subseteq \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2$, $\dim \mathscr{O}_1 = 1 + \dim \mathscr{O}_2$, как и утверждается в a).

b) Можно считать, что $\mathscr{O}_1 = \mathbb{T}.x$. Поскольку $H_e.x \subseteq \overline{\mathscr{O}_1}$ и тор $\mathbb{T}$ нормализует подгруппу H_e, мы получаем $H_e(\mathscr{O}_1) \subseteq \overline{\mathscr{O}_1}$. Тем самым, $\overline{\mathscr{O}_1}$ является H_e-инвариантным. С другой стороны, поскольку $H_e.p = H_e.x \not\subseteq \overline{\mathscr{O}_2}$, замыкание $\overline{\mathscr{O}_2}$ не является H_e-инвариантным. В частности, лемма 2.1 влечет $\rho_e \in \Xi_{\tau_2}$, где τ_i – грань конуса $\sigma^\vee$, отвечающая $\mathscr{O}_i = \mathscr{O}_{\tau_i}$, $i = 1, 2$. По той же лемме $R_e \subseteq \mathbb{T}_{\tau_2} = \mathbb{T}_p$. Покажем, что $R_e \not\subseteq \mathbb{T}_{\tau_1} = \mathbb{T}_q$, где $q \in H_e.x \setminus \{p\}$. Применяя вновь лемму 2.1, мы получаем, что (2.8) выполнено для $\tau = \tau_1$, но не для $\tau = \tau_2$. Поскольку $\tau_2 \subseteq \tau_1$, условие (2.8) не выполнено для некоторого $m \in \tau_1 \setminus \tau_2$. Последнее возможно только при $\rho_e \in \tau_2^\perp \setminus \tau_1^\perp$. Лемма 2.1 влечет $R_e \not\subseteq \mathbb{T}_{\tau_1} = \mathbb{T}_q$. Наконец, одномерная орбита $\mathbb{T}_p.q$ совпадает с $R_e.q$.

Определение 2.3. Будем говорить, что пара $\mathbb{T}$-орбит $(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2)$ на X является H_e*-связанной*, если $H_e.x \subseteq \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2$ для некоторого $x \in X \setminus X^{H_e}$. Предложение 2.1 показывает, что для такой пары (с точностью до перестановки) $\mathscr{O}_2 \subseteq \overline{\mathscr{O}_1}$ и $\dim \mathscr{O}_2 = 1 + \dim \mathscr{O}_1$. Как и выше, мы можем выбрать точку x на орбите $\mathscr{O}_2$. Поскольку тор нормализует подгруппу H_e, любая точка на $\mathscr{O}_2$ может выступать в качестве точки x из нашего определения.

Пример 2.1. Если $e \in \mathscr{R}(\sigma)$, то дифференцирование ∂_e, как в (2.4), продолжается до ЛНД большей градуированной алгебры

$$A(\rho_e) = \bigoplus_{m \in M,\, \langle \rho_e, m\rangle \geqslant 0} \Bbbk\chi^m.$$

В самом деле, положив $k = \langle \rho_e, m\rangle \geqslant 0$, мы получим $\langle \rho_e, m + ke\rangle = 0$ и, значит, $\partial_e^k(\chi^m) \in \ker \partial_e$. Это гарантирует наличие $\mathbb{T}$- и H_e-инвариантного открытого подмножества

$$U = \operatorname{Spec} A(\rho_e) \cong (\mathbb{A}^1_*)^{n-1} \times \mathbb{A}^1 \subseteq X,$$

где $n = \dim X$, $\mathbb{A}^1_* = \operatorname{Spec} \Bbbk[t, t^{-1}]$, $\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} \Bbbk[u]$ и $u = \chi^{-e}$, причем H_e действует сдвигами вдоль второго множителя. Единственными $\mathbb{T}$-орбитами в U являются открытая орбита $\mathscr{O}_1 = \{u \neq 0\}$, которая отвечает вершине конуса σ, и орбита коразмерности 1 $\mathscr{O}_2 = \{u = 0\}$, отвечающая лучу $\Bbbk\rho_e$. Нетрудно показать, что пара $(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2)$ является H_e-связанной.

Из предложения 2.1 и его доказательства мы получаем следующий критерий H_e-связанности.

Лемма 2.2. *Пусть* $(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2)$ – *пара* $\mathbb{T}$*-орбит на* X *с* $\mathscr{O}_2 \subseteq \overline{\mathscr{O}_1}$, *где* $\mathscr{O}_i = \mathscr{O}_{\sigma_i^\perp}$ *для грани* σ_i *конуса* σ, $i = 1, 2$. *Для данного корня* $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ *пара* $(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2)$ *является* H_e*-связанной тогда и только тогда, когда* $e|_{\sigma_2} \leqslant 0$ *и* σ_1 – *гипергрань конуса* σ_2, *заданная уравнением* $\langle v, e\rangle = 0$.

Доказательство. В процессе доказательства предложения 2.1, b) мы установили, что пара $(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2)$ является H_e-связанной тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{\mathscr{O}_1}$ является H_e-инвариантным, $\overline{\mathscr{O}_2}$ не инвариантно относительно H_e и $\dim \mathscr{O}_1 = 1 + \dim \mathscr{O}_2$. Более того, если пара $(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2)$ является H_e-связанной, то $\sigma_2^\perp$ – гипергрань конуса $\sigma_1^\perp$ (а σ_1 – гипергрань σ_2), и существует такое $m_0 \in \sigma_1^\perp \setminus \sigma_2^\perp$, что

$$\langle \rho_e, m_0\rangle > 0, \qquad m_0 + e \in \sigma_2^\perp.$$

Поскольку $\langle \rho_i, e\rangle \geqslant 0$ для любого $\rho_i \neq \rho_e$, мы заключаем, что $\sigma_2 = \operatorname{Cone}(\sigma_1, \rho_e)$. Кроме того, $e|_{\sigma_1} = 0$, поскольку $e = m_0 + e - m_0 \in \operatorname{span} \sigma_1^\perp$. Тем самым, $e|_{\sigma_2} \leqslant 0$ и σ_1 выделяется в σ_2 уравнением $\langle v, e\rangle = 0$.

Обратно, предположим, что $e|_{\sigma_2} \leqslant 0$ и σ_1 задано в σ_2 уравнением $\langle v, e\rangle = 0$. Для любого $m \in \sigma^\vee \setminus \sigma_1^\perp$ такого, что $\langle \rho_e, m\rangle > 0$, выполнено условие $m + e \notin \sigma_1^\perp$. В самом деле, $e|_{\sigma_1} = 0$ и $e \in \sigma_1^\perp$. Значит, условие (2.8) выполнено для $\sigma_1^\perp$. Далее, $\langle \rho_e, m'\rangle > 0$ для любого $m' \in \sigma_1^\perp \setminus \sigma_2^\perp$. Отсюда следует, что

$$m_0 := m' + (\langle \rho_e, m'\rangle - 1) \cdot e \in \sigma_1^\perp \setminus \sigma_2^\perp, \qquad m_0 + e \in \sigma_2^\perp.$$

В самом деле, $\langle \rho_e, m_0\rangle = 1$ и $\langle \rho_e, m_0 + e\rangle = 0$, тогда как $\langle \rho_i, m_0\rangle \geqslant 0$ и $\langle \rho_i, m_0 + e\rangle \geqslant 0$ для любого $\rho_i \neq \rho_e$. Поэтому (2.8) выполнено для $\sigma_1^\perp$, но не для $\sigma_2^\perp$. Следовательно, пара $(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2)$ является H_e-связанной.

Замечание 2.3. Пусть даны однопараметрическая подгруппа $R \subseteq \mathbb{T}$ и точка $x \in X \setminus X^R$. Замыкание орбиты $\overline{R.x}$ совпадает с H_e-орбитой тогда и только тогда, когда $\overline{R.x}$ покрыто парой H_e-связанных $\mathbb{T}$-орбит. Например, для $X = \mathbb{A}^2$ со стандартным действием двумерного тора и подгруппой скалярных матриц в качестве $R \subseteq \mathbb{T}$ последнее условие выполнено только для точек $x \neq 0$ на одной из координатных осей.

Лемма 2.3. *Для любой точки*[6] $x \in X_{\mathrm{reg}} \setminus \mathscr{O}_{\sigma^\vee}$ *найдется такой корень* $e \in \mathscr{R}(\sigma)$, *что*

$$\dim \mathbb{T}.y > \dim \mathbb{T}.x$$

для типичной точки $y \in H_e.x$. *В частности, пара* $(\mathbb{T}.y, \mathbb{T}.x)$ *является* H_e-*связанной.*

Доказательство. Поскольку $x \notin \mathscr{O}_{\sigma^\vee}$, найдется собственная грань, скажем, $\sigma_2 \subseteq \sigma$, для которой $\mathbb{T}.x = \mathscr{O}_{\sigma_2^\perp}$. Поскольку точка $x \in X$ гладкая, порождающие на ребрах $\rho_1, \dots, \rho_s$ конуса σ_2 образуют базис примитивной подрешетки $N' \subseteq N$ (см. [32; § 2.1]). Пусть σ_1 – гипергрань конуса σ_2, порожденная $\rho_2, \dots, \rho_s$. Используя вновь соответствие между орбитами и гранями, получаем, что $\mathscr{O}_{\sigma_2^\perp} \subseteq \overline{\mathscr{O}_{\sigma_1^\perp}}$ и $\dim \mathscr{O}_{\sigma_1^\perp} = 1 + \dim \mathscr{O}_{\sigma_2^\perp}$. Покажем, что пара $(\mathscr{O}_{\sigma_1^\perp}, \mathscr{O}_{\sigma_2^\perp})$ является H_e-связанной для некоторого корня $e \in \mathscr{R}(\sigma)$, удовлетворяющего условиям леммы 2.2.

Выберем такую гиперплоскость $L \subseteq N_{\mathbb{Q}}$, касающуюся σ, что $\sigma_2 = \sigma \cap L$. Мы получим разложение $N = N' \oplus N'' \oplus N'''$, где $N \cap L = N' \oplus N''$ и $N''' \cong \mathbb{Z}$. Рассмотрим линейную форму e_1 на N', определенную условиями

$$\langle \rho_1, e_1 \rangle = -1, \qquad \langle \rho_2, e_1 \rangle = \dots = \langle \rho_s, e_1 \rangle = 0.$$

Пусть e_2 – ненулевая линейная форма на N'''. Продолжая e_1 и e_2 на всю решетку N нулем на дополнительных подрешетках, мы получаем линейную форму $e = e_1 + e_2$ на N. Умножая e_2 на подходящее целое число, мы можем считать, что $\langle \rho_j, e \rangle > 0$ для любого $\rho_j \notin \sigma_2$. Тогда e – такой корень конуса σ, что $\rho_e = \rho_1$, и условие леммы 2.2 для e выполнено. По лемме 2.2 пара $(\mathscr{O}_{\sigma_1^\perp}, \mathscr{O}_{\sigma_2^\perp})$ является H_e-связанной, как и утверждалось. Поскольку $\mathbb{T}.x = \mathscr{O}_{\sigma_2^\perp}$ и тор $\mathbb{T}$ нормализует подгруппу H_e, требуемое утверждение следует из предложения 2.1 и наблюдения из определения 2.3.

Итак, мы располагаем всем необходимым для доказательства бесконечной транзитивности в теореме 2.1. Это доказательство проводится в несколько этапов; см. ниже леммы 2.4–2.9.

Лемма 2.4. *Для любого набора* $Q_1, \dots, Q_m \in X_{\mathrm{reg}}$ *из* m *попарно различных точек найдется такой автоморфизм* $\phi \in \mathrm{SAut}(X)$, *что образы* $\phi(Q_1), \dots, \phi(Q_m)$ *содержатся в открытой* $\mathbb{T}$-*орбите.*

Доказательство. Положим

$$d(Q_1, \dots, Q_m) = \dim \mathbb{T}.Q_1 + \dots + \dim \mathbb{T}.Q_m$$

и будем считать, что $\dim \mathbb{T}.Q_i < \dim X$ для некоторого i. Согласно лемме 2.3 найдется такой корень $e \in \mathscr{R}(\sigma)$, что $\dim \mathbb{T}.P_i > \dim \mathbb{T}.Q_i$ для типичной точки $P_i \in H_e.Q_i$. Зафиксируем изоморфизм $\lambda_e \colon G_{\mathrm{a}}(\Bbbk) \xrightarrow{\cong} H_e$. Имеется конечное множество значений $t \in G_{\mathrm{a}}(\Bbbk)$, для которых $\dim \mathbb{T}.(\lambda_e(t).Q_j) < \dim \mathbb{T}.Q_j$ при

[6] Напомним, что $\mathscr{O}_{\sigma^\vee}$ – открытая $\mathbb{T}$-орбита в X.

некотором $j \neq i$. Поэтому для типичного $t \in G_{\mathrm{a}}(\Bbbk)$ получаем

$$d\bigl(\lambda_e(t).Q_1, \ldots, \lambda_e(t).Q_m\bigr) > d(Q_1, \ldots, Q_m).$$

Теперь требуемое утверждение легко проверяется по индукции.

С этого момента будем предполагать, что точки $Q_1, \ldots, Q_m$ содержатся в открытой $\mathbb{T}$-орбите $\mathbb{T}.x_0$. Зафиксируем максимальное линейно независимое подмножество порождающих на лучах $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} =: \Xi^{(0)} \subseteq \Xi$, где $n = \dim X$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ выберем изоморфизм $\rho_i \colon G_{\mathrm{m}}(\Bbbk) \xrightarrow{\cong} R_{\rho_i}$, который обозначим той же буквой, что и порождающий элемент. Напомним, что для корня $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ вложение $\Bbbk[X]^{H_e} \subseteq \Bbbk[X]$ индуцирует морфизм $\tau \colon X \to Z$, где $Z = \operatorname{Spec} \Bbbk[X]^{H_e}$.

Лемма 2.5. *Пусть $\rho_i \in \Xi^{(0)}$ и $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ – корень, для которого $\rho_e = \rho_i$. Тогда для любого конечного набора $\mathscr{T}_0, \ldots, \mathscr{T}_k$ попарно различных R_e-орбит в $\mathbb{T}.x_0$ найдется регулярный инвариант $q \in \Bbbk[X]^{H_e}$, который тождественно равен 1 на $\mathscr{T}_0$ и обращается в нуль на $\mathscr{T}_1, \ldots, \mathscr{T}_k$.*

Доказательство. Морфизм факторизации $\tau \colon X \to Z$ разделяет типичные H_e-орбиты (см. [35; теоремы 2.3 и 3.3]). Поскольку тор $\mathbb{T}$ нормализует подгруппу H_e, имеется такое $\mathbb{T}$-действие на Z, что морфизм τ является $\mathbb{T}$-эквивариантным. В частности, для любого $x \in \mathbb{T}.x_0$ слой τ, проходящий через точку x, составляет одну H_e-орбиту. В соответствии с предложением 2.1 R_e-орбиты $\mathscr{T}_0, \ldots, \mathscr{T}_k$ совпадают с пересечениями соответствующих H_e-орбит и открытой орбиты $\mathbb{T}.x_0$. Поэтому для каждого $j = 1, \ldots, k$ найдется инвариант $q_j \in \Bbbk[X]^{H_e}$, который обращается в нуль на $\mathscr{T}_j$ и равен константе 1 на $\mathscr{T}_0$. Легко видеть, что произведение $q = q_1 \cdots q_k \in \Bbbk[X]^{H_e}$ обладает искомыми свойствами.

В обозначениях леммы 2.5 пусть $\operatorname{Stab}_{\mathscr{T}_1, \ldots, \mathscr{T}_k}(\mathscr{T}_0) \subseteq \operatorname{SAut}(X)$ – подгруппа всех преобразований, которые стабилизируют поточечно орбиты $\mathscr{T}_1, \ldots, \mathscr{T}_k$ и оставляют инвариантным замыкание $\overline{\mathscr{T}_0}$ в X.

Лемма 2.6. *Существует однопараметрическая унипотентная подгруппа $H \subseteq \operatorname{Stab}_{\mathscr{T}_1, \ldots, \mathscr{T}_k}(\mathscr{T}_0)$, действующая на $\overline{\mathscr{T}_0}$ транзитивно.*

Доказательство. Как и ранее, пусть $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ – корень, для которого $\rho_e = \rho_i$, и q – регулярный H_e-инвариант из леммы 2.5. Локально нильпотентное дифференцирование $q\partial_e \in \operatorname{Der} \Bbbk[X]$ определяет однопараметрическую унипотентную подгруппу $H \subseteq \operatorname{Stab}_{\mathscr{T}_1, \ldots, \mathscr{T}_k}(\mathscr{T}_0)$. Ясно, что ограничение $H|_{\mathscr{T}_0} = H_e|_{\mathscr{T}_0}$ действует на $\overline{\mathscr{T}_0} \cong \mathbb{A}^1$ сдвигами и поэтому транзитивно.

В оставшейся части доказательства теоремы 2.1 используются следующие обозначения. Пусть $\Xi^{(0)} = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ – базис в $N_{\mathbb{Q}}$, составленный из порождающих на лучах. Рассмотрим гомоморфизм $\theta \colon G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)^n \to \mathbb{T}$ из стандартного n-мерного тора в $\mathbb{T}$, заданный как

$$\theta \colon (t_1, \ldots, t_n) \longmapsto \bigl(\rho_1(t_1) \cdots \rho_n(t_n)\bigr). \tag{2.10}$$

Легко видеть, что θ сюръективен, а его ядро $\Theta = \ker(\theta)$ – это конечная подгруппа в $G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)^n$. Рассмотрим также индуцированный сюръективный морфизм из $G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)^n$ на открытую орбиту $\mathbb{T}.x_0$. В частности, для m попарно различных точек $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathbb{T}.x_0$ можно записать

$$Q_j = \theta(t_{1,j}, \ldots, t_{n,j}).x_0, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{2.11}$$

где точка $(t_{1,j},\dots,t_{n,j}) \in G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)^n$ определяется по Q_j с точностью до покоординатного действия подгруппы Θ на $G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)^n$:

$$\vartheta.(t_1,\dots,t_n) = (\vartheta_1 t_1,\dots,\vartheta_n t_n), \qquad \text{где} \quad \vartheta = (\vartheta_1,\dots,\vartheta_n) \in \Theta. \tag{2.12}$$

Для $\kappa = \operatorname{ord}\Theta$ из теоремы Лагранжа следует, что $\vartheta_i^\kappa = 1$ для всех $i = 1,\dots,n$.

Зафиксируем стандартный набор из m точек на $\mathbb{T}.x_0$:

$$Q_{j0} = \theta(j,\dots,j).x_0, \qquad j = 1,\dots,m. \tag{2.13}$$

Поскольку $\mathrm{Char}(\Bbbk) = 0$ и $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$, эти точки попарно различны. Остается найти такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{SAut}(X)$, что $\varphi(Q_j) = Q_{j0}$ для каждого $j = 1,\dots,m$. Для этого воспользуемся леммами 2.7 и 2.8 (см. ниже).

Будем говорить, что $t, t' \in G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)$ *κ-эквивалентны*, если $t' = \varepsilon t$, где $\varepsilon \in G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)$ – корень степени κ из единицы.

Лемма 2.7. a) *Для любых попарно различных элементов $t_1,\dots,t_n \in G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)$ множество таких элементов $a \in \Bbbk$, что $t_i + a$ и $t_j + a$ являются κ-эквивалентными для некоторых $i \neq j$, конечно.*

b) *Зафиксируем $s \in \{1,\dots,n\}$. Если точки Q_i и Q_j принадлежат одной R_s-орбите, то их r-е координаты $t_{i,r}$ и $t_{j,r}$ κ-эквивалентны для всех $r \neq s$.*

c) *Предположим, что точки $Q_{j_1},\dots,Q_{j_l}$ лежат на одной R_s-орбите $\mathscr{T}^{(s)}$. Тогда их образы при типичном сдвиге вдоль прямой $\overline{\mathscr{T}^{(s)}} \cong \mathbb{A}^1$ лежат на попарно различных R_r-орбитах для всех $r \neq s$.*

Доказательство. a) Пусть ε – корень степени κ из единицы. Тогда линейное соотношение

$$t_i + a = \varepsilon(t_j + a)$$

выполнено не более чем для одного значения a. Это доказывает п. a).

Пункт b) имеет место, поскольку R_s-действие на X, поднятое посредством (2.10), изменяет только компоненту $t_{i,s}$ точки Q_i в (2.11), тогда как Θ-действие на $G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)^n$ заменяет значение $t_{i,r}$ $(r \neq s)$ на κ-эквивалентное.

Пункт c) немедленно следует из a) и b), поскольку для $i \neq j$ пересечение любых R_i- и R_j-орбит не более чем конечно.

Лемма 2.8. *В использованных выше обозначениях найдется такое $\psi \in \mathrm{SAut}(X)$, что точки $\psi(Q_1),\dots,\psi(Q_m)$ лежат в различных R_1-орбитах на $\mathbb{T}.x_0$.*

Доказательство. По нашему предположению $n \geqslant 2$, поэтому на X определено действие группы R_2. Пусть $\mathscr{T}_0^{(2)},\dots,\mathscr{T}_k^{(2)}$ – различные R_2-орбиты, проходящие через точки $Q_1,\dots,Q_m$ таким образом, что этот набор распадается на $k+1$ попарно непересекающихся поднаборов. Мы можем считать, что поднабор, лежащий на $\mathscr{T}_0^{(2)}$ – это $Q_1,\dots,Q_l$. Применяя лемму 2.6 к $\rho_e = \rho_2$, мы найдем однопараметрическую унипотентную подгруппу $H \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathscr{T}_1^{(2)},\dots,\mathscr{T}_k^{(2)}}(\mathscr{T}_0^{(2)})$, действующую сдвигами вдоль $\overline{\mathscr{T}_0^{(2)}} \cong \mathbb{A}^1$. По лемме 2.7 образы $Q_1,\dots,Q_l$ при типичном сдвиге лежат в разных R_r-орбитах для всех $r \neq 2$, тогда как остальные точки Q_j, $j > l$, остаются неподвижными. Применяя такую же процедуру последовательно к другим поднаборам, мы получим в итоге такой автоморфизм $\psi \in \mathrm{SAut}(X)$, что точки $\psi(Q_1),\dots,\psi(Q_m)$ лежат в разных R_r-орбитах для всех $r \neq 2$.

Доказательство теоремы 2.1. Начнем с утверждения о бесконечной транзитивности. По лемме 2.8 мы можем считать, что орбиты $\mathscr{T}_j^{(1)} = R_1.Q_j$, $j = 1, \ldots, m$, попарно различны. Лемма 2.6 показывает, что можно изменить компоненту $t_{1,j}$ точки Q_j произвольно, оставляя неизменными другие компоненты и другие точки из нашего набора. Добьемся того, чтобы $t_{1,j} = j$ для всех $j = 1, \ldots, m$. После этого для любого $l \geqslant 2$ орбиты $R_l.Q_1, \ldots, R_l.Q_m$ будут попарно различны. Вновь применяя лемму 2.6 к каждой R_l-орбите для $l = 2, \ldots, n$, мы получаем стандартный набор $Q_1^{(0)}, \ldots, Q_m^{(0)}$, как в (2.13), с $t_{l,j} = j$ для всех $j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$. Это доказывает бесконечную транзитивность в теореме 2.1.

Утверждение о гибкости сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма 2.9. *Любое невырожденное аффинное торическое многообразие X является гибким.*

Доказательство. Если $\dim X = 1$, то $X \cong \mathbb{A}^1$, и утверждение леммы очевидно. Далее считаем, что $\dim X \geqslant 2$. Мы уже знаем, что группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на X_{reg} (бесконечно) транзитивно. Поэтому достаточно найти на X_{reg} одну гибкую точку. Покажем, что точка x_0 в открытой $\mathbb{T}$-орбите является гибкой. Рассмотрим действие стандартного тора $G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)^n$ на X, индуцированное $\mathbb{T}$-действием на X посредством (2.10). Стабилизатор $\mathrm{Stab}(x_0) \subseteq G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)^n$ конечен и касательное отображение $T_g G_{\mathrm{m}}(\Bbbk)^n \to T_{x_0} X$ в каждой точке $g \in \mathrm{Stab}(x_0)$ сюръективно. Поэтому касательные векторы в x_0 к орбитам $R_i.x_0$, $i = 1, \ldots, n$, порождают касательное пространство $T_{x_0}X$. Замечание 2.1 показывает, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ найдется такой корень $e_i \in \mathscr{R}(\sigma)$, что $\rho_i = \rho_{e_i}$. Поскольку точка x_0 не может быть неподвижной относительно однопараметрической подгруппы H_{e_i}, из предложения 2.1 вытекает, что $H_{e_i}.x_0 = \overline{R_i.x_0}$. При подходящей параметризации этих двух орбит их векторы скоростей в x_0 совпадут. Поэтому $T_{x_0}X$ порождается касательными векторами к орбитам $H_{e_i}.x_0$, $i = 1, \ldots, n$, что и означает, что точка x_0 является гибкой на X.

Доказательство теоремы 2.1 завершено.

Пример 2.2. Рассмотрим особую аффинную торическую поверхность $X_{d,e} = \mathbb{A}^2/G_d$, где d и e – взаимно простые целые числа, $0 < e < d$, и G_d обозначает циклическую группу, порожденную первообразным корнем ζ степени d из единицы, которая действует на $\mathbb{A}^2$ как $\zeta.(x,y) = (\zeta x, \zeta^e y)$. Известно (см. [36]–[38]), что для $e \geqslant 2$ множество гладких точек $(X_{d,e})_{\mathrm{reg}} = X_{d,e} \setminus \{0\}$ не является однородным пространством аффинной алгебраической группы. Однако $X_{d,e} \setminus \{0\}$ однородно относительно действия бесконечномерной группы $\mathrm{SAut}(X_{d,e})$.

§ 3. Аффинные надстройки

В этом параграфе мы доказываем часть 3 теоремы 0.2. Напомним следующие необходимые понятия.

Определение 3.1. Пусть $X^{(0)}$ – аффинное многообразие. Будем называть *цилиндром* над $X^{(0)}$ произведение $X^{(0)} \times \mathbb{A}^1$. Если задана непостоянная регулярная функция $f_1 \in \Bbbk[X^{(0)}]$, то рассмотрим новое аффинное многообразие

$$X^{(1)} = \mathrm{Susp}(X^{(0)}, f_1) := \{f_1(x) - uv = 0\} \subseteq X^{(0)} \times \mathbb{A}^2,$$

называемое *надстройкой* над $X^{(0)}$. По индукции для любого $l \in \mathbb{N}$ можно построить итерированную надстройку $X^{(l)} = \operatorname{Susp}(X^{(l-1)}, f_l)$.

Например, начиная с $X^{(0)} = \mathbb{A}^k$, на l-м шаге мы получим итерированную надстройку $X^{(l)}$, заданную в аффинном пространстве

$$\mathbb{A}^{k+2l} = \operatorname{Spec} \Bbbk[x_1, \ldots, x_k, u_1, v_1, \ldots, u_l, v_l]$$

следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} u_1v_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0, \\ u_2v_2 - f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, v_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_lv_l - f_l(x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{l-1}, v_{l-1}) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где многочлены $f_i \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_k, u_1, v_1, \ldots, u_{i-1}, v_{i-1}]$ выбираются так, что f_i не равен константе по модулю идеала $(u_1v_1 - f_1, \ldots, u_{i-1}v_{i-1} - f_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Теорема 0.2 доказывается отдельно для надстроек над прямой и над многообразием размерности хотя бы 2. Для надстроек над прямой утверждение остается верным над любым полем характеристики нуль при некотором дополнительном ограничении на функцию $f = f_1$.

Теорема 3.1. *Пусть $\Bbbk$ – поле характеристики нуль и $f \in \Bbbk[x]$ – такой многочлен, что $f(\Bbbk) = \Bbbk$. Рассмотрим поверхность $X \subseteq \mathbb{A}^3_{\Bbbk}$, заданную уравнением $f(x) - uv = 0$. Тогда многообразие X является гибким и группа специальных автоморфизмов $\operatorname{SAut}(X)$ действует на X_{reg} m-транзитивно для любого $m \in \mathbb{N}$.*

В высших размерностях часть 3 теоремы 0.2 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 3.2. *Пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, $X^{(0)}$ – гибкое аффинное многообразие. Предположим, что либо $X^{(0)} \cong \mathbb{A}^1$, либо $\dim X^{(0)} \geqslant 2$ и группа специальных автоморфизмов $\operatorname{SAut}(X^{(0)})$ действует на $X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ m-транзитивно для всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда все итерированные надстройки $X^{(l)}$, $l \geqslant 1$, над $X^{(0)}$ являются гибкими и группа специальных автоморфизмов $\operatorname{SAut}(X^{(l)})$ действует на $X^{(l)}_{\mathrm{reg}}$ m-транзитивно для всех $m \in \mathbb{N}$.*

Так как условия теоремы выполняются для аффинного пространства $X^{(0)} = \mathbb{A}^k$, $k \geqslant 1$, то можно заключить, что для всех $k, l \geqslant 1$ аффинное многообразие $X^{(l)} \subseteq \mathbb{A}^{k+2l}$, заданное системой уравнений (3.1), является гибким и группа $\operatorname{SAut}(X^{(l)})$ действует на $X^{(l)}_{\mathrm{reg}}$ бесконечно транзитивно.

Доказательство теоремы 3.2 с незначительными изменениями остается верным для вещественных алгебраических многообразий. Мы получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть $X^{(0)}$ – гибкое вещественное аффинное алгебраическое многообразие. Предположим, что множество гладких точек $X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ связно и группа специальных автоморфизмов $\operatorname{SAut}(X^{(0)})$ действует на $X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ m-транзитивно для всех $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим итерированные надстройки $X^{(i)} = \operatorname{Susp}(X^{(i-1)}, f_i)$, где для каждого $i = 1, \ldots, l$ функция $f_i \in \mathbb{R}[X^{(i-1)}]$ удовлетворяет условию $f_i(X^{(i-1)}_{\mathrm{reg}}) = \mathbb{R}$. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, l$ многообразие*

$X^{(i)}$ *является гибким и группа* $\mathrm{SAut}(X^{(i)})$ *действует на* $X^{(i)}_{\mathrm{reg}}$ *m-транзитивно для всех* $m \in \mathbb{N}$.

Бесконечная транзитивность в теоремах 3.1–3.3 доказывается в пп. 3.1–3.3 соответственно. Гибкость во всех трех случаях проверяется в п. 3.4.

3.1. Надстройки над прямой.

Доказательство бесконечной транзитивности в теореме 3.1. (Рассуждения совершенно элементарны и опираются на явную формулу из работы [39].) Можно считать, что $d = \deg f \geqslant 2$. Согласно работе[7] [39] в нашем случае группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ содержит коммутативные подгруппы G_u и G_v, порожденные унипотентными подгруппами

$$H_u(q)\colon (x,u,v) \mapsto \left(x + tq(u), u, v + \frac{f(x+tq(u)) - f(x)}{u}\right), \tag{3.2}$$

$$H_v(q)\colon (x,u,v) \mapsto \left(x + tq(v), u + \frac{f(x+tq(v)) - f(x)}{v}, v\right) \tag{3.3}$$

соответственно, где $q(z) \in \Bbbk[z]$, $q(0) = 0$ и $t \in \Bbbk$. Очевидно, что $u \in \Bbbk[X]^{G_u}$ и $v \in \Bbbk[X]^{G_v}$. Мы утверждаем, что подгруппа $G = \langle G_u, G_v\rangle \subseteq \mathrm{SAut}(X)$ действует на X_{reg} m-транзитивно при всех $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, для любого заданного набора попарно различных точек из X_{reg}

$$Q_1 = (x_1, u_1, v_1), \quad \dots, \quad Q_m = (x_m, u_m, v_m)$$

мы хотим найти автоморфизм $\phi \in G$, переводящий этот набор в стандартный набор

$$Q_i^{(0)} = (x_i^{(0)}, u_i^{(0)}, v_i^{(0)}), \qquad i = 1, \dots, m,$$

выбранный таким образом, что все $v_i^{(0)}$ отличны от нуля и попарно различны.

Шаг 1. Действуя при помощи подгруппы G_u, можно перевести исходный набор в такой набор, что $v_i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Действительно, так как $f^{(d)}(x)$ – ненулевая постоянная и либо $f'(x) \neq 0$, либо $u \neq 0$, то многочлен

$$\frac{f(x+tu) - f(x)}{u} = \frac{f'(x)}{1!}t + \dots + \frac{f^{(d)}(x)}{d!}u^{d-1}t^d \in \Bbbk[x,u][t]$$

отличен от константы. Так как точка $Q_s \in X$ гладкая, равенства $u_s = 0$, $v_s = 0$, $f'(x_s) = 0$ не могут выполняться одновременно. Поэтому действие автоморфизма (3.2) с $q = z$ и достаточно общим значением параметра t не меняет координату $v_s = 0$, но при этом оставляет ненулевыми те v_i, которые уже были ненулевые. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Шаг 2. С этого момента будем считать, что $v_i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда, действуя группой G_v, мы можем перевести исходный набор в такой, для которого все u_i, $i = 1, \dots, m$, отличны от нуля и попарно различны. Действительно, пусть

$$F(Q_i, q, t) = \frac{f'(x_i)}{1!}\,\frac{q(v_i)}{v_i}t + \dots + \frac{f^{(d)}(x_i)}{d!}\,\frac{q(v_i)^d}{v_i}t^d \in \Bbbk[t].$$

---

[7] См. также [40]–[42].

Получаем, что $(x_i, v_i) \neq (x_j, v_j)$ для всех $i \neq j$, так как $(x_i, u_i, v_i) \neq (x_j, u_j, v_j)$, где $u_i = f(x_i)/v_i$ и $u_j = f(x_j)/v_j$. Если $v_i = v_j$, то $f^{(d-1)}(x_i) \neq f^{(d-1)}(x_j)$, так как линейная функция $f^{(d-1)}(x)$ является ненулевой. Поэтому для подходящего $q \in \Bbbk[z]$, удовлетворяющего условию $q(v_i) \neq 0$ для всех i, многочлены $F(Q_i, q, t)$ и $F(Q_j, q, t)$ различны при всех $i \neq j$. Применяя автоморфизм $H_v(q)$ из (3.3) с достаточно общим t, получаем требуемое.

Шаг 3. Далее можно считать, что все координаты u_j отличны от нуля и попарно различны. Покажем, что при помощи группы G_u можно перевести исходный набор точек в набор со стандартными значениями $v_s^{(0)}$, $s = 1, \ldots, m$. Для этого мы строим автоморфизм, оставляющий неподвижными все точки, кроме Q_i, и переводящий Q_i в новую точку Q_i', для которой $v_i' = v_i^{(0)}$. А именно, зафиксируем многочлен $q(z)$, для которого $q(0) = 0$, $q(u_i) \neq 0$ и $q(u_j) = 0$ при всех $j \neq i$. Из условий, наложенных на $f(x)$, следует, что у уравнения $f(x) = u_i(v_i^{(0)} - v_i) + f(x_i)$ есть корень $x = a_i$, где $a_i \in \Bbbk$. Применяя $H_u(q)$ в (3.2) для $t = (a_i - x_i)/q(u_i)$, получаем требуемое.

Шаг 4. Теперь можно считать, что $v_i = v_i^{(0)}$ для всех i. Достаточно при помощи группы G_v добиться того, чтобы для всех i значения координат x_i были равны $x_i^{(0)}$. Действительно, в этом случае $u_i = f(x_i)/v_i = f(x_i^{(0)})/v_i^{(0)} = u_i^{(0)}$. Далее применим $H_u(q)$, как и в (3.3), полагая $t = 1$ и выбирая многочлен q таким образом, что $q(0) = 0$ и $q(v_i^{(0)}) = x_i^{(0)} - x_i$ для всех i. Это завершает доказательство.

3.2. Бесконечная транзитивность в высших размерностях. Достаточно доказать теоремы 3.2, 3.3 при $l = 1$. Прежде чем переходить к собственно доказательствам, установим в леммах 3.1–3.3 некоторые полезные элементарные свойства надстроек. В леммах 3.1–3.4 мы предполагаем, что основное поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль.

Лемма 3.1. *Если многообразие $X^{(0)}$ неприводимо, то и надстройка $X^{(1)} = \operatorname{Susp}(X^{(0)}, f)$ также неприводима.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что найдутся такие ненулевые функции

$$F_1, F_2 \in \Bbbk[X^{(1)}] = \Bbbk[X^{(0)}][u, v]/(uv - f), \qquad \text{что} \quad F_1F_2 = 0.$$

Можно считать, что мы выбрали F_1 и F_2 так, что $\deg_{u,v}(F_1) + \deg_{u,v}(F_2)$ минимально, а также что ни один моном в F_i не содержит произведение uv, иначе мы могли бы заменить это произведение на f согласно определению 3.1. Если переменная u входит и в F_1, и в F_2, то $\deg_u(F_1F_2) > 0$, так как старший по u член ни с чем не сократится. С точностью до перестановки u и v мы можем считать, что в многочлен F_1 не входит переменная v, а в многочлен F_2 не входит переменная u. Запишем

$$F_1 = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i, \qquad F_2 = \sum_{j=0}^{l} b_j v^j,$$

где $a_i, b_j \in \Bbbk[X^{(0)}]$, а значение $k + l$ минимально возможное.

Если $k = l = 0$, то $F_1, F_2 \in \Bbbk[X^{(0)}]$ являются делителями нуля, что противоречит неприводимости $X^{(0)}$. Поэтому $k + l > 0$.

Если $a_0 = b_0 = 0$, то мы можем уменьшить общую степень $k+l$, вынося за скобки u и v. Это противоречит предположению о минимальности. Поэтому можно считать, что $a_0 \neq 0$. Тогда в произведение F_1F_2 должен входить ненулевой член $a_0b_lv^l$, что вновь приводит к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* $\pi\colon X^{(1)} \to X^{(0)}$ *– ограничение проекции* $X^{(0)} \times \mathbb{A}^2 \to X^{(0)}$ *на* $X^{(1)}$. *Тогда* $\pi(X^{(1)}_{\mathrm{reg}}) = X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$.

Доказательство. Предположим, что идеал подмногообразия $X^{(0)} \subseteq \mathbb{A}^s$ порождается функциями $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_s]$. Точка $P \in X^{(0)}$ является гладкой тогда и только тогда, когда ранг якобиана

$$D_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_s} \end{pmatrix}$$

в точке P достигает своего максимального значения $s - \dim X^{(0)}$. Аналогичная матрица для $X^{(1)}$ имеет вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_s} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_s} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} & -v & -u \end{pmatrix}.$$

Очевидно, в любой точке $\operatorname{rk} D_1 \leqslant 1 + \operatorname{rk} D_0$. Так как $\dim X^{(1)} = 1 + \dim X^{(0)}$, все гладкие точки многообразия $X^{(1)}$ отображаются под действием π в гладкие точки $X^{(0)}$. С другой стороны, пусть M – квадратная подматрица D_0, а $P \in X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ – такая точка, что ранг $M(P)$ равен $r = s - \dim X^{(0)}$, т.е. рангу матрицы D_0. Расширим M до квадратной подматрицы M' ранга $r+1$: добавим последнюю строку и один из дополнительных столбцов D_1 таким образом, чтобы $\operatorname{rk} M'(P,u,v) = 1 + \operatorname{rk} M(P) = r+1$ для некоторых $(u,v) \neq (0,0)$, где $(P,u,v) \in X^{(1)}$. Тогда $(P,u,v) \in X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$. Из этого следует утверждение леммы.

Замечание 3.1. Пусть A – аффинная алгебра. Напомним (см. [7]), что *аффинной модификацией* A с центром (I,v), где $I \subseteq A$ – идеал, а $v \in I$ не является делителем нуля, называется факторалгебра $A[It]/(1-vt)$, где

$$A[It] = A \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} (It)^n \cong A \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots = \mathrm{Bl}_I(A)$$

– алгебра Рисса, ассоциированная с парой (A,I), и t – формальная переменная.

Геометрически многообразие $\mathrm{Spec}(A[It]/(1-vt))$ можно получить из $X = \mathrm{Spec}\, A$ следующим образом. Надо раздуть X с центром в I, а затем удалить из $\mathrm{Bl}_I(X)$ собственный прообраз дивизора нулей $V(v)$ в X. Полученное многообразие снова будет аффинным. (Заметим, что собственный прообраз D пересекает исключительный дивизор E, так как $v \in I$; детали можно найти в [7; § 1].)

Согласно [7; пример 1.4 и § 5] надстройка $X^{(1)} = \mathrm{Susp}(X^{(0)}, f)$ может быть получена как аффинная модификация $X^{(0)} \times \mathbb{A}^1$ (где $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\,\Bbbk[v]$) с центром $(I_1 = (v, f), v)$ вдоль дивизора $v = 0$. Меняя ролями v и u, получаем, что многообразие $X^{(1)}$ является также аффинной модификацией $X^{(0)} \times \mathbb{A}^1$, где на сей раз $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\,\Bbbk[u]$, с центром $(I_2 = (u, f), u)$ вдоль дивизора $u = 0$. Исключительные дивизоры этих двух модификаций ($v = 0$ и $u = 0$ соответственно) оба изоморфны $X^{(0)} \times \mathbb{A}^1$, но различны как подмногообразия в $X^{(1)}$. Для произвольного $c \in \Bbbk$ будем обозначать через $U_c = \{u = c\}$ и $V_c = \{v = c\}$ гиперповерхности уровня в $X^{(1)}$, часто используемые в дальнейшем.

В [7; § 2] указан способ, позволяющий поднять произвольное ЛНД ∂ на аффинную модификацию в том случае, когда ∂ сохраняет центр модификации. В лемме 3.3 (см. ниже) мы конкретизируем этот метод для частного случая аффинных надстроек.

Пусть дано ЛНД δ_0 аффинной области целостности A_0 и многочлен $q \in \Bbbk[z]$, для которого $q(0) = 0$. Тогда можно определить новое ЛНД $\delta' = \delta'(\delta_0, q)$ на $A' = A_0 \otimes \Bbbk[v]$, где v – новая переменная, следующим образом. Сначала продолжим δ_0 на A', полагая $\delta_0(v) = 0$, а затем домножим δ_0 на элемент $q(v) \in \ker \delta_0$. Предположим, что A_0 порождается $x_1, x_2, \dots, x_s$. Тогда δ' записывается в координатах как

$$\delta'(x_i) = q(v)\delta_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, s, \qquad \delta'(v) = 0. \tag{3.4}$$

Теперь рассмотрим еще одну независимую переменную u и ненулевой элемент $f \in A_0$. Рассмотрим алгебру регулярных функций A_1 на надстройке над A_0:

$$A_1 = (A_0 \otimes \Bbbk[u, v])/(uv - f).$$

Лемма 3.3. *В тех же обозначениях, что и выше, любое ЛНД* $\delta' \in \mathrm{Der}\, A'$ *может быть преобразовано в ЛНД* $\delta_1 = \delta_1(\delta_0, q) \in \mathrm{Der}\, A_1$, *если положить*

$$\delta_1(x_i) = \delta'(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, s, \qquad \delta_1(u) = \frac{q(v)}{v}\delta_0(f), \qquad \delta_1(v) = \delta'(v) = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Сначала проверим, что эти формулы поднимают δ' до $\delta_1 = \delta_1(\delta_0, q) \in \mathrm{Der}(A_0 \otimes \Bbbk[u, v])$, где δ_1 сохраняет идеал $(uv - f)$. Благодаря выбору q получаем, что $q(v)/v \in \Bbbk[v]$, и дифференцирование δ_1 корректно определено на образующих алгебры $A_0 \otimes \Bbbk[u, v]$. Легко видеть, что δ_1 локально нильпотентно. Непосредственное вычисление показывает, что $\delta_1(uv - f) = 0$. Поэтому δ_1 опускается до ЛНД факторалгебры A_1. Это последнее ЛНД мы также обозначаем через δ_1.

Определение 3.2. Пусть G_v – подгруппа группы специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X^{(1)})$, порожденная всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами

$$H_v(\delta_0, q) = \exp(t\delta_1), \qquad \text{где} \quad t \in \Bbbk_+, \quad \delta_1 = \delta_1(\delta_0, q),$$

причем δ_0 и $q(t)$ определены, как выше[8]. Меняя v и u ролями, мы получаем вторую подгруппу $G_u \subseteq \mathrm{SAut}(X^{(1)})$. При этом $u \in \Bbbk[X^{(1)}]^{G_u}$ и $v \in \Bbbk[X^{(1)}]^{G_v}$. Покажем, что подгруппа $G \subseteq \mathrm{SAut}(X^{(1)})$, порожденная G_u и G_v, действует бесконечно транзитивно на $X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$.

Зафиксируем k попарно различных чисел $c_1, \dots, c_k \in \Bbbk$. Пусть $\mathrm{Stab}^v_{c_1 \dots c_k}$ – подгруппа группы G_v, оставляющая неподвижными все точки каждой гиперповерхности $V_{c_s} \subseteq X^{(1)}$, $s = 1, \dots, k$.

Лемма 3.4. *Предположим, что группа* $\mathrm{SAut}(X^{(0)})$ *действует на* $X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ *m-транзитивно. Тогда для любых попарно различных чисел* $c_0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\Bbbk)$ *группа* $\mathrm{Stab}^v_{c_1 \dots c_k}$ *действует на* $V_{c_0} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ *m-транзитивно.*

Доказательство. Рассмотрим два набора из m различных точек $P'_1, \dots, P'_m$ и $Q'_1, \dots, Q'_m$ в $V_{c_0} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$. Пусть $P_1, \dots, P_m$ и $Q_1, \dots, Q_m$ – их проекции на $X^{(0)}$ под действием π. Заметим, что гиперповерхность $V_{c_0} \subseteq X^{(1)}$ под действием π отображается изоморфно на $X^{(0)}$. При этом по лемме 3.2 известно, что $\pi(V_{c_0} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}) \subseteq X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$. Точка $P' \in V_{c_0}$ может быть записана как $P' = (P, u, c_0)$, где $P = \pi(P') \in X^{(0)}$ и $u = u(P') = f(P)/c_0$. Поэтому у любой гладкой точки на $X^{(0)}$ есть прообраз на $X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$. Следовательно, мы имеем изоморфизм $X^{(0)} \xrightarrow{\cong} V_{c_0}$, переводящий P в P'.

Так как в силу наших предположений группа $\mathrm{SAut}(X^{(0)})$ действует на $X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ m-транзитивно, существует автоморфизм $\psi_0 \in \mathrm{SAut}(X^{(0)})$, который переводит упорядоченный набор $(P_1, \dots, P_m)$ в $(Q_1, \dots, Q_m)$. Этот автоморфизм может быть записан как произведение

$$\psi_0 = \prod_{i=1}^{k} \exp(\delta_0^{(i)})$$

для некоторых ЛНД $\delta_0^{(1)}, \dots, \delta_0^{(k)} \in \mathrm{Der}\, \Bbbk[X^{(0)}]$.

Полагая $q = \alpha z (z - c_1) \cdots (z - c_k)$, где $\alpha \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\Bbbk)$ таково, что $q(c_0) = 1$, по лемме 3.3 мы можем поднять ЛНД $\delta_0^{(i)}$ до ЛНД

$$\delta_1^{(i)} = \delta_1^{(i)}(\delta_0^{(i)}, q) \in \mathrm{Der}\, \Bbbk[X^{(1)}], \qquad i = 1, \dots, k.$$

Поэтому ψ_0 может быть поднят до автоморфизма

$$\psi_1 = \prod_{i=1}^{k} \exp(\delta_1^{(i)}) \in G_v \subseteq \mathrm{SAut}(X^{(1)}).$$

Применив (3.4), можно легко установить, что все действия на $X^{(1)}$ соответствующих однопараметрических унипотентных подгрупп $H_v(\delta_0^{(i)}, q)$ ограничиваются до исходных действий на $V_{c_0} \cong X^{(0)}$. Поэтому автоморфизм $\psi_1|_{V_{c_0}} = \psi_0$ переводит $(P'_1, \dots, P'_m)$ в $(Q'_1, \dots, Q'_m)$. Благодаря подходящему выбору $q(z)$ этот автоморфизм оставляет неподвижными все точки остальных гиперповерхностей V_{c_s}. Лемма доказана.

[8] Заметим, что для $X^{(0)} = \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\, \Bbbk[z]$ и $\delta_0 = d/dz$ мы получим $H_v(\delta_0, q) = H_v(q)$ согласно (3.3).

Лемма 3.5. *Пусть* $\Bbbk$ – *алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Предположим, как и выше, что группа* $\mathrm{SAut}(X^{(0)})$ *действует на* $X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ m*-транзитивно. Тогда для любого набора попарно различных точек* $Q'_1, \ldots, Q'_m \in X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ *существует такой автоморфизм* $\varphi \in \mathrm{SAut}(X^{(1)})$, *что* $\varphi(Q'_i) \notin U_0 \cup V_0$ *при всех* $i = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство. Будем называть точку $Q'_i = (Q_i, u_i, v_i) \in X^{(1)}$ *гиперболической*, если $u_i v_i \neq 0$, т.е. если $Q'_i \notin U_0 \cup V_0$. Мы хотим показать, что при помощи элемента группы специальных автоморфизмов можно перевести исходный набор в такой набор, в котором все точки будут гиперболическими. Предположим, что $Q'_1, \ldots, Q'_l$ уже гиперболические, а Q'_{l+1} – нет, $l \geqslant 0$. Достаточно доказать, что можно отобразить Q'_{l+1} в точку, лежащую вне $U_0 \cup V_0$, не нарушая гиперболичности точек $Q'_1, \ldots, Q'_l$, и воспользоваться индукцией. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $u_{l+1} = 0$, $v_{l+1} \neq 0$.

Случай 2: $u_{l+1} = v_{l+1} = 0$.

Мы утверждаем, что существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{SAut}(X^{(1)})$, оставляющий $Q'_1, \ldots, Q'_l$ гиперболическими и такой, что в случае 1 точка $\varphi(Q'_{l+1})$ становится тоже гиперболической, а в случае 2 эта точка удовлетворяет условиям случая 1.

В случае 1 разобьем $Q'_1, \ldots, Q'_{l+1}$ на группы $M_0, \ldots, M_k$ в соответствии со значениями координаты v: $Q'_i \in M_j \iff v_i = c_j$, где $c_j \neq 0$. Предположим, что $M_0 = \{Q'_{i_1}, \ldots, Q'_{i_r}, Q'_{l+1}\}$, где $i_k \leqslant l$ для всех $k = 1, \ldots, r$. Мы можем выбрать новую точку Q''_{l+1}, где $Q''_{l+1} \in (V_{c_0} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}) \setminus U_0$. Действительно, так как $c_0 = v_{l+1} \neq 0$, то $V_{c_0} \cong X^{(0)}$. По предположению теоремы 3.2 $\dim X^{(0)} \geqslant 2$, поэтому $\dim((V_{c_0} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}) \setminus U_0) = \dim X^{(0)} \geqslant 2$.

По лемме 3.4 подгруппа $\mathrm{Stab}^v_{c_1,\ldots,c_k} \subseteq G_v$ действует на $V_{c_0} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ $(r+1)$-транзитивно. Поэтому можно перевести набор $(Q'_{i_1}, \ldots, Q'_{i_r}, Q'_{l+1})$ в набор $(Q'_{i_1}, \ldots, Q'_{i_r}, Q''_{l+1})$, оставляя неподвижными остальные точки из $M_1 \cup \cdots \cup M_k$. Это доказывает утверждение в случае 1.

В случае 2 точка $Q'_{l+1} = (Q_{l+1}, 0, 0)$ лежит в $X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$. Из леммы 3.2 и ее доказательства следует, что $Q_{l+1} = \pi(Q'_{l+1}) \in X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ и $df(Q_{l+1}) \neq 0$ в кокасательном пространстве $T^*_{Q_{l+1}} X^{(0)}$. Так как многообразие $X^{(0)}$ является гибким, найдется такое ЛНД $\partial_0 \in \mathrm{Der}\,\Bbbk[X^{(0)}]$, что $\partial_0(f)(Q_{l+1}) \neq 0$. Полагая $q(v) = v(v - v_1)(v - v_2) \cdots (v - v_l) \in \Bbbk[v]$ и выбирая множество образующих $x_1, \ldots, x_s$ алгебры $\Bbbk[X^{(0)}]$, мы можем аналогично (3.5) поднять ∂_0 до $\partial_1 \in \mathrm{Der}\,\Bbbk[X^{(1)}]$ по формулам

$$\partial_1(x_i) = q(v)\partial_0(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, s, \qquad \partial_1(u) = \frac{q(v)}{v}\partial_0(f), \qquad \partial_1(v) = 0. \tag{3.6}$$

Согласно нашему выбору $\partial_1(u)(Q'_{l+1}) \neq 0$. Поэтому действие соответствующей однопараметрической подгруппы $H_v(\partial_0, q) = \exp(t\partial_1)$ отображает точку Q'_{l+1} в точку вне U_0. Тем самым, орбита $H_v(\partial_0, q).Q'_{l+1}$ может пересекаться с гиперповерхностью $U_0 \subseteq X^{(1)}$ лишь в конечном числе точек. Аналогично для всех $j = 1, 2, \ldots, l$ орбита $H_v(\partial_0, q).Q_j \nsubseteq U_0$ пересекается с U_0 лишь в конечном числе точек. Полагая $\varphi = \exp(t_0\partial_1) \in H_v(\partial_0, q) \subseteq G_v$, мы заключаем, что для почти всех значений параметра $t_0 \in \Bbbk$ образы $\varphi(Q'_j)$ лежат вне U_0 для всех $j = 1, 2, \ldots, l+1$. Так как группа $H_v(\partial_0, q)$ сохраняет значение координаты v, точки $\varphi(Q'_1), \ldots, \varphi(Q'_l)$ по-прежнему гиперболические. Переставляя[9] u и v, мы заключаем, что для нового набора $\varphi(Q'_1), \ldots, \varphi(Q'_l), \varphi(Q'_{l+1})$ выполняются предположения случая 1, что и требовалось.

Доказательство бесконечной транзитивности в теореме 3.2. Если $X^{(0)} = \mathbb{A}^1$, то утверждение следует из теоремы 3.1. Пусть теперь $\dim X^{(0)} \geqslant 2$. Чтобы показать, что действие группы $\mathrm{SAut}(X^{(1)})$ на $X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ является m-транзитивным для всех $m \in \mathbb{N}$, зафиксируем стандартный набор из m попарно различных точек $P'_1, \ldots, P'_m \in U_1 \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$. Достаточно показать, что можно перевести набор попарно различных точек $Q'_1, \ldots, Q'_m \in X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ в $P'_1, \ldots, P'_m$ при помощи автоморфизма $\psi \in \mathrm{SAut}(X^{(1)})$. По лемме 3.5 можно считать, что $Q'_i \notin U_0 \cup V_0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Аналогично доказательству леммы 3.5 разобьем набор $Q'_1, \ldots, Q'_m$ на группы $M_1, \ldots, M_k$ в соответствии со значениями координаты v.

По нашему предположению многообразие $X^{(0)}$ является гибким. Следовательно, каждый обратимый элемент в $\Bbbk[X^{(0)}]$ является константой. Так как f непостоянна, то $f(X^{(0)}) = \Bbbk$. В частности, $U_c \cap V_d \neq \varnothing$ для любых $c, d \in \Bbbk$. Так как $\dim X^{(1)} = 1 + \dim X^{(0)} \geqslant 3$, то пересечение $U_c \cap V_d$ имеет положительную размерность, поэтому оно бесконечно.

Действуя подгруппами $\mathrm{Stab}^v_{c_1 \ldots \check{c}_i \ldots c_l} \subseteq G_v$, по лемме 3.4 мы можем отобразить M_i в $U_1 \cap V_{c_i} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$, не изменяя положения остальных точек из $\bigcup_{j \neq i} M_j$. Поэтому можно предполагать, что $Q'_1, \ldots, Q'_m \in U_1 \cap X_{\mathrm{reg}}$. Снова применяя лемму 3.4 с переставленными u и v, $k = 0$ и $c_0 = 1$, т.е. действуя подгруппой G_u, мы можем отобразить полученный на предыдущем шаге набор в стандартный набор $P'_1, \ldots, P'_m$. Это завершает доказательство.

3.3. Надстройки над вещественными многообразиями. В этом пункте мы доказываем теорему 3.3. Нам потребуется следующая элементарная лемма.

Лемма 3.6. *Пусть Y – гладкое связное вещественное многообразие размерности 2 или более. Тогда для любой непрерывной функции $f\colon Y \to \mathbb{R}$ множество уровня $f^{-1}(c)$ бесконечно для всех $c \in \mathrm{Int}\, f(Y)$.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что $\mathrm{Int}\, f(Y) \subseteq \mathbb{R}$ является открытым интервалом. Выберем две точки $y_1, y_2 \in Y$ так, чтобы $f(y_1) = c_1 < c$ и $f(y_2) = c_2 > c$. Их можно соединить в Y гладким путем l. Тогда у l есть окрестность U, диффеоморфная цилиндру $\Delta \times I$, где $I = [0, 1]$, а Δ – шар размерности $\dim \Delta = \dim Y - 1 \geqslant 1$. Поэтому существует непрерывное семейство путей в U, соединяющих y_1 и y_2, при этом любые два пути пересекаются только в начале y_1 и в конце y_2. Так как гиперповерхность $f^{-1}(c)$ разделяет Y на две части, все пути из y_1 в y_2 пересекают эту гиперповерхность. В частности, $f^{-1}(c)$ бесконечно.

Доказательство теоремы 3.3 в целом совпадает с доказательством теоремы 3.2. Поэтому мы укажем лишь необходимые изменения.

Схема доказательства теоремы 3.3. Предположение о том, что поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, использовалось в доказательстве теоремы 3.2 только в двух местах. А именно, в доказательствах леммы 3.5 и бесконечной

[9] Это не было сделано ранее, чтобы сохранить обозначения.

транзитивности в теореме 3.2 мы пользовались тем, что при выполнении всех предположений множества уровня $(V_{c_k} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}) \setminus U_0$ и $U_1 \cap V_{c_i} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ имеют положительную размерность и поэтому бесконечны. Для $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ их бесконечность следует из теоремы Крулля и подсчета размерностей. В случае $\Bbbk = \mathbb{R}$ это же следует из леммы 3.6. Действительно, в этих обозначениях для любого $c_i \neq 0$ ограничения

$$\pi\colon V_{c_i} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}} = (V_{c_i})_{\mathrm{reg}} \to X^{(0)}_{\mathrm{reg}}, \qquad \pi\colon U_1 \cap V_{c_i} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}} \to f^{-1}(c_i) \cap X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$$

являются изоморфизмами. При выполнении предположений теоремы 3.3 гладкое вещественное многообразие $X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ имеет размерность хотя бы 2 и связно. Поскольку $f(X^{(0)}_{\mathrm{reg}}) = \mathbb{R}$, по лемме 3.6 множество уровня $f^{-1}(c_i) \cap X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$ бесконечно. Так как $c_k \neq 0$, множество $(V_{c_k} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}) \setminus U_0 \supseteq U_1 \cap V_{c_k} \cap X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ тоже бесконечно.

Оказывается, многообразие $X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ тоже связно. Поэтому по индукции то же самое рассуждение можно применить к итерированной надстройке $X^{(i)}$ над $X^{(0)}$, $i = 1, \ldots, l$.

3.4. Гибкость. Чтобы завершить доказательства теорем 3.1–3.3, достаточно проверить гибкость $X^{(1)}$.

Лемма 3.7. *При выполнении предположений любой из теорем 3.1–3.3 многообразие $X^{(1)}$ является гибким.*

Доказательство. Мы уже знаем, что группа $\mathrm{SAut}(X^{(1)})$ действует на $X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ транзитивно. Поэтому аналогично доказательству леммы 2.9 достаточно указать одну гибкую точку $P' = (P, u, v) \in X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$.

Поскольку функция $f \in \Bbbk[X^{(0)}]$ непостоянна, $df(P) \neq 0$ в некоторой точке $P \in X^{(0)}_{\mathrm{reg}}$, для которой $f(P) \neq 0$. По предположению $X^{(0)}$ гибкое. Поэтому существуют такие ЛНД $\partial_0^{(1)}, \ldots, \partial_0^{(n)} \in \mathrm{Der}\,\Bbbk[X^{(0)}]$, где $n = \dim X^{(0)}$, что соответствующие векторные поля $\xi_1, \ldots, \xi_n$ порождают касательное пространство $T_P X^{(0)}$, т.е.

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} \xi_1(P) \\ \ldots \\ \xi_n(P) \end{pmatrix} = n.$$

Следовательно, $\partial_0^{(i)}(f)(P) \neq 0$ хотя бы для одного индекса $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Пусть $P' = (P, u_0, v_0) \in X^{(1)}_{\mathrm{reg}}$ – такая точка, что $\pi(P') = P$. Так как $u_0 v_0 = f(P) \neq 0$, точка P' гиперболическая. Полагая в лемме 3.3 $q(v) = v$, получаем ЛНД

$$\partial_1^{(1)}, \ldots, \partial_1^{(n)} \in \mathrm{Der}\,\Bbbk[X^{(1)}], \qquad \text{где} \quad \partial_1^{(j)} = \partial_1^{(j)}(\partial_0^{(j)}, v).$$

Меняя ролями u и v и полагая $j = i$, получаем еще одно ЛНД

$$\partial_2^{(i)} = \partial_2^{(i)}(\partial_0^{(i)}, u) \in \mathrm{Der}\,\Bbbk[X^{(1)}].$$

Покажем, что соответствующие $n + 1$ векторных полей порождают касательное пространство $T_{P'} X^{(1)}$ в точке P', что и требуется. Можно рассматривать $\partial_1^{(1)}, \ldots, \partial_1^{(n)}, \partial_2^{(i)}$ как ЛНД в $\mathrm{Der}\,\Bbbk[X^{(0)}][u, v]$, сохраняющие идеал $(uv - f)$, т.е. такие, что соответствующие векторные поля касательны к гиперповерхности

$$X^{(1)} = \{uv - f(P) = 0\} \subseteq X^{(0)} \times \mathbb{A}^2.$$

Значения этих векторных полей в точке $P' \in X_{\mathrm{reg}}^{(1)}$ образуют матрицу размера $(n+1) \times (n+2)$

$$E = \begin{pmatrix} v_0\xi_1(P) & \partial_0^{(1)}(f)(P) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_0\xi_n(P) & \partial_0^{(n)}(f)(P) & 0 \\ u_0\xi_i(P) & 0 & \partial_0^{(i)}(f)(P) \end{pmatrix}.$$

Первые n строк матрицы E линейно независимы, а последняя строка линейно независима с предыдущими, поскольку $\partial_0^{(i)}(f)(P) \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{rk}(E) = n+1 = \dim X^{(1)}$. Поэтому данные локально нильпотентные векторные поля действительно порождают касательное пространство $T_{P'}X^{(1)}$ в точке P'.

Это завершает доказательства теорем 3.1–3.3.

Список литературы

[1] A. Borel, “Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie”, *Ann. of Math.* (2), **58**:3 (1953), 443–457.

[2] J. Tits, “Sur certaines classes d’espaces homogènes de groupes de Lie”, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in* 8°, **29**:3 (1955).

[3] L. Kramer, “Two-transitive Lie groups”, *J. Reine Angew. Math.*, **563** (2003), 83–113.

[4] V. L. Popov, “Generically multiple transitive algebraic group actions”, *Algebraic groups and homogeneous spaces* (Mumbai, India, 2004), Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007, 481–523.

[5] J.-P. Rosay, W. Rudin, “Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **310**:1 (1988), 47–86.

[6] E. Andersén, L. Lempert, “On the group of holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$”, *Invent. Math.*, **110**:1 (1992), 371–388.

[7] Sh. Kaliman, M. Zaidenberg, “Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group”, *Transform. Groups*, **4**:1 (1999), 53–95.

[8] D. Varolin, “The density property for complex manifolds and geometric structures. II”, *Internat. J. Math.*, **11**:6 (2000), 837–847.

[9] J.-P. Rosay, “Automorphisms of $\mathbb{C}^n$, a survey of Andersén–Lempert theory and applications”, *Complex geometric analysis in Pohang* (Pohang, Korea, 1997), Contemp. Math., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 131–145.

[10] F. Forstneric, “Interpolation by holomorphic automorphisms and embeddings in $\mathbb{C}^n$”, *J. Geom. Anal.*, **9**:1 (1999), 93–117.

[11] Á. Tóth, D. Varolin, “Holomorphic diffeomorphisms of semisimple homogeneous spaces”, *Compos. Math.*, **142**:5 (2006), 1308–1326.

[12] S. Kaliman, F. Kutzschebauch, “Density property for hypersurfaces $UV = P(\overline{X})$”, *Math. Z.*, **258**:1 (2008), 115–131.

[13] S. Kaliman, F. Kutzschebauch, “On the present state of the Andersén–Lempert theory”, *Affine algebraic geometry*: *The Russell Festschrift* (Montreal, QC, Canada, 2009), CRM Proc. Lecture Notes, **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 85–122.

[14] I. Biswas, J. Huisman, “Rational real algebraic models of topological surfaces”, *Doc. Math.*, **12** (2007), 549–567.

[15] J. Huisman, F. Mangolte, “The group of automorphisms of a real rational surface is n-transitive”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **41**:3 (2009), 563–568.

[16] J. Blanc, F. Mangolte, "Geometrically rational real conic bundles and very transitive actions", *Compos. Math.*, **147**:1 (2011), 161–187.

[17] J. Huisman, F. Mangolte, "Automorphisms of real rational surfaces and weighted blow-up singularities", *Manuscripta Math.*, **132**:1–2 (2010), 1–17.

[18] K. Kuyumzhiyan, F. Mangolte, "Infinitely transitive actions on real affine suspensions", *J. Pure Appl. Algebra.*, **216**:10 (2012), 2106–2112.

[19] G. Freudenburg, "Algebraic theory of locally nilpotent derivations", *Invariant theory and algebraic transformation groups*, v. VII, Encyclopaedia Math. Sci., **136**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[20] V. L. Popov, "On the Makar–Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties", *Affine algebraic geometry*, CRM Proc. Lecture Notes, **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 289–311.

[21] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg, "Group actions on affine cones", *Affine algebraic geometry*, CRM Proc. Lecture Notes, **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 123–164.

[22] A. Liendo, "Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations", *Transform. Groups*, **15**:2 (2010), 389–425.

[23] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg, *Flexible varieties and automorphism groups*, arXiv: 1011.5375.

[24] A. Liendo, "G_a-actions of fiber type on affine $\mathbb{T}$-varieties", *J. Algebra*, **324**:12 (2010), 3653–3665.

[25] A. Perepechko, *Flexibility of affine cones over del Pezzo surfaces of degree* 4 *and* 5, arXiv: 1108.5841; *Функц. анализ и его прил.* (в печати).

[26] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, "Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:4 (1972), 749–764; англ. пер.: È. B. Vinberg, V. L. Popov, "On a class of quasihomogeneous affine varieties", *Math. USSR-Izv.*, **6**:4 (1972), 743–758.

[27] В. Л. Попов, "Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:2 (1974), 294–322; англ. пер.: V. L. Popov, "Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one-dimensional homogeneous vector bundles", *Math. USSR-Izv.*, **8**:2 (1974), 301–327.

[28] Д. Н. Ахиезер, "Плотные орбиты с двумя концами", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 308–324; англ. пер.: D. N. Ahiezer, "Dense orbits with two ends", *Math. USSR-Izv.*, **11**:2 (1977), 293–307.

[29] A. T. Huckleberry, E. Oeljeklaus, "A characterization of complex homogeneous cones", *Math. Z.*, **170**:2 (1980), 181–194.

[30] F. Lescure, "Élargissement du groupe d'automorphismes pour des variétés quasi-homogenes", *Math. Ann.*, **261**:4 (1982), 455–462.

[31] V. Lakshmibai, K. N. Raghavan, *Standard monomial theory. Invariant theoretic approach*, Encyclopaedia Math. Sci., **137**, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[32] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[33] D. A. Cox, J. B. Little, H. Schenck, *Toric varieties*, Grad. Stud. Math., **124**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[34] M. Demazure, "Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **3**:4 (1970), 507–588.

[35] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, "Теория инвариантов", *Алгебраическая геометрия* – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНИТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, E. B. Vinberg, "Linear algebraic groups, invariant theory", *Algebraic geometry.* IV, Encyclopaedia Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–278.

[36] H. Flenner, M. Zaidenberg, "Locally nilpotent derivations on affine surfaces with a $\mathbb{C}^*$-action", *Osaka J. Math.*, **42**:4 (2005), 931–974.

[37] М. Х. Гизатуллин, "Аффинные поверхности, квазиоднородные относительно алгебраической группы", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:4 (1971), 738–753; англ. пер.: M. H. Gizatullin, "Affine surfaces which are quasihomogeneous with respect to an algebraic group", *Math. USSR-Izv.*, **5**:4 (1971), 754–769.

[38] В. Л. Попов, "Классификация аффинных алгебраических поверхностей, квазиоднородных относительно алгебраической группы", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:5 (1973), 1038–1055; англ. пер.: V. L. Popov, "Classification of affine algebraic surfaces that are quasihomogeneous with respect to an algebraic group", *Math. USSR-Izv.*, **7**:5 (1973), 1039–1056.

[39] L. Makar-Limanov, "On groups of automorphisms of a class of surfaces", *Israel J. Math.*, **69**:2 (1990), 250–256.

[40] L. Makar-Limanov, "Locally nilpotent derivations on the surface $xy = p(z)$", *Proceedings of the third international algebra conference* (Tainan, Taiwan, 2002), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, 215–219.

[41] D. Daigle, "On locally nilpotent derivations of $k[X_1, X_2, Y]/(\varphi(Y) - X_1X_2)$", *J. Pure Appl. Algebra*, **181**:2–3 (2003), 181–208.

[42] H. Flenner, S. Kaliman, M. Zaidenberg, "Uniqueness of $\mathbb{C}^*$- and $\mathbb{C}_+$-actions on Gizatullin surfaces", *Transform. Groups*, **13**:2 (2008), 305–354.

Поступила в редакцию
07.04.2011 и 24.01.2012

И. В. Аржанцев (I. V. Arzhantsev)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: arjantse@mccme.ru

М. Г. Зайденберг (M. G. Zaidenberg)
University of Grenoble 1 – Joseph Fourier, France
E-mail: Mikhail.Zaidenberg@ujf-grenoble.fr

К. Г. Куюмжиян (K. G. Kuyumzhiyan)
Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений,
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Москва
E-mail: karina@mccme.ru