ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 476, № 1, с. 17–21

МАТЕМАТИКА

УДК 517.955.4

ФЕЙНМАНОВСКИЕ И КВАЗИФЕЙНМАНОВСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. И. Д. Ремизов

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 10.03.2017 г.

Поступило 06.04.2017 г.

Описываются новые методы получения представлений решений задачи Коши для линейных эволюционных уравнений, т.е. уравнений вида $u_t'(t,x) = Lu(t,x)$, где оператор L линеен и зависит только от пространственной переменной x, но не от времени t. Решение задачи Коши, т.е. экспонента от оператора tL, находится на основе предложенных автором конструкций в сочетании с теоремой Чернова о сильно непрерывных полугруппах операторов.

DOI: 10.7868/S0869565217250041

Предполагается, что X – бесконечное множество, и $\mathcal{F}$ – банахово пространство числовых функций на X, причём в $\mathcal{F}$ действует замкнутый линейный оператор $L\colon \mathrm{Dom}(L) \to \mathcal{F}$ с плотной в $\mathcal{F}$ областью определения $\mathrm{Dom}(L) \subset \mathcal{F}$. Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения

$$\begin{aligned} u'_t(t,x) &= Lu(t,x), \\ u(0,x) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $u_0 \in \mathcal{F}$, и $u(t,\cdot) \in \mathcal{F}$ для всех $t \geq 0$. Как известно [1], в случае существования C_0-полугруппы $(e^{tL})_{t\geq 0}$ с генератором $(L, \mathrm{Dom}(L))$ решение задачи Коши (1) существует и даётся равенством $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$ для $t \geq 0$ и $x \in X$. Если $u_0 \in \mathrm{Dom}(L)$, то $u(t,\cdot) \in \mathrm{Dom}(L)$ для всех $t \geq 0$ и решение является классическим, а для произвольного $u_0 \in \mathcal{F}$ решение задачи Коши существует лишь как решение соответствующего интегрального уравнения.

Существование этой полугруппы можно доказать на основе плотности пространства $(L - \lambda_0 I)(\mathrm{Dom}(L))$ в $\mathcal{F}$ для некоторого $\lambda_0 > 0$, имеются и другие достаточные условия её существования [1].

Настоящее сообщение посвящено методам явного выражения оператора e^{tL} через коэффициенты оператора L путём построения соответствующей функции Чернова (см. определение 2 ниже). Основанные на теореме Чернова методы уже были применены в случае, когда X – прямая, область в $\mathbb{R}^n$, риманово многообразие, гильбертово пространство и др., а $u_t'(t,x) = Lu(t,x)$ – уравнение теплопроводности или уравнение Шрёдингера (коэффициенты уравнений зависят от x, а в некоторых случаях от t и x, см. [7] и ссылки там). Обсуждаемые методы могут быть применены и к уравнениям высших порядков.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: ivremizov@yandex.ru

1. ФОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ В СМЫСЛЕ ЧЕРНОВА

Условиями касания по Чернову (Chernoff tangency) будем называть следующее:

(CT0). Пусть $\mathcal{F}$ – банахово пространство, и $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ – пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дано отображение $G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, или, иначе говоря, семейство линейных ограниченных операторов $(G(t))_{t\geq 0}$. Пусть замкнутый линейный оператор $L\colon \mathrm{Dom}(L) \to \mathcal{F}$ имеет плотную в $\mathcal{F}$ область определения $\mathrm{Dom}(L) \subset \mathcal{F}$.

(CT1). Семейство G сильно непрерывно (=непрерывно в сильной операторной топологии пространства $\mathscr{L}(F)$), т.е. отображение $t \mapsto G(t)f \in \mathcal{F}$ непрерывно на $[0,+\infty)$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(CT2). $G(0) = I$, т.е. $G(0)f = f$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(CT3). Существует такое плотное в $\mathcal{F}$ линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{G(t)f - f}{t}\right)$, значение которого обозначим символом $G'(0)f$;

(CT4). Замыкание оператора $(G'(0), \mathcal{D})$ существует и равно $(L, \mathrm{Dom}(L))$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что G касается по Чернову оператора L, если выполняются условия касания по Чернову (CT0)–(CT4).

З а м е ч а н и е 1. Плотность $\mathrm{Dom}(L)$ в $\mathcal{F}$ следует из (CT3) и (CT4), поэтому отдельно требовать это в (CT0) не обязательно. Классическую теорему Чернова можно сформулировать теперь следующим образом, отделяя в её условиях (E)xistence condition и (N)orm growth condition от (CT), ср. [1–3].

Т е о р е м а Ч е р н о в а в н о в о й ф о р м е. *Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство. Пусть дано отображение $G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$ и замкнутый линейный оператор $L\colon \mathrm{Dom}(L) \to \mathcal{F}$ с областью определения $\mathrm{Dom}(L) \subset \mathcal{F}$. Пусть выполнены следующие условия:*

(E). *Существует C_0-полугруппа $(e^{tL})_{t\geq 0}$ с генератором $(L, \mathrm{Dom}(L))$;*

(CT). *Отображение G касается по Чернову оператора L;*

(N). *Существует такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\| G(t) \| \leq e^{\omega t}$ при всех $t \geq 0$.*

Тогда для каждых $f \in \mathcal{F}$ и $T > 0$ верно, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f \right\| = 0. \qquad (2)$$

О п р е д е л е н и е 2. Если G касается по Чернову оператора L, то выражение $\lim\limits_{n\to\infty} G\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0$ будем называть ф о р м а л ь н ы м р е ш е н и е м з а д а ч и К о ш и (1) в с м ы с л е Ч е р н о в а. Если же, сверх того, для G выполнено равенство (2), то будем говорить, что G является ф у н к ц и е й Ч е р н о в а для оператора L, или э к в и в а л е н т н а п о Ч е р н о в у полугруппе $(e^{tL})_{t\geq 0}$, а стоящее под знаком предела выражение $G\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0$ будем называть а п п р о к с и м а ц и е й р е ш е н и я з а д а ч и К о ш и (1) в с м ы с л е Ч е р н о в а или ч е р н о в с к о й а п п р о к с и м а ц и е й.

З а м е ч а н и е 2. Если оператор $G(t)$ интегральный, то $G\left(\frac{t}{n}\right)^n f$ — это n-кратный интеграл от функции f, и решение задачи Коши (1) представляется в виде предела кратного интеграла при стремящейся к бесконечности кратности $u(t,x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(G\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x)$, т.е. в виде формулы Фейнмана (см. обзор [4] О.Г. Смолянова, а также работы [8–12]).

З а м е ч а н и е 3. В определении касания по Чернову семейство $(G(t))_{t\geq 0}$ не обязательно является полугруппой (но каждая C_0-полугруппа касается по Чернову своего генератора и является его функцией Чернова). Именно отсутствие полугруппового свойства позволяет во многих случаях для данного оператора L с переменными коэффициентами подобрать задаваемую простой явной формулой функцию Чернова G, чтобы затем с помощью теоремы Чернова выразить полугруппу в виде $e^{tL} = \lim\limits_{n\to\infty} G\left(\frac{t}{n}\right)^n$. Без обращения к технике функций Чернова задача о выражении e^{tL} через L сложна, так как эквивалентна решению задачи Коши (1) для каждого $u_0 \in \mathcal{F}$.

З а м е ч а н и е 4. Определение касания по Чернову и теорема Чернова допускают две эквивалентные формулировки: с неограниченным временем и с произвольно малым временем. Первая была приведена выше. Вторая состоит в том, что в качестве временнóго промежутка используется не $[0,+\infty)$, а $[0,\delta)$ при фиксированном (но произвольно малом) $\delta > 0$. В этой формулировке функцию Чернова определяют не для всех $t \geq 0$, а только для достаточно малых, а неравенство $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ может быть заменено на $\|G(t)\| \leq 1 + \alpha t$. Мотивацией для использования второй формулировки служит то, что при построении черновских аппроксимаций величина $\frac{t}{n}$ становится сколь угодно малой при $n \to \infty$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и функции G_1 и G_2 со значениями в $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ касаются по Чернову действующих в F операторов L_1 и L_2 соответственно* (*при этом в условии* (CT3) *фигурируют плотные подпространства $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ соответственно*). *Обозначим символом I тождественный оператор в $\mathcal{F}$. Тогда:*

1. *Если оператор $L = L_1 + L_2$ замкнут и имеет плотную в $\mathcal{F}$ существенную область определения $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, то функция $G(t) = G_1(t) + G_2(t) - I$ касается по Чернову оператора $L_1 + L_2$.*

2. *Пусть оператор $L = L_1 L_2$ замкнут и имеет плотную в $\mathcal{F}$ существенную область определения $\mathcal{D} \subset \{f\colon f \in \mathcal{D}_2,\, L_2 f \in \mathcal{D}_1\}$. Пусть G_2 имеет на $\mathcal{D}$ вторую производную в нуле, т.е. существует такой линейный оператор $G_2''(0)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, что для каждого $f \in \mathcal{D}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно равенство*

$$G_2(\varepsilon) f = f + \varepsilon L_2 f + \frac{1}{2}\varepsilon^2 G_2''(0) f + \varepsilon^2 a(\varepsilon, f),$$

где $a(\varepsilon, f) = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда функция $G(t) = (G_1(\sqrt{t}) - I)(G_2(\sqrt{t}) - I) + I$ касается по Чернову оператора $L_1 L_2$.

Замечание 5. Пункт 1 теоремы 1 позволяет строить формальные (здесь и далее – в смысле Чернова) решения для уравнения $u_t' = L_1u + L_2u$, если известны функции G_1 и G_2 (иными словами, если известны формальные решения уравнений $u_t' = L_1u$ и $u_t' = L_2u$). Аналогично, пункт 2 теоремы 1 предлагает способ построения формальных решений и для уравнения $u_t' = L_1L_2u$. Таким образом, теорема 1 даёт метод построения формального решения уравнения $u_t' = Lu$ в случае, когда L – произвольный дифференциальный оператор с коэффициентами, не зависящими от времени, поскольку он получается путём конечного числа сложений и произведений операторов дифференцирования $(L_1f)(x) = f'(x)$ и умножения на функцию $(L_2f)(x) = q(x)f(x)$, а функции Чернова этих операторов известны. При этом в зависимости от задачи есть возможность записать эти функции по-разному: как следует из условия (СТ3), функции, касательные по Чернову к одному оператору, на плотном в $\mathcal{F}$ подпространстве отличаются друг от друга лишь членами порядка $o(t)$. Кроме того, в работах О.Г. Смолянова и его учеников найдены функции Чернова многих операторов, построенных на базе лапласиана [5, 7, 13].

2. КВАЗИФЕЙНМАНОВСКИЕ ФОРМУЛЫ

Если оператор $\mathcal{H}$ самосопряжённый, то уравнение Шрёдингера $i\psi_t'(t,x) = \mathcal{H}\psi(t,x)$ с гамильтонианом $\mathcal{H} = -H$ можно записать в виде $\psi_t'(t,x) = iH\psi(t,x)$, а решение задачи Коши с начальным условием $\psi(0,t) = \psi_0(t)$ даётся формулой

$$\psi(t,x) = (e^{itH}\psi_0)(x).$$

При этом, если H – дифференциальный (по переменной x) оператор второго порядка (в простейшем случае $(Hf)(x) = \Delta f - V(x)f(x)$), то $u_t'(t,x) = Hu(t,x)$ является уравнением теплопроводности, и решение аналогичной задачи Коши удовлетворяет аналогичному равенству $u(t,x) = (e^{tH}u_0)(x)$. Трудность решения этих задач Коши заключается в том, что оператор H неограниченный, и поэтому нельзя вычислять e^{tH} и e^{itH} как сумму ряда в пространстве ограниченных операторов. Однако, как отмечалось выше, даже для неограниченного оператора L операторы e^{tL} можно находить с помощью теоремы Чернова, если удалось построить функцию Чернова для оператора L. На многих примерах в работах школы О.Г. Смолянова было показано, что в случае уравнения теплопроводности строить функции Чернова много проще, чем в случае уравнения Шрёдингера. Недавно [2] был обнаружен способ построения функции Чернова для оператора iH по функции Чернова для оператора H, или даже по функции, касательной по Чернову к оператору H. Единственным добавочным условием является то, что значения функции должны быть самосопряжёнными операторами (добиться этого несложно, поскольку значения функции Чернова – это всегда ограниченные операторы). Результат выражается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть H – линейный, имеющий плотную область определения, самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$. Пусть семейство $(S(t))_{t\geq 0}$ касается по Чернову оператора H, и $(S(t))^* = S(t)$ для каждого $t \geq 0$. Пусть I – тождественный оператор в $\mathcal{F}$, и a – произвольное ненулевое вещественное число.*

Тогда семейство $R(t) = \exp[ia(S(t) - I)]$ ограниченных операторов в $\mathcal{F}$ касается по Чернову оператора iaH и является его функцией Чернова. Это семейство эквивалентно по Чернову полугруппе $(e^{iatH})_{t\geq 0}$, причём для каждого $f \in \mathcal{F}$ и каждого $t \geq 0$ справедливы равенства

$$e^{iatH}f = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{q=0}^{m}\frac{(-1)^{m-q}(iant)^m}{q!(m-q)!}\left(S\left(\frac{t}{n}\right)\right)^q f, \tag{3}$$

$$e^{iatH}f = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{q=0}^{k}\frac{k!(k-iant)^{k-q}(iant)^q}{q!(k-q)!k^k}\left(S\left(\frac{t}{n}\right)\right)^q f, \tag{4}$$

где пределы берутся по норме в $\mathcal{F}$.

Замечание 6. Число a в формулировке теоремы 2 может быть положительным или отрицательным, можно брать $a = 1$ и $a = -1$ в зависимости от записи исходного уравнения и того, эволюция “вперед” или “назад” по времени рассматривается. Семейство R можно записать в виде $R(t) = \exp[ia(S(|t|) - I)\mathrm{sign}(t)]$, пригодном для всех $t \in \mathbb{R}$. Заметим также, что в показателе экспоненты $R(t) = \exp[ia(S(t) - I)]$ стоят только ограниченные операторы, поэтому экспоненту можно корректно определить рядом в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, что приводит к формуле (3). То, что R касается по Чернову оператора iaH, проверяется непосредственно [2]; в самом деле, для (СТ2) имеем $R(0) = \exp[ia(S(0) - I)] = \exp[ia(I - I)] = I$, для (СТ3) $R'(0) = iaS'(0)\exp[ia(S(0) - I)] = iaH$. Условие (E) вытекает из теоремы Стоуна о C_0-группах унитарных операторов [1]. Условие (N) следует из неё же и того, что оператор $a(S(t) - I)$ самосопряжённый при всех $t \geq 0$, поэтому $\|R(t)\| = 1$. См. также примечание в [6, с. 256].

Замечание 7. Квазифейнмановская формула – это равенство, в левой части которого стоит определяемая равенством функция, а в правой – выражение, содержащее кратные интегралы сколь угодно большой кратности. Если оператор

$S(t)$ интегральный, то (3) и (4) – квазифейнмановские формулы. В отличие от фейнмановских, квазифейнмановские формулы в правой части могут содержать суммирование или другие операции. Квазифейнмановские формулы длиннее фейнмановских, но их проще доказывать. Так, М.С. Бузинов построил в виде квазифейнмановской формулы решение уравнения Шрёдингера с гамильтонианом, равным натуральной степени лапласиана, при этом в виде фейнмановской формулы представить решение этого уравнения пока не удалось (см. также работу В.Ж. Сакбаева [15]).

3. ОПЕРАТОР СДВИГА В РОЛИ ФУНКЦИИ ЧЕРНОВА

Продемонстрируем идею использования сдвигов на одномерном примере, т.е. на уравнении $u_t'(t,x) = Lu(t,x)$, в котором $x \in \mathbb{R}^1$, а оператор L задан равенством $(L\varphi)(x) = (a(x))^2\varphi''(x) + b(x)\varphi'(x) + c(x)\varphi(x)$ для каждых $x \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. Символами $C_b(\mathbb{R})$, $UC_b(\mathbb{R}) = \mathcal{F}$, $C_b^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}$ обозначены соответственно множества всех ограниченных непрерывных, равномерно ограниченных непрерывных, ограниченных вместе со всеми своими производными функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, наделённые нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Далее мы опираемся на то, что (при выполнении стандартных условий на лежащие в $UC_b(\mathbb{R})$ коэффициенты a, b, c) замыкание оператора $(L, \mathcal{D})$ существует и является генератором C_0-полугруппы $(e^{tL})_{t\geq 0}$ в $UC_b(\mathbb{R})$. Для каждых $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $f \in C_b(\mathbb{R})$ положим

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4}f\left(x + 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2}f(x + 2b(x)t) + tc(x)f(x). \quad (5)$$

Т е о р е м а 3. *Для каждого $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$ ограниченное (и равномерно непрерывное по $x \in \mathbb{R}$ при каждом $t \geq 0$) решение и задачи Коши $[u_t' = Lu, u(0,x) = u_0(x)]$ допускает представление в виде*

$$u(t,x) = \left(e^{tL}u_0\right)(x) = \lim_{n\to\infty}((S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0)(x), \quad (6)$$

где $S\left(\frac{t}{n}\right)$ получается заменой t на $\frac{t}{n}$ в равенстве (5), *а n-я степень означает композицию n экземпляров линейного ограниченного оператора $S\left(\frac{t}{n}\right)$.*

4. ФЕЙНМАНОВСКИЕ ФОРМУЛЫ С ОБОБЩЁННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Порождаемые сдвигами формулы для решения задачи Коши близки к формулам, порождаемым интегральными операторами. Равенство (5) можно переписать в терминах обобщённых функций на основе того, что для δ-функции при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \delta(y - \omega)f(y)\,dy.$$

После замены переменной $y = x + z$ равенство (5) принимает вид

$$(S(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(z,x,t)f(x+z)\,dz,$$

где $\Phi(z,x,t) = \frac{1}{4}\delta\left(z - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(z + 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2}\delta(z - 2b(x)t) + tc(x)\delta(z)$.

Тогда (6) является формулой Фейнмана (т.е. представлением функции u в виде предела кратного интеграла, кратность которого стремится к бесконечности), однако под знаком интеграла стоят не гауссовские экспоненты, а δ-функции:

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty}\left(S\left(\frac{t}{n}\right)^n f\right)(x) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(z_1,\ x,\ \frac{t}{n}\right)\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(z_2, x + z_1, \frac{t}{n}\right)\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(z_3, x + z_1 + z_2, \frac{t}{n}\right)\ldots\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(z_n, x + z_1 + \ldots + z_{n-1}, \frac{t}{n}\right)\times$$
$$\times f(x + z_1 + \ldots + z_n)dz_n\ldots dz_1.$$

Исследование таких равенств с точки зрения теории обобщённых функций представляет самостоятельный интерес, пока же мы понимаем их формально на основе результатов типа теоремы 3.

5. КВАЗИФЕЙНМАНОВСКИЕ ФОРМУЛЫ С ОБОБЩЁННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Если совместно использовать теоремы 2 и 3, то получим квазифейнмановские формулы с обобщёнными функциями, дающие решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера. Простой одномерный случай разобран в [14], но без трактовки в терминах обобщённых функций; как провести эту трактовку – описано в разделе 4 настоящей работы.

Автор благодарит своего научного руководителя О.Г. Смолянова за всестороннюю поддержку, Д.В. Тураева за очень полезные обсуждения и А.С. Маслакову за замечания по рукописи.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда 14–41–00044 и грантом EPSRC номер EP/PO26001/1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equation. N.Y.: Springer, 2000.
2. *Remizov I.D.* Quasi-Feynman Formulas – a Method of Obtaining the Evolution Operator for the Schrödinger Equation // J. Funct. Anal. 2016. V. 270. № 12. P. 4540–4557.
3. *Chernoff P.R.* Note on Product Formulas for Operator Semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. № 2. P. 238–242.
4. S*molyanov O.G.* Feynman Formulae for Evolutionary Equations // Trends Stochastic Anal. London Math. Soc. Lect. Note Ser. 2009. V. 353. P. 283–302.
5. *Remizov I.D.* Solution of a Cauchy Problem for a Diffusion Equation in a Hilbert Space by a Feynman Formula // Rus. J. Math. Phys. 2012. V. 19. № 3. P. 360–372.
6. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. М.: УРСС, 2015.
7. *Plyashechnik A.S.* Feynman Formula for Schrödinger-Type Equations with Time- and Space-Dependent Coefficients // Rus. J. Math. Phys. 2012. V. 19. № 3. P. 340–359.
8. *Шамаров Н.Н.* Функциональный интеграл по счетно-аддитивной мере, представляющий решение уравнения Дирака // Тр. ММО. 2005. Т. 66. С. 263–276.
9. *Шамаров Н.Н.* Мера Пуассона–Маслова и формулы Фейнмана для решения уравнения Дирака // Фундам. и прикл. математика. 2006. Т. 12. № 6. С. 193–211.
10. *Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.* Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шрёдингера Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2015. Т. 57.
11. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // Тр. Мат. ин-та РАН. 2014. Т. 285. С. 232–243.
12. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Случайные неограниченные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. мат. 2016. Т. 80. № 6. С. 141–172.
13. *Бузинов М.С., Бутко Я.А.* Формулы Фейнмана для параболического уравнения с бигармоническим дифференциальным оператором в конфигурационном пространстве // Наука и образование. 2012. Т. 8. С. 135–154.
14. *Ремизов И.Д.* Решение уравнения Шрёдингера с помощью оператора сдвига // Мат. заметки. 2016. Т. 100. № 3. С. 477–480.
15. *Сакбаев В.Ж.* Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов // ТМФ. 2017. Т. 191. № 3. С. 473–502.