ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2017, том 53, № 4, с. 573–576

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.955.4

НОВЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЧЕРНОВА

© 2017 г. И. Д. Ремизов

Формулируется и впервые доказывается теорема из теории сильно непрерывных полугрупп операторов, фактически предложенная О.Г. Смоляновым. Эта теорема позволяет, в частности, сводить нахождение решений уравнения Шрёдингера к решению уравнения теплопроводности.

DOI: 10.1134/S037406411704015X

Формулой Фейнмана называется представление решения эволюционного уравнения (или связанного с ним объекта) или любой функции в виде предела последовательности кратных интегралов при кратности, стремящейся к бесконечности. Входящие в формулу Фейнмана кратные интегралы "конечной кратности" являются аппроксимацией для интеграла Фейнмана по траекториям (т.е. интеграла "бесконечной кратности"), что делает понятным интерес к формулам Фейнмана специалистов в области математической и теоретической физики.

О.Г. Смолянов в работе [1] предложил для представления решения задачи Коши для дифференциальных уравнений эволюционного типа в виде формулы Фейнмана применить теорему Чернова [2]. К этому типу уравнений относятся уравнение теплопроводности, уравнение Шрёдингера и другие уравнения вида $\partial u(t,x)/\partial t = Lu(t,x),$ где L – полином от оператора дифференцирования по переменной x. Научной группой О.Г. Смолянова этот подход был применён к различным классам уравнений: к уравнениям на многообразиях [3] и на графах [4], к уравнениям с зависящей от времени правой частью [5, 6], к уравнениям с переменной x, принадлежащей бесконечномерному пространству [7, 8], к уравнениям с натуральной степенью лапласиана в правой части [9, 10], к уравнениям, возникающим в связи с тау-квантованием [19], и другим классам уравнений.

Параллельно с применением этого подхода происходило переосмысление, развитие и уточнение понятий, связанных с теоремой Чернова. Так, возникли эквивалентность по Чернову, функция Чернова для оператора (т.е. функция, эквивалентная по Чернову полугруппе, генератор которой равен этому оператору), теорема Бутко–Смолянова–Шиллинга о композиции функций Чернова [20], касание по Чернову, теорема о связи функций Чернова для уравнений теплопроводности и Шрёдингера [14, 15], теорема Смолянова о черновском касании, которой посвящена настоящая работа. Две последние теоремы, из которых вторая представляет собой развитие первой, доставляют, в частности, способ построения квазифейнмановских формул. Каждое из упомянутых выше понятий допускает две формулировки: с произвольно малым временем (т.е. при $t \in [0,\delta)$ с любым фиксированным $\delta > 0$) и с неограниченным временем (т.е. при $t \geq 0$).

Цель настоящей работы – сформулировать теорему Смолянова с указанием всех деталей и привести её полное доказательство. В качестве источника используемой терминологии и введения в рассматриваемые вопросы можно использовать работу [15], обзоры [11–13] и учебники [16, 17]. Далее для банахова пространства X через $\mathscr{L}(X)$ обозначаем пространство всех линейных ограниченных операторов в X.

Приведём основное в дальнейшем

Определение. Пусть X – банахово пространство и $\delta > 0,$ кроме того, заданы функция $G\colon [0,\delta) \to \mathscr{L}(X)$ (или, что то же, семейство $(G(t))_{t\in[0,\delta)}$ операторов из $\mathscr{L}(X)$) и замкнутый линейный оператор $L\colon \mathrm{Dom}(L) \to X$ с областью определения $\mathrm{Dom}(L) \subset X.$ Будем говорить, что функция G *касается по Чернову* (*черновски касается*) оператора $L,$ если выполняются следующие условия.

CT1). Отображение $t \mapsto G(t)f \in X$ непрерывно на $[0,\delta)$ для каждого $f \in X.$

CT2). $G(0) = I,$ т.е. $G(0)f = f$ для каждого $f \in X.$

CT3). Существует такое плотное в X линейное подпространство $D \subset X$, что при всех $f \in D$ существует предел $\lim\limits_{t\to 0}(G(t)f - f)/t =: G'(0)f$.

CT4). Замыкание оператора $(G'(0), D)$ существует и равно $(L, \mathrm{Dom}(L))$.

Если функция G касается по Чернову оператора L, то выражение $\lim\limits_{n\to\infty} G(t/n)^n u_0$ можно называть формальным черновским решением задачи Коши $u'_t = Lu$, $u(0) = u_0$. Если же, кроме того, существует C_0-полугруппа $(e^{tL})_{t\ge 0}$ и $\|G(t)\| \le 1 + \alpha t$, то по теореме Чернова это выражение задаёт функцию u, которая действительно является (см. [16, 17]) решением указанной задачи Коши. Теорема Смолянова о касании по Чернову формулируется следующим образом.

Теорема. *Пусть комплекснозначная функция R голоморфна в окрестности точки $1\in\mathbb{C}$, причём $R(1) = 1$, $R'(1) = \alpha \in \mathbb{C}$ и $\alpha \ne 0$. Пусть также X – комплексное банахово пространство, число $\delta > 0$, а функция $F\colon [0,\delta) \to \mathscr{L}(X)$ черновски касается замкнутого оператора $(L, \mathrm{Dom}(L))$ и при всех $t \in [0,\delta)$ удовлетворяет оценке $\|F(t)\| \le 1 + \omega t$. Тогда можно выбрать такое число $\delta_1 > 0$, что при всех $t \in [0,\delta_1)$ корректно определена функция $F_R(t) = R(F(t))$, причём функция F_R черновски касается оператора αL.*

Замечание 1. В формулировке и доказательстве теоремы без дальнейших оговорок предполагается, что все понятия используются для случая произвольно малого времени. Сформулировать по аналогии теорему и дать её доказательство для случая неограниченного времени не составляет труда.

Доказательство теоремы. Проверим четыре условия черновского касания функции F_R и оператора αL, начав с условия CT1). Так как функция R голоморфна в окрестности единицы, причём $R(1) = 1$ и $R'(1) = \alpha$, то существует такое $\beta > 0$, что при $|z-1| \le \beta$ справедливо разложение в ряд Тейлора $R(z) = 1 + \alpha(z-1) + \sum_{k=2}^{\infty} r_k(z-1)^k = 1 + \alpha(z-1) + (z-1)^2\Psi(z)$, где при $|z-1| \le \beta$ ряд сходится абсолютно и $|\Psi(z)| \le a$ для некоторого $a > 0$. Поскольку $\|F(t)\| \le 1 + \omega t$, то при $\delta_1 = \min(\delta, \beta/\omega)$ из неравенства $0 \le t < \delta_1$ следует неравенство $\|F(t)\| \le 1 + \beta$, что позволяет определить функцию $F_R(t)$ равенством

$$F_R(t) = R(F(t)) = \lim_{n\to\infty}\biggl(I + \alpha(F(t) - I) + \sum_{k=2}^{n} r_k(F(t) - I)^k\biggr).$$

При фиксированном $t \in [0,\delta_1)$ операторы в допредельном выражении линейны и непрерывны, а числовой ряд $\sum_{k=2}^{\infty} r_k(z-1)^k$ сходится абсолютно, поэтому и ряд из линейных ограниченных операторов сходится абсолютно, что в силу банаховости пространства X влечёт за собой сходимость операторного ряда по норме в $\mathscr{L}(X)$.

Итак, доказано, что функция $F_R\colon [0,\delta_1) \to \mathscr{L}(X)$ задана корректно. Непрерывность функции $t \mapsto F_R(t)x$ при каждом $x \in X$ следует из непрерывности функции $\mathscr{L}(X) \ni A \mapsto R(A) \in \in \mathscr{L}(X)$ по норме в $\mathscr{L}(X)$ и непрерывности функции $t \mapsto F(t)x$ при каждом $x \in X$, которая в свою очередь является частью условия CT1) для функции F. Таким образом, условие CT1) для функции F_R доказано.

Условие CT2) для функции F_R очевидно вытекает из условия CT2) для функции F и цепочки равенств $F_R(0) = R(F(0)) = R(I) = I$.

Условие CT3) для функции F утверждает, что в X существует такое плотное линейное подпространство D, что для всех $x \in D$ верно равенство $F(t)x = x + tLx + o(t)$. Отсюда и из равенства $F_R(t) = I + \alpha(F(t) - I) + \Psi(F(t))(F(t) - I)^2$ вытекает условие CT3) для функции F_R. В самом деле, для произвольного $x \in D$ справедливы равенства

$$\frac{F_R(t)x - x}{t} = \alpha\frac{x + tLx + o(t) - x}{t} + \Psi(F(t))(F(t) - I)\frac{F(t)x - x}{t} =$$

$$= \alpha Lx + o(1) + \Psi(F(t))(F(t) - I)(Lx + o(1)) = \alpha Lx + o(1).$$

Последнее равенство следует из оценки

$$\|\Psi(F(t))(F(t) - I)(Lx + o(1))\| \le \|\Psi(F(t))\|\,\|(F(t) - I)(Lx)\| + \|\Psi(F(t))\|\,\|(F(t) - I)(o(1))\|$$

и доказанного выше неравенства $|\Psi(z)| \le a$, соотношение $\|(F(t)-I)(Lx)\| = o(1)$ вытекает из условия CT1) для функции F, а неравенство $\|F(t)\| \le 1+\omega t$ влечёт за собой неравенство $\|(F(t)-I)(o(1))\| \le (1+\omega t+1)\|o(1)\| = o(1)$.

Условие CT4) для функции F утверждает, что замыкание (L, D) существует и равно $(L, \mathrm{Dom}(L))$. Учитывая, что $\mathrm{Dom}(L) = \mathrm{Dom}(\alpha L)$, видим, что это эквивалентно тому, что замыкание $(\alpha L, D)$ существует и равно $(\alpha L, \mathrm{Dom}(L))$. Теорема доказана.

Замечание 2. В работе [15] доказана теорема 3.1, одну из частей которой обобщает доказанная теорема. В теореме 3.1 функция $R(z) = e^{i(z-1)}$, $\alpha = i$, в роли оператора L выступает любой самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве с плотной областью определения, а в роли функции F – любая функция со значениями в пространстве ограниченных самосопряжённых операторов, черновски касающаяся оператора L. Доказанная теорема является переформулировкой утверждения (ср. [18, с. 256]), предложенного О.Г. Смоляновым в качестве обобщения одной из частей теоремы 3.1. Умножение на комплексное число с единичным модулем (в том числе умножение на i) геометрически интерпретируется как поворот, что и дало название этому результату как теорема Смолянова о повороте черновского касания.

Замечание 3. Квазифейнмановская формула – выражение, содержащее кратные интегралы сколь угодно большой кратности. В отличие от фейнмановских квазифейнмановские формулы в правой части могут содержать суммирование или другие операции. Квазифейнмановские формулы длиннее фейнмановских, но зато их проще доказывать (см. [15]).

Если при каждом $t \in [0, \delta_1)$ оператор $F(t)$ интегральный, то оператор $F(t)^n$ задаётся n-кратным интегралом. Если оператор $(\alpha L, \mathrm{Dom}(\alpha L))$ является генератором C_0-полугруппы $(e^{t\alpha L})_{t\ge 0}$, а также $\|F_R(t)\| \le \omega_1 t$ для всех $t \in [0, \delta_1)$ и некоторого фиксированного $\omega_1 > 0$, то по теореме Чернова для каждого $x \in X$ по норме в X верно равенство

$$e^{t\alpha L}x = \lim_{n\to\infty}\left(F_R\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n x = \lim_{n\to\infty}\left(I + \alpha\left(F\left(\frac{t}{n}\right) - I\right) + \sum_{k=2}^{\infty} r_k\left(F\left(\frac{t}{n}\right) - I\right)^k\right)^n x.$$

Выражение справа содержит определённые интегралы сколь угодно большой кратности и поэтому является квазифейнмановской формулой.

Замечание 4. Для решения уравнения $u'_t = Lu$ обычно принято раскладывать оператор L в сумму двух генераторов полугрупп $L = A+B$ и затем применять формулу Троттера $e^{(A+B)t} = \lim\limits_{n\to\infty}(e^{At/n}e^{Bt/n})$. В частности, если A – оператор умножения на функцию $(Af)(x) = V(x)f(x)$, то полугруппа имеет вид $(W(t)f)(x) = e^{tV(x)}f(x)$. Однако если вместо теоремы Троттера использовать теорему Чернова, то функцию $z \mapsto e^z$ можно заменить на любую голоморфную функцию $h(z)$, удовлетворяющую условиям $h(0) = h'(0) = 1$. В самом деле, рассмотрим операторнозначную функцию K, заданную равенством $(K(t)f)(x) = h(tV(x))f(x)$. Обе функции W и K черновски касаются оператора A, в этом можно убедиться непосредственно или сослаться на доказанную теорему. При этом K не является полугруппой, но зато если функция h ограничена (например, $h(z) = 1 + \mathrm{arctg}\, z$), то даже при неограниченной функции V оператор $K(t)$ является оператором умножения на ограниченную функцию $x \mapsto h(tV(x))$. Пример использования этого подхода (хотя и для ограниченной функции V) приведён в работе [21], результаты которой можно интерпретировать как построение квазифейнмановской формулы с обобщёнными функциями под знаком кратного интеграла растущей кратности. Обсуждение родственных вопросов см. в работах [22–28].

Автор выражает благодарность В.А. Дубравиной и Н.Н. Шамарову за плодотворные обсуждения и Е.С. Рожковой за указание на опечатки.

Работа выполнена в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского и поддержана Российским научным фондом (проект 14-41-00044).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A.* Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 10. P. 5161–5171.
2. *Chernoff Paul R.* Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. 1968. V. 2. P. 238–242.

3. *Бутко Я.А.* Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия // Мат. заметки. 2008. V. 83. № 3. P. 333–349.
4. *Dubravina V.A.* Feynman formulas for solutions of evolution equations on ramified surfaces // Russian J. of Mathematical Physics. 2014. V. 21. № 2. P. 285–288.
5. *Plyashechnik A.S.* Feynman formula for Schrödinger-Type equations with time- and space-dependent coefficients // Russian J. of Mathematical Physics. 2012. V. 19. № 3. P. 340–359.
6. *Plyashechnik A.S.* Feynman formulas for second-order parabolic equations with variable coefficients // Russian J. of Mathematical Physics. 2013. V. 20. № 3. P. 377–379.
7. *Remizov I.D.* Solution of a Cauchy problem for a diffusion equation in a Hilbert space by a Feynman formula // Russian J. of Mathematical Physics. 2012. V. 19. № 3. P. 360–372.
8. *Remizov I.D.* Solution to a parabolic differential equation in Hilbert space via Feynman formula. I. // Модел. и анализ информ. систем. 2015. Т. 22. № 3. С. 337–355.
9. *Бузинов М.С., Бутко Я.А.* Формулы Фейнмана для параболического уравнения с бигармоническим дифференциальным оператором на конфигурационном пространстве // Наука и образование: Электронное научно-техническое издание. 2012. № 8. С. 9.
10. *Buzinov M.S.* Feynman and Quasi-Feynman formulae for evolution equations with a polyharmonic Hamiltonian // Int. Conf. “Infinite-dimensional dynamics, dissipative systems, and attractors”. Nizhny Novgorod (Russia). July 13–17, 2015.
11. *Smolyanov O.G.* Feynman formulae for evolutionary equations // Trends in Stochastic Analysis: London Mathematical Society Lecture Notes. Ser. 353, 2009.
12. *Smolyanov O.G.* Schrödinger type semigroups via Feynman formulae and all that // Proceedings of the Quantum Bio-Informatics V. Tokyo University of Science, March 7–12, 2011. Tokyo, 2013.
13. *Бутко Я.А.* Формулы Фейнмана для эволюционных полугрупп // Наука и образование: Науч. изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 3. С. 95–132.
14. *Grishin D.V., Smirnov A.V.* Quasi-Feynman formulas for the one-dimensional Schrödinger equation with a bounded smooth potential via the Remizov theorem // Int. Conf. “Infinite-dimensional dynamics, dissipative systems, and attractors”. Nizhny Novgorod (Russia), July 13–17, 2015.
15. *Remizov I.D.* Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation // J. of Funct. Anal. 2016. V. 270. № 12. P. 4540–4557.
16. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: Университетский курс. 2-е изд., испр., доп. Ижевск, 2011.
17. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. NY.; Berlin, 2000.
18. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. 2-е изд., перераб. и сущ. доп. М., 2015.
19. *Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G.* Feynman formulae and phase space Feynman path integrals for tau-quantization of some Levy–Khintchine type Hamilton functions // J. of Mathematical Physics. 2016. V. 57. 023508-023508-23 http://istina.msu.ru/journals/74082/.
20. *Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G.* Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top. 2012. V. 15. № 3. P. 1–26.
21. *Ремизов И.Д.* Решение уравнения Шрёдингера с помощью оператора сдвига // Мат. заметки. 2016. Т. 100. Вып. 3. С. 477–480.
22. *Dobrovitski V.V., Rakhmetov E.R., Barbara B., Zvezdin A.K.* Quantum tunnelling of magnetization in uniaxial magnetic clusters // Acta Physica Polonica A. 1997. V. 92. № 2. P. 473–476.
23. *Шамаров Н.Н.* Функциональный интеграл по счётно-аддитивной мере, представляющий решение уравнения Дирака // Тр. Моск. мат. о-ва. 2005. Т. 66. С. 263–276.
24. *Шамаров Н.Н.* Мера Пуассона–Маслова и формулы Фейнмана для решения уравнения Дирака // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12. Вып. 6. С. 193–211.
25. *Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.* Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шрёдингера. М., 2015 (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша: 057).
26. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2014. Т. 285. С. 232–243.
27. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Случайные неограниченные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. мат. 2016. Т. 80. № 6. С. 141–172.
28. *Englander J., Turaev D.* A scaling limit theorem for a class of superdiffusions // Annals of Probability. 2002. V. 30. P. 683–722.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
04.04.2016 г.