

© 2018 г. А.В. ДЕРЕВЯНКИН, канд. физ.-мат. наук  
(derevyankin.alexey@huawei.com)  
(Хуавей Технолоджис Ко., Лтд.),  
А.И. МАТАСОВ, д-р физ.-мат. наук (alexander.matasov@gmail.com)  
(Национальный исследовательский университет “Высшая школа  
экономики”; Лаборатория управления и навигации  
механико-математического факультета Московского государственного  
университета им. М.В. Ломоносова)

## ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ КАЛИБРОВКИ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена известная схема стендовой калибровки бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), состоящая из последовательных поворотов БИНС на стенде. Предложена математическая формализация этой схемы калибровки, позволяющая погрузить проблему калибровки в русло стохастической калмановской постановки задачи оценивания.

### 1. Введение

Инерциальная навигация — это метод определения местоположения, скорости и ориентации подвижных объектов без использования внешней информации, по показаниям чувствительных элементов, находящихся на объекте, — ньютометров и датчиков угловой скорости (ДУС) [1, 2].

В показаниях чувствительных элементов содержатся инструментальные погрешности, которые со временем приводят к накоплению ошибок решения навигационной задачи. Один из путей повышения точности навигации заключается в оценивании этих погрешностей и последующем введении соответствующих поправок в показания чувствительных элементов. Процедура оценивания указанных ошибок называется

*калибровкой.*

Задача калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) исследовалась начиная с 1970-х гг. во многих научных организациях и на специализированных предприятиях. В основном эти исследования носят подчеркнuto прагматический характер. Многие алгоритмы, разработанные на предприятиях, позволяют успешно решать конкретные задачи калибровки, однако соответствующие обоснования не всегда отличаются достаточной строгостью. Более тонким, математическим аспектам калибровки, вопросам оптимальности получаемых оценок и предельных точностей оценивания уделяется мало внимания. Это не дает возможности оценить применимость разработанных методов калибровки к другим задачам калибровки и предложить способы повышения точности существующих алгоритмов. В статье предлагается математическая формализация одной типичной схемы калибровки БИНС, состоящей из серии последовательных экспериментов. Эта формализация позволяет без методических “натяжек” погрузить задачу калибровки в русло калмановской постановки задачи оптимального оценивания. Краткое описание идеи предложенного подхода опубликовано авторами в заметке [3].

Литература по калибровке необозрима и ее подробный обзор составляет предмет для отдельной статьи. Упомянем лишь некоторые известные публикации, например, [4–28] (заметим, что задача формализации последовательной схемы калибровки в них не исследовалась).

Рассматриваемая задача калибровки обычно решается последовательно, в несколько этапов, на каждом из которых из всего набора инструментальных ошибок оцениваются несколько параметров. Процесс калибровки на каждом этапе описывается системой относительно небольшого порядка. При таком подходе на каждом этапе возникает проблема выбора начального значения вектора состояния и начальной ковариационной матрицы для применения калмановской процедуры оценивания. На практике этот вопрос, как правило, решается на уровне инженерной интуиции; при этом обычно нарушается формализм калмановской постановки задачи оценивания, а следовательно, не гарантируется оптимальность полученных оценок. К потере

оптимальности ведет и неполный учет ковариационных связей между компонентами начального вектора состояния. Предлагаемое в статье “телескопическое” описание процесса калибровки полностью соответствует калмановской постановке задачи оценивания. После формализации вопрос об оптимальном алгоритме оценивания решается однозначно: надо применить фильтр Калмана [29].

## 2. Последовательная схема калибровки

Наиболее распространенный подход к решению проблемы калибровки заключается в ее сведении к задаче оценивания вектора состояния динамической системы. По существу задача калибровки является кинематической [11, 20, 21]. Поэтому можно решать ее вне инерциального контура, используя в качестве измерений показания чувствительных элементов. Однако часто решение осуществляют в режиме навигации, используя в качестве измерений значения координат и скоростей, вырабатываемые БИНС. В статье обсуждается именно такой подход. Рассматриваемая схема калибровки состоит из последовательности отдельных операций, в каждой из которых инструментальные ошибки БИНС определяются при помощи позиционной и скоростной информации, полученной в режиме навигации после выполнения программного поворота БИНС, установленной на стенде. Каждая операция включает в себя следующие шаги.

1. Производится установка БИНС на стенде в некоторое заданное положение.
2. Осуществляется выставка БИНС. Под выставкой понимается оценивание взаимной ориентации приборной системы координат, жестко связанной с корпусом БИНС, и географической системы координат, оси которой ориентированы по географической вертикали и сторонам света, в заданный начальный момент времени.
3. После осуществления выставки начинается работа БИНС в режиме навигации (непрерывное вычисление координат и скорости по показаниям чувствительных элементов).
4. Сразу после окончания выставки и начала работы БИНС в режиме навигации производится поворот БИНС на стенде вокруг определенной его оси на заданный

угол.

5. Вычисленные БИНС значения координат и скоростей фиксируются трижды: в моменты начала и окончания поворота и в некоторый последующий момент.

На каждой операции БИНС переустанавливается на стенде и выставляется; следовательно, в процессе калибровки работа БИНС в режиме навигации многократно прерывается и заново инициализируется. Это выводит постановку задачи оценивания за рамки калмановского формализма. Таким образом, одну из основных проблем при решении задачи составляет вложение рассматриваемой схемы калибровки в контекст стандартной постановки задач оценивания с начальными условиями, относящимися к одному моменту времени. Это дает возможность применить для оптимального решения задачи калибровки фильтр Калмана.

Каждая операция однозначно задается углами курса  $\psi$ , тангажа  $\theta$  и крена  $\kappa$ , определяющими начальную ориентацию БИНС на стенде, номером оси стенда, вокруг которой осуществляется программный поворот, и углом этого поворота. Далее будем рассматривать один конкретный набор операций. Приведем указанные параметры для всех операций, составляющих программу калибровки.

Таблица. Программные повороты

Номер операции	$\psi$	$\theta$	$\kappa$	Номер оси поворота	Угол поворота
1	0	0	0	2	360°
2	270°	0	0	1	360°
3	0	0	-90°	3	-360°
4	0	0	0	2	180°
5	0	0	180°	2	-180°
6	270°	0	0	1	180°
7	270°	180°	0	1	-180°
8	0	0	0	2	90°

Продолжение таблицы

Номер операции	$\psi$	$\theta$	$\varkappa$	Номер оси поворота	Угол поворота
9	0	0	0	2	$-90^\circ$
10	0	0	$-90^\circ$	3	$-90^\circ$
11	0	0	$-90^\circ$	3	$90^\circ$
12	$270^\circ$	0	0	1	$90^\circ$
13	$270^\circ$	0	0	1	$-90^\circ$
14	0	0	0	3	$180^\circ$

Забегая вперед, отметим, что совокупность приведенных в таблице операций обеспечивает хорошую наблюдаемость всех инструментальных погрешностей БИНС. Конечно, приведенная схема калибровки не является единственно возможной: наблюдаемость может быть обеспечена и при использовании иного набора положений.

### 3. Математическая формализация задачи калибровки

#### 3.1. Системы координат

Опишем системы координат [2], которые будут использоваться далее (все системы координат — правые ортогональные).

1.  $Mx$  ( $Mx_1x_2x_3$ ) — географическая система координат, начало которой находится в точке  $M$ , определяющей расположение БИНС, а оси направлены по сторонам света и географической вертикали.

2.  $M'x'$  ( $M'x'_1x'_2x'_3$ ) — модельная географическая система координат, связанная с вычисляемым БИНС местоположением  $M'$  точки  $M$ .

3.  $Mz$  ( $Mz_1z_2z_3$ ) — приборная система координат, жестко связанная с корпусом БИНС. С осями этой системы координат связываются номинальные направления осей чувствительности ньютонометров и ДУС.

4.  $M'y$  ( $M'y_1y_2y_3$ ) — модельная система координат, которая является образом приборной системы координат, содержащимся в вычислителе БИНС.

5.  $Ms$  ( $Ms_1s_2s_3$ ) — квазиприборная система координат, имеющая такую же ориентацию относительно приборной системы координат  $Mz$ , какую модельная географическая система координат  $M'x'$  имеет относительно модельной приборной системы координат  $M'y$ .

Введем также системы координат  $Ox, Ox', Oz, Oy, Os$  с общим началом в центре Земли  $O$ , оси которых параллельны осям определенных выше систем координат  $Mx, M'x', Mz, M'y, Ms$  соответственно. Будем называть их так же, как соответствующие им системы координат с центром в точке  $M$ , что не приведет к недоразумению. При записи векторов будем при необходимости обозначать нижними буквенными индексами системы координат, в проекциях на оси которой записан вектор.

Матрицы ориентации, связывающие описанные системы координат, определяются приведенным далее рисунком (напомним, что матрица ориентации системы координат  $On$  относительно системы координат  $Om$  — это матрица  $A$  такая, что для произвольного вектора  $a$  выполняется соотношение  $a_n = Aa_m$ ).

Через  $E$  обозначена единичная матрица размера  $3 \times 3$ , через  $\alpha_x, \beta_{x'}$  и  $\gamma_x$  — векторы малых поворотов, через  $\hat{D}$  — кососимметрическая матрица, построенная по компонентам вектора  $d$ :

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & d_3 & -d_2 \\ -d_3 & 0 & d_1 \\ d_2 & -d_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица ориентации  $D'$  является численным образом (содержащимся в вычислителе БИНС) матрицы ориентации приборной системы координат  $Oz$  относительно географической системы координат  $Ox$ ; эта матрица известна точно. Из приведенного выше рисунка с точностью до членов второго порядка малости следует равенство  $\alpha_x = \beta_{x'} + \gamma_x$ .

### 3.2. Модели показаний чувствительных элементов

Рассмотрим блок ньютонометров и блок ДУС, состоящие из трех чувствительных элементов каждый; при этом номинальные положения осей чувствительности датчиков совпадают с осями приборной системы координат  $Oz$ . Показания чувствительных элементов имеют вид [2]

$$\begin{aligned} f' &= f_z + \Delta f + \delta f, \\ \omega' &= \omega_z - \Delta\omega - \delta\omega, \end{aligned}$$

где  $f' \in \mathbb{R}^3$  — показания ньютонометров,  $f_z \in \mathbb{R}^3$  — истинный вектор измеряемой ньютонометрами удельной силы,  $\Delta f \in \mathbb{R}^3$  — инструментальные погрешности показаний ньютонометров,  $\delta f \in \mathbb{R}^3$  — непараметрические (флуктуационные) ошибки показаний ньютонометров; через  $\omega'$ ,  $\omega_z$ ,  $\Delta\omega$  и  $\delta\omega$  обозначены аналогичные величины для ДУС. Выбор знаков “минус” во втором равенстве объясняется традицией согласования уравнений инерциальной навигации для БИНС и для платформенных инерциальных навигационных систем.

Примем стандартные модели инструментальных погрешностей показаний чувствительных элементов [2]:

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta f &= Bf_z + \varepsilon + M(\omega_z, \dot{\omega}_z)l, \\ \Delta\omega &= C\omega_z + \nu, \end{aligned}$$

где  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  — постоянная матрица, диагональные компоненты которой описывают ошибки масштабных коэффициентов ньютонометров, а внедиагональные — перекосы осей чувствительности ньютонометров;  $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$  — постоянные смещения нулей ньютонометров;  $l \in \mathbb{R}^6$  — постоянный вектор, описывающий разнесения чувствительных масс ньютонометров (т.е. несовпадение чувствительных масс второго и третьего ньютонометров с началом приборной системы координат, за которое принимается точка расположения чувствительной массы первого ньютонометра);  $M(\omega_z, \dot{\omega}_z) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  — известная матрица, которая характеризует зависимость инструментальных погрешностей блока акселерометров от угловой

скорости и углового ускорения, обусловленную разнесением чувствительных масс. Через  $C$  и  $\nu$  обозначены параметры модели погрешностей ДУС, аналогичные  $B$  и  $\varepsilon$ . Введем также векторы  $b = (B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{31}, B_{32}, B_{33})^T \in \mathbb{R}^6$  и  $c = (C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33})^T \in \mathbb{R}^9$  (параметры  $B_{13}$ ,  $B_{21}$  и  $B_{23}$  можно положить равными нулю, определенным образом выбрав направления осей приборной системы координат). Верхний индекс “Т” обозначает транспонирование. Задача калибровки заключается в оценивании компонент векторов  $b$ ,  $c$ ,  $\varepsilon$ ,  $\nu$  и  $l$ .

### 3.3. Динамические системы для отдельных операций

Динамическая система, описывающая каждую из 14 операций рассматриваемой методики, описывается известными уравнениями ошибок [2], которые в случае неподвижного основания принимают вид

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \Delta \dot{r}_1(t) \\ \Delta \dot{r}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta V_1(t) \\ \delta V_2(t) \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \delta \dot{V}_1(t) \\ \delta \dot{V}_2(t) \end{pmatrix} &= -\frac{g}{a} \begin{pmatrix} \Delta r_1(t) \\ \Delta r_2(t) \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} \delta V_1(t) \\ \delta V_2(t) \end{pmatrix} + F\beta(t) + \\
 &+ \begin{pmatrix} D'_{11}(t) & D'_{21}(t) & D'_{31}(t) \\ D'_{12}(t) & D'_{22}(t) & D'_{32}(t) \end{pmatrix} (\Delta f(t) + \delta f(t)), \\
 (2) \quad \dot{\beta}(t) &= \hat{u}\beta(t) + D'^T(t) (\Delta \omega(t) + \delta \omega(t)),
 \end{aligned}$$

где:

$\Delta r(t) = r'_{x'}(t) - r_{x'}(t)$  — вектор полных ошибок определения координат (первые две компоненты которого выражаются через вектор малого поворота  $\gamma_x$  и большую полуось земного эллипсоида  $a$  равенствами  $\Delta r_1 = a\gamma_{x2}$ ,  $\Delta r_2 = -a\gamma_{x1}$ ; через  $r'(t)$  и  $r(t)$  обозначены соответственно модельный и истинный радиус-векторы объекта);

$\delta V(t) = V'_{x'}(t) - V_s(t)$  — вектор динамических ошибок определения относительных скоростей (через  $V'(t)$  и  $V(t)$  обозначены соответственно векторы модельной и истинной скоростей объекта относительно Земли);



$g$  — модуль ускорения силы тяжести в месте проведения испытаний;

$u$  — вектор угловой скорости вращения Земли, записанный в осях географической системы координат;

$$U = 2u_0 \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = g \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(через  $u_0$  обозначен известный модуль вектора  $u$  угловой скорости вращения Земли, а через  $\varphi$  — известная географическая широта места проведения испытаний);

инструментальные погрешности  $\Delta f(t)$  и  $\Delta \omega(t)$  определены формулами (1);

вектор  $\beta(t) = \beta_{x'}(t)$  — вектор малого поворота квазиприборной системы координат  $Os$  относительно модельной географической системы  $Ox'$  (см. приведенный выше рисунок; будем опускать нижний индекс при записи этого вектора, так как он проектируется только на оси системы координат  $Ox'$ ). Уравнения ошибок (2) записаны с точностью до членов второго порядка малости.

Для того чтобы записать динамическую систему (2) в стандартном виде, введем вектор состояния  $x(t) = (y(t)^T, p^T)^T \in \mathbb{R}^{34}$ , где

$$y(t) = (\Delta r_1(t), \Delta r_2(t), \delta V_1(t), \delta V_2(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))^T \in \mathbb{R}^7$$

— подвектор переменных величин, а

$$p = (b^T, \varepsilon^T, c^T, \nu^T, l^T)^T \in \mathbb{R}^{27}$$

— подвектор постоянных параметров, подлежащих оцениванию. Также введем вектор флуктуационных ошибок показаний ньютонометров и ДУС  $q(t) = (\delta f(t)^T, \delta \omega(t)^T)^T \in \mathbb{R}^6$ .

С использованием введенных обозначений динамическую систему (2) можно записать в блочном виде:

(3)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2(t) \\ 0_{27 \times 7} & 0_{27 \times 27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N(t) \\ 0 \end{pmatrix} q(t), \quad t \in [t_0, t_f]$$

(нижние индексы указывают размеры нулевых блоков), где  $t_0$  — момент окончания выставки и начала работы БИНС в режиме навигации на текущей операции,  $t_f$  — момент окончания работы БИНС на текущей операции, а матрицы  $M_1 \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ ,  $M_2(t) \in \mathbb{R}^{7 \times 27}$  и  $N(t) \in \mathbb{R}^{7 \times 6}$  с точностью до членов второго порядка малости задаются следующими выражениями (через  $E_n$  обозначена единичная матрица размера  $n \times n$ ):

$$(4) \quad N(t) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \\ S_1(\phi(t)) & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & D^T(\phi(t)) \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & E_2 & 0_{2 \times 3} \\ -E_2 g/a & U & F \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & \hat{u}_x \end{pmatrix},$$

$$M_2(t) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 6} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 9} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 6} \\ S_2(\phi(t)) & S_1(\phi(t)) & 0_{2 \times 9} & 0_{2 \times 3} & S_3(\phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t)) \\ 0_{3 \times 6} & 0_{3 \times 3} & S_4(\phi(t), \dot{\phi}(t)) & D^T(\phi(t)) & 0_{3 \times 6} \end{pmatrix}.$$

Входящие в эти выражения матрицы  $D(\phi(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $S_1(\phi(t)) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $S_2(\phi(t)) \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$ ,  $S_3(\phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t)) \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$  и  $S_4(\phi(t), \dot{\phi}(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 9}$  представляют собой известные функции текущего значения угла  $\phi(t)$  поворота БИНС на стенде и, возможно, его первой и второй производных:

$$D(\phi(t)) = S_0(\phi(t))D_0,$$

где  $S_0(\phi(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  — матрица поворота вокруг одной из координатных осей на угол  $\phi(t)$  (номер оси зависит от номера операции и указан в приведенной выше таблице), имеющая для поворота вокруг первой, второй и третьей оси соответственно вид

$$S_0^{(1)}(\phi(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi(t) & \sin \phi(t) \\ 0 & -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) \end{pmatrix}, \quad S_0^{(2)}(\phi(t)) = \begin{pmatrix} \cos \phi(t) & 0 & -\sin \phi(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi(t) & 0 & \cos \phi(t) \end{pmatrix},$$

$$S_0^{(3)}(\phi(t)) = \begin{pmatrix} \cos \phi(t) & \sin \phi(t) & 0 \\ -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а  $D_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  — программная матрица начальной ориентации, выражающаяся через программные начальные значения углов курса  $\psi(t_0)$ , крена  $\varkappa(t_0)$  и тангажа  $\theta(t_0)$ , приведенные в табл. 1; эта матрица выражается известной формулой

$$D_0 = \begin{pmatrix} \cos \varkappa(t_0) & 0 & -\sin \varkappa(t_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varkappa(t_0) & 0 & \cos \varkappa(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(t_0) & \sin \theta(t_0) \\ 0 & -\sin \theta(t_0) & \cos \theta(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi(t_0) & \sin \psi(t_0) & 0 \\ -\sin \psi(t_0) & \cos \psi(t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$S_1(\phi(t))$  — матрица, представляющая собой две верхних строки матрицы  $D^T(\phi(t))$ ;

$$\begin{aligned} S_2^1(\phi(t)) = S_2^4(\phi(t)) = S_2^5(\phi(t)) = S_2^8(\phi(t)) = S_2^9(\phi(t)) = \\ = g \begin{pmatrix} -\sin \phi(t) \cos \phi(t) & 0 & 0 & -\sin^2 \phi(t) & 0 & \sin \phi(t) \cos \phi(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2^2(\phi(t)) = S_2^6(\phi(t)) = S_2^7(\phi(t)) = S_2^{12}(\phi(t)) = S_2^{13}(\phi(t)) = \\ = g \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \phi(t) \cos \phi(t) & 0 & -\sin^2 \phi(t) & -\sin \phi(t) \cos \phi(t) \\ 0 & -\sin \phi(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2^3(\phi(t)) = S_2^{10}(\phi(t)) = S_2^{11}(\phi(t)) = \\ = g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\cos \phi(t) \sin \phi(t) & 0 \\ \sin \phi(t) \cos \phi(t) & -\sin^2 \phi(t) & -\sin \phi(t) \cos \phi(t) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$S_2^{14}(\phi(t)) = 0_{2 \times 6}$$

(верхним индексом обозначен номер операции);

$$(5) \quad S_3(\phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t)) = S_1(\phi(t)) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1\omega_2 + \dot{\omega}_3 & -(\omega_1^2 + \omega_3^2) & \omega_2\omega_3 - \dot{\omega}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1\omega_3 - \dot{\omega}_2 & \omega_2\omega_3 + \dot{\omega}_1 & -(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{pmatrix},$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — компоненты вектора  $\omega_z$ , выражающиеся (вместе со своими производными) при повороте вокруг  $j$ -й оси,  $j = 1, 2, 3$ , формулами  $\omega_i = \delta_{ij}\dot{\phi}(t)$ ,  $\dot{\omega}_i = \delta_{ij}\ddot{\phi}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (через  $\delta_{ij}$  обозначен символ Кронекера, равный 1 при  $i = j$  и 0 в противном случае); при выводе этих формул пренебрегаем угловой скоростью вращения Земли;

$$S_4(\phi(t), \dot{\phi}(t)) = D^T(\phi(t)) \begin{pmatrix} \omega_z^T & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & \omega_z^T & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & \omega_z^T \end{pmatrix}.$$

*З а м е ч а н и е 1.* Значения функции  $\phi(t)$  можно получить из показаний датчиков углов стенда, а функции  $\dot{\phi}(t)$  — из сигналов датчиков угловой скорости. Более того, матрицы  $D(\phi(t))$ ,  $S_1(\phi(t))$  и  $S_2(\phi(t))$  могут быть с достаточной степенью точности выражены через известную матрицу  $D'(t)$  (см. приведенный выше рисунок) без использования угла  $\phi(t)$ . В то же время, значения второй производной  $\ddot{\phi}(t)$ , входящие в матрицу  $S_3(\phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t))$ , неизвестны. Это обстоятельство вносит в решение задачи дополнительную трудность, способ преодоления которой будет описан далее.

#### 3.4. Начальная выставка

Под начальной выставкой БИНС понимается оценивание взаимной ориентации приборной системы координат  $Oz$  и географической системы координат  $Ox$ , осуществляемое в некоторый момент времени  $t_0$  перед тем, как БИНС начнет работу в режиме навигации. Во время выставки БИНС не вращается относительно Земли. Соотношения выставки описываются уравнением [2, 4]

$$D'(t_0)f_x = f'(t_0),$$

из которого при известных  $f_x = (0, 0, g)^T$  и  $f'(t_0)$  определяются элементы матрицы  $D'(t_0)$ . Выставка, осуществляемая в начале каждой операции, порождает связи между компонентами фазового вектора системы (3), которые необходимо учитывать для правильного задания начальной ковариационной матрицы в фильтре Калмана. Можно показать [2, 4], что эти связи выражаются равенствами

$$(6) \quad \begin{aligned} \beta_1(t_0) &= - \left( D_0^T B D_0 (0, 0, 1)^T + D_0^T (\varepsilon + \delta f_0) / g \right)_2 + \frac{\Delta r_2(t_0)}{a}, \\ \beta_2(t_0) &= \left( D_0^T B D_0 (0, 0, 1)^T + D_0^T (\varepsilon + \delta f_0) / g \right)_1 - \frac{\Delta r_1(t_0)}{a}, \\ \beta_3(t_0) &= -\delta\psi(t_0) - \frac{\Delta r_1(t_0)}{a} \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned}$$

где  $\delta f_0$  — флуктуационная ошибка показаний ньютонометров в момент  $t_0$  в режиме выставки, а  $\delta\psi(t_0)$  — погрешность датчика угла курса во время выставки. При выводе уравнения для  $\beta_3(t_0)$  учтено, что для всех программных поворотов из приведенной выше таблицы  $\sin \theta(t_0) = 0$ . Напомним, что  $D_0$  — известная программная матрица начальной ориентации. Приведем, например, первые два уравнения (6) для случая  $D_0 = E$  (что имеет место в операциях №№ 1, 4, 8, 9 и 14):

$$\begin{aligned} \beta_1(t_0) &= -\frac{\varepsilon_2}{g} - \frac{\delta f_{02}}{g} + \frac{\Delta r_2(t_0)}{a}, \\ \beta_2(t_0) &= \frac{\varepsilon_1}{g} + \frac{\delta f_{01}}{g} - \frac{\Delta r_1(t_0)}{a}. \end{aligned}$$

### 3.5. Стохастические характеристики динамической системы

Будем полагать, что инструментальные погрешности ньютонометров и ДУС, флуктуационные ошибки показаний ньютонометров в момент начальной выставки и ошибка датчика угла курса являются независимыми случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и известными дисперсиями. Далее, положим, что местоположение стенда известно точно, и поэтому вектор начальных позиционных ошибок  $\Delta r(t_0)$  равен нулю. Вектор начальных скоростных ошибок  $\delta V(t_0) = V'_x(t_0) - V_s(t_0)$  также равен нулю, поскольку  $V(t_0) = 0$ , а начальное модельное значение скорости  $V'(t_0)$  тоже принимается равным нулю. Таким образом,  $\Delta r_1(t_0) = \Delta r_2(t_0) = 0$ ,  $\delta V_1(t_0) = \delta V_2(t_0) = 0$ .

Обозначим среднеквадратические отклонения:

1) масштабных коэффициентов ньютонометров и ДУС — через  $\sigma_{bm}$  и  $\sigma_{cm}$  соответственно;

2) углов перекосов осей чувствительности ньютонометров и ДУС — через  $\sigma_{bs}$  и  $\sigma_{cs}$  соответственно;

3) смещений нуля ньютонометров и ДУС — через  $\sigma_\varepsilon$  и  $\sigma_\nu$  соответственно;

4) компонент векторов разнесений чувствительных масс акселерометров — через  $\sigma_l$ ;

5) флуктуационных ошибок показаний ньютонометров в момент начальной выставки — через  $\sigma_{\delta f}$ ;

6) ошибки датчика угла курса — через  $\sigma_{\delta\psi}$ .

Ясно, что  $\mathbf{M}[x(t_0)] = 0$ , где  $\mathbf{M}$  — символ математического ожидания. Это следует из сделанных в начале этого параграфа предположений и из (6). Выражение для начальной ковариационной матрицы  $P_0 \in \mathbb{R}^{34 \times 34}$  несложным образом получается из той же информации. Эту матрицу можно записать в блочном виде:

$$(7) \quad P_0 = \mathbf{M}[x(t_0)x^T(t_0)] = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 6} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 9} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 6} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 6} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 9} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 6} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} & \Sigma_{35} & 0_{3 \times 9} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} \\ 0_{6 \times 2} & 0_{6 \times 2} & \Sigma_{34}^T & \Sigma_{44} & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 9} & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & \Sigma_{35}^T & 0_{3 \times 6} & \Sigma_{55} & 0_{3 \times 9} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} \\ 0_{9 \times 2} & 0_{9 \times 2} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 6} & 0_{9 \times 3} & \Sigma_{66} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 6} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 9} & \Sigma_{77} & 0_{3 \times 6} \\ 0_{6 \times 2} & 0_{6 \times 2} & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 9} & 0_{6 \times 3} & \Sigma_{88} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
\Sigma_{44} &= \mathbf{M}[bb^T] = \text{diag}(\sigma_{bm}^2, \sigma_{bs}^2, \sigma_{bm}^2, \sigma_{bs}^2, \sigma_{bs}^2, \sigma_{bm}^2), \\
\Sigma_{55} &= \mathbf{M}[\varepsilon\varepsilon^T] = \sigma_\varepsilon^2 \cdot E_3, \\
\Sigma_{66} &= \mathbf{M}[cc^T] = \text{diag}(\sigma_{cm}^2, \sigma_{cs}^2, \sigma_{cs}^2, \sigma_{cs}^2, \sigma_{cm}^2, \sigma_{cs}^2, \sigma_{cs}^2, \sigma_{cs}^2, \sigma_{cm}^2), \\
\Sigma_{77} &= \mathbf{M}[\nu\nu^T] = \sigma_\nu^2 \cdot E_3, \\
\Sigma_{88} &= \mathbf{M}[ll^T] = \sigma_l^2 \cdot E_6
\end{aligned}$$

— диагональные матрицы, содержащие априори известные дисперсии соответствующих компонент вектора  $x(t_0)$ , а выражения для матриц

$$\Sigma_{33} = \mathbf{M}[\beta(t_0)\beta^T(t_0)] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \Sigma_{34} = \mathbf{M}[\beta(t_0)b^T] \in \mathbb{R}^{3 \times 6}, \quad \Sigma_{35} = \mathbf{M}[\beta(t_0)\varepsilon^T] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

однозначно вычисляются из (6). Например, для операции № 1 имеем:

$$\Sigma_{33} = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2/g^2 + \sigma_{\delta f}^2/g^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2/g^2 + \sigma_{\delta f}^2/g^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta\psi}^2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{34} = 0_{3 \times 6}, \quad \Sigma_{35} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_\varepsilon^2/g & 0 \\ \sigma_\varepsilon^2/g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видно из (7), в силу соотношений (6), порожденных начальной выставкой, начальная ковариационная матрица не является диагональной из-за наличия линейных зависимостей между  $\beta(t_0)$  и другими компонентами вектора состояния.

Компоненты вектора шумов системы  $q(t) = (\delta f(t)^T, \delta\omega(t)^T)^T$  будем полагать попарно независимыми случайными процессами типа белого шума с известными интенсивностями, причем интенсивности шумов одного типа будем полагать одинаковыми:

$$(8) \quad \mathbf{M}[\delta f(t)\delta f(\tau)^T] = \lambda_1 E_3 \delta(t - \tau), \quad \mathbf{M}[\delta\omega(t)\delta\omega(\tau)^T] = \lambda_2 E_3 \delta(t - \tau),$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — заданные положительные числа. Также будем полагать компоненты вектора  $q(t)$  независимыми от начальных условий системы. Таким образом, система (2) представляет собой линейное стохастическое дифференциальное уравнение с векторным белым шумом на входе.

### 3.6. Модель измерений

Пусть измерения осуществляются в моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  (напомним, что на каждой операции измерения фиксируются трижды: в моменты начала и окончания поворота БИНС на стенде и в некоторый последующий момент). Первую группу измерений составляют абсолютные ошибки определения координат  $\Delta r_1(t_k)$ ,  $\Delta r_2(t_k)$ . Вторую группу измерений образуют модельные (вычисленные БИНС) значения относительных скоростей  $V'_{x'1}(t_k)$ ,  $V'_{x'2}(t_k)$ , фиксируемые в моменты начала и окончания поворота и некоторый последующий момент. Так как БИНС неподвижна относительно Земли, то  $V(t_k) = 0$  и следовательно,  $V'_{x'}(t_k) = V'_{x'}(t_k) - V_s(t_k) = \delta V(t_k)$ .

Вектор измерений легко представить в стандартном виде

$$(9) \quad z(t_k) = hx(t_k) + \rho(t_k), \quad k = 1, 2, 3,$$

где  $t_k$  — моменты измерений, вектор  $z(t_k) \in \mathbb{R}^4$  и матрица  $h \in \mathbb{R}^{4 \times 34}$  представимы в блочном виде:

$$z(t_k) = (\Delta r_1(t_k), \Delta r_2(t_k), \delta V_1(t_k), \delta V_2(t_k))^T + \rho(t_k), \quad h = (E_4 \ 0_{4 \times 30}),$$

а  $\rho(t_k) \in \mathbb{R}^4$  — ошибка измерений, которая возникает вследствие дискретности представления данных в вычислителе БИНС. Компоненты векторов  $\rho(t_k)$  будем полагать попарно независимыми дискретными белыми шумами с нулевыми математическими ожиданиями и известными дисперсиями. Также будем полагать их независимыми от начальных условий системы и от компонент вектора  $q(t)$ .

## 4. “Телескопическая” динамическая система

Для того чтобы свести рассматриваемую задачу к калмановской задаче оценивания, нужно объединить все 14 операций в одной динамической системе. Однако при этом возникают сложности, связанные с необходимостью описать единой системой с одним начальным значением процесс калибровки, включающий в себя многократные перезапуски и выставки БИНС. Для преодоления этих трудностей построим так называемую “телескопическую” систему.



#### 4.1. Построение “телескопической” системы

Пусть  $i$ -я операция калибровки разворачивается на промежутке  $[T^{i-1}, T^i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, 14$ . Полный процесс калибровки, таким образом, осуществляется на отрезке  $[T^0, T^{14}]$ . При этом для  $i$ -й операции момент времени  $t_0$ , в который оканчивается выставка, равен  $T^{i-1}$ , а момент  $t_f$  окончания операции равен  $T^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 14$ . Фазовым вектором “телескопической” системы положим вектор  $X(t) = (y^1(t)^T, y^2(t)^T, \dots, y^{14}(t)^T, p^T)^T \in \mathbb{R}^{125}$  (верхний индекс указывает на номер операции), где составляющие вектора  $X(t)$  подчиняются дифференциальному уравнению (3) (поскольку  $i$ -я операция калибровки разворачивается на промежутке  $[T^{i-1}, T^i]$ , то вне этого отрезка будем полагать вектор  $y^i(t)$  постоянным, а матрицы  $M_1^i(t)$ ,  $M_2^i(t)$  и  $N^i(t)$  из (3), соответственно, равными нулю). Подчеркнем, что у векторов  $y^i(t)$  различные начальные условия по переменной  $\beta(t)$ . Вектором случайных возмущений “телескопической” системы положим  $Q(t) = (q^1(t)^T, q^2(t)^T, \dots, q^{14}(t)^T)^T \in \mathbb{R}^{84}$ .

*Замечание 2.* Так как  $y^i(t) \in \mathbb{R}^7$ ,  $q^i(t) \in \mathbb{R}^6$ ,  $i = 1, 2, \dots, 14$ , и  $p \in \mathbb{R}^{27}$ , то размерности векторов  $X(t)$  и  $Q(t)$  определяются равенствами  $14 \cdot 7 + 27 = 125$  и  $14 \cdot 6 = 84$ .

Построенную таким образом итоговую систему, очевидно, можно записать в блочном виде:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \vdots \\ y^{14}(t) \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^1(t) & 0_{7 \times 7} & \cdots & 0_{7 \times 7} & M_2^1(t) \\ 0_{7 \times 7} & M_1^2(t) & \cdots & 0_{7 \times 7} & M_2^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{7 \times 7} & 0_{7 \times 7} & \cdots & M_1^{14}(t) & M_2^{14}(t) \\ 0_{27 \times 7} & 0_{27 \times 7} & \cdots & 0_{27 \times 7} & 0_{27 \times 27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \vdots \\ y^{14}(t) \\ p \end{pmatrix} +$$

$$(10) \quad + \begin{pmatrix} N^1(t) & 0_{7 \times 6} & \cdots & 0_{7 \times 6} \\ 0_{7 \times 6} & N^2(t) & \cdots & 0_{7 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{7 \times 6} & 0_{7 \times 6} & \cdots & N^{14}(t) \\ 0_{27 \times 6} & 0_{27 \times 6} & \cdots & 0_{27 \times 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1(t) \\ q^2(t) \\ \vdots \\ q^{14}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [T^0, T^{14}],$$

где матрицы  $M_1^i(t)$ ,  $M_2^i(t)$ ,  $N^i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 14$ , выражаются формулами (4), а верхний индекс, напомним, указывает на номер операции.

*Замечание 3.* В системе (10) пишем  $M_1^i(t)$  вместо  $M_1^i$ , поскольку эта матрица в (10) не является постоянной: на отрезке  $[T^{i-1}, T^i]$  она задается второй формулой (4), а вне его — равна нулю.

Обсудим статистические характеристики вектора  $x(T^0)$ . Очевидно, для каждой операции  $My^i(T^0) = 0$ , поскольку  $My^i(T^{i-1}) = 0$  в соответствии с подразделом 3.5, а на отрезке  $[T^0, T^{i-1}]$  вектор  $y^i(t)$  является постоянным. Также и  $Mr = 0$  согласно подразделу 3.5. Таким образом,  $M[X(T^0)] = 0$ .

Начальные ковариационные связи, порождаемые выставкой, определяются линейными зависимостями (6) между кинематическими ошибками  $\beta^i(T^0)$  и погрешностями блока ньютонометров. Для получения начальной ковариационной матрицы  $M[X(T^0)X^T(T^0)]$  “телескопической” системы нужно вычислить все ковариации  $M[\beta^i(T^0)p^T]$  и  $M[\beta^i(T^0)\beta^{jT}(T^0)]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, 14$ , что однозначно выполнимо на основе равенств (6). Явное итоговое выражение для ковариационной матрицы размера  $125 \times 125$  здесь не приводится ввиду его громоздкости.

Очевидно, матрица  $M[Q(t)Q^T(\tau)]$  является блочно-диагональной, а каждый её блок определяется формулами (8).

#### 4.2. Измерения в “телескопической” системе

Рассмотрим последовательность моментов времени

$$t_1^1 < t_2^1 < t_3^1 < t_1^2 < t_2^2 < t_3^2 < \dots < t_1^{14} < t_2^{14} < t_3^{14},$$

где  $t_k^i \in [T^{i-1}, T^i]$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, \dots, 14$ , — момент  $k$ -го измерения на  $i$ -й операции. В соответствии с подразделом 3.6 и принципом построения “телескопической” системы измерения в этой системе можно представить в виде, аналогичном (9):

$$(11) \quad z(t_k^i) = H(t_k^i)X(t_k^i) + \rho(t_k^i), \quad i = 1, 2, \dots, 14, \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$H(t_k^i) = (h^1(t_k^i), h^2(t_k^i), \dots, h^{14}(t_k^i), 0_{4 \times 27}) \in \mathbb{R}^{4 \times 125},$$

а матрицы  $h^j(t_k^i) \in \mathbb{R}^{4 \times 7}$  задаются выражением

$$h^j(t_k^i) = \begin{cases} (E_4, 0_{4 \times 3}), & i = j, \\ 0_{4 \times 7}, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, 14, \quad k = 1, 2, 3.$$

Компоненты ошибок измерений  $\rho(t_k^i) \in \mathbb{R}^4$  являются случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и известными дисперсиями. Эти компоненты независимы между собой и по времени. Кроме того, они не зависят от  $X(T^0)$  и  $Q(t)$ .

Задача калибровки заключается в оценивании компонент векторов  $b$ ,  $c$ ,  $\varepsilon$ ,  $\nu$  и  $l$  по измерениям (11).

#### 4.3. Дискретизация “телескопической” системы

Следующий, более стандартный, этап решения задачи заключается в вычислении переходной матрицы системы и в построении дискретной системы, вектор состояния которой равен вектору состояния исходной непрерывной динамической системы в дискретные моменты измерений  $t_k$ . Вычисление переходной матрицы системы сопряжено с некоторыми сложностями, поскольку матрица системы (3) содержит вторую производную угла  $\phi(t)$  поворота БИНС на стенде (см. (5) для матрицы  $S_3(\phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t))$ ). Тем не менее выражения для соответствующего блока переходной матрицы удастся получить аналитически (см. [30] для одного частного случая). Это делается на основании следующей леммы (чтобы избежать громоздких формул, ограничимся системой (3); необходимые модификации для “телескопической” системы без труда прослеживаются).

Лемма. Переходная матрица системы (3) имеет вид

$$(12) \quad \Phi(t, s) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t, s) & \int_s^t \left\{ \exp \left[ \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & E_2 \\ -g/a \cdot E_2 & U \end{pmatrix} (t - \tau) \right] \begin{pmatrix} 0_{2 \times 6} \\ S_3(\phi(\tau), \dot{\phi}(\tau), \ddot{\phi}(\tau)) \end{pmatrix} \right\} d\tau \\ 0_{6 \times 28} & \begin{pmatrix} 0_{24 \times 6} \\ E_6 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

где  $\Phi_1(t, s) \in \mathbb{R}^{28 \times 28}$  — переходная матрица усеченной системы (3), из вектора состояния которой исключен подвектор  $l$ .

Доказательство леммы несложно и здесь не приводится: оно основано на прямых вычислениях и блочной структуре системы (3).

Удобство такого подхода заключается в том, что все элементы матрицы усеченной системы в отличие от полной матрицы можно явно вычислить; следовательно, можно вычислить и матрицу  $\Phi_1(t, s)$ . Интеграл же из (12), который необходимо знать только на промежутках  $[t_{k-1}, t_k]$ , поддается явному приближенному вычислению при помощи интегрирования по частям, без использования  $\ddot{\phi}(t)$  (с учетом того, что  $\dot{\phi}(t_{k-1}) = \dot{\phi}(t_k) = 0$ ). Таким образом, приведенная выше лемма дает способ конструктивного нахождения переходной матрицы  $\Phi(t_k, t_{k-1})$  без знания значений функции  $\ddot{\phi}(t)$ .

*Замечание 4.* Такую же технику можно применить и для более устойчивого (без использования показаний датчиков угловой скорости) вычисления фундаментальной матрицы  $\Phi_1(t, s)$  усеченной однородной системы (3), матрица которой содержит блок  $S_4(\phi(t), \dot{\phi}(t))$ .

Кроме переходной матрицы  $\Phi(t, s)$ , для дискретизации “телескопической” системы необходимо вычислить и ковариационную матрицу дискретного белого шума (как

и в приведенной выше лемме, ограничимся рассмотрением системы (3))

$$W_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) \begin{pmatrix} N(\tau) \\ 0_{27 \times 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 E_3 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \lambda_2 E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(\tau) \\ 0_{27 \times 6} \end{pmatrix}^T \Phi^T(t_k, \tau) d\tau.$$

С учетом структуры матрицы  $N(\tau)$  и ортогональности матрицы  $D(\phi(t))$  нетрудно показать, что

$$W_k = \begin{pmatrix} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp(M_1(t_k - \tau)) \operatorname{diag}(0_{2 \times 2}, \lambda_1 E_2, \lambda_2 E_3) \exp(M_1^T(t_k - \tau)) d\tau & 0_{7 \times 27} \\ 0_{27 \times 7} & 0_{27 \times 27} \end{pmatrix}.$$

Эта квадратура, очевидно, легко вычисляется (она не зависит от  $\phi(t)$ ).

После построения “телескопической” системы и проведения дискретизации задача оказывается погруженной в русло калмановской постановки задачи оценивания. Калибровка БИНС осуществляется оцениванием вектора состояния  $X(t)$  “телескопической” системы: его постоянная часть  $p$  включает в себя все параметры, подлежащие оцениванию. Проведенная формализация однозначно порождает оптимальный алгоритм оценивания: дискретный фильтр Калмана [29].

## 5. Анализ полученных результатов

На основе полученных соотношений был проведен корреляционный анализ, который позволил исследовать зависимость точности оценивания от характерных значений инструментальных и непараметрических ошибок и от различных варьируемых параметров задачи — например, от продолжительности временных промежутков, на которых осуществляются операции. Было показано, что алгоритм обеспечивает достаточную для практики точность оценивания нужных параметров. Кроме того, был разработан имитатор работы БИНС; с его помощью проведено моделирование описанного алгоритма оценивания, подтвердившее сделанные выводы и послужившее дополнительной проверкой правильности работы алгоритма.

Если выписать полные уравнения фильтрации для “телескопической” системы (большой размерности), то окажется, что соответствующие диагональные блоки

совпадают с блоками, входящими в уравнения фильтрации для систем (3) (небольшой размерности) на текущей операции. Вспомнив, что в “замороженной зоне” (от нулевого момента времени до активной фазы) системы вида (3) ее вектор состояния постоянен, можно предположить, что и решения соответствующих ковариационных уравнений тоже постоянны в этой зоне. В таком случае процесс калибровки “телескопической” системы был бы эквивалентен последовательному оцениванию векторов состояния систем (3) с повторяющимися на каждой операции априорными инициализациями и “сквозным” оцениванием постоянных параметров, как иногда поступают в инженерной практике. Однако начальная ковариационная матрица “телескопической” системы не диагональна, в системе присутствуют перекрестные корреляционные связи между различными подсистемами, пренебрежение которыми нарушает оптимальность оценок. Поэтому одной системы вида (3) (небольшой размерности) недостаточно для описания оптимальной калибровки и следует пользоваться полной “телескопической” системой. При этом вычислительных трудностей при решении уравнений фильтрации, несмотря на большую размерность системы, не возникает, так как матрица “телескопической” системы содержит много нулевых блоков, а обращаемые матрицы имеют размерность  $4 \times 4$ .

## 6. Заключение

В статье представлен новый подход к анализу задач стендовой калибровки БИНС, заключающийся в построении так называемой “телескопической” системы. Использование этой системы позволяет формализовать процесс калибровки, содержащий многократные переустановки и выставки системы, описав соответствующую задачу оценивания единым образом. Разработанная математическая формализация привносит методическую ясность в задачу калибровки и может быть применена для исследования других последовательных схем стендовой калибровки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Нау-

ка, 1976.

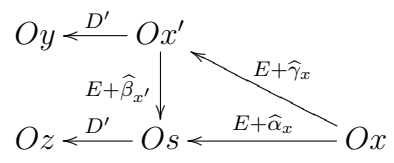
2. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. М.: МАКС Пресс, 2011.
3. Дервянкин А.В., Матасов А.И. “Телескопическая” система в задаче калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2012. № 2. С. 40—43.
4. Акимов П.А., Дервянкин А.В., Матасов А.И. Гарантирующий подход и  $l_1$ -аппроксимация в задачах оценивания параметров бесплатформенных инерциальных навигационных систем при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
5. Бобржик Г.И., Матасов А.И. Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока ньютонометров // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 5. С. 8—14.
6. Болотин Ю.В., Голиков В.П., Ларионов С.В. и др. Алгоритм калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. 2008. № 3. С. 13—27.
7. Болотин Ю.В., Дервянкин А.В., Матасов А.И. Итерационная схема калибровки блока ньютонометров при помощи гарантирующего подхода // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 3. С. 48—61.
8. Браславский Д.А., Поликовский Е.Ф., Якубович А.М. Метод калибровки трехосного блока ньютонометров. Заявка на изобретение № 2422425/23 с приоритетом от 24 ноября 1976 г.
9. Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Сазонов И.Ю. Калибровка бескарданных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стендов // Соврем. пробл. мат. и мех. Прикл. исслед. 2009. Т. 1. С. 212—223.

10. *Веремеенко К.К., Галай И.А.* Разработка алгоритма калибровки инерциальной навигационной системы на двухосном испытательном стенде // Электрон. журн. “Труды МАИ”. 2013. № 63.
11. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. М.: МАКС Пресс, 2012.
12. *Гусинский В.З., Лесючевский В. М., Литманович Ю.А.* и др. Алгоритм калибровки трехосного блока ньютонометров, предназначенного для использования в БИНС // Гироскопия и навигация. 2000. № 4 (31). С. 86.
13. *Драницына Е.В.* Калибровка измерительного модуля по навигационному решению БИНС: выбор плана движений стенда // Сб. матер. XXIV Санкт-Петербургской конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: АО “Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”. 2017. С. 235–240.
14. *Егоров Ю.Г., Попов Е.А.* Исследование минимально избыточных программ калибровки триады акселерометров // Авиакосмическое приборостроение. 2016. № 6. С. 3–8.
15. *Емельянцева Г.И., Степанов А.П.* Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. СПб.: АО “Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2016.
16. *Ермаков В.С., Дунаев Д.А., Широков А.А.* и др. Калибровка бесплатформенных инерциальных систем навигации и ориентации // Аэрокосмическая техника. Вестн. ПГТУ. 2004. № 18. С. 25–30.
17. *Измайлов Е.А., Лепе С.Н., Молчанов А.В.* и др. Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Сб. матер. Юбилейной XV Санкт-Петербургской конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: АО “Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”. 2008. С. 145–154.



18. *Матасов А.И.* Идентификация параметров случайного ухода гироплатформы при стендовых испытаниях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 2. С. 36—42.
19. *Матасов А.И., Тихомиров В.В.* Неравенство Рао—Крамера в задаче идентификации гироскопического дрейфа // Сб. “Проблемы обработки информации при летных испытаниях”. М.: Изд-во МАИ, 1986. С. 60—62.
20. *Парусников Н.А., Тихомиров В.В., Трубников С.А.* Определение инструментальных погрешностей инерциальной навигационной системы на неподвижном основании // Фундам. и прикл. мат. 2005. Т. 11. № 7. С. 159—166.
21. *Парусников Н.А.* Задача калибровки бескарданной инерциальной навигационной системы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 4. С. 3—9.
22. *Сазонов И.Ю., Шаймарданов И.Х.* Калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы на микромеханических датчиках ньютонометров и гироскопов // Вопросы оборонной техники: науч.-технич. сб. Сер. 9 “Специальные системы управления, следящие приводы и их элементы”. М.: Информтехника, 2010. № 3 (244)—4 (245). С. 73—82.
23. *Cai Q., Yang G., Song N., et al.* Systematic Calibration for Ultra-high Accuracy Inertial Measurement Unit // Sensors. 2016. No. 16 (940).
24. *Moon-Sik K., Si-Bok Y., Kwang-Soo L.* Development of High-precision Calibration Method for Inertial Measurement Unit // Int. J. Precis. Engin. and Man. 2014. V. 15. No. 3. P. 567—575.
25. *Paternain S., Tailanian M., Canetti R.* Calibration of an Inertial Measurement Unit // 16th Int. Conf. on Advanced Robotics. Montevideo, 2013. P. 931—936.
26. *Secer G., Barshan B.* Improvements in Deterministic Error Modeling and Calibration of Inertial Sensors and Magnetometers // Sensors and Actuators. A: Physical. 2016. No. 247. P. 522—538.

27. *Syed Z.F., Aggarwal P., Goodall C., et. al.* A New Multi-position Calibration Method for MEMS Inertial Navigation Systems // Measur. Sci. Tech. 2007. No. 18. P. 1897—1907.
28. *Xu Y., Wang Y., Su Y., et. al.* Research on the Calibration Method for Micro Inertial Measurement Unit for Engineering Applications // J. Sensors. 2016. V. 2016. ID 9108197.
29. *Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B.* Linear estimation. NJ: Prentice-Hall, 2000.
30. *Матасов А.И., Тихомиров В.В.* Калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы при повороте вокруг вертикальной оси // Тр. МАИ. Вып. 89. 2016. С. 1—34.



Взаимосвязь систем координат.