

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Круглов, Д. С. Малышев, О. В. Починка, Многоцветный граф как полный топологический инвариант для  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях, *Матем. сб.*, 2018, том 209, номер 1, 100–126

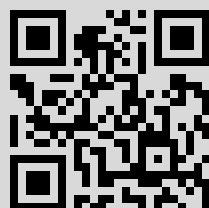
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 82.208.126.248

27 декабря 2017 г., 17:13:58



УДК 517.538

В. Е. Круглов, Д. С. Малышев, О. В. Починка

## Многоцветный граф как полный топологический инвариант для $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях

Изучение динамики потока на поверхностях путем разбиения фазового пространства на ячейки с одним и тем же предельным поведением траекторий внутри ячейки восходит к классическим работам А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович и А. Г. Майера. Типы ячеек (число которых конечно) и их примыкание друг к другу полностью определяют класс топологической эквивалентности потока с конечным числом особых траекторий. Если в каждой ячейке грубого потока без периодических орбит выбрать по одной траектории, то ячейки распадаются на так называемые треугольные области одного и того же типа. Комбинаторное описание такого разбиения приводит к трехцветному графу Ошемкова–Шарко, вершины которого соответствуют треугольным областям, а ребра – связывающим их сепаратрисам. А. А. Ошемков и В. В. Шарко доказали, что два таких потока топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда трехцветные графы потоков изоморфны и описан алгоритм различения трехцветных графов. Однако построенный алгоритм не является эффективным относительно теории графов. В настоящей работе динамика  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях описана на языке четырехцветных графов, приведен эффективный алгоритм различения таких графов и разработана реализация потока по некоторому абстрактному графу.

Библиография: 17 названий.

**Ключевые слова:** многоцветный граф, топологический инвариант,  $\Omega$ -устойчивый поток, эффективный алгоритм.

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8797>

### § 1. Введение

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях состоит в выделении на несущем многообразии областей с предсказуемым поведением траекторий – ячеек.

---

Исследование выполнено при поддержке Центра фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект № 90, 2017 г.), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 15-01-03687-а, № 16-31-60008-мол\_а\_дк, № 16-51-10005-Ко\_а), программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-4819.2016.1) и Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [2] 1937 г., в которой они рассмотрели систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \quad (*)$$

где  $v(x)$  –  $C^1$ -векторное поле, заданное в круге на плоскости, граница которого является кривой без контакта, и нашли критерий грубости системы (\*).

В работах Е. А. Леонтович и А. Г. Майера [8], [9] рассматривался более общий класс динамических систем, и их классификация также была основана на идеях о выделении множества специальных траекторий, относительное положение которых (схема Леонтович–Майера) полностью определяет качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения – незамкнутой рекуррентной траектории. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А. Г. Майером в [10] в 1939 г. В 1971 г. в работе [15] М. Пейшото обобщил схему Леонтович–Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, опять-таки изучив все допустимые ячейки для них и введя комбинаторный инвариант – ориентированный граф, обобщающий схему Леонтович–Майера.

В 1976 г. Д. Нейманом и Т. О’Брайеном (см. [12]) на произвольных поверхностях были рассмотрены так называемые *регулярные потоки* – потоки без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков – *орбитальный комплекс*, который представляет собой пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией. В 1998 г. А. А. Ошемков и В. В. Шарко в [13] ввели новый инвариант для структурно устойчивых систем на поверхностях – трехцветный граф, и описали алгоритм распознавания изоморфности таких графов, который, однако, не является эффективным, т.е. время его работы не ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. В 2014 г. В. З. Гринесом, С. Х. Капкаевой и О. В. Починкой с помощью трехцветных графов Ошемкова–Шарко была получена топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на поверхностях (см. [4]).

В настоящей работе рассматривается класс  $G$ , состоящий из  $\Omega$ -устойчивых потоков  $f^t$  без периодических траекторий на поверхностях  $S$ , имеющих минимум одну седловую точку. Каждому потоку рассматриваемого класса ставится в соответствие четырехцветный граф, приводится эффективный алгоритм различения таких графов и в каждом классе топологической эквивалентности строится стандартный представитель.

## § 2. Формулировка результатов

Пусть поток  $f^t$  принадлежит классу  $G$ , состоящему из  $\Omega$ -устойчивых потоков  $f^t$  без периодических траекторий на поверхностях  $S$ , каждый из которых

имеет хотя бы одну седловую точку<sup>1</sup>. Напомним, что поток  $f^t$  называется  $\Omega$ -устойчивым, если существует его окрестность  $U(f^t)$  в  $C^1(S \times \mathbb{R}, S)$  такая, что если  $f^{t'} \in U(f^t)$ , то потоки  $f^t$  и  $f^{t'}$  топологически эквивалентны на неблуждающих множествах  $\Omega_{f^t}$  и  $\Omega_{f^{t'}}$ , т.е. существует гомеоморфизм  $h: S \rightarrow S$ , переводящий неблуждающие траектории потока  $f^t$  в неблуждающие траектории потока  $f^{t'}$  с сохранением направления движения по траекториям. Из критерия  $\Omega$ -устойчивости (см. [16]) следует, что  $f^t$  имеет неблуждающее множество, состоящее из конечного числа гиперболических неподвижных точек, и не имеет циклов, т.е. наборов неподвижных точек

$$x_1, \dots, x_k, x_{k+1} = x_1$$

со свойством

$$W_{x_i}^s \cap W_{x_{i+1}}^u \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, k.$$

При этом поток  $f^t$  может как быть структурно устойчивым, так и не быть, а определяется это отсутствием или наличием *связок* – сепаратрис, идущих из седла в седло. Условие  $\Omega$ -устойчивости влечет тот факт, что связки потока  $f^t$  не образуют замкнутых кривых.

Обозначим через  $\Omega_{f^t}^0$ ,  $\Omega_{f^t}^1$ ,  $\Omega_{f^t}^2$  множества всех стоков, седел, источников потока  $f^t$  соответственно. Положим

$$\tilde{S} = S \setminus (W_{\Omega_{f^t}^0}^u \cup \Omega_{f^t}^1 \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^s \cup \Omega_{f^t}^2).$$

Компонента связности множества  $\tilde{S}$  называется *ячейкой*. Обозначим через  $J_{f^t}$  множество всех ячеек потока  $f^t$ . В силу леммы 4 (см. §3) в границу каждой ячейки  $J \in J_{f^t}$  входят единственный источник  $\alpha$  и единственный сток  $\omega$ , а вся ячейка является объединением траекторий, идущих из  $\alpha$  в  $\omega$ . Выберем одну траекторию  $\theta_J$  в каждой ячейке  $J$  и будем называть ее *t-кривой*. Положим

$$\mathcal{T} = \bigcup_{J \in J_{f^t}} \theta_J, \quad \bar{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}.$$

Компоненту связности множества  $\bar{S}$  назовем *многоугольной областью*. Обозначим через  $\Delta_{f^t}$  множество всех многоугольных областей потока  $f^t$ . Напомним, что *устойчивой* (соответственно *неустойчивой*) *сепаратрисой* седловой точки  $\sigma$  называется компонента связности множества  $W_\sigma^s \setminus \{\sigma\}$  (соответственно  $W_\sigma^u \setminus \{\sigma\}$ ). Будем называть *s-кривыми* сепаратрисы, соединяющие седла (связки), *u-кривыми* – неустойчивые седловые сепаратрисы, не являющиеся связками, *s-кривыми* – устойчивые седловые сепаратрисы, не являющиеся связками. В силу леммы 5 (см. §3) замыкание любой многоугольной области выглядит так, как изображено на рис. 1. Любая траектория в  $\Delta$  следует из  $\alpha$  в  $\omega$ , а граница многоугольной области состоит из замыканий седловых сепаратрис и *t-кривой*. Границу каждой многоугольной области будем считать ориентированной соответственно движению по *t-кривой* от источника к стоку.

<sup>1</sup>Если седловых точек у потока  $f^t$  нет, то он имеет в точности две неподвижные точки: источник и сток, и все такие потоки топологически эквивалентны, поэтому мы исключаем их из рассматриваемого класса.

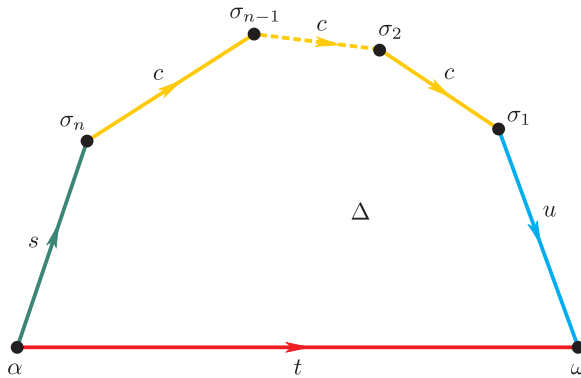


Рис. 1. Многоугольная область.

Поставим в соответствие потоку  $f^t \in G$  многоцветный граф  $\Gamma_{f^t}$  следующим образом (рис. 2):

- 1) вершины графа  $\Gamma_{f^t}$  взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям множества  $\Delta_{f^t}$ ;
- 2) две вершины графа инцидентны ребру цвета  $s, t, u$  или  $c$ , если соответствующие этим вершинам многоугольные области содержат в своих замыканиях общую  $s$ -,  $t$ -,  $u$ - или  $c$ -кривую соответственно;
- 3) при наличии более чем одного  $c$ -ребра, выходящего из некоторой вершины графа  $\Gamma_{f^t}$ ,  $c$ -ребра считаются упорядоченными согласно прохождению соответствующих сепаратрис при обходе границы соответствующей области.

Два многоцветных графа  $\Gamma_{f^t}$  и  $\Gamma_{f'^t}$  для потоков  $f^t$  и  $f'^t$  из класса  $G$  соответственно назовем *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение вершин и ребер одного графа соответственно в вершины и ребра другого графа с сохранением цветности всех ребер и нумерации  $c$ -ребер.

**ТЕОРЕМА 1.** *Потоки из класса  $G$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их многоцветные графы изоморфны.*

Принято считать, что алгоритм решения задачи распознавания изоморфности графов (в каком-нибудь классе графов) является *эффективным*, если время его работы ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Такое определение эффективной разрешимости восходит к А. Кобхэму (см. [3]). Стандартом труднорешаемости является NP-полнота задачи (см. [6]). Сложностный статус задачи распознавания изоморфизма графов не известен до сих пор, т.е. в классе всех графов для этой задачи не доказана ни полиномиальная разрешимость, ни NP-полнота. Вместе с тем многоцветные графы потоков класса  $G$  не являются графами общего вида, поскольку они вложимы в несущую поверхность, на которой заданы соответствующие им потоки класса  $G$ . Этот факт позволяет доказать следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 2.** *Задача распознавания изоморфизма многоцветных графов, соответствующих потокам из класса  $G$ , может быть решена за полиномиальное время.*

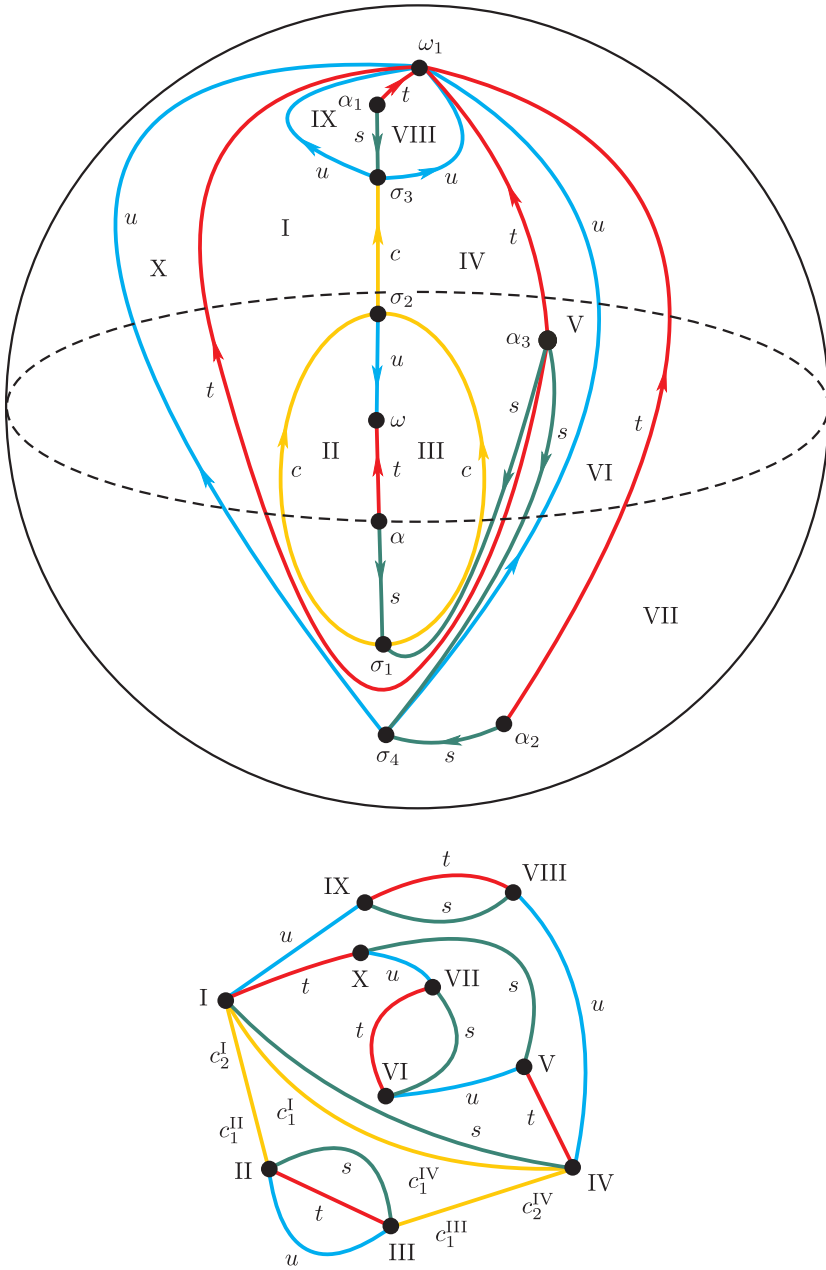


Рис. 2. Фазовый портрет некоторого потока из класса  $G$  (вверху) и его четырехцветный граф (внизу).

Для решения задачи реализации рассмотрим простой связный четырехцветный граф  $\Gamma$  (точные определения см. в §4), ребра которого раскрашены в четыре цвета –  $s, u, t, c$ , и каждая вершина которого инцидентна в точности одному

ребру каждого из цветов  $s, u, t$ . При этом  $c$ -ребер, инцидентных одной вершине  $b$ , может быть любое конечное (в частности, нулевое) число  $n_b$  и они упорядочены:  $c_1^b, \dots, c_{n_b}^b$  в случае  $n_b \geq 1$ . Назовем  $u$ -ребро и  $s$ -ребро, выходящие из вершины  $b$ , *условными  $c$ -ребрами* и присвоим им номера  $c_0^b$  и  $c_{n_b+1}^b$  соответственно. Простой цикл  $b_1, (b_1, b_2), b_2, \dots, b_{2k}, (b_{2k}, b_{2k+1}), b_{2k+1} = b_1$  для  $k \in \mathbb{N}$  назовем  $c^*$ -циклом, если

$$(b_{2i-1}, b_{2i}) = c_{m_i}^{b_{2i}}, \quad (b_{2i}, b_{2i+1}) = c_{m_{i+1}}^{b_{2i}} = c_{l_i}^{b_{2i+1}}, \quad (b_{2i+1}, b_{2i+2}) = c_{l_{i-1}}^{b_{2i+1}}.$$

Граф  $\Gamma$  назовем *допустимым*, если он содержит  $c^*$ -циклы и каждый такой цикл имеет длину 4. Простой цикл графа  $\Gamma$  назовем  *$tu$ -циклом* (соответственно  *$st$ -циклом*), если все его ребра имеют цвет  $t$  или  $u$  (соответственно  $t$  или  $s$ ).

**ЛЕММА 1.** Пусть  $f^t \in G$ . Тогда граф  $\Gamma_{f^t}$  является допустимым.

**ТЕОРЕМА 3.** Для любого допустимого графа  $\Gamma$  существует поток  $f^t \in G$ , заданный на замкнутой поверхности  $S$ , граф которого изоморфен исходному графу; при этом:

(i) эйлерова характеристика поверхности  $S$  вычисляется по формуле  $\chi(S) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$ , где  $\nu_0, \nu_1$  и  $\nu_2$  – количества всех  $tu$ -,  $c^*$ - и  $st$ -циклов графа  $\Gamma$  соответственно;

(ii) поверхность  $S$  является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma$  содержит хотя бы один цикл нечетной длины.

### § 3. Динамика потока $f^t \in G$ и структура его многоугольных областей

Пусть  $f^t$  – поток из класса  $G$ , заданный на замкнутой поверхности  $S$ . В данном параграфе мы изучаем динамику потока  $f^t$ , что позволит нам установить структуру его многоугольных областей. Приведем необходимые для понимания динамики предложения.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1** (см. [14; гл. 2, теорема 5.1] и [17; гл. 4, теорема 7.1]). Поток  $f^t$  из класса  $G$  в некоторой окрестности неподвижной точки  $p \in \Omega_{f^t}^i$  топологически сопряжен линейному потоку

$$\begin{aligned} a^t(x, y) &= (2^{-t}x, 2^{-t}y) \quad \text{при } i = 0, \\ b^t(x, y) &= (2^{-t}x, 2^t y) \quad \text{при } i = 1, \\ c^t(x, y) &= (2^t x, 2^t y) \quad \text{при } i = 2. \end{aligned}$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2** (см. [5; теорема 2.1.1]). Пусть  $f^t \in G$ . Тогда:

- 1)  $S = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^u = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^s$ ;
- 2)  $W_p^u$  (соответственно  $W_p^s$ ) является гладким подмногообразием многообразия  $S$ , диффеоморфным  $\mathbb{R}^i$  (соответственно  $\mathbb{R}^{2-i}$ ) для любой неподвижной точки  $p \in \Omega_{f^t}^i$ .

Пусть  $p$  – неподвижная точка потока  $f^t$ . Обозначим через  $l_p^u$  (соответственно  $l_p^s$ ) неустойчивую (соответственно устойчивую) сепаратрису точки  $p$ .

**ЛЕММА 2.** Для любого стока  $\omega$  (соответственно источника  $\alpha$ ) потока  $f^t \in G$  существует хотя бы одна седловая точка  $\sigma$  с неустойчивой (соответственно устойчивой) сепаратрисой  $l_\sigma^u$  (соответственно  $l_\sigma^s$ ) такой, что  $\text{cl}(l_\sigma^u) \setminus (l_\sigma^u) = \{\sigma, \omega\}$  (соответственно  $\text{cl}(l_\sigma^s) \setminus (l_\sigma^s) = \{\sigma, \alpha\}$ ).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположив противное для некоторой стоковой точки  $\omega$ , мы получим в силу п. 1) предложения 2, что  $\text{cl}(W_\omega^s) = W_\omega^s \cup \bigcup_{i=1}^k \alpha_i$ , где  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , – источник такой, что  $W_{\alpha_i}^u \cap W_\omega^s \neq \emptyset$ . Покажем, что  $W_{\alpha_i}^u \subset \text{cl}(W_\omega^s)$ .

Предположим противное. Тогда в силу п. 1) предложения 2 существует точка  $p \in \Omega_{f^t}$ , отличная от  $\omega$  и такая, что  $W_p^s \cap W_{\alpha_i}^u \neq \emptyset$ . Пусть  $x_\omega$  и  $x_p$  – точки, принадлежащие  $W_{\alpha_i}^u \cap W_\omega^s$  и  $W_{\alpha_i}^u \cap W_p^s$  соответственно. Поскольку многообразие  $W_{\alpha_i}^u \setminus \{\alpha_i\}$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$  (см. п. 2) предложения 2), то существует путь  $c: [0, 1] \rightarrow (W_{\alpha_i}^u \setminus \{\alpha_i\})$  без самопересечений, соединяющий точку  $x_\omega = c(0)$  с точкой  $x_p = c(1)$ . Тогда существует значение  $\tau \in (0, 1)$  такое, что  $c(\tau) \notin W_\omega^s$  и  $c(t) \in W_\omega^s$  для  $t < \tau$ . Следовательно, существует точка  $r \in \Omega_{f^t}$  такая, что  $r \neq \omega$  и  $c(\tau) \in W_r^s$ . Кроме того, точка  $c(\tau)$  принадлежит  $\text{cl}(W_\omega^s)$ . Но если  $c(\tau) \in \text{cl}(W_\omega^s)$ , то  $c(\tau) = \alpha_{i_0}$  для некоторого  $i_0 = 1, \dots, k$ , это означает, что  $\alpha_{i_0} \in W_{\alpha_i}^u$ ; противоречие с определением неустойчивого многообразия неподвижной точки.

Получили, что  $W_{\alpha_i}^u \subset W_\omega^s$  для любого  $i = 1, \dots, k$ , и, следовательно, множество  $\text{cl}(W_\omega^s)$  открыто, так как содержит каждую свою точку вместе с некоторой открытой окрестностью. Так как  $\text{cl}(W_\omega^s)$  одновременно открыто и замкнуто, имеем  $\text{cl}(W_\omega^s) = S$ . Тогда  $\Omega_{f^t}$  не содержит седловых точек, что противоречит определению класса  $G$ .

Перейдя от  $f^t$  к  $f^{-t}$ , можно доказать утверждение для источников.

Лемма доказана.

**ЛЕММА 3.** Пусть  $p$  – неподвижная точка потока  $f^t \in G$ . Тогда:

(i) если  $p \in \Omega_{f^t}^1$ , то

$$\text{cl}(l_p^u) \setminus (l_p^u \cup \{p\}) = \begin{cases} \{\sigma\} \subset \Omega_{f^t}^1 \text{ и } l_p^u = l_\sigma^s, \\ \{\omega\} \subset \Omega_{f^t}^0 \text{ и } l_p^u \subset W_\omega^s; \end{cases}$$

(ii) если  $p \in \Omega_{f^t}^2$ , то  $\text{cl}(l_p^u) \setminus (l_p^u \cup \{p\}) = \bigcup_{\sigma \in \Omega_p} \text{cl}(l_\sigma^u)$ , где  $\Omega_p$  – непустое подмножество множества  $\Omega_{f^t}^1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим случай (i):  $p$  – седловая точка. Пусть  $x \in \text{cl}(l_p^u)$ . По п. 1) предложения 2 любая точка  $l_p^u$  является точкой  $W_r^s$  для некоторой неподвижной точки  $r$ . Для  $r$  возможны три варианта: а)  $r$  – сток; б)  $r$  – седло; в)  $r$  – источник.

а) Рассмотрим сток  $r = \omega$  такой, что  $x \in W_\omega^s$ . Так как  $\omega$  – сток и  $l_p^u = \mathcal{O}_x$ , имеем  $l_p^u \subset W_\omega^s$ . Таким образом,  $\text{cl}(l_p^u) \setminus (l_p^u \cup \{p\}) = \{\omega\}$ .

б) Рассмотрим седловую точку  $r = \sigma$ , для которой выполняется  $x \in W_\sigma^s$ . В этом случае  $l_p^u = l_\sigma^s$ . Таким образом,  $\text{cl}(l_p^u) \setminus (l_p^u \cup \{p\}) = \{\sigma\}$ .

в) Допустим, что существует источник  $r = \alpha$  такой, что  $x \in W_\alpha^s$ . Поскольку  $W_\alpha^s = \{\alpha\}$ , получаем  $\alpha \in l_p^u$ , что невозможно, так как  $l_p^u$  состоит из блуждающих точек. Следовательно, случай в) невозможен.



Рассмотрим случай (ii):  $p = \alpha$  – источник.

Из п. 1) предложения 2 следует, что множество  $A = \text{cl}(l_\alpha^u) \setminus (l_\alpha^u \cup \{\alpha\})$  есть  $f^t$ -инвариантное подмножество множества  $W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup \Omega_{f^t}^0$ . Тогда для доказательства утверждения достаточно показать, что:

а) если  $\sigma \in A$  для некоторого  $\sigma \in \Omega_{f^t}^1$ , то  $l_\sigma^u \subset A$ ;

б) если  $\omega \in A$  для некоторого  $\omega \in \Omega_{f^t}^0$ , то существует  $\sigma \in \Omega_{f^t}^1$  такое, что  $\omega \in \text{cl}(l_\sigma^u)$  и  $l_\sigma^u \subset A$ .

В случае а), поскольку  $\sigma \in A$ , существует последовательность  $x_n \in l_\alpha^u$  такая, что  $x_n \rightarrow \sigma$  для  $n \rightarrow +\infty$ . Тогда  $\mathcal{O}_{x_n} \subset l_\alpha^u$ , и в силу эквивалентности потока в окрестности гиперболической седловой точки его линейной части (см., например, [14]) множество  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{x_n}$  содержит в своем замыкании  $l_\sigma^u$ .

В случае б), если  $\omega \in A$ , то существует последовательность  $x_n \in l_\alpha^u$  такая, что  $x_n \rightarrow \omega$  для  $n \rightarrow +\infty$ . Согласно лемме 2 существует конечное число седловых точек  $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Omega_{f^t}^1$  такое, что  $\omega \in \text{cl}(l_{\sigma_i}^u)$  для  $i = 1, \dots, k$ . Тогда среди них существуют седловые точки  $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}$  (возможно, совпадающие) такие, что последовательность  $x_n$  принадлежит компоненте связности  $D$  множества  $W_\omega^s \setminus (\omega \cup \bigcup_{i=1}^k l_{\sigma_i}^u)$ . Отсюда следует, что  $D \subset l_\alpha^u$ . Таким образом,  $l_{\sigma_{i_1}}^u \subset A$  и  $l_{\sigma_{i_2}}^u \subset A$ .

Лемма доказана.

Утверждение, аналогичное лемме 3, можно доказать для устойчивых сепаратрис неподвижных точек потока  $f^t$ .

Напомним, что ячейкой  $J$  потока  $f^t$  мы назвали компоненту связности множества  $\tilde{S} = S \setminus (W_{\Omega_{f^t}^0 \cup \Omega_{f^t}^1}^u \cup W_{\Omega_{f^t}^1 \cup \Omega_{f^t}^2}^s)$ .

**ЛЕММА 4.** *Любая ячейка  $J$  потока  $f^t$  содержит единственный сток  $\omega$  и единственный источник  $\alpha$  в своем замыкании, а вся ячейка является объединением траекторий, идущих из  $\alpha$  в  $\omega$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу предложения 2

$$\tilde{S} = \left( \bigcup_{\alpha \in \Omega_{f^t}^2} l_\alpha^u \right) \setminus \left( \bigcup_{\sigma \in \Omega_{f^t}^1} l_\sigma^s \right).$$

Тогда любая компонента связности  $J$  множества  $\tilde{S}$  является подмножеством  $l_\alpha^u$  для единственного источника  $\alpha$ . Аналогичным образом,

$$\tilde{S} = \left( \bigcup_{\omega \in \Omega_{f^t}^0} l_\omega^s \right) \setminus \left( \bigcup_{\sigma \in \Omega_{f^t}^1} l_\sigma^u \right).$$

Тогда любая компонента связности  $J$  множества  $\tilde{S}$  является подмножеством  $l_\omega^s$  для единственного стока  $\omega$ . Таким образом,

$$J \subset (W_\alpha^u \cap W_\omega^s)$$

и, следовательно, вся ячейка является объединением траекторий, идущих из  $\alpha$  в  $\omega$ . Лемма доказана.

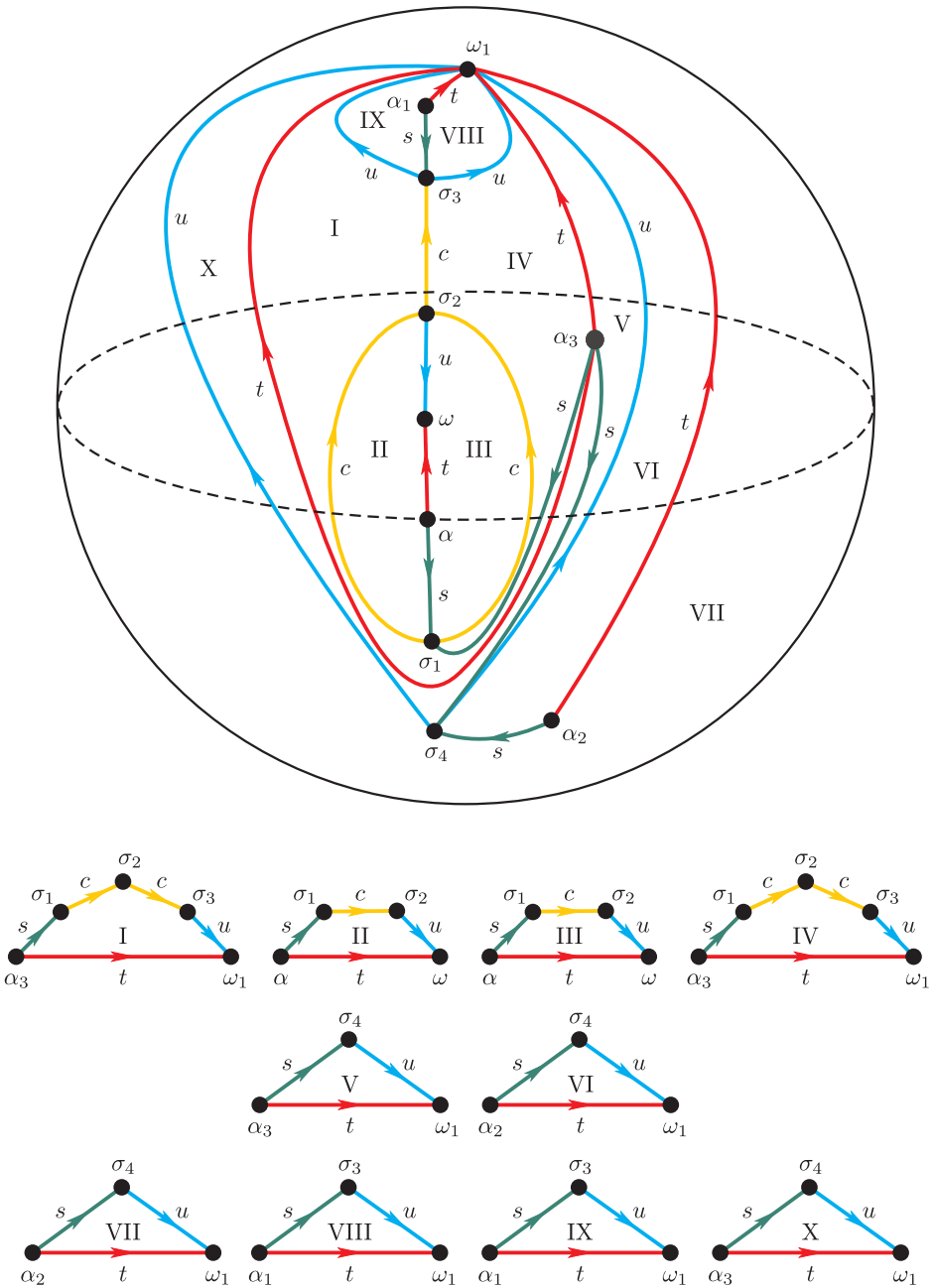


Рис. 3. Фазовый портрет некоторого потока из класса  $G$  (вверху) и все его многоугольные области (внизу).

Напомним, что мы обозначили через  $J_{f^t}$  множество всех ячеек потока  $f^t$  и выбрали по одной траектории  $\theta_J$  ( $t$ -кривой) в каждой ячейке  $J \in J_{f^t}$ . Также

мы положили  $\mathcal{T} = \bigcup_{J \in \tilde{\mathcal{S}}} \theta_J$ ,  $\bar{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}$  и назвали многоугольной областью компоненту связности  $\Delta$  множества  $\bar{S}$ . Мы обозначили через  $\Delta_{f^t}$  множество всех многоугольных областей потока  $f^t$  и назвали  $s$ -кривыми сепаратрисы, соединяющие седла (связки),  $u$ -кривыми – неустойчивые седловые сепаратрисы, не являющиеся связками,  $s$ -кривыми – устойчивые седловые сепаратрисы, не являющиеся связками.

**ЛЕММА 5.** *Любая многоугольная область  $\Delta$  потока  $f^t$  гомеоморфна открытому диску, и ее граница состоит из замыканий одной  $t$ -кривой, одной  $u$ -кривой, одной  $s$ -кривой и конечного (возможно, пустого) множества  $s$ -кривых.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы 4 любая ячейка  $J \in J_{f^t}$  лежит в бассейне некоторого источника  $\alpha$  между двумя (возможно, совпадающими)  $s$ -кривыми (см. рис. 1). Многоугольная область  $\Delta$  получается удалением  $t$ -кривой из  $J$ . Так как  $W_\alpha^u$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^2$  в силу предложения 2, область  $\Delta$  гомеоморфна сектору, ограниченному двумя лучами, выходящими из начала координат в  $\mathbb{R}^2$ , т.е. гомеоморфна открытому диску. По построению в границу области  $\Delta$  входят единственная  $s$ -кривая и единственная  $t$ -кривая. Поскольку  $\Delta$  расположена также и в бассейне некоторого стока  $\omega$ , то она ограничена одной  $u$ -кривой. Согласно п. (ii) леммы 3 область  $\Delta$  ограничена конечным числом  $s$ -кривых. Получаем, что единственно возможной структурой границы многоугольной области может быть структура, изображенная на рис. 1, с точностью до количества  $s$ -кривых. Лемма доказана.

На рис. 3 изображен фазовый портрет некоторого потока из класса  $G$  и все его многоугольные области.

#### § 4. Свойства четырехцветного графа $\Gamma_{f^t}$

В этом параграфе мы ставим в соответствие каждому потоку  $f^t \in G$  четырехцветный граф  $\Gamma_{f^t}$  и устанавливаем свойства этого графа, необходимые для выделения множества допустимых графов, реализуемых потоком из класса  $G$ .

Напомним, что *конечным мультиграфом*  $\Gamma$  называется упорядоченная пара  $(V, E)$ , для которой выполнены следующие условия:  $V$  – непустое множество вершин;  $E$  – мультимножество пар вершин, называемых ребрами, а под мультимножеством мы подразумеваем обобщение понятия множества, допускающее включение одного и того же элемента по несколько раз.

Здесь и далее будем для краткости называть мультиграф просто графом.

Если граф  $\Gamma$  содержит ребро  $e = (a, b)$ , то каждую из вершин  $a, b$  называют *инцидентной* ребру  $e$  и говорят, что вершины  $a$  и  $b$  *соединены ребром*  $e$ .

*Путем* в графе называют конечную последовательность его вершин и ребер вида  $b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), b_k$ ,  $k \geq 1$ . Число  $k$  называется *длиной пути*, оно равно числу входящих в путь ребер.

Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем.

*Циклом* длины  $k \in \mathbb{N}$  в графе называют конечное подмножество его вершин и ребер вида  $\{b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0), b_0\}$ . *Простым циклом* называют цикл, у которого все вершины и ребра попарно различны.

Граф  $\Gamma$  называется *многоцветным*, если множество его ребер является объединением конечного числа подмножеств, каждое из которых состоит из ребер одного и того же определенного цвета.

Пусть  $\Gamma$  – простой связный четырехцветный граф, ребра которого раскрашены в четыре цвета –  $s, u, t, c$ , и каждая вершина которого инцидентна в точности одному ребру каждого из цветов  $s, u, t$ . При этом  $c$ -ребер, инцидентных одной вершине  $b$ , может быть любое конечное (в частности, нулевое) число  $n_b$  и они упорядочены:  $c_1^b, \dots, c_{n_b}^b$  в случае  $n_b \geq 1$ . Назовем  $u$ -ребро и  $s$ -ребро, выходящие из вершины  $b$ , *условными  $c$ -ребрами* и присвоим им номера  $c_0^b$  и  $c_{n_b+1}^b$  соответственно. Простой цикл  $b_1, (b_1, b_2), b_2, \dots, b_{2k}, (b_{2k}, b_{2k+1}), b_{2k+1} = b_1$  для  $k \in \mathbb{N}$  назовем  *$c^*$ -циклом*, если

$$(b_{2i-1}, b_{2i}) = c_m^{b_{2i}}, \quad (b_{2i}, b_{2i+1}) = c_{m+1}^{b_{2i}} = c_l^{b_{2i+1}}, \quad (b_{2i+1}, b_{2i+2}) = c_{l-1}^{b_{2i+1}}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Граф  $\Gamma$  назовем *допустимым*, если он содержит  $c^*$ -циклы и каждый такой цикл имеет длину 4.

Простой цикл графа  $\Gamma$  назовем  *$tu$ -циклом* (соответственно  *$st$ -циклом*), если все его ребра имеют цвет  $t$  или  $u$  (соответственно  $t$  или  $s$ ).

В § 3 мы доказали, что замыкание множества  $s$ -,  $t$ -,  $u$ - и  $c$ -кривых разбивает поверхность  $S$  на многоугольные области  $\Delta$ , и обозначили через  $\Delta_{f^t}$  множество всех таких областей. Границу каждой многоугольной области будем считать ориентированной соответственно движению по  $t$ -кривой от источника к стоку.

Многоцветный граф  $\Gamma_{f^t}$ , соответствующий потоку  $f^t \in G$ , строится следующим образом (см. рис. 2):

- 1) вершины графа  $\Gamma_{f^t}$  взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям потока;
- 2) две вершины графа инцидентны ребру цвета  $s, t, u$  или  $c$ , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую  $s$ -,  $t$ -,  $u$ - или  $c$ -кривую, а между этим ребром и  $s$ -,  $t$ -,  $u$ - или  $c$ -кривой устанавливается взаимно однозначное соответствие;
- 3) при наличии более чем одного  $c$ -ребра, выходящего из некоторой вершины графа,  $c$ -ребра нумеруются так, что нумерация соответствует порядку сепаратрис при обходе границы соответствующей многоугольной области.

В силу конструкции многоцветные графы, полученные по различным разбиениям на многоугольные области (в зависимости от выбора  $t$ -кривых), изоморфны.

Обозначим через  $\pi_{f^t}$  взаимно однозначное соответствие между многоугольными областями и вершинами, а также между  $s$ -,  $t$ -,  $u$ -,  $c$ -кривыми и  $s$ -,  $t$ -,  $u$ -,  $c$ -ребрами потока  $f^t$  и графа  $\Gamma_{f^t}$  соответственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.** Докажем, что четырехцветный граф  $\Gamma_{f^t}$  потока  $f^t$  является допустимым.

Поскольку поток  $f^t$  лежит на замкнутой поверхности  $S$ , а каждая вершина графа соответствует его многоугольной области, значит, можно построить

граф, изоморфный данному, просто расположив его вершины внутри многоугольных областей, а ребрами сделав вложенные в поверхность кривые, соединяющие эти вершины и пересекающие каждая свою сторону один раз (рис. 4). Как граф, построенный по потоку  $f^t$ , он, очевидно, будет изоморфен графу  $\Gamma_{f^t}$ . Поэтому, не уменьшая общности, будем считать, что граф  $\Gamma_{f^t}$  вложен в поверхность  $S$  вышеописанным образом. Поскольку поверхность  $S$  связна, то связан и граф  $\Gamma_{f^t}$ . Поскольку каждая сторона многоугольной области примыкает ровно к двум различным многоугольным областям, то граф  $\Gamma_{f^t}$  не имеет циклов длины 1, т.е. является простым.

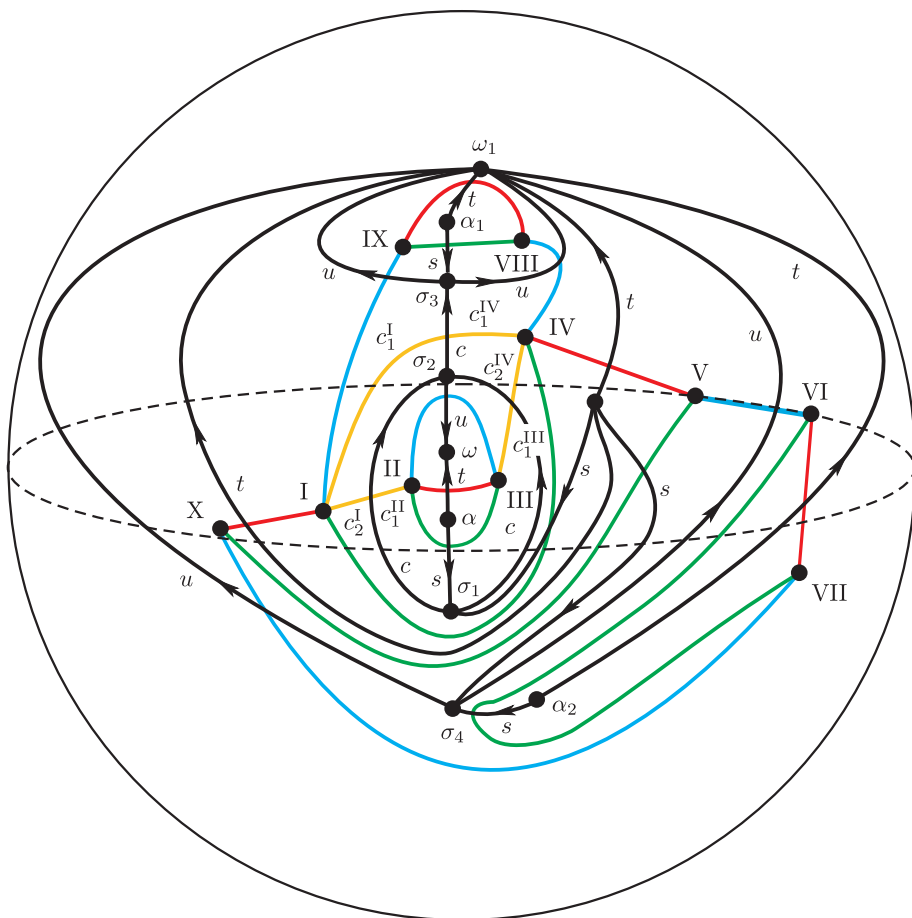


Рис. 4. Фазовый портрет некоторого потока из класса  $G$  и его четырехцветный граф, вложенный в поверхность  $S$ , на которой определен этот поток.

Поскольку к каждой точке  $p \in \Omega_{f^t}$  примыкает конечное число многоугольных областей, разделенных цветными кривыми, то точке  $p$  посредством проекции  $\pi_{f^t}$  однозначно сопоставлен цикл из вершин, соответствующих примыкающим к  $p$  областям, и цветных ребер, пересекающих цветные кривые, выходящие

из  $p$ . Так, к седлу примыкают в точности четыре многоугольные области, разделенные  $u$ -,  $s$ - или  $c$ -кривыми. Считая  $u$ - и  $s$ -ребра условными  $c$ -ребрами, мы получим, что каждому седлу потока  $f^t$  соответствует  $c^*$ -цикл графа  $\Gamma_{f^t}$ . Справедливо и обратное соответствие: каждый  $c^*$ -цикл можно поместить в окрестность единственной седловой точки так, что для разных  $c^*$ -циклов эти окрестности не пересекаются. Таким образом, граф  $\Gamma_{f^t}$  содержит  $c^*$ -циклы и каждый такой цикл имеет длину 4. Следовательно, граф  $\Gamma_{f^t}$  является допустимым.

Лемма доказана.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** Пусть  $f^t \in G$  и  $\Gamma_{f^t}$  – граф потока  $f^t$ . Тогда отображение  $\pi_{f^t}$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами  $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$  и множествами  $tu$ -,  $c^*$ -,  $st$ -циклов соответственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. Соответствие посредством отображения  $\pi_{f^t}$  между множеством  $\Omega_{f^t}^1$  и множеством  $c^*$ -циклов следует из доказательства леммы 1.

2. К каждой стоковой точке  $\omega$  потока  $f^t$  примыкают области, разделенные поочередно  $u$ - и  $t$ -кривыми, лежащими в бассейне  $W_\omega^s$ . Значит, точке  $\omega$  посредством отображения  $\pi_{f^t}$  сопоставлен единственный  $tu$ -цикл графа  $\Gamma_{f^t}$ . Справедливо и обратное соответствие: поскольку бассейны различных стоков разделяются  $c$ - и  $s$ -кривыми, то каждый  $tu$ -цикл можно поместить в бассейн единственного стока. Таким образом, отображение  $\pi_{f^t}$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством  $\Omega_{f^t}^0$  и множеством  $tu$ -циклов.

3. Соответствие между множеством  $\Omega_{f^t}^2$  и множеством  $ts$ -циклов устанавливается аналогично п. 2.

Предложение доказано.

## § 5. Доказательство классификационной теоремы 1

Докажем, что потоки из класса  $G$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их многоцветные графы изоморфны.

Пусть  $f^t \in G$  (соответственно  $f^{t'} \in G$ ) и  $\Gamma_{f^t}$  (соответственно  $\Gamma_{f^{t'}}$ ) – многоцветный граф, построенный по потоку  $f^t$  (соответственно  $f^{t'}$ ).

**Необходимость.** Пусть потоки  $f^t$  и  $f^{t'}$  топологически эквивалентны, т.е. существует гомеоморфизм  $h: S \rightarrow S$ , переводящий траектории  $f^t$  в траектории  $f^{t'}$ . Будем считать, не уменьшая общности, что множество многоугольных областей потока  $f^{t'}$  построено с помощью  $t$ -кривых  $\mathcal{F}' = h(\mathcal{F})$ . Тогда гомеоморфизм  $h$  переводит многоугольные области потока  $f^t$  в многоугольные области потока  $f^{t'}$ , и искомый изоморфизм  $\xi: \Gamma_{f^t} \rightarrow \Gamma_{f^{t'}}$  определяется формулой

$$\xi = \pi_{f^{t'}} h \pi_{f^t}^{-1}.$$

**Достаточность.** Пусть графы  $\Gamma_{f^t}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}$  потоков  $f^t$  и  $f^{t'}$  изоморфны посредством изоморфизма  $\xi$ . Рассмотрим многоугольную область  $\Delta \in \Delta_{f^t}$ . Ее граница содержит единственный источник  $\alpha$ , единственный сток  $\omega$  и  $n$  седловых точек  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , которые мы полагаем расположенными на границе в порядке возрастания номеров в выбранном направлении обхода границы  $\Delta$ . Рассмотрим область  $\Delta'$  для потока  $f^{t'}$ , для которой выполняется равенство

$$\Delta' = \pi_{f^{t'}}^{-1} \xi \pi_{f^t}(\Delta).$$

Изоморфизм  $\xi$  обеспечивает одинаковое количество одноцветных ребер, исходящих из вершин графов, соответствующих областям  $\Delta$  и  $\Delta'$ , что влечет наличие в границе у  $\Delta'$  ровно одного стока  $\omega'$ , одного источника  $\alpha'$  и  $n$  седел  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n$ , расположенных в порядке возрастания номеров в выбранном направлении обхода границы  $\Delta'$ . Поскольку изоморфизм  $\xi$  сохраняет цветность ребер и нумерацию  $c$ -ребер, то построение гомеоморфизма  $h: S \rightarrow S$ , осуществляющего топологическую эквивалентность потоков  $f^t$  и  $f'^t$ , сводится к построению гомеоморфизма  $h_\Delta: \text{cl}(\Delta) \rightarrow \text{cl}(\Delta')$ , переводящего траектории потока  $f^t$ , лежащие в  $\text{cl}(\Delta)$ , в траектории потока  $f'^t$ , лежащие в  $\text{cl}(\Delta')$ , таким образом, что

$$h_\Delta|_{\Delta \cap \tilde{\Delta}} = h_{\tilde{\Delta}}|_{\Delta \cap \tilde{\Delta}}$$

для любых многоугольных областей  $\Delta, \tilde{\Delta}$  потока  $f^t$ . Будем строить гомеоморфизм  $h_\Delta$  по шагам.

*Шаг 1.* Вначале построим гомеоморфизм  $h_\Delta$  в окрестностях узловых точек. Пусть

$$u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}.$$

Напоминаем, что  $a^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – потоки на плоскости, заданные формулами  $a^t(x, y) = (2^{-t}x, 2^{-t}y)$ ,  $c^t(x, y) = (2^tx, 2^ty)$  с точкой  $O(0, 0)$  в качестве стока и источника соответственно. Согласно предложению 1 существуют окрестности  $u_\omega, u_\alpha$  ( $u_{\omega'}, u_{\alpha'}$ ) точек  $\omega, \alpha$  ( $\omega', \alpha'$ ) соответственно такие, что  $f^t|_{u_\omega}, f^t|_{u_\alpha}$  ( $f'^t|_{u_{\omega'}}, f'^t|_{u_{\alpha'}}$ ) топологически сопряжены с  $a^t(x, y)|_u, c^t(x, y)|_u$  посредством некоторых гомеоморфизмов  $h_\omega: u_\omega \rightarrow u$ ,  $h_\alpha: u_\alpha \rightarrow u$  ( $h_{\omega'}: u_{\omega'} \rightarrow u$ ,  $h_{\alpha'}: u_{\alpha'} \rightarrow u$ ) соответственно. Без потери общности будем полагать эти окрестности попарно непересекающимися.

Для  $r \in (0, 1]$  положим  $S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = r\}$  и  $S_r^\omega = h_\omega^{-1}(S_r)$ ,  $S_r^\alpha = h_\alpha^{-1}(S_r)$  ( $S_r^{\omega'} = h_{\omega'}^{-1}(S_r)$ ,  $S_r^{\alpha'} = h_{\alpha'}^{-1}(S_r)$ ). Пусть  $\{A\} = S_1^\omega \cap l_{\alpha, \omega}$ ,  $\{A_0\} = S_1^\omega \cap l_{\omega, \sigma_1}$  ( $\{A'\} = S_1^{\omega'} \cap l_{\alpha', \omega'}$ ,  $\{A'_0\} = S_1^{\omega'} \cap l_{\omega', \sigma'_1}$ ) и  $\{C\} = S_1^\alpha \cap l_{\alpha, \omega}$ ,  $\{C_0\} = S_1^\alpha \cap l_{\alpha, \sigma_n}$  ( $\{C'\} = S_1^{\alpha'} \cap l_{\alpha', \omega'}$ ,  $\{C'_0\} = S_1^{\alpha'} \cap l_{\alpha', \sigma'_n}$ ).

Везде далее мы будем обозначать  $m_{a,b}$  замыкание отрезка некоторой секущей траекториям потока  $f^t$  ( $f'^t$ ), ограниченного точками  $a$  ( $a'$ ) и  $b$  ( $b'$ ). Заметим, что  $m_{a,b} = m_{b,a}$ . В частности, обозначим через  $m_{A,A_0}$  ( $m_{A',A'_0}$ ) отрезок, являющийся пересечением  $S_1^\omega \cap \Delta$  ( $S_1^{\omega'} \cap \Delta'$ ) (рис. 5). Пусть  $x \in m_{A,A_0}$ . Пусть  $\mu_{A,A_0}: m_{A,A_0} \rightarrow [0, 1]$  ( $\mu_{A',A'_0}: m_{A',A'_0} \rightarrow [0, 1]$ ) – произвольно заданный гомеоморфизм такой, что  $\mu_{A,A_0}(A) = 0$  ( $\mu_{A',A'_0}(A') = 0$ ). Пусть

$$h_{m_{A,A_0}} = \mu_{A',A'_0}^{-1} \mu_{A,A_0}: m_{A,A_0} \rightarrow m_{A',A'_0}.$$

Пусть  $x \in m_{A,A_0}$  ( $x' \in m_{A',A'_0}$ ) и  $\mathcal{O}_x$  ( $\mathcal{O}_{x'}$ ) – траектория точки  $x$  ( $x'$ ). Пусть  $x^\omega \in (\text{cl}(u_\omega) \cap \Delta \setminus \{\omega\})$ ; тогда  $x^\omega = S_r^\omega \cap \mathcal{O}_x$  для некоторого  $r \in (0, 1]$  и  $x \in m_{A,A_0}$ . Построим гомеоморфизм  $h_{u_\omega}: \text{cl}(u_\omega) \cap \Delta \rightarrow \text{cl}(u_{\omega'}) \cap \Delta'$  так, что  $h_{u_\omega}(\omega) = \omega'$  и  $h_{u_\omega}(x^\omega) = x'^{\omega'}$ , где  $x'^{\omega'} = S_r^{\omega'} \cap \mathcal{O}_{h_{m_{A,A_0}}(x)}$ . Аналогично, для точек  $x^\alpha \in (\text{cl}(u_\alpha) \cap \Delta \setminus \{\alpha\})$  таких, что  $x^\alpha = S_r^\alpha \cap \mathcal{O}_x$  для некоторых  $r \in (0, 1]$  и  $x \in m_{A,A_0}$ , определим гомеоморфизм  $h_{u_\alpha}: \text{cl}(u_\alpha) \cap \Delta \rightarrow \text{cl}(u_{\alpha'}) \cap \Delta'$  так, что  $h_{u_\alpha}(\alpha) = \alpha'$  и  $h_{u_\alpha}(x^\alpha) = x'^{\alpha'}$ , где  $x'^{\alpha'} = S_r^{\alpha'} \cap \mathcal{O}_{h_{m_{A,A_0}}(x)}$ .

*Шаг 2.* Построим гомеоморфизм  $h_\Delta$  на границе  $\Delta$ .

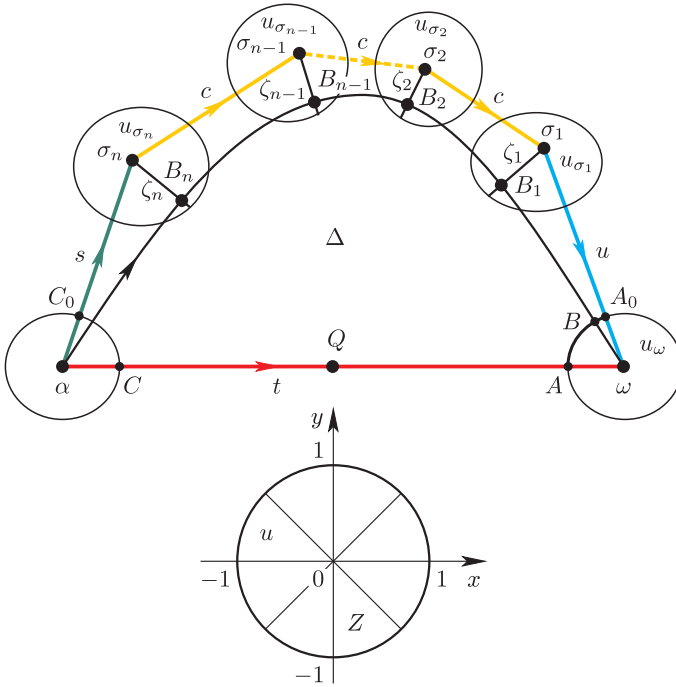


Рис. 5. Построение отображения  $h_\Delta$  в окрестностях узловых точек и выбор секущих  $\zeta_i$ .

Везде далее мы будем обозначать через  $l_{a,b}$  замыкание отрезка траектории или седловой сепаратрисы, ограниченной точками  $a$  и  $b$ , и через  $\lambda_{a,b}$  будем обозначать его длину. Заметим, что  $l_{a,b} = l_{b,a}$  и  $\lambda_{a,b} = \lambda_{b,a}$ . Для гладких отрезков  $l_{a,b}, l_{a',b'}$  траекторий потоков  $f^t, f'^t$  мы будем называть *гомеоморфизмом по длине дуги* гомеоморфизм  $h_{l_{a,b}}: l_{a,b} \rightarrow l_{a',b'}$ , определенный по следующему правилу для точки  $x \in l_{a,b}$ :

$$\lambda_{a',h_{l_{a,b}}(x)} = \frac{\lambda_{a,x} \cdot \lambda_{a',b'}}{\lambda_{a,b}}.$$

Построим таким способом следующие гомеоморфизмы:  $h_{l_{A,C}}: l_{A,C} \rightarrow l_{A',C'}$ ,  $h_{l_{A_0,\sigma_1}}: l_{A_0,\sigma_1} \rightarrow l_{A'_0,\sigma'_1}$ ,  $h_{l_{C_0,\sigma_n}}: l_{C_0,\sigma_n} \rightarrow l_{C'_0,\sigma'_n}$  и  $h_{l_{\sigma_i,\sigma_{i+1}}}: l_{\sigma_i,\sigma_{i+1}} \rightarrow l_{\sigma'_i,\sigma'_{i+1}}$ .

Аналогичная конструкция на границах всех многоугольных областей обеспечивает выполнение условия  $h_\Delta|_{\text{cl}(\Delta) \cap \text{cl}(\tilde{\Delta})} = h_{\tilde{\Delta}}|_{\text{cl}(\Delta) \cap \text{cl}(\tilde{\Delta})}$  для любых многоугольных областей  $\Delta, \tilde{\Delta}$  потока  $f^t$ .

**Шаг 3.** Построим секущие, соединяющие седловые точки с некоторой внутренней точкой  $t$ -кривой.

Пусть  $Q \in \text{int}(l_{A,C})$  и  $Q' = h_{l_{A,C}}(Q)$ . Определим  $m_{Q,\sigma_1}, \dots, m_{Q,\sigma_n}$  (соответственно  $m_{Q',\sigma'_1}, \dots, m_{Q',\sigma'_n}$ ) следующим образом.

Напомним, что для  $i = 1, \dots, n$  существует окрестность  $u_{\sigma_i}$  ( $u_{\sigma'_i}$ ) седловой точки  $\sigma_i$  ( $\sigma'_i$ ) такая, что  $f^t|_{u_{\sigma_i}}$  ( $f'^t|_{u_{\sigma'_i}}$ ) топологически сопряжен с  $b^t|_u$  посредством некоторого гомеоморфизма  $h_{\sigma_i}: u_{\sigma_i} \rightarrow u$  ( $h_{\sigma'_i}: u_{\sigma'_i} \rightarrow u$ ), где  $b^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



и  $b^t(x, y) = (2^{-t}x, 2^ty)$ . Пусть

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\} \cap u.$$

Множество  $Z$  состоит из двух интервалов, пересекающихся в начале координат и трансверсальных траекториям потока  $b^t$ . Пусть  $\zeta_i = h_{\sigma_i}^{-1}(Z) \cap \Delta$  (соответственно  $\zeta'_i = h_{\sigma'_i}^{-1}(Z) \cap \Delta'$ ); см. рис. 5. Выберем некоторую точку  $B \in m_{A, A_0}$  такую, что  $\mathcal{O}_B \cap \zeta_i \neq \emptyset$  и  $\mathcal{O}_{B'} \cap \zeta'_i \neq \emptyset$  для  $i = 1, \dots, n$ , где  $B' = h_{m_{A, A_0}}(B)$  (рис. 6).

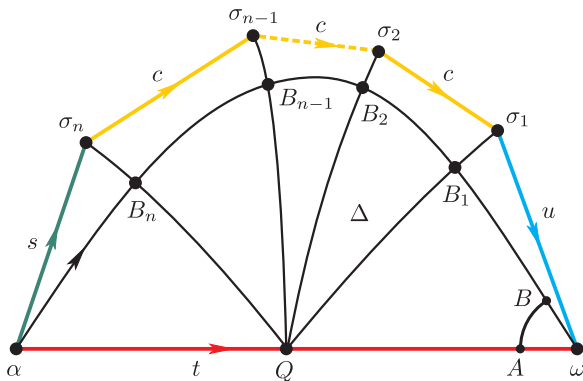


Рис. 6. Построение секущих.

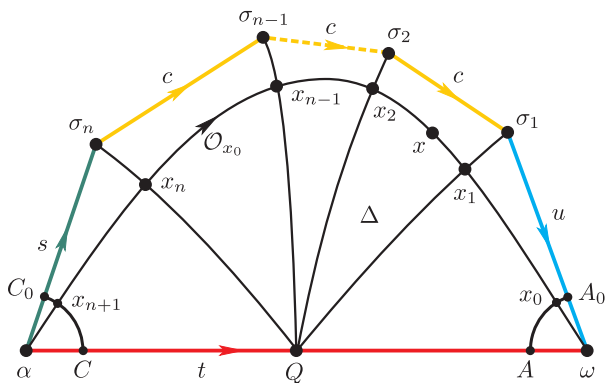


Рис. 7. Продолжение гомеоморфизма внутрь области  $\Delta$ .

Пусть  $\{B_i\} = \mathcal{O}_B \cap \zeta_i$  ( $\{B'_i\} = \mathcal{O}_{B'} \cap \zeta'_i$ ). Обозначим через  $m_{B_i, \sigma_i}$  ( $m_{B'_i, \sigma'_i}$ ) подмножество  $\zeta_i$  ( $\zeta'_i$ ), ограниченное  $B_i$  ( $B'_i$ ) и  $\sigma_i$  ( $\sigma'_i$ ). Пусть  $t_0 \in \mathbb{R}$  ( $t'_0 \in \mathbb{R}$ ) и  $t_i \in \mathbb{R}$  ( $t'_i \in \mathbb{R}$ ) такие, что  $A = f^{t_0}(Q)$  ( $A' = f^{t'_0}(Q')$ ) и  $B = f^{t_i}(B_i)$  ( $B' = f^{t'_i}(B'_i)$ ). Пусть

$$m_{B_i, Q} = \left\{ f^{\frac{(-t_i) \cdot \mu_{A, A_0}(x) + (-t_0)(\mu_{A, A_0}(B) - \mu_{A, A_0}(x))}{\mu_{A, A_0}(B)}}(x), x \in m_{A, A_0} \right\}.$$

Тогда  $m_{Q, \sigma_i} = m_{Q, B_i} \cup m_{B_i, \sigma_i}$  (см. рис. 6). Аналогично определяются секущие  $m_{B'_i, Q'}$  и  $m_{Q', \sigma'_i}$ .

Так мы получили количество секущих, равное числу седловых точек наших многоугольных областей. Они не пересекаются между собой и все своими концами имеют седловую точку и точку  $Q$  – внутреннюю точку  $t$ -кривой этой области.

*Шаг 4.* Будем продолжать гомеоморфизм  $h_\Delta$  внутрь области  $\Delta$ .

Пусть  $x_0 \in m_{A,A_0}$ ,  $x'_0 = h_{m_{A,A_0}}(x_0)$ ,  $\mathcal{O}_{x_0}$  – траектория  $x_0$ , а  $\mathcal{O}_{x'_0}$  – траектория  $x'_0$ . Положим  $\{x_i\} = \mathcal{O}_{x_0} \cap m_{Q,\sigma_i}$ ,  $\{x'_i\} = \mathcal{O}_{x'_0} \cap m_{Q',\sigma'_i}$  для  $i = 1, \dots, n$ ,  $\{x_{n+1}\} = \mathcal{O}_{x_0} \cap m_{C,C_0}$ ,  $\{x'_{n+1}\} = \mathcal{O}_{x'_0} \cap m_{C',C'_0}$  (рис. 7).

Продолжим гомеоморфизм  $h_\Delta$  на траекторию  $\mathcal{O}_{x_0}$  так, что

$$h_\Delta|_{l_{x_i,x_{i+1}}} = h_{l_{x_i,x_{i+1}}} : l_{x_i,x_{i+1}} \rightarrow l_{x'_i,x'_{i+1}}.$$

Итак, мы отобразили посредством  $h_\Delta$  замыкание многоугольной области  $\Delta$  на замыкание многоугольной области  $\Delta'$ , что и заканчивает доказательство теоремы 1.

## § 6. Доказательство теоремы 3

Пусть мы имеем некоторый допустимый граф  $\Gamma$ .

I. Построим по шагам поток  $f^t \in G$ , соответствующий классу изоморфности графа  $\Gamma$ .

*Шаг 1.* Рассмотрим некоторую вершину  $b$  графа  $\Gamma$ . Она инцидентна  $n$  ребрам, одно из которых – это  $t$ -ребро, другое –  $u$ -ребро, третье –  $s$ -ребро, а остальные – это  $c_j^b$ -ребра,  $j = 1, \dots, n - 3$ . Построим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  правильный  $2(n-1)$ -угольник  $A_1A_2 \dots A_{2(n-1)}$  с центром в точке  $O(0,0)$ , вершинами  $A_1(1,0)$  и  $A_n(-1,0)$  (рис. 8). Обозначим через  $\varphi$  и  $a$  центральный угол и сторону построенного многоугольника соответственно. Тогда

$$\varphi = \frac{\pi}{n-1}, \quad a = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Получаем, что вершина  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, 2(n-1)$ , имеет координаты  $(\cos(k-1)\varphi, \sin(k-1)\varphi)$ .

Замыкание половины этого многоугольника, лежащей выше оси  $Ox$ , обозначим  $M_b$ . По построению  $M_b$  является уже  $n$ -угольником с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , т.е. имеет количество сторон, равное числу ребер, которым инцидентна вершина  $b$ . Сторону  $A_1A_n$  будем называть  $t$ -стороной,  $A_{n-1}A_n$  –  $u$ -стороной или  $c_0$ -стороной,  $A_1A_2$  –  $s$ -стороной или  $c_{n-2}$ -стороной, а  $A_kA_{k+1}$ , где  $k = 2, \dots, n-2$ , будем называть  $c_{n-k-1}$ -стороной.

*Шаг 2.* Построим векторное поле  $v_b$  на  $M_b$  следующим образом.

Сначала определим векторное поле  $v_{A_1A_n}$  на стороне  $A_1A_n$  системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = 0, \\ \dot{x} = \sin \frac{1}{2}\pi(x-1). \end{cases}$$

По построению  $A_1, A_n$  – неподвижные точки и поток, порожденный этим векторным полем, движется от  $A_1$  к  $A_n$ . Определим векторное поле на остальных сторонах многоугольника  $M_b$ .

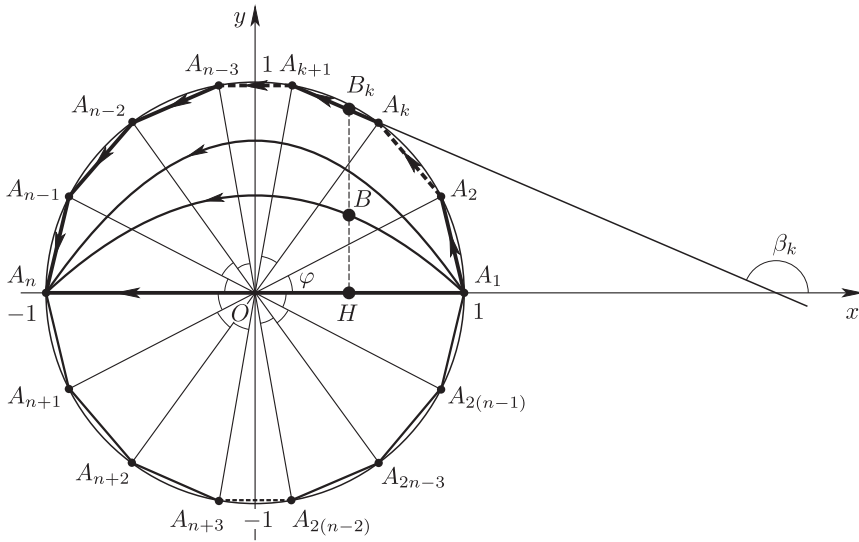


Рис. 8. Построение векторного поля  $v_b$ .

Рассмотрим сторону  $A_k A_{k+1}$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ . Прямая, проходящая через точки  $A_k, A_{k+1}$ , имеет уравнение

$$A_k A_{k+1}: \frac{x - \cos(k - 1)\varphi}{\cos k\varphi - \cos(k - 1)\varphi} = \frac{y - \sin(k - 1)\varphi}{\sin k\varphi - \sin(k - 1)\varphi},$$

из которого угол наклона  $\beta_k$  прямой  $A_k A_{k+1}$  к положительному направлению оси  $Ox$  выражается следующим образом:

$$\beta_k = \arctg \frac{\sin k\varphi - \sin(k - 1)\varphi}{\cos k\varphi - \cos(k - 1)\varphi}.$$

Теперь сведем рассматриваемую ситуацию к случаю стороны  $A_1 A_n$ . Для этого установим взаимно однозначное соответствие  $t_k$  между точками отрезков  $[\cos k\varphi, \cos(k - 1)\varphi]$  и  $[-1, 1]$  формулой

$$t_k = 2 \frac{x - \cos k\varphi}{\cos(k - 1)\varphi - \cos k\varphi} - 1.$$

Положим  $\gamma_k = \sin \frac{1}{2} \pi (t_k - 1)$  и определим векторное поле  $v_{A_k A_{k+1}}$  совокупностью систем дифференциальных уравнений

$$\left[ \begin{cases} \beta_k \neq 0, \\ \dot{x} = -\gamma_k \cdot \cos \beta_k \cdot \text{sign } x, \\ \dot{y} = -\gamma_k \cdot \sin \beta_k \cdot \text{sign } x, \\ \beta_k = 0, \\ \dot{x} = \gamma_k, \\ \dot{y} = 0. \end{cases} \right.$$

*Шаг 3.* Построим векторное поле  $v_{\text{int}}$  внутри многоугольника  $M_b$ . Выберем произвольную точку  $B$  с координатами  $(x, y)$  внутри многоугольника  $M_b$ . Тогда  $B$  принадлежит вертикальному отрезку  $B_k H$ , где  $B_k \in A_k A_{k+1}$  для некоторого  $k = 1, \dots, n-1$ , а  $H$  – проекция  $B_k$  на  $Ox$  (см. рис. 8). Определим векторное поле  $v_{\text{int}}$  совокупностью систем дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \beta_k \neq 0, \\ \dot{x} = \frac{B_k B}{B_k H} \sin \frac{1}{2} \pi (x-1) - \frac{BH}{B_k H} \gamma_k \cdot \cos \beta_k \cdot \text{sign } x, \\ \dot{y} = -\frac{BH}{B_k H} \gamma_k \cdot \sin \beta_k \cdot \text{sign } x, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_k = 0, \\ \dot{x} = \frac{B_k B}{B_k H} \sin \frac{1}{2} \pi (x-1) + \frac{BH}{B_k H} \gamma_k, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Определим векторное поле  $v_b$  системой

$$v(x, y) = \begin{cases} v_{A_1 A_n}(x, y), & (x, y) \in A_1 A_n, \\ v_{A_k A_{k+1}}(x, y), & (x, y) \in A_k A_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ v_{\text{int}}(x, y), & (x, y) \in \text{int } M_b. \end{cases}$$

*Шаг 4.* Обозначим через  $B$  множество вершин, через  $N$  – число вершин и через  $E$  – множество ребер графа  $\Gamma$ . Пусть  $\eta_b$  – отображение, ставящее в соответствие  $t$ -,  $u$ -,  $s$ - или  $c_i$ -ребру, инцидентному вершине  $b$ , соответственно  $t$ -,  $u$ -,  $s$ - или  $c_i$ -сторону многоугольника  $M_b$ . Обозначим через  $\mathcal{M}$  дизъюнктное объединение многоугольников  $M_b$ ,  $b \in B$ . Введем на множестве  $\mathcal{M}$  минимальное отношение эквивалентности  $\sim$ , удовлетворяющее следующему правилу: если вершины  $b_1, b_2$  из множества  $B$  инцидентны ребру  $e$  из множества  $E$ , то отрезки  $P_1 Q_1 = \eta_{b_1}(e)$  и  $P_2 Q_2 = \eta_{b_2}(e)$  отождествляются так, что точка  $(x_1, y_1) \in P_1 Q_1 = [(x_{P_1}, y_{P_1}), (x_{Q_1}, y_{Q_1})]$  эквивалентна точке  $(x_2, y_2) \in P_2 Q_2 = [(x_{P_2}, y_{P_2}), (x_{Q_2}, y_{Q_2})]$ , где

$$\begin{cases} x_2 = x_{P_2} + \frac{(x_1 - x_{P_1})(x_{Q_2} - x_{P_2})}{x_{Q_1} - x_{P_1}}, \\ y_2 = y_{P_2} + \frac{(y_1 - y_{P_1})(y_{Q_2} - y_{P_2})}{y_{Q_1} - y_{P_1}}. \end{cases}$$

Из свойств допустимого графа следует, что факторпространство  $S = \mathcal{M} / \sim$  является замкнутым топологическим 2-многообразием. Обозначим через  $q: \mathcal{M} \rightarrow S$  естественную проекцию. Заметим, что векторное поле в эквивалентных точках имеет одну и ту же длину, поэтому на многообразии  $S$  проекция  $q$  индуцирует непрерывное векторное поле, обозначим его  $V$ .

*Шаг 5.* Определим на  $S$  гладкую структуру, относительно которой поле  $V$  является гладким.

Покроем многообразие  $S$  конечным числом карт  $(U_z, \psi_z)$ ,  $z \in S$ , где  $U_z \subset S$  – открытая окрестность точки  $z$  и  $\psi_z: U_z \rightarrow \mathbb{R}^2$  – гомеоморфизм на образы следующих типов.

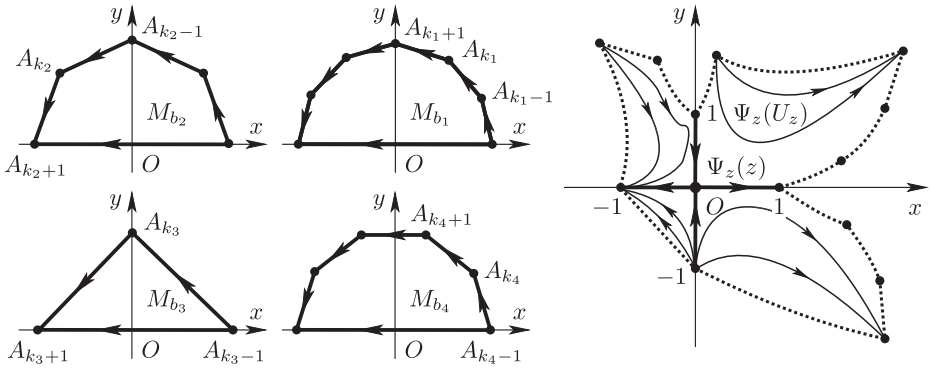


Рис. 9. Пример карты первого типа.

1. Рассмотрим на графе  $\Gamma$   $c^*$ -цикл

$$\{b_1, c_{j_1}^{b_1} = c_{j_2}^{b_2}, b_2, c_{j_2-1}^{b_2} = c_{j_3-1}^{b_3}, b_3, c_{j_3}^{b_3} = c_{j_4}^{b_4}, b_4, c_{j_4-1}^{b_4} = c_{j_1-1}^{b_1}, b_1\},$$

где вершине  $b_i \in B, i = 1, \dots, 4$ , соответствует  $n_i$ -угольник  $M_{b_i}$  и  $\eta_{b_i}(c_{j_i}^{b_i}) = A_{k_i}A_{k_{i+1}}$  для  $k_i = n_i - j_i - 1$  (рис. 9).

Будем обозначать длину стороны  $A_{k_i}A_{k_{i+1}}$ , центральный угол многоугольника  $M_{b_i}$  и угол между вектором  $A_{k_i}A_{k_{i+1}}$  ( $A_{k_i}A_{k_{i-1}}$ ) и положительным направлением оси  $Ox$  через  $a_i, \varphi_i$  и  $\beta_{k_i}^+$  ( $\beta_{k_i}^-$ ) соответственно. При этом углы  $\beta_{k_i}^+, \beta_{k_i}^-$  выбраны так, что  $|\beta_{k_i}^+ - \beta_{k_i}^-| < \pi$ . Положим

$$U_z = \text{int} \left( \bigcup_{i=1}^4 q(M_{b_i}) \right),$$

$$\psi_z(\varrho) = \mu_i(p_{1,i}((q|_{M_{b_i}})^{-1}(\varrho))) \quad \text{для } \varrho \in q(M_{b_i}), \quad i = 1, \dots, 4,$$

где

$$p_{1,i}(x, y) = \left( \frac{x - \cos(k_i - 1)\varphi_i}{a_i}, \frac{y - \cos(k_i - 1)\varphi_i}{a_i} \right),$$

$$\mu_i(x, y) = \mu_i(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos \theta_{1,i}, r \sin \theta_{1,i}),$$

$(r, \theta)$  – полярные координаты, а функция  $\theta_{1,i}(\theta)$  задается формулой

$$\theta_{1,i}(\theta) = \left( i - 2 \left( \frac{i}{2} \pmod{1} \right) \right) \cdot \frac{\pi}{2} + (-1)^{i-1} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\theta - \beta_{k_i}^+}{\beta_{k_i}^+ - \beta_{k_i}^-}.$$

Функция  $p_{1,i}(x, y)$  осуществляет параллельный перенос многоугольника  $M_{b_i}$  так, что вершина  $A_{k_i}$  попадает в начало координат, и увеличивает длину сторон  $A_{k_i}A_{k_{i+1}}$  и  $A_{k_{i-1}}A_{k_i}$  до единичной. Функция  $\mu_i(x, y)$  совмещает угол при вершине  $A_{k_i}$  с  $i$ -м координатным углом.

2. Рассмотрим на графе  $\Gamma$   $st$ -цикл

$$\{b_1, (b_1, b_2), b_2, (b_2, b_3), b_3, \dots, b_{2m-1}, (b_{2m-1}, b_{2m}), b_{2m}, (b_{2m}, b_1), b_1\},$$

где вершине  $b_i \in B$ ,  $i = 1, \dots, 2m$ , соответствует  $n_i$ -угольник  $M_{b_i}$ ,

$\eta_{b_{2j-1}}((b_{2j-1}, b_{2j}))$  – сторона  $A_1 A_2$  в многоугольнике  $M_{b_{2j-1}}$ ,

$\eta_{b_{2j}}((b_{2j-1}, b_{2j}))$  – сторона  $A_1 A_2$  в многоугольнике  $M_{b_{2j}}$ ,

$\eta_{b_{2j}}((b_{2j}, b_{2j+1}))$  – сторона  $A_1 A_{n_{2j}}$  в многоугольнике  $M_{b_{2j}}$ ,

$\eta_{b_{2j+1}}((b_{2j}, b_{2j+1}))$  – сторона  $A_1 A_{n_{2j+1}}$  в многоугольнике  $M_{b_{2j+1}}$  для  $j = 1, \dots, m$ ,  $n_{2j+1} = n_1$ .

Напомним, что в многоугольнике  $M_{b_i}$  длина стороны  $A_1 A_2$  равна  $a_i$  и длина стороны  $A_1 A_{n_i}$  равна 2. Обозначим угол между вектором  $\overrightarrow{A_1 A_2}$  и положительным направлением оси  $Ox$  через  $\beta_{1,i}^+$ . Положим

$$U_z = \text{int} \left( \bigcup_{i=1}^{2m} q(M_{b_i}) \right),$$

$$\psi_z(\varrho) = \nu_i(p_{2,i}(q|_{M_{b_i}})^{-1}(\varrho)) \quad \text{для } \varrho \in q(M_{b_i}), \quad i = 1, \dots, 2m,$$

где

$$p_{2,i}(x, y) = (x - 1, y)$$

и функция

$$\nu_i(x, y) = \nu_i(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r_{2,i}(r, \theta) \cdot \cos(\theta_{2,i}(\theta)), r_{2,i}(r, \theta) \cdot \sin(\theta_{2,i}(\theta)))$$

задается формулами

$$r_{2,i}(r, \theta) = \frac{r}{2} \cdot \frac{\theta - \beta_{1,i}^+}{\pi - \beta_{1,i}^+} + \frac{r}{a_i} \cdot \frac{\pi - \theta}{\pi - \beta_{1,i}^+},$$

$$\theta_{2,i}(\theta) = \left( i - 2 \left( \frac{i}{2} \pmod{1} \right) \right) \cdot \frac{\pi}{m} + (-1)^{i-1} \frac{\theta - \beta_{1,i}^+}{\pi - \beta_{1,i}^+} \cdot \frac{\pi}{m}.$$

Функция  $p_{2,i}(x, y)$  осуществляет параллельный перенос многоугольника  $M_{b_i}$  так, что вершина  $A_1$  попадает в начало координат. Функции  $\nu_i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, 2m$ , уменьшают длину сторон  $A_1 A_2$  и  $A_1 A_{n_i}$  до единичной, снижают величину угла при вершине  $A_1$  до  $\pi/m$  и размещают многоугольники  $M_{b_i}$  вершинами  $A_1$  в начале координат так, что их углы при вершине  $A_1$  примыкают друг к другу и заполняют полный угол, располагаясь каждый на  $i$ -м месте при обходе вокруг начала координат, начиная с положительной полуоси  $Ox$ , против часовой стрелки по некоторой окружности радиуса  $< 1$ , а стороны одного цвета у прилегающих друг к другу многоугольников совпадают.

3. Рассмотрим на графе  $\Gamma$   $ut$ -цикл

$$\{b_1, (b_1, b_2), b_2, (b_2, b_3), b_3, \dots, b_{2m-1}, (b_{2m-1}, b_{2m}), b_{2m}, (b_{2m}, b_1), b_1\},$$

где вершине  $b_i \in B$ ,  $i = 1, \dots, 2m$ , соответствует  $n_i$ -угольник  $M_{b_i}$ ,

$\eta_{b_{2j-1}}((b_{2j-1}, b_{2j}))$  – сторона  $A_{n_{2j-1}-1} A_{n_{2j-1}}$  в многоугольнике  $M_{b_{2j-1}}$ ,

$\eta_{b_{2j}}((b_{2j-1}, b_{2j}))$  – сторона  $A_{n_{2j}-1} A_{n_{2j}}$  в многоугольнике  $M_{b_{2j}}$ ,

$\eta_{b_{2j}}((b_{2j}, b_{2j+1}))$  – сторона  $A_1 A_{n_{2j}}$  в многоугольнике  $M_{b_{2j}}$ ,

$\eta_{b_{2j+1}}((b_{2j}, b_{2j+1}))$  – сторона  $A_1 A_{n_{2j+1}}$  в многоугольнике  $M_{b_{2j+1}}$  для  $j = 1, \dots, m$ ,  $n_{2j+1} = n_1$ .

Напомним, что в многоугольнике  $M_{b_i}$  длина стороны  $A_{n_i-1}A_{n_i}$  равна  $a_i$ , длина стороны  $A_1A_{n_i}$  равна 2 и угол между вектором  $\overrightarrow{A_{n_i}A_{n_i-1}}$  и положительным направлением оси  $Ox$  равен  $\beta_{n_i,i}^-$ . Положим

$$U_z = \text{int} \left( \bigcup_{i=1}^{2m} q(M_{b_i}) \right),$$

$$\psi_z(\varrho) = \kappa_i(p_{3,i}((q|_{M_{b_i}})^{-1}(\varrho))) \quad \text{для } \varrho \in q(M_{b_i}), \quad i = 1, \dots, 2m,$$

где

$$p_{3,i}(x, y) = (x + 1, y)$$

и функция

$$\kappa_i(x, y) = \kappa_i(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r_{3,i}(r, \theta) \cdot \cos(\theta_{3,i}(\theta)), r_{3,i}(r, \theta) \cdot \sin(\theta_{3,i}(\theta)))$$

задается формулами

$$r_{3,i}(r, \theta) = \frac{r}{2} \cdot \frac{\beta_{n_i,i}^- - \theta}{\beta_{n_i,i}^-} + \frac{r}{a_i} \cdot \frac{\theta}{\beta_{n_i,i}^-},$$

$$\theta_{3,i}(\theta) = \left( i - 2 \left( \frac{i}{2} \pmod{1} \right) \right) \cdot \frac{\pi}{m} + (-1)^{i-1} \frac{\theta}{\beta_{n_i,i}^-} \cdot \frac{\pi}{m}.$$

Функция  $p_{3,i}(x, y)$  осуществляет параллельный перенос многоугольника  $M_{b_i}$  так, что вершина  $A_{n_i}$  попадает в начало координат. Функции  $\nu_i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, 2m$ , меняют длину сторон  $A_{n_i-1}A_{n_i}$  и  $A_1A_{n_i}$  на единичную, сохраняя непрерывность поля, меняют величину угла при вершине  $A_{n_i}$  на  $\pi/m$  и размещают многоугольники  $M_{b_i}$  вершинами  $A_{n_i}$  в начале координат так, что их углы при вершинах  $A_{n_i}$  примыкают друг к другу и заполняют полный угол, располагаясь каждый на  $i$ -м месте при обходе вокруг начала координат, начиная с положительной полуоси  $Ox$ , против часовой стрелки по некоторой окружности радиуса  $< 1$ , а стороны одного цвета у прилегающих друг другу многоугольников совпадают.

Для введенных карт отображения перехода являются композициями гладких отображений, построенных в пп. 1–3, и обратных к ним, в силу чего эти карты задают гладкую структуру на поверхности  $S$ .

II. Докажем пп. (i), (ii) теоремы 3.

(i) Докажем, что эйлерова характеристика поверхности  $S$  вычисляется по формуле  $\chi(S) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$ , где  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – количества всех  $tu$ -,  $c^*$ - и  $st$ -циклов графа  $\Gamma$  соответственно. Из предложения 3 следует, что количества всех стоков, седел и источников равны соответственно  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Отсюда следует доказываемое утверждение, поскольку приведенная формула является формулой для суммы индексов особых точек потока  $f^t$ .

(ii) Докажем, что поверхность  $S$  является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma$  содержит хотя бы один цикл нечетной длины.

Поверхность  $S$ , на которой мы построили поток  $f^t$ , ориентируема тогда и только тогда, когда все многоугольные области потока  $f^t$  можно согласованно ориентировать. Ориентацию каждой многоугольной области можно задавать, выбирая один из двух возможных циклических порядков ее неподвижных точек:  $\alpha, \sigma_n, \dots, \sigma_1, \omega$  или  $\omega, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \alpha$ , где  $\alpha$  – источник,  $\sigma_j$  – седло,

$j = 1, \dots, n$ , а  $\omega$  – сток. Пусть многоугольной области присвоен знак плюс в первом случае и знак минус – во втором. Ясно, что ориентации двух таких областей, имеющих общую сторону, будут согласованы тогда и только тогда, когда им присвоены разные знаки. Поскольку между многоугольными областями потока  $f^t$  и вершинами графа  $\Gamma$  установлено взаимно однозначное соответствие посредством отображения  $\pi_{f^t}$ , условие ориентируемости поверхности  $S$  можно сформулировать следующим образом: поверхность  $S$  ориентируема тогда и только тогда, когда вершинам графа  $\Gamma$  присвоены знаки плюс и минус таким образом, что любые две его вершины, соединенные ребром, имеют разные знаки. Назовем такую расстановку знаков вершин графа *правильной*.

Теперь нам достаточно доказать, что граф  $\Gamma$  не имеет циклов нечетной длины тогда и только тогда, когда существует правильная расстановка знаков плюс и минус в вершинах графа  $\Gamma$ .

Истинность утверждения справа налево очевидна, поскольку в цикле нечетной длины нельзя правильно расставить знаки плюс и минус. Докажем в другую сторону: пусть граф  $\Gamma$  не имеет циклов нечетной длины. Тогда правильно присвоить знаки его вершинам можно следующим образом: возьмем некоторую вершину  $b_0$  графа  $\Gamma$  и присвоим ей знак плюс; для любой другой вершины  $b_i$  рассмотрим путь, соединяющий ее с вершиной  $b_0$ , и если он четной длины, присвоим ей знак плюс, если же нечетной – знак минус. Поскольку по предположению граф не имеет циклов нечетной длины, то такая расстановка не зависит от выбора пути и, следовательно, определена корректно.

Теорема 3 доказана.

## § 7. Эффективный алгоритм распознавания изоморфности графов потоков класса $G$

В этом параграфе мы приводим доказательство теоремы 2, выполненное путем построения эффективного алгоритма распознавания (с точностью до изоморфизма) многоцветных графов потоков из класса  $G$ . Для этого можно считать, что количества вершин и ребер у этих графов совпадают, иначе они заведомо не изоморфны. По построению многоцветные графы потоков из  $G$  не являются графами общего вида, поскольку они вложимы в несущую поверхность, на которой заданы соответствующие им потоки класса  $G$ . Иными словами, эти графы можно изобразить так, что их вершины – точки на поверхности, а ребра – жордановы кривые, которые не пересекаются в своих внутренних точках. Интерес к этому наблюдению вызван существованием эффективного алгоритма различения *обыкновенных графов* (т.е. непомеченных графов без петель, ориентированных и кратных ребер), вложимых в заданную поверхность, а именно имеет место следующий факт.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4** (см. [11]). *Задача распознавания изоморфизма двух  $n$ -вершинных обыкновенных графов, каждый из которых вложим в поверхность рода  $g$ , может быть решена за время  $O(n^{O(g)})$ .*

К сожалению, приведенный результат не может быть непосредственно применен к распознаванию изоморфизма графов  $\Gamma_{f^t}$  и  $\Gamma_{f^r}$ , поскольку они не являются обыкновенными. Тем не менее задачу изоморфизма многоцветных графов



можно свести (с невысокой трудоемкостью сведения) к задаче изоморфизма обыкновенных графов, вложимых в поверхность. Для этого нам понадобятся две операции с графами –  $k$ -подразбиение ребра и  $(k_1, k_2)$ -подразбиение ребра.

Операция  $k$ -подразбиения ребра  $(a, b)$  графа состоит в том, чтобы удалить его из графа, добавить вершины  $c_1, \dots, c_k$  и ребра  $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_k, b)$ .

Операция  $(k_1, k_2)$ -подразбиения ребра  $(a, b)$  графа состоит в том, чтобы удалить его из графа, добавить вершины  $c_1, c_2, \dots, c_{k_1}, v, u, w, d_1, d_2, \dots, d_{k_2}$  и ребра  $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{k_1}, v), (v, u), (u, w), (v, w), (v, d_1), (d_1, d_2), \dots, (d_{k_2}, b)$ .

Для заданного графа  $\Gamma_{ft}$  построим соответствующий ему обыкновенный граф  $\Gamma(f^t)$  следующим образом. В графе  $\Gamma_{ft}$  выполним 1-подразбиение каждого  $s$ -ребра, 2-подразбиение каждого  $t$ -ребра, 3-подразбиение каждого  $u$ -ребра. Пусть  $e = (a, b)$  – произвольное  $c$ -ребро графа  $\Gamma_{ft}$ ,  $\text{num}_a(e)$  и  $\text{num}_b(e)$  – номера ребра  $e$  в множествах  $c$ -ребер, соответственно инцидентных вершинам  $a$  и  $b$ . Выполним  $(\text{num}_a(e), \text{num}_b(e))$ -подразбиение ребра  $e$ . Подобную операцию выполним для всех  $c$ -ребер графа  $\Gamma_{ft}$  (рис. 10).

**ЛЕММА 6.** *Графы  $\Gamma_{ft}$  и  $\Gamma_{ft}$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы  $\Gamma(f^t)$  и  $\Gamma(f^{ft})$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Очевидно, что по графу  $\Gamma_{ft}$  граф  $\Gamma(f^t)$  определяется единственным образом. Покажем, что верно и обратное утверждение. Отсюда будет следовать справедливость леммы. Каждая многоугольная область множества  $\Delta_{ft}$  имеет не менее трех сторон, и поэтому каждая вершина  $\Gamma_{ft}$  имеет не менее трех соседей в этом графе. Очевидно, что в графе  $\Gamma(f^t)$  никакая вершина графа  $\Gamma_{ft}$  не принадлежит никакому треугольнику. Поэтому множество вершин графа  $\Gamma_{ft}$  образуют те и только те вершины графа  $\Gamma(f^t)$ , которые имеют не менее трех соседей и не принадлежат треугольникам. Удалив из графа  $\Gamma(f^t)$  все вершины графа  $\Gamma_{ft}$ , мы получим дизъюнктное объединение связных подграфов, каждый из которых является либо путем, либо путем, к некоторой внутренней вершине которого “присоединен” треугольник. Эти связные подграфы являются индикаторами наличия ребер между соответствующими вершинами графа  $\Gamma_{ft}$ . Если подграф является путем, то его длина определяет цвет из множества  $\{s, t, u\}$  у соответствующего ребра графа  $\Gamma_{ft}$ . Если подграф является путем с “присоединенным” треугольником, то он соответствует некоторому  $c$ -ребру  $e = (a, b)$  графа  $\Gamma_{ft}$ . В данном подграфе удалим вершины треугольника, получим два пути, длины которых определяют номера  $e$  в множествах  $c$ -ребер, инцидентных вершинам  $a$  и  $b$  соответственно. Тем самым, по графу  $\Gamma(f^t)$  граф  $\Gamma_{ft}$  восстанавливается единственным образом.

Лемма доказана.

Оценим количество вершин графа  $\Gamma(f^t)$  в предположении, что граф  $\Gamma_{ft}$  имеет  $n$  вершин и  $m$  ребер. Очевидно, что каждое из  $m$  ребер графа  $\Gamma_{ft}$  соответствует некоторому подграфу графа  $\Gamma(f^t)$ , содержащему не более  $2n + 5$  вершин. Поэтому граф  $\Gamma(f^t)$  имеет не более  $(2n + 5)m$  вершин и может быть эффективно вычислен по графу  $\Gamma_{ft}$ . Отметим, что граф  $\Gamma(f^t)$  вложим в ту же поверхность, что и граф  $\Gamma_{ft}$ . Поэтому по лемме 6 имеет место полиномиальное сведение задачи распознавания изоморфизма многоцветных графов потоков из класса  $G$  к задаче распознавания изоморфизма обыкновенных графов, вложенных в фиксированную поверхность.

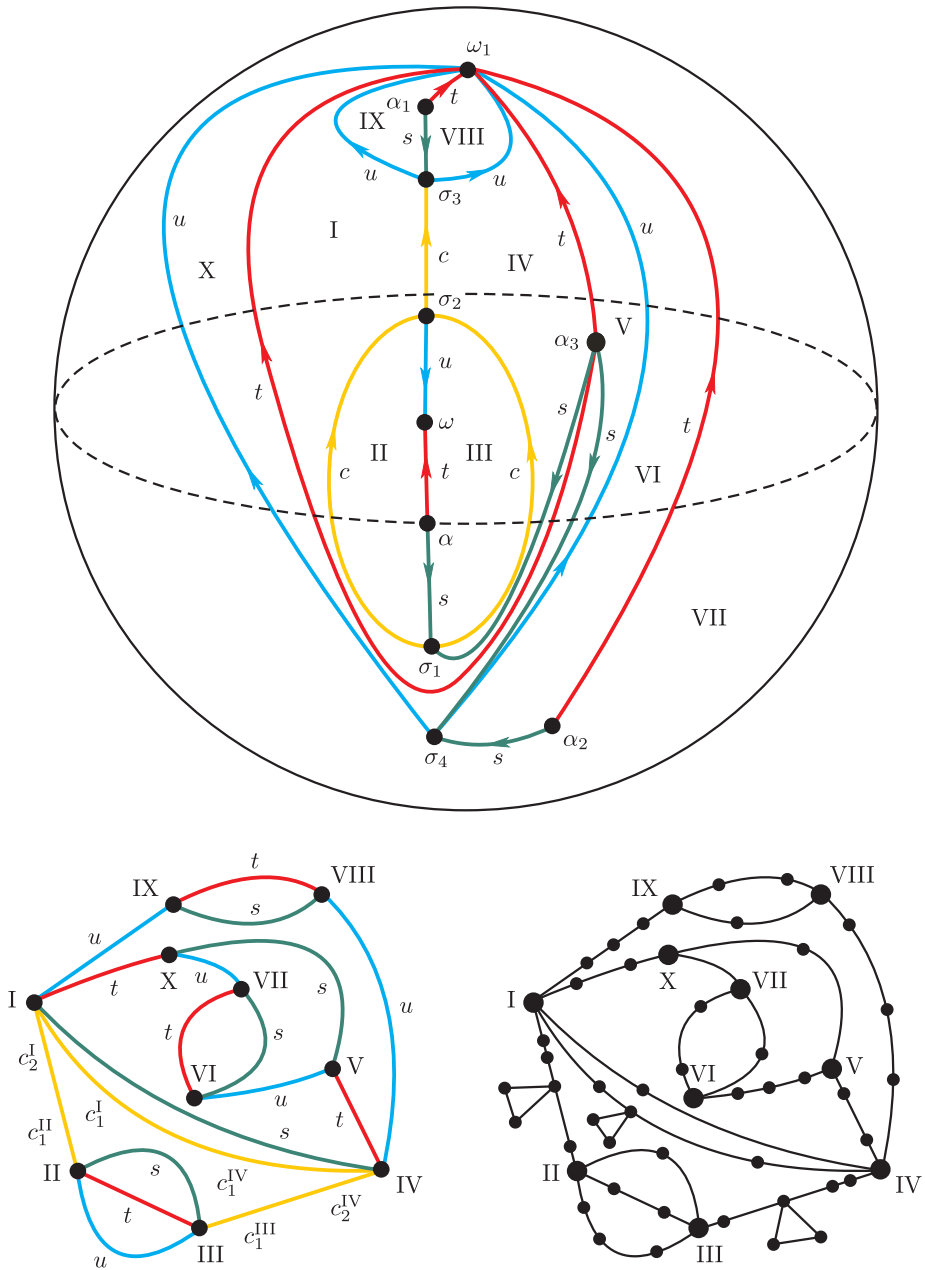


Рис. 10. Фазовый портрет некоторого потока  $f^t$  из класса  $G$  (вверху), его четырехцветный граф  $\Gamma_{f^t}$  (внизу слева) и соответствующий ему обыкновенный граф  $\Gamma(f^t)$  (внизу справа).

Напомним, что по теореме 3 поверхность  $S$  является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma$  содержит цикл нечетной длины. По теореме

Д. Кёнига (см. [7]) обыкновенный граф не содержит нечетных циклов тогда и только тогда, когда он является *двудольным*, т.е. когда множество его вершин может быть разбито не более чем на две части так, что не существует ни одного ребра, инцидентного вершинам из одной части. Двудольность обыкновенного графа с  $n'$  вершинами и  $m'$  ребрами распознается за время  $O(n' + m')$  при помощи поиска в ширину (см. [1]). Поэтому чтобы распознать ориентируемость поверхности  $S$ , мы забудем про цвета ребер графа  $\Gamma$  и выполним 2-подразбиение каждого его ребра. Понятно, что полученный граф  $\Gamma'$  является двудольным тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma$  не содержит циклов нечетной длины. Количества вершин и ребер графа  $\Gamma'$  не превосходят утроенных количеств вершин и ребер графа  $\Gamma$  соответственно. Поэтому ориентируемость поверхности  $S$  можно распознать за линейное время от суммы количеств вершин и ребер графа  $\Gamma$ .

Из всего вышесказанного следует справедливость теоремы 2.

### Список литературы

- [1] В. Е. Алексеев, В. А. Таланов, *Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений*, Изд-во «Интернет-университет информационных технологий», М., 2006, 320 с.
- [2] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250; фр. пер.: A. Andronov, L. Pontrjagin, “Systèmes grossiers”, *C. R. Acad. Sci. URSS* (2), **14** (1937), 247–250.
- [3] A. Cobham, “The intrinsic computational difficulty of functions”, *Logic, methodology, and philosophy of science*, Proceedings of the 1964 international congress, North-Holland, Amsterdam, 1965, 24–30.
- [4] В. З. Гринес, С. Х. Капкаева, О. В. Починка, “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 19–46; англ. пер.: V. Z. Grines, S. H. Karpaeva, O. V. Pochinka, “A three-colour graph as a complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces”, *Sb. Math.*, **205**:10 (2014), 1387–1412.
- [5] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016, xxvi+295 pp.
- [6] М. Гэри, Д. Джонсон, *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, М., 1982, 416 с.; пер. с англ.: M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*, A Series of Books in the Mathematical Sciences, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1979, x+338 pp.
- [7] D. König, “Grafok es matrixok”, *Mat. Fiz. Lapok*, **38** (1931), 116–119.
- [8] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251–257; фр. пер.: E. Leontovič, A. G. Mayer, “Sur les trajectoires qui déterminent la structure qualitative de la division de la sphère en trajectoires”, *C. R. Acad. Sci. URSS* (2), **14** (1937), 251–254.
- [9] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557–560.
- [10] А. Г. Майер, “Грубые преобразования окружности”, Уч. зап. ГГУ, **12**, ГГУ, Горький, 1939, 215–229.
- [11] G. Miller, “Isomorphism testing for graphs of bounded genus”, *STOC’80 Proceedings of the 12th annual ACM symposium on theory of computing*, Los Angeles, CA, 1980, ACM, New York, 1980, 225–235.

- [12] D. Neumann, T. O'Brien, "Global structure of continuous flows on 2-manifolds", *J. Differential Equations*, **22**:1 (1976), 89–110.
- [13] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, "О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях", *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, "Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds", *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1205–1250.
- [14] Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Мир, М., 1986, 302 с.; пер. с англ.: J. Palis, Jr., W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xii+198 pp.
- [15] М. М. Peixoto, "On the classification of flows on 2-manifolds", *Dynamical systems* (Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, New York, 1973, 389–419.
- [16] С. Pugh, M. Shub, "The  $\Omega$ -stability theorem for flows", *Invent. Math.*, **11**:2 (1970), 150–158.
- [17] С. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, xii+468 pp.

**Владислав Евгеньевич Круглов**  
(Vladislav E. Kruglov)

Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики", г. Москва;  
Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского  
*E-mail*: [KruglovSlava21@mail.ru](mailto:KruglovSlava21@mail.ru)

Поступила в редакцию  
04.08.2016 и 10.04.2017

**Дмитрий Сергеевич Малышев**  
(Dmitriy S. Malyshev)

Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики", г. Москва  
*E-mail*: [dsmalyshev@rambler.ru](mailto:dsmalyshev@rambler.ru)

**Ольга Витальевна Починка**  
(Olga V. Pochinka)

Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики", г. Москва  
*E-mail*: [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru)