УДК 514.7

Н. И. Жукова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Сильная трансверсальная эквивалентность полных трансверсально аффинных слоений

Изучаются полные трансверсально аффинные слоения. Исследуется сильная трансверсальная эквивалентность таких слоений, являющаяся более тонким понятием, чем трансверсальная эквивалентность слоений в смысле Молино. Определена глобальная группа голономии полного трансверсально аффинного слоения и доказано, что эта группа является его полным инвариантом относительно сильной трансверсальной эквивалентности. Построен представитель произвольного класса сильно трансверсально эквивалентных слоений по его полному инварианту. Этот представитель есть двумерное полное трансверсально аффинное слоение на многообразии, являющемся пространством Эленберга–Маклейна типа $K(\pi, 1)$.

Ключевые слова: расслоение Серра, сильная трансверсальная эквивалентность слоений, трансверсально аффинное слоение, глобальная группа голономии, связность Эресмана для слоения.

N. I. Zhukova

National Research University Higher School of Economics

Strong transverse equivalence of complete transversely affine foliations

Complete transversely affine foliations are studied. The strong transverse equivalence of complete affine foliations is investigated, which is a more refined notion than the transverse equivalence of foliations in Molino sense. A global holonomy group of complete affine foliations is determined and it is proved that this group is the complete invariant of the foliation of relatively strong transverse equivalence. A representative of an arbitrary equivalence class is constructed on its complete invariant. This representative is the two-dimensional complete transverselly affine foliation (M, F), where M is the Elenberg-McLane space of the type $K(\pi, 1)$.

Key words: foliation, Serre fibration, strong transverse equivalence of foliations, transverselly affine foliation, global holonomy group, Ehresmann connection for foliations.

1. Введение

Исследуются гладкие слоения (M, F) произвольной коразмерности q на n-мерном многообразии M, $1 \leq q \leq n$, допускающие в качестве трансверсальной структуры аффинную геометрию A^q, где A^q — q-мерное аффинное пространство. Такие слоения называются *трансверсально аффинными*, или, для краткости, *аффинными слоениями* (строгое определение дано в разделе 2).

Подчеркнем, что (M, F) — аффинное слоение тогда и только тогда, когда оно является слоением с трансверсальной линейной связностью [1] нулевой кривизны и без кручения.

Мы напоминаем понятие сильной трансверсальной эквивалентности слоений, которое введено нами в [2] без использования термина *сильная трансверсальная эквивалентность*.

Это понятие является более тонким, чем понятие *трансверсальной эквивалентности слоений*, принадлежащее Молино [3].

Целью данной работы является классификация полных аффинных слоений относительно сильной трансверсальной эквивалентности.

Основным результатом является теорема о биективности множества классов сильной трансверсальной эквивалентности полных аффинных слоений коразмерности q, где $q \geq 1$, с множеством классов сопряженных счетных подгрупп аффинной группы $Aff(A^q)$ (теорема 4).

Данная статья использует методы исследования (X, G)-слоений в смысле [4], а также методы и результаты предыдущей работы автора [2].

Обозначения. Следуя [5], через $P(N, H)$ мы обозначаем главное H-расслоение с проекцией $P \to N$. Модуль векторных полей над алгеброй гладких функций $\mathfrak{F}(M)$ на многообразии M обозначается через $\mathfrak{X}(M)$. Для распределения $\mathfrak{M}$ на M через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ обозначается множество всех векторных полей X на M таких, что $X_x \in \mathfrak{M}_x$ для всех точек $x \in M$. Если $\mathfrak{M}$ — распределение, касательное к слоению (M, F), то $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ обозначается также через $\mathfrak{X}_F(M)$. Если $p : M \to N$ — субмерсия и $\mathfrak{M}$ — распределение на N, то $\mathfrak{N} := p^*\mathfrak{M}$ — индуцированное распределение на M такое, что $\mathfrak{N}_z = \{X \in \mathfrak{X}(M) \,|\, p_{*z}X \in \mathfrak{M}_{p(z)}\}$, где $z \in M$.

Символ $\cong$ обозначает изоморфизм объектов в соответствующей категории.

Счетной группой мы называем счетную или конечную группу.

2. Полные аффинные слоения

2.1. Определение аффинных слоений

Аффинная группа. Будем обозначать через A^q q-мерное аффинное пространство, а через $Aff(A^q)$ группу Ли всех его аффинных преобразований.

Будем рассматривать точки x из A^q и $\mathbb{R}^q$ как q-мерные векторы. Элемент группы $Aff(A^q)$ обозначим парой $< A, a >$, где $A \in GL(q, \mathbb{R})$, a — точка из $\mathbb{R}^q$ и $< A, a > x = Ax + a$ $\forall x \in A^q$. Групповая операция в $Aff(A^q)$ определена следующим образом:

$$< A, a > \cdot < B, b > = < AB, Ab + a > \quad \forall < A, a >, < B, b > \in Aff(A^q).$$

Таким образом, группа $Aff(A^q)$ является полупрямым произведением общей линейной группы $H = GL(q, \mathbb{R})$ и абелевой группы $\mathbb{R}^q$, то есть $Aff(A^q) = H \ltimes \mathbb{R}^q$.

Аффинное слоение. $(Aff(A^q), A^q)$-*коциклом* называется семейство $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ такое, что

1) $\{U_i \,|\, i \in J\}$ — открытое покрытие n-мерного многообразия M, $0 < q < n$;

2) $f_i : U_i \to A^q$ — субмерсии со связными слоями в аффинное пространство A^q;

3) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, где $i, j \in J$, то существует аффинное преобразование $f \in Aff(A^q)$, сужение которого $\gamma_{ij} := f|_{f_j(U_i \cap U_j)}$ удовлетворяет равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на пересечении $U_i \cap U_j$.

Заметим, что из условия 3) вытекает, что если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, где $i, j, k \in J$, то на пересечении $U_i \cap U_j \cap U_k$ выполняется равенство $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$.

Максимальный по включению $(Aff(A^q), A^q)$-коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, обладающий указанными выше свойствами, определяет новую топологию Ω на M, базой которой является множество слоев всех субмерсий f_i. Компоненты линейной связности топологического пространства (M, Ω) образуют разбиение многообразия M, которое обозначается через $F = \{L_\alpha | \alpha \in A\}$ и называется *трансверсально аффинным слоением*, которое для краткости называется *аффинным слоением*, заданным $(Aff(A^q), A^q)$-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, а L_α, $\alpha \in A$, называются слоями этого слоения.

Любой $(Aff(A^q), A^q)$-коцикл содержится в единственном максимальном $(Aff(A^q), A^q)$-коцикле, поэтому для задания слоения (M, F) достаточно задать какой-либо $(Aff(A^q), A^q)$-коцикл, обладающий свойствами 1) – 3).

2.2. Полнота аффинных слоений

Как и выше, пусть $H = GL(q, \mathbb{R})$. Обозначим $Aff(A^q)$ через G. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G и H соответственно. Поскольку $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$, нормальной подгруппе $\mathbb{R}^q$ соответствует идеал $\mathfrak{n}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Распределение $\hat{Q}$ на G такое, что $\hat{Q}_g = l_{g*}(\mathfrak{n})$, где l_g – левый сдвиг на $g \in G$, интегрируемо и H-инвариантно. Оно является связностью в H-расслоении $G(A^q, H)$ и соответствует плоской линейной связности аффинного пространства A^q.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ — H-модульное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как G/H — редуктивное однородное пространство, то $\xi = (G(A^q, H), \omega_G)$, где ω_G — форма Маурера–Картана на группе Ли G, представляет собой редуктивную картанову геометрию нулевой картановой кривизны. Следовательно, любое аффинное слоение является картановым слоением типа (G, H) в смысле [6] и [7], моделируемым на картановой геометрии $\xi = (G(A^q, H), \omega_G)$.

Как известно, для картанова слоения существует слоеное расслоение. Для аффинного слоения (M, F) слоеное расслоение состоит из следующих объектов: H-расслоения с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$, слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ и $\mathfrak{g}$-значной 1-формы ω на $\mathcal{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(A^*) = A$ для $A \in \mathfrak{h}$, где A^* — фундаментальное векторное поле на $\mathcal{R}$, соответствующее A;

2) 1-форма ω H-эквивариантна, т.е. $(R_a)^*\omega = Ad_G(a^{-1})\omega$ $\forall a \in H$, где Ad_G — присоединенное представление группы G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$;

3) отображение $\omega_u : T_u\mathcal{R} \to \mathfrak{g}$ сюръективно для любого $u \in \mathcal{R}$, причем $ker\omega = T\mathcal{F}$, где $T\mathcal{F}$ — распределение, касательное к слоению $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, а $Q := \{Q_u \,|\, Q_u = \omega_u^{-1}(\mathfrak{n}),\, u \in \mathcal{R}\}$ — интегрируемая H-связность в H-расслоении $\mathcal{R}(M, H)$;

4) производная Ли $L_X\omega$ равна нулю для каждого векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(\mathcal{R})$.

Слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ называется *поднятым слоением* для (M, F).

Напомним, что q-мерное трансверсальное распределение на M называется трансверсальным к слоению (M, F) коразмерности q, если $T_xM = T_xF \oplus \mathfrak{M}_x$ для любой точки $x \in M$.

Определение 1. Пусть (M, F) — аффинное слоение коразмерности q и Q — H-связность в слоеном расслоении $\mathcal{R}(M, H)$ с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$. Слоение (M, F) называется полным, если существует q-мерное трансверсальное ему распределение $\mathfrak{M}$ на M такое, что для распределения $\mathfrak{N} := \pi^*\mathfrak{M} \cap Q$ любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(\mathcal{R})$, для которого $\omega(X) = \mathrm{const} \in \mathfrak{g}$, является полным.

Нетрудно показать, что опредедение 1 полноты аффинного слоения (M, F) эквивалентно полноте этого слоения, рассматриваемого как картаново слоение [7].

3. Глобальные группы голономии полных аффинных слоений

3.1. Структура полных аффинных слоений

Далее через $\Gamma(L, x)$ обозначается ростковая группа голономии слоя $L \ni x$ слоения, общепринятая в теории слоений [8].

Теорема 1. *Пусть (M, F) — полное трансверсально аффинное слоение произвольной коразмерности q на n-мерном многообразии M. Тогда*

(1) *существует регулярное накрывающее отображение $k : \widehat{M} \to M$ такое, что индуцированное слоение $(\widehat{M}, \widehat{F})$, где $\widehat{F} = k^*F$, образовано слоями тривиального расслоения с проекцией $r : \widehat{M} = L_0 \times A^q \to A^q$ на q-мерное аффинное пространство A^q, причем L_0 — многообразие, диффеоморфное любому слою с тривиальной группой голономии слоения (M, F);*

(2) *определены подгруппа* Ψ *аффинной группы* $Aff(\mathbb{R}^q)$ *и эпиморфизм*

$$\chi : \pi_1(M, x) \to \Psi$$

фундаментальной группы $\pi_1(M, x)$ *многообразия* M *на* Ψ*, причем группа накрывающих преобразований накрытия* $k : \widehat{M} \to M$ *изоморфна* Ψ*;*

(3) *группа голономии* $\Gamma(L, x)$ *произвольного слоя* $L = L(x)$ *слоения* (M, F) *изоморфна стационарной подгруппе* Ψ_b *группы* Ψ *в точке* $b \in r(k^{-1}(x)) \in A^q$.

Доказательство. Говорят, что группа диффеоморфизмов Φ многообразия N действует квазианалитически, если из существования $\varphi \in \Phi$ и непустого открытого множества U в N таких, что $\varphi|_U = id_U$, следует $\varphi = id_N$. Заметим, что аффинная группа $Aff(A^q)$ действует квазианалитически на A^q, поэтому аффинное слоение является (G, X)-слоением в смысле Эпштейна [4], где $G = Aff(A^q)$ и $X = A^q$.

Как извесно [7, предложение 3], из полноты картанова слоения (M, F) относительно распределения $\mathfrak{M}$ вытекает, что $\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для этого слоения в смысле Блюменталя и Хебды [9]. Поэтому применима теорема 2 из [10], согласно которой существует регулярное накрывающее отображение $k : \widehat{M} \to M$ с индуцированным слоением $\widehat{F} = k^*F$, образованным слоями локально тривиального расслоения $r : \widehat{M} \to B$, где B — q-мерное односвязное гладкое многообразие. Поскольку поднятое слоение $(\widehat{M}, \widehat{F})$ также является $(Aff(A^q), A^q)$-слоением, B локально изоморфно A^q, то есть B — аффинное многообразие. Полнота слоения (M, F) влечет полноту аффинного слоения $(\widehat{M}, \widehat{F})$, которая влечет геодезическую полноту аффинного многообразия B. Так как A^q – единственное односвязное, полное аффинное многообразие размерности q, то необходимо, чтобы $B = A^q$. В силу стягиваемости A^q, расслоение $r : \widehat{M} \to A^q$ тривиально. Это доказывает утверждение (1) теоремы 1.

Утверждения (2) и (3) теоремы 1 вытекают из утверждений (2) и (3) теоремы 2 из [10]. □

Определение 2. Группа Ψ, удовлетворяющая теореме 1, называется глобальной группой голономии слоения (M, F) и обозначается $\Psi = \alpha(M, F)$.

Замечание 1. Группа накрывающих преобразований регулярного накрытия $k : \widehat{M} \to M$ определена однозначно при фиксированной точке $y \in \widehat{M}$. При переходе к другой точке $y' \in \widehat{M}$, $k(y) = k(y')$, группа накрывающих преобразований отображается на себя внутренним автоморфизмом. Отсюда вытекает, что глобальная группа голономии Ψ слоения (M, F), являющаяся подгруппой аффинной группы $Aff(A^q)$, определена с точностью до сопряжений преобразованиями из $Aff(A^q)$.

Далее, когда мы говорим о глобальной группе голономии слоения (M, F), будем подразумевать, что фиксирована некоторая точка $y \in \widehat{M}$ и проекция $r : \widehat{M} \to A^q$.

3.2. Реализуемость счетной подгруппы группы $Aff(A^q)$ в качестве глобальной группы голономии полного аффинного слоения

Надстроечные слоения. Конструкция надстроечного слоения принадлежит Хефлигеру и состоит в следующем [7]. Пусть B и N — гладкие связные многообразия, $\rho : \pi_1(B, b) \to Diff(N)$ — гомоморфизм групп. Пусть $G := \pi_1(B, b)$ и $\Phi := \rho(G)$. Рассмотрим универсальное накрывающее отображение $\widehat{p} : \widehat{B} \to B$. Зададим правое действие группы G на произведении многообразий $\widehat{B} \times N$ следующим образом:

$$\Theta : \widehat{B} \times N \times G \to \widehat{B} \times N : (x, t, g) \to (g^{-1}(x), \rho(g^{-1})(t)),$$

где $\widehat{B} \to \widehat{B} : x \to g^{-1}(x)$ — накрывающее преобразование, индуцированное элементом $g^{-1} \in G$. Отображение $p : M := (\widehat{B} \times N)/G \to B = \widehat{B}/G$ определяет локально тривиальное расслоение над B со стандартным слоем N, ассоциированное с главным расслоением $\widehat{p} : \widehat{B} \to B$ со структурной группой G.

Пусть $\Theta_g := \Theta|_{\widehat{B}\times\{t\}\times\{g\}}$. Так как $\Theta_g(\widehat{B}\times\{t\}) = \widehat{B}\times\rho(g^{-1})(t)\ \ \forall t\in N$, то действие дискретной группы G сохраняет тривиальное слоение $F := \{\widehat{B}\times\{t\}\mid t\in N\}$ произведения $\widehat{B}\times N$. Следовательно, фактор-отображение $f_0:\widehat{B}\times N\to(\widehat{B}\times N)/G = M$ индуцирует на M гладкое слоение F, слои которого трансверсальны слоям локально тривиального расслоения $p:M\to B$. Будем называть $p:M\to B$ *ассоциированным расслоением.* Заметим, что распределение $\mathfrak{M}$, касательное к слоям субмерсии $p:M\to B$, является связностью Эресмана для слоения (M,F).

Пара (M,F) называется *надстроечным слоением* и обозначается через $Sus(N,B,\rho)$. Группа диффеоморфизмов $\Phi := \rho(G)$ многообразия N называется *структурной группой* надстроечного слоения (M,F). В случае односвязности многообразия N структурная группа Φ является глобальной группой голономии надстроечного слоения (M,F).

Следующая теорема о реализации доказывается нами конструктивным путем.

Теорема 2. *Любая счетная подгруппа Ψ аффинной группы $Aff(A^q)$, где $q\geq 1$, реализуется в качестве глобальной группы голономии некоторого двумерного полного аффинного надстроечного слоения (M,F) коразмерности q на многообразии M, являющемся пространством Эленберга–Маклейна типа $K(\pi,1)$.*

Доказательство. Через $\mathbb{N}$ обозначим множество натуральных чисел, а через $\mathbb{N}_0$ — его счетное подмножество, которое может быть и конечным.

Пусть Ψ — произвольная, счетная подгруппа аффинной группы $Aff(A^q)$ со счетным семейством образующих $\{\psi_i\mid i\in\mathbb{N}_0\subset\mathbb{N}\}$. Обозначим через $B=\mathbb{R}^2\setminus\{a_i=(i,0)\in\mathbb{R}^2\mid i\in\mathbb{N}_0\}$ двумерную плоскость, в которой выколото счетное множество изолированных точек $\{a_i\mid i\in\mathbb{N}_0\}$. Фундаментальная группа двумерного гладкого многообразия B есть свободная группа $G=< g_i\mid i\in\mathbb{N}_0 >$ со счетным семейством образующих g_i.

Определим гомоморфизм групп $\rho:\pi_1(B,b)=G\to Aff(A^q)$, задав его на образующих: $\rho(g_i):=\psi_i, i\in\mathbb{N}_0$. Тогда определено надстроечное слоение $(M,F):=Sus(A^q,B,\rho)$, которое является двумерным аффинным слоением коразмерности q. Слоение (M,F) накрыто тривиальным расслоением $\mathbb{R}^2\times A^q\to A^q$.

Рассмотрим ассоциированное локально тривиальное расслоение $p:M\to B$. Как отмечалось выше, распределение $\mathfrak{M}$, образованное касательными пространствами к слоям этого расслоения, является связностью Эресмана для (M,F). Обозначим через $k:\mathbb{R}^2\times A^q\to M=(\mathbb{R}^2\times A^q)/G$ универсальное накрывающее отображение. Из определения надстроечного слоения (M,F) вытекает, что поднятое распределение $\widetilde{\mathfrak{M}}=k^*\mathfrak{M}$ образовано касательными пространствами к тривиальному слоению $\widetilde{F}=\{\{z\}\times A^q\mid z\in\mathbb{R}^2\}$. Полнота аффинного пространства A^q влечет полноту аффинного слоения $(\mathbb{R}^2\times A^q,\widetilde{F})$. Отсюда, учитывая, что $\widetilde{F}=k^*F$ — индуцированное слоение на универсальном накрывающем пространстве для M, мы получаем полноту аффинного слоения (M,F).

Благодаря односвязности аффинного пространства A^q, структурная группа $\rho(G)$ надстроечного слоения (M,F) совпадает с его глобальной группой голономии $\Psi=\alpha(M,F)$, то есть $\Psi=\rho(G)$.

Заметим, что ассоциированное трансверсальное расслоение $p:M\to B$ имеет стягиваемый стандартный слой A^q. Поэтому из точной гомотопической последовательности этого расслоения вытекает изоморфность фундаментальных групп $\pi_1(M)$ и $\pi_1(B)$. Кроме того, универсальное накрывающее пространство для M также стягиваемое. Поэтому $\pi_n(M)=0$ для любого натурального числа $n\geq 2$. Таким образом, единственная нетривиальная гомотопическая группа слоеного многообразия M есть $\pi_1(M)\cong\pi_1(B)$. Следовательно, M — пространство Эленберга–Маклейна типа $K(\pi,1)$, где $\pi=\pi_1(B)$. □

4. Сильная трансверсальная эквивалентность слоений

Говорят, что непрерывное отображение $p:X\to Y$ обладает *свойством накрывающей гомотопии* относительно топологического пространства K, если для любого непрерывного отображения $G_0:K\to X$ и любой гомотопии $H_t:K\to Y$, $t\in[0,1]$, таких, что

$p \circ G_0 = H_0$, существует продолжение G_0 до гомотопии $G_t : K \to X$, удовлетворяющей равенству $p \circ G_t = H_t$.

Напомним, что расслоением Серра называется непрерывное сюръективное отображение, обладающее свойством накрывающей гомотопии относительно любого конечного полиэдра (см., например, [11]). Как известно, для расслоений Серра можно построить точную гомотопическую последовательность расслоения.

Понятие трансверсальной эквивалентности гладких слоений введено Молино [3]. Мы следующим образом усилили это понятие [2, Определение 1.1].

Определение 3. Два слоения (M, F) и (M_1, F_1) мы называем *сильно трансверсально эквивалентными,* если существуют слоение $(\mathbb{M}, \mathbb{F})$ и субмерсии со связными слоями $p : \mathbb{M} \to M$ и $p_1 : \mathbb{M} \to M_1$, образующие расслоения Серра, такие, что

$$\mathbb{F} = \{p^{-1}(L) | L \in F\} = \{p_1^{-1}(L') | L' \in F_1\}$$

Замечание 2. Определение 3 сильной трансверсальной эквивалентности слоений отличается от определения трансверсальной эквивалентности слоений в смысле Молино [3] дополнительным требованием, чтобы субмерсии со связными слоями $p : \mathbb{M} \to M$ и $p_1 : \mathbb{M} \to M_1$ образовывали расслоения Серра.

Доказано [2, предложение 1.1], что отношение сильной трансверсальной эквивалентности слоений действительно является отношением эквивалентности.

Напомним, что слоение называется *простым*, если оно образовано слоями некоторой субмерсии. Причина, по которой мы рассматриваем более сильное отношение эквивалентности слоений, чем трансверсальная эквивалентность в смысле Молино, заключается в том, что, как показывают примеры [2, пример 7.1], существуют простые слоения, для которых слоения, поднятые на универсальные накрывающие многообразия, не являются простыми. Нами доказано, что поднятие на накрывающее пространство простого слоения, образованного слоями расслоения Серра, является простым слоением. Этот факт существенно используется при доказательстве теоремы 1.2 в [2], которую мы применяем далее.

5. Основная теорема

5.1. Сильная трансверсальная эквивалентность слоений, накрытых расслоениями

Определение 4. Пусть $k : \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение. Слоение (M, F) называется слоением, накрытым расслоением, если индуцированное слоение $\widetilde{F} = k^*F$ на $\widetilde{M}$ образовано слоями некоторого гладкого расслоения в смысле Серра $p : \widetilde{M} \to N$.

Из точной гомотопической последовательности расслоения Серра $p : \widetilde{M} \to N$, в силу односвязности $\widetilde{M}$ и связности слоев слоения $\widetilde{F}$ вытекает односвязность базы N. Так как группа накрывающих преобразований $G \cong \pi_1(M)$ универсального накрытия $k : \widetilde{M} \to M$ сохраняет слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$, то она индуцирует группу диффеоморфизмов $\Psi \subset Diff(N)$ и эпиморфизм групп $\rho : \pi_1(M) \to \Psi$. При этом группа Ψ называется *глобальной группой голономии слоения* (M, F), *накрытого расслоением* $p : \widetilde{M} \to N$, и обозначается через $\Psi = \alpha(M, F)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех слоений, накрытых расслоениями. Для любого слоения $(M, F) \in \mathfrak{F}$ обозначим через $[(M, F)]$ класс сильной трансверсальной эквивалентности, содержащий (M, F). Множество классов сильно трансверсально эквивалентных слоений из $\mathfrak{F}$ обозначим через $\widetilde{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $\widetilde{\mathfrak{F}} = \{[(M, F)] \,|\, (M, F) \in \mathfrak{F}\}$.

Для слоения (M, F), накрытого расслоением $p : \widetilde{M} \to N$, где $\widetilde{M}$ и N — односвязные многообразия, определена пара (N, Ψ), где Ψ — глобальная группа голономии слоения (M, F), которая обозначается через $(N, \Psi) := \beta(M, F)$.

Рассмотрим категорию $\mathfrak{P}$ пар (N, Ψ), где N — любое односвязное многообразие, а Ψ — счетная группа диффеоморфизмов многообразия N. Морфизмами двух объектов (N, Ψ) и (N', Ψ') из $\mathfrak{P}$ являются пары отображений (d, θ), где $d : N \to N'$ — гладкое отображение, а $\theta : \Psi \to \Psi'$ — гомоморфизм групп, удовлетворяющих равенству $d \circ \psi = \theta(\psi) \circ d \;\; \forall \psi \in \Psi$. Обозначим через $[(N, \Psi)]$ класс изоморфных объектов категории $\mathfrak{P}$, содержащий (N, Ψ). Пусть $\widetilde{\mathfrak{P}} = \{[(N, \Psi)] \,|\, (N, \Psi) \in \mathfrak{P}\}$.

Следующая теорема доказана нами в [2, теорема 1.2].

Теорема 3. *Отображение*

$$\mathcal{B} : \widetilde{\mathfrak{F}} \to \widetilde{\mathfrak{P}} : [(M, F)] \mapsto [(N, \Psi) := \beta(M, F)] \;\; \forall (M, F) \in \mathfrak{F}$$

является биекцией.

5.2. Сильная трансверсальная эквивалентность аффинных слоений

Как известно, любое локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Серра, поэтому из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Любое полное аффинное слоение накрыто расслоением.*

Обозначим через $\mathfrak{F}_{Aff}$ множество всех полных аффинных слоений. Согласно следствию 1 выполняется включение $\mathfrak{F}_{Aff} \subset \mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{P}_{Aff}$ обозначим подкатегорию категории $\mathfrak{P}$, объектами которой являются пары (A^q, Ψ), где Ψ — счетная подгруппа группы $Aff(A^q)$, морфизмами $(A^q, \Psi) \mapsto (A^q, \widehat{\Psi})$ в $\mathfrak{P}_{Aff}$ являются такие пары отображений (d, θ), где d — линейное отображение аффинного пространства A^q в себя, а $\theta : \Psi \to \widehat{\Psi}$ — гомоморфизм групп, удовлетворяющий равенству $d \circ \psi = \theta(\psi) \circ d$ для любого $\psi \in \Psi$.

Положим $\widetilde{\mathfrak{F}}_{Aff} := \{[(M, F)] \,|\, (M, F) \in \mathfrak{F}_{Aff}\}$ и $\widetilde{\mathfrak{P}}_{Aff} := \{[(A^q, \Psi)] \,|\, (A^q, \Psi) \in \mathfrak{P}_{Aff}\}$, где $[(M, F)]$ — класс сильной трансверсальной эквивалентности, содержащий $(M, F) \in \mathfrak{F}_{Aff}$, а $[(A^q, \Psi)]$ — класс объектов, изоморфных (A^q, Ψ) в категории $\mathfrak{P}_{Aff}$.

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 4. *Равенство* $\beta(M, F) := (A^q, \Psi)$, *где* $\Psi = \alpha(M, F)$, *определяет отображение*

$$\mathcal{B}_{Aff} : \widetilde{\mathfrak{F}}_{Aff} \to \widetilde{\mathfrak{P}}_{Aff} : [(M, F)] \mapsto [\beta(M, F)] \;\; \forall (M, F) \in \mathfrak{F}_{Aff},$$

являющееся биекцией.

Доказательство Рассмотрим произвольное полное аффинное слоение (M, F) коразмерности q. Тогда, согласно теореме 1, определена глобальная группа голономии $\Psi = \alpha(M, F)$, являющаяся счетной подгруппой аффинной группы $Aff(A^q)$. Следовательно, равенство $\beta(M, F) := (A^q, \Psi)$, где $\Psi = \alpha(M, F)$, определяет отображение $f : \mathfrak{F}_{Aff} \to \mathfrak{P}_{Aff} : (M, F) \mapsto \beta(M, F)$.

Предположим, что слоения (M_i, F_i), $i = 1, 2$, сильно трансверсально эквивалентны и имеют коразмерность q. Пусть слоение $(\mathbb{M}, \mathbb{F})$ и субмерсии со связными слоями $p_i : \mathbb{M} \to M_i$, являющиеся расслоениями Серра, реализуют эту эквивалентность. Рассмотрим универсальные накрывающие отображения $k_i : \widetilde{M_i}$ и $k : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$. Из теоремы 1 вытекает, что индуцированные слоения $\widetilde{F_i} = k_i^* F_i$ образованы слоями тривиальных расслоений $r_i : \widetilde{M_i} = L_0 \times A^q \to A^q$, где L_0 — многообразие, диффеоморфное любому слою с тривиальной группой голономии слоения (M_i, F_i). Аналогично тому, как в доказательстве теоремы 1.2 из [2], мы показываем, что слоение $(\widetilde{\mathbb{M}}, \widetilde{\mathbb{F}})$, где $\widetilde{\mathbb{F}} = k^* \mathbb{F}$, с проекциями $f_i : \widetilde{\mathbb{M}} \to \widetilde{M_i}$ реализуют сильную трансверсальную эквивалентность слоений $(\widetilde{M_1}, \widetilde{F_1})$ и $(\widetilde{M_2}, \widetilde{F_2})$. Отсюда вытекает, что все три слоения $(\widetilde{\mathbb{M}}, \widetilde{\mathbb{F}})$ и $(\widetilde{M_1}, \widetilde{F_1})$ и $(\widetilde{M_2}, \widetilde{F_2})$ образованы слоями расслоений Серра с базой A^q. Пусть $\Psi_i := \alpha(M_i, F_i)$, $i = 1, 2$, и $\Psi = \alpha(\widetilde{\mathbb{M}}, \widetilde{\mathbb{F}})$. Так же, как в доказательстве теоремы 1.2 из [2], мы доказываем существование аффинных преобразований $d_i : A^q \to A^q$ и изоморфизмов глобальных групп голономии $\theta_i : \Psi \to \Psi_i$, удовлетворяющих равенствам $d_i \circ \psi = \theta_i(\psi) \circ d_i \;\; \forall \psi \in \Psi$. При этом изоморфизм групп $\theta := \theta_2 \circ \theta_1^{-1}$ и аффинное преобразование $d := d_2 \circ d_1^{-1}$ реализуют изоморфизм пар (A^q, Ψ_1) и (A^q, Ψ_2) в категории $\mathfrak{P}_{Aff}$, то есть $[(A^q, \Psi_1)] = [(A^q, \Psi_2)]$. Следовательно, определено отображение

$$\mathcal{B}_{Aff} : \widetilde{\mathfrak{F}}_{Aff} \to \widetilde{\mathfrak{P}}_{Aff} : [(M, F)] \mapsto [(A^q, \Psi) = \beta(M, F)] \ \ \forall (M, F) \in \mathfrak{F}_{Aff}.$$

Инъективность отображения $\mathcal{B}_{Aff}$ доказывается тем же методом, что и инъективность отображения $\mathcal{B}$ в [2, теорема 1.2].

По теореме 1 для любой пары (A^q, Ψ), где Ψ — счетная подгруппа аффинной группы $Aff(A^q)$, существует полное аффинное слоение (M, F) такое, что $\alpha(M, F) = \Psi$. Следовательно, для любого элемента $[(A^q, \Psi)] \in \widetilde{\mathfrak{P}}_{Aff}$ найдется класс сильно трансверсально эквивалентных полных аффинных слоений $[(M, F)]$ такой, что $\mathcal{B}_{Aff}[(M, F)] = [(A^q, \Psi)]$. Поэтому отображение $\mathcal{B}_{Aff}$ сюръективно.

Таким образом, мы имеем биекцию $\mathcal{B}_{Aff} : \widetilde{\mathfrak{F}}_{Aff} \to \widetilde{\mathfrak{P}}_{Aff}$. $\square$

Следующее утверждение, ввиду важности сформулированное в виде теоремы, вытекет из теоремы 4.

Теорема 5. *Два полных трансверсально аффинных слоения (M_1, F_1) и (M_2, F_2) коразмерности q сильно трансверсально эквивалентны тогда и только тогда, когда их глобальные группы голономий Ψ_1 и Ψ_2, являются сопряжеными подгруппами аффинной группы $Aff(A^q)$.*

Замечание 3. Согласно теореме 5 глобальная группа голономии Ψ полного аффинного слоения (M, F), определенная с точностью до сопряженности в группе $Aff(A^q)$, является полным инвариантом этого слоения относительно сильной трансверсальной эквивалентности.

Из теоремы 5 вытекает, что все объекты и понятия, определяемые глобальной группой голономии Ψ полного аффинного слоения (M, F), являются инвариантами класса сильно трансверсально эквивалентных аффинных слоений. В частности, мы получаем следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть Ψ — глобальная группа голономии полного аффинного слоения (M, F). Если существует замкнутая орбита группы Ψ, то все слоения (M', F'), сильно трансверсально эквивалентные (M, F), имеют замкнутый слой.*

5.3. Структурная алгебра Ли полного аффинного слоения

Рассмотрим произвольное полное аффинное слоение (M, F). Пусть $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ — его поднятое слоение на пространство слоеного расслоения $\mathcal{R}$. Как известно [3], слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ является полным e-слоением. Согласно [3], индуцированное слоение на замыкании $\overline{\mathcal{L}}$ любого слоя $\mathcal{L}$ слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ представляет собой слоение Ли с всюду плотными слоями. Следующее определение является частным случаем понятия структурной алгебры Ли для полного картанова слоения, введенного нами в [7].

Определение 5. Структурная алгебра $\mathfrak{g}_0$ слоения Ли с всюду плотными слоями $(\overline{\mathcal{L}}, \mathcal{F}|_{\overline{\mathcal{L}}})$ называется структурной алгебры Ли слоения (M, F) и обозначается через $\mathfrak{g}_0(M, F)$.

Обозначим через $\mathcal{A}ff_{Fol}$ категорию аффинных слоений, в которой изоморфизмы сохраняют не только слоение, но и его трансверсальную структуру. Для полных аффинных слоений (M, F) структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$ является алгебраическим инвариантом в категории $\mathcal{A}ff_{Fol}$.

Поскольку аффинная геометрия является эффективной жесткой геометрией [12], то, применяя теоремы 1 и 4, а также результаты автора [12, теорема 7], мы получаем новую интерпретацию структурной алгебры Ли полного аффинного слоения, указанную в следующем утверждении.

Теорема 6. *Структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$ полного аффинного слоения (M, F) коразмерности q изоморфна алгебре Ли группы Ли $\overline{\Psi}$, равной замыканию его глобальной группы голономии Ψ в аффинной группе Ли $Aff(A^q)$, причем $\mathfrak{g}_0$ является инвариантом этого слоения относительно сильной трансверсальной эквивалентности.*

5.4. Пример

Пусть (M, F) — произвольное полное аффинное слоение, x — произвольная точка из M, y — любая точка слоя $L = L(x)$ слоения (M, F). Два пути h и k, соединяющие x с y, называются эквивалентными, если петля $h \cdot k^{-1}$ определяет тривиальный элемент ростковой группы голономии $\Gamma(L, x)$ в точке x. Обозначим через $< h >$ класс эквивалентных путей, содержащий h. Множество $G(F)$ упорядоченных троек $(x, < h >, y)$, полученных указанным выше способом, называется *графиком* или *группоидом голономии* слоения (M, F) [13]. Отображения

$$p_1 : G(F) \to M \to (x, < h >, y) \mapsto x, \quad p_2 : G(F) \to M \to (x, < h >, y) \mapsto y$$

называются *каноническими проекциями.* Как известно [13], $G(F)$ естественным образом наделяется структурой гладкого, вообще говоря, нехаусдорфова многообразия, относительно которой канонические проекции являются субмерсиями.

Согласно [14, теоремы 1 и 2], график $G(F)$ аффинного слоения (M, F) является хаусдорфовым многообразием, а в силу полноты (M, F) канонические проекции $p_1 : G(F) \to M$ и $p_2 : G(F) \to M$ образуют локально тривиальные расслоения. Кроме того, на графике $G(F)$ индуцируется слоение $\mathbb{F} := \{p_1^{-1}(L_\alpha) \,|\, L_\alpha \in F\} = \{p_2^{-1}(L_\alpha) \,|\, L_\alpha \in F\}$.

Поскольку любое локально тривиальное расслоение является расслоением Серра, слоение $(G(F), \mathbb{F})$ и пара субмерсий $p_1 : G(F) \to M$ и $id_{G(F)}$ реализуют сильную трансверсальную эквивалентность слоений (M, F) и $(G(F), \mathbb{F})$. Следовательно, не нарушая общности, можно считать, что слоения (M, F) и $(G(F), \mathbb{F})$ имеют одну и ту же глобальную группу голономии Ψ.

6. Заключение

Благодаря теореме 4 классификация аффинных слоений коразмерности q, $q \geq 1$, относительно сильной трансверсальной эквивалентности сведена нами к классификации с точностью до сопряженности счетных подгрупп аффинной группы $Aff(A^q)$.

Работа выполнена при поддержке РНФ, Грант № 17-11-01041.

Литература

1. *Zhukova N.I., Dolgonosova A.Yu.* The automorphism groups of foliations with transverse linear connection // Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11, N 12. P. 2076–2088.
2. *Zhukova N.I.* Transverse Equivalence of Complete Conformal Foliations // Journal of Math. Sci. 2015. V. 208, N 1. P. 115–130.
3. *Molino P.* Riemannian foliations. Progress in Math. Boston: Birkhauser, 1988. 339 p.
4. *Epstein D.B.A.* Transversally hyperbolic 1-dimensional foliations // Astérisque. 1984. V. 116. P. 53—69.
5. *Kobayshi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. V.I, New York–London–Sydney: Interscience Publishers, 1963.
6. *Blumenthal R.A.* Cartan submersions and Cartan foliations // Illinois J. Math. 1987. V. 31, N 2. P. 327–343.
7. *Zhukova N.I.* Minimal sets of Cartan foliations // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V 256. P. 105–135.
8. *Tamura I.* Topology of foliations: An Introduction. Transl. of Math. Monographs. V. 97. Publisher: AMS, 1992.
9. *Blumenthal R.A., Hebda J.J.* Ehresmann connections for foliations // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33, N 4. P. 597–611.

10. *Zhukova N.I.* Global attractors of complete conformal foliations. Sbornik: Mathematics. 2012. V. 203, N 3. P. 380–405.

11. *Spenier E.H.* Algebraic Topology. Springer, 1966.

12. *Zhukova N.I.* Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Math. Information Sci. Phys. 2009. I. 2. P. 14–35.

13. *Conn A.* Noncommutative geometry. London–San Diego: Academic Press. 1994.

14. *Zhukova N.I.* The graph of a foliation with an Ehresmann connection and leaf stability // Russian Math. (Iz. VUZ). 1994. V. 38, N 2. P. 76–79.

References

1. *Zhukova N.I., Dolgonosova A.Yu.* The automorphism groups of foliations with transverse linear connection. Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11, N 12. P. 2076–2088.

2. *Zhukova N.I.* Transverse Equivalence of Complete Conformal Foliations. Journal of Math. Sci. 2015. V. 208, N 1. P. 115–130.

3. *Molino P.* Riemannian foliations. Progress in Math. Boston: Birkhauser, 1988. 339 p.

4. *Epstein D.B.A.* Transversally hyperbolic 1-dimensional foliations. Astérisque 1984. V. 116. P. 53–69.

5. *Kobayshi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. V.I, New York–London–Sydney: Interscience Publishers, 1963.

6. *Blumenthal R.A.* Cartan submersions and Cartan foliations. Illinois J. Math. 1987. V. 31, N 2. P. 327–343.

7. *Zhukova N.I.* Minimal sets of Cartan foliations. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V 256. P. 105–135.

8. *Tamura I.* Topology of foliations: An Introduction. Transl. of Math. Monographs. V. 97. Publisher: AMS, 1992.

9. *Blumenthal R.A., Hebda J.J.* Ehresmann connections for foliations. Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33, N 4. P. 597–611.

10. *Zhukova N.I.* Global attractors of complete conformal foliations. Sbornik: Mathematics. 2012. V. 203, N 3. P. 380–405.

11. *Spenier E.H.* Algebraic Topology. Springer, 1966.

12. *Zhukova N.I.* Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms. Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Math. Information Sci. Phys. 2009. I. 2. P. 14–35.

13. Conn A. Noncommutative geometry. Academic Press, London–San Diego. 1994.

14. Zhukova N.I. The graph of a foliation with an Ehresmann connection and leaf stability. Russian Math. (Iz. VUZ). 1994. V. 38, N 2. P. 76–79.

Поступила в редакцию 18.07.2017