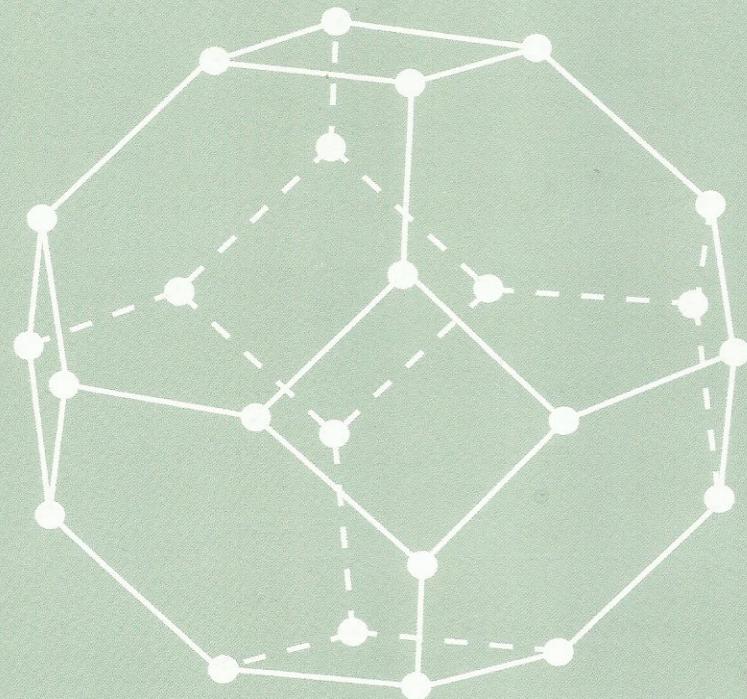


Российская академия наук

ISSN 0234-0860

Математический институт им. В.А. Стеклова  
Российской академии наук

# Дискретная математика



---

том 29 выпуск 1 \* 2017

Издаётся с 1989 г.  
Выходит 4 раза в год

Главный редактор А. М. ЗУБКОВ

Редакционная коллегия:

В. Б. АЛЕКСЕЕВ (зам. главного редактора)  
В. Б. КУДРЯВЦЕВ (зам. главного редактора)  
Э. А. ПРИМЕНКО (ответственный секретарь)

В. А. ВАТУТИН	Г. И. ИВЧЕНКО	В. Н. САЧКОВ
М. М. ГЛУХОВ	О. М. КАСИМ-ЗАДЕ	В. Н. ЧУБАРИКОВ
А. А. ГРУШО	Ю. И. МЕДВЕДЕВ	
Ю. Л. ЕРШОВ	В. Г. МИХАЙЛОВ	
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ	Б. А. ПОГОРЕЛОВ	

Редакционный совет:

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ Ю. В. МАТИЯСЕВИЧ С. А. СТЕПАНОВ  
И. Н. КОВАЛЕНКО Л. Я. САВЕЛЬЕВ Ю. И. ЯНОВ

Учредители: Российская академия наук,  
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

© Российская академия наук, 2017  
© Математический институт им. В.А. Стеклова  
Российской академии наук, 2017

# Дискретная математика

том 29 выпуск 1 \* 2017

## Содержание

Е. К. Алексеев, И. Б. Ошкин, В. О. Попов, С. В. Смышляев. Решение систем линейных уравнений булева типа с искаженной правой частью над полем действительных чисел . . . . .	3
К. С. Ефимов, А. А. Махнев. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {99, 84, 30; 1, 6, 54} . . . . .	10
А. М. Зубков, А. А. Серов. Предельная теорема для мощности образа подмножества при композиции случайных отображений . . . . .	17
О. А. Козлитин. О периодических свойствах полилинейных регистров сдвига . .	27
Р. М. Колпаков, М. А. Посыпкин. О наилучшем выборе переменной ветвления в задаче о сумме подмножеств . . . . .	51
С. Б. Родин. Линейно реализуемые автоматы . . . . .	59
П. В. Ролдугин. Верхняя оценка одной комбинаторной суммы . . . . .	80
И. В. Савицкий. Вычисления на регистровых машинах со счетчиками . . . .	95
А. В. Черемушкин. Об оценке уровня аффинности квадратичных форм . . . .	114
Н. Ю. Энатская. Комбинаторное представление схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам . . . . .	126
А. Л. Якимив. Предельная теорема для логарифма порядка случайного A-отображения . . . . .	136
Правила оформления рукописей в журнале «Дискретная математика» . . . . .	156

# Дискретная математика

том 29 выпуск 1 \* 2017

УДК 519.115

DOI <https://doi.org/10.4213/dm1410>

## Комбинаторное представление схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам

© 2017 г. Н. Ю. Энатская\*

Для схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам описаны способы представления, нумерации и перечисления ее исходов в терминах графа переходов, позволяющего, в частности, находить распределения на множестве исходов. Описано несколько методов статистического моделирования исходов схемы.

**Ключевые слова:** размещение частиц по ячейкам, неразличимые ячейки, статистическое моделирование

### 1. Введение

В статье предлагаются способы аналитического и графического представлений, а также нумерации исходов схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам.

Схему размещения различных частиц по неразличимым ячейкам можно интерпретировать как разбиение множества  $r$  различных элементов на  $k \leq \min(n, r)$  подмножеств, соответствующих  $k$  пустым ячейкам в схеме размещения частиц. Число исходов этой схемы при фиксированном  $k$  есть число Стирлинга второго рода  $S_2(k, n)$ . Производящая функция числа таких разбиений получена Л. Эйлером, а пентагональная теорема Эйлера позволяет вычислять числа разбиений при помощи деления формальных степенных рядов. Общее число разбиений  $n$ -элементного множества есть число Белла  $B_n$ ; для чисел Белла справедливы формулы  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \exp\{e^z - 1\}$  (о числах Стирлинга и Белла см., например, [1]).

В монографии Г. Эндрюса «Теория разбиений» (см. [3]) в основном изучаются разбиения натуральных чисел, т. е. представления чисел в виде сумм неубывающих натуральных чисел. Множество разбиений числа взаимно однозначно соответствует множеству разбиений совокупности неразличимых элементов. В [3] кратко упоминается также задача о разбиениях множества с различимыми элементами.

\*Место работы: НИУ «Высшая школа экономики», e-mail: nat1943@mail.ru

В книге Т. Мансура [4] представлена ретроспектива методов перечисления разбиений множеств, в том числе метод производящих функций, метод ядра, метод декомпозиции, метод генерации дерева, вычисление таблиц функций разбиения.

В статье М. Орлова [5] обсуждается алгоритмическая итерационная процедура перечисления исходов в схеме разбиений в предложенных автором форме и порядке их записи, а под итерациями понимаются шаги алгоритма пересчета от данного итогового исхода схемы к соседним: предыдущему и последующему.

В настоящей работе предлагается процедура прямого перечисления пумерованных исходов итерационного случайного процесса последовательного добавления элементов к схеме (или этапов перебора). Эта процедура дает наглядное графическое представление исходов на каждом шаге итерации с указанием вероятностей переходов от одного исхода к другому на ребрах графа. Она позволяет программным путем вычислять количества и вероятностные распределения исходов схемы при конкретных запасиях ее параметров, а также находить комбинаторные и вероятностные характеристики схемы, в том числе с учетом любых дополнительных ограничений. Предложенный способ перечисления устанавливает взаимно-однозначное соответствие между исходами схемы и их померами, его можно использовать для моделирования исходов схемы по их случайно выбираемым померам.

## 2. Перечисление всех исходов схемы

Схема описывает размещение  $r$  различных (запомерованных) частич по  $n$  неразличимым ячейкам. Исходы схемы определяются только составами ячеек без учета их порядка, поэтому можно задавать каждый исход  $n$ -мерным вектором  $R$ , компоненты которого — это наборы номеров частич, попавших в отдельные ячейки; ячейки перечисляются в порядке роста минимальных номеров частич в них. Отсутствие частич в ячейке обозначается пустой компонентой, а наборы частич, попавших в ячейки, будем записывать возрастающими последовательностями номеров частич, заключенными в круглые скобки. Можно задавать исход схемы также  $r$ -мерным вектором  $\bar{n}$ , в котором  $i$ -я компонента равна номеру компоненты вектора  $R$ , содержащей частичу с номером  $i$ . (Очевидно, каждая из этих форм однозначно определяет другую.)

Для ясности приведем пример записи исхода рассматриваемых размещений в двух приведенных выше формах  $R = ((r_1), \dots, (r_n))$  или  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$ .

**Пример 1.** Пусть  $n = 5$ ,  $r = 4$ , и в результате размещения частич по ячейкам в одну ячейку попала частича с номером 1, а в другую — частича с номерами 2, 3, 4. Такой исход можно записать двумя способами:  $R = (1, (2, 3, 4), 0, 0, 0)$  или  $\bar{n} = (1, 2, 2, 2)$ .

Построим случайный процесс равновероятного последовательного размещения частич с номерами  $1, 2, \dots, r$  по  $n$  ячейкам, т. е. при размещении частич в порядке их номеров. Под состоянием процесса  $E_j^{(i)}$  будем понимать  $j$ -й исход размещения  $i$  частич по  $n$  ячейкам. Будем пумеровать исходы, например, в первой форме записи, в порядке роста номера компоненты, описывающей состав ячейки, в которую попадает частича с номером  $i$ , исходя из состояний в аналогичном порядке на предыдущих шагах.

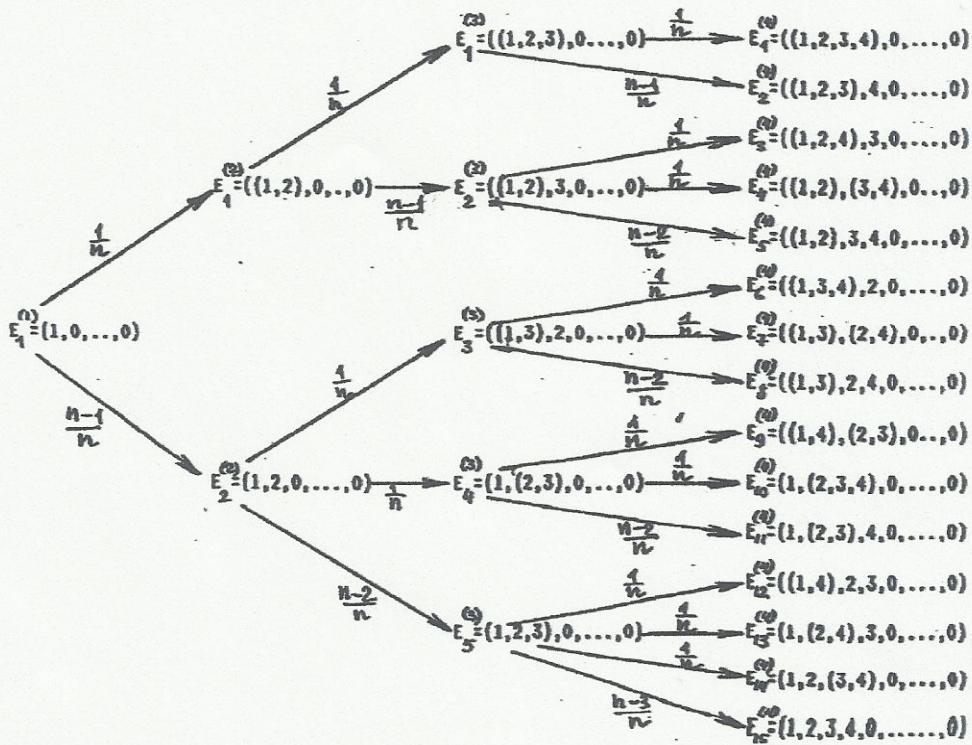


Рис. 1. Граф исходов схемы

Для иллюстрации рассмотрим пример пошаговой записи состояний процесса в описанной пумерации.

**Пример 2.** Пусть размещают  $r = 4$  частиц по  $n > 4$  ячейкам. На рис. 1 множество состояний описанного выше случайного процесса изображено вершинами графа, которые обозначаются первым (более наглядным) способом, а переходы между вершинами — ребрами.

Граф имеет один и тот же вид для первых четырех шагов при любых параметрах схемы  $r$  и  $n$ ,  $n > r \geq 4$ . На ребрах графа на рис. 1 указаны вероятности переходов из состояния в состояние.

### 3. Структура графа всех исходов схемы

Рассмотрим структуру введенного в п.2 графа с точки зрения его пошагового развития, т.е. опишем изменения исходов схемы при размещении очередной частицы.

Для этого введем понятие пучка переходов на каждом шаге размещения как совокупности ребер графа, выходящих из одного состояния. Размером пучка будем называть число таких ребер.

Обозначим через  $1_k$  исход с  $k$  пустыми ячейками и опишем динамику образования из него пучка за один шаг в виде структурной диаграммы, называемой дальше *правилом A*:

$$1_k \rightarrow k \cdot 1_k + I(n-k)1_{k+1}, \quad (1)$$

где  $I(z) = 0$  при  $z \leq 0$ ,  $I(z) = 1$  при  $z > 0$ . Записью  $A \cdot 1_k$  будем обозначать  $A$  подряд идущих в установленном порядке нумерации исходов вида  $1_k$ .

Уравнение (1) описывает возможные изменения исхода за один шаг. Для описания вариантов его дальнейших изменений при  $I(n-k) = 1$  введем обозначения

$$k \cdot 1_k + 1_{k+1} = w_k, \quad kw_k + w_{k+1} = w_{k,k}, \quad kw_{k,k} + w_{k+1,k+1} = w_{k,k,k}, \dots; \quad (2)$$

когда потребуется,  $d$ -кратность индекса  $k$  при величине  $w$  будем обозначать  $d * k$ . Тогда на  $(i+1)$ -м шаге из состояния  $1_k$  мы получим в описанном в п. 2 процессе совокупность состояний в порядке их нумерации в графе, определяемую рекуррентным соотношением

$$w_{i*k} = kw_{(i-1)*k} + w_{(i-1)*(k+1)}. \quad (3)$$

При  $I(n-k) = 0$  соотношение (3) принимает простой вид  $w_{i*k} = kw_{(i-1)*k}$ . Поэтому далее рассматривается случай  $I(n-k) = 1$ .

Для выявления пучковой структуры совокупности всех исходов  $N_{(i)}$  на каждом  $i$ -м шаге ( $i = 1, \dots, r$ ) будем для наглядности структуры каждого пучка заключать в круглые скобки, а коэффициентами перед скобками будем обозначать количества таких пучков. Для описания всех состояний схемы на данном шаге в установленном ранее в п. 2 порядке пучки указанного вида должны быть перечислены целиком с указанием их кратностей.

Теперь по рекурренте (3) с учетом (2) можно получить развертку процесса по состояниям в порядке их нумерации на каждом шаге. Представим, например, несколько шагов развития процесса из состояния  $1_k$  в терминах структуры пучка  $w_k$ :

$$\begin{aligned} 1_k &\rightarrow k \cdot 1_k + 1_{k+1} = w_k \rightarrow k(w_k) + (w_{k+1}) = \\ &= w_{kk} \rightarrow k(k(w_k) + (w_{k+1})) + (k+1)(w_{k+1}) + (w_{k+2}) = \\ &= kw_{kk} + w_{k+1k+1} = w_{kkk} \rightarrow k(k(k(w_k) + (w_{k+1})) + (k+1)(w_{k+1}) + \\ &+ (w_{k+2})) + (k+1)((k+1)(w_{k+1}) + (w_{k+2})) + (k+2)(w_{k+2}) + (w_{k+3}) = \\ &= kw_{kkk} + w_{k+1k+1k+1} = w_{kkkk} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Окончательно получаем рекуррентное соотношение для изменения пучковой структуры процесса за один шаг

$$w_{i*k} \rightarrow kw_{i*k} + w_{i*(k+1)} = w_{(i+1)*k}. \quad (4)$$

Приведем пример расчета общего числа исходов схемы  $N_{(r)}$  (т. е. при  $k = 1$ ), использующего (4), введя обозначение  $|w_{d*k}|$  для числа исходов, получающихся из

состояния  $1_k$  за  $d$  шагов. (Если  $d = 1$ , то  $|w_k|$  — размер пучка, выходящего из состояния  $1_k$ .) Тогда из (4), очевидно, следует, что

$$|w_{(i+1)*k}| = k|w_{i*k}| + |w_{i*(k+1)}|. \quad (5)$$

Соотношение (5) будем называть рекуррентной для размера пучка за  $(i+1)$  шагов из состояния  $1_k$ , т. е. для числа ребер, порожденных состоянием  $1_k$  через  $(i+1)$  шагов. (При  $i = 0$  получаем размер пучка, т. е. число ребер, выходящих из состояния  $1_k$ .) При  $I(n-k) = 0$  из (5) получаем  $|w_{(i+1)*k}| = k|w_{i*k}|$ .

**Пример 3.** Пусть  $n = 5$ ,  $r = 5$ . По формуле (5) рассчитаем  $N_{(5)} = |w_{1111}|$ , т. е. сумму размеров всех пучков, исходящих из начального состояния  $1_1$  за 5 шагов. Для этого последовательно находим:

$$\begin{aligned} |w_1| &= 2, \quad |w_2| = 3, \quad |w_3| = 4, \quad |w_4| = 5, \\ |w_{11}| &= 1|w_1| + |w_2| = 5, \quad |w_{22}| = 2|w_2| + |w_3| = 10, \quad |w_{33}| = 3|w_3| + |w_4| = 17, \\ |w_{111}| &= |w_{11}| + |w_{22}| = 15, \quad |w_{222}| = 2|w_{22}| + |w_{33}| = 37, \\ N_{(5)} &= |w_{1111}| = |w_{111}| + |w_{222}| = 52, \end{aligned}$$

что дает общее число  $N_{(5)} = B_5$  исходов схемы.

Пучковую структуру графа после  $i$ -го шага будем обозначать  $K_i$  и описывать в круглых скобках через запятую последовательностью размеров пучков исходов на  $i$ -м шаге в принятом в п. 1 порядке перечисления всех исходов схемы в количестве  $N_{(i-1)}$  общего числа исходов на  $(i-1)$ -м шаге, т. е.

$$K_i = (k_1^{(i)}, \dots, k_{N_{(i-1)}}^{(i)}), \quad (6)$$

где  $k_j^{(i)}$  — размер  $j$ -го пучка на  $i$ -м шаге,  $j = 1, \dots, N_{(i-1)}$ .

Размер любого пучка, очевидно, по (1) определяет виды входящих в него исходов, а именно, пучок размера  $k$  включает в себя  $(k-1)$  исходов  $1_k$  и  $I(n-k)$  исходов  $1_{k+1}$ , где функция  $I(z)$  определена выше. Отсюда получаем правило *B*: за один шаг из пучка размера  $k$  получается  $(k-1)$  пучков размера  $k$  и  $I(n-k)$  пучков размера  $k+1$ . Число пучков  $W_i$  на следующем  $i$ -м шаге совпадает с числом исходов  $N_{(i-1)}$  на  $(i-1)$ -м шаге

$$N_{(i-1)} = \sum_{j=1}^{N_{(i-2)}} k_j^{(i-1)} = W_i. \quad (6)$$

Таким образом, на  $i$ -м шаге можно получить запись пучковой структуры графа  $K_i$  по частям, получающимся при переходах из отдельных пучков в порядке их перечисления в пучковой структуре  $K_{i-1}$  указанных там размеров по рекуррентному правилу, называемому дальше *правилом B*:

$$K_{i-1} = (k_1^{(i-1)}, \dots, k_{W_{i-1}}^{(i-1)}) \rightarrow K_i = (k_1^{(i)}, \dots, k_{W_i}^{(i)}), \quad (7)$$

где  $W_i$  определено по (6), а вычисления пучковых структур графа на каждом шаге нужно определять последовательно, начиная с первого шага с одним пучком единичного размера (см. Рис. 1).

#### 4. Задача нумерации исходов

Задача нумерации исходов разбивается на прямую и обратную задачи нумерации, т. е. соответственно нахождение исхода рассматриваемой схемы в виде  $R$  или  $\bar{n}$  (см. п. 2) по его номеру  $N$  и нахождение порядкового номера  $N$  данного исхода вида  $R$  или  $\bar{n}$ . Решение этих задач использует пучковые структуры графа состояний процесса последовательного размещения  $r$  частич по ячейкам, описанного в п. 2 (см. Рис. 1). Будем считать эти структуры на каждом шаге размещения известными:  $K_i = (k_1^{(1)}, \dots, k_{N_{(i-1)}}^{(i)})$ , где  $N_{(i-1)}$  — введенное в п. 2 обозначение числа всех исходов на  $(i-1)$ -м шаге,  $i = 2, \dots, r$ . (Очевидно,  $K_1 = (1)$ .) Эти структуры по формулам п. 3 могут быть заранее вычислены вплоть до значения  $i = r$  и представлены в виде таблицы.

##### Прямая задача нумерации

Пусть заданы параметры схемы  $n$  и  $r$  и требуется по номеру  $N$  исхода схемы в порядке, принятом в п. 2, найти вид исхода. Вид исхода здесь удобно выбрать в форме  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$ : ее компоненты задают порядок перечисления составов ячеек, содержащих каждую из  $r$  размещаемых частич в порядке роста их номеров, т. е. фактически представляют собой номера исходов в пучках последовательных шагов в траектории  $T$  перехода в графе на Рис. 1 из начального состояния  $E_1^{(0)}$  в состояние с данным номером  $N$  на  $r$ -м шаге. Для дальнейшего введем обозначение  $N^{(i)}$  — номер исхода в траектории  $T$  на  $i$ -м шаге. Тогда заданный номер — это  $N = N^{(r)}$ , а траекторию  $T$  можно задавать последовательностью  $T = (N^{(1)}, \dots, N^{(r)})$ .

Вид исхода  $\bar{n}$  будем находить покомпонентно от  $n_r$  до  $n_1$ . Из пучковой структуры графа следует, что

$$n_r = N^{(r)} - \max_{s_r} \left\{ S : S = \sum_{j=1}^{s_r} k_j^{(r)} < N^{(r)} \right\}.$$

Тогда  $N^{(r-1)} = s_r + 1$  как номер пучка на  $r$ -м шаге или номер исхода на  $(r-1)$ -м шаге в траектории  $T$ . Отсюда по пучковой структуре  $K_{r-1}$  аналогично получаем, что

$$n_{r-1} = N^{(r-1)} - \max_{s_{r-1}} \left\{ S : S = \sum_{j=1}^{s_{r-1}} k_j^{(r-1)} < N^{(r-1)} \right\}.$$

Аналогично достраиваем  $\bar{n}$  до компоненты  $n_2$ , принадлежащей единственному пучку графа размера 2 на втором шаге, и всегда  $n_1 = 1$ .

Теперь на основании вышеприведенных рассуждений можно выписать общую формулу для нахождения компоненты  $n_i$  искомого вектора  $\bar{n}$  по пучковым структурам графа:

$$n_i = N^{(i)} - \max_{s_i} \left\{ S : S = \sum_{j=1}^{s_i} k_j^{(i)} < N^{(i)} \right\}, \quad (8)$$

где  $N^{(i)} = s_{i+1} + 1$ .

Покажем порядок вычислений по формулам (8) при решении прямой задачи нумерации на числовом примере.

**Пример 4.** Пусть  $n = 5$ ,  $r = 4$  и номер исхода схемы  $N = N^{(4)} = 10$ . Требуется найти вид исхода схемы в форме  $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  на 4-м шаге. Пучковые

структуры графа до  $r = 4$  имеют вид

$$K_1 = (1), \quad K_2 = (2), \quad K_3 = (2, 3), \quad K_4 = (2, 3, 3, 3, 4). \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} s_4 &= 3, \quad N^{(3)} = 4 \text{ и по (15) и (16)} n_4 = 10 - (2 + 3 + 3) = 2; \\ s_3 &= 1, \quad N^{(2)} = 2 \text{ и по (15) и (16)} n_3 = 4 - 2; \\ s_2 &= 0, \quad N^{(1)} = 1 \text{ и по (15) и (16)} n_2 = 2 - 0 = 2; \\ n_1 &= 1 \text{ всегда.} \end{aligned}$$

Окончательно  $\bar{n} = (1, 2, 2, 2)$ , что эквивалентно форме этого же состояния  $R = (1, (2, 3, 4), 0, 0, 0)$  в графе (Рис. 1) с номером 10 на 4-м шаге.

#### *Обратная задача нумерации*

Пусть даны параметры схемы  $n$  и  $r$  и требуется по данному виду исхода схемы найти его номер  $N$  в приписанном в п. 2 порядке нумерации исходов. Здесь также будет удобно представлять вид исхода в форме  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$ :  $n_i$  — номер состояния в пучке перехода на  $i$ -м шаге в траектории. Фактически  $\bar{n}$  задает эту траекторию.

В основе решения обратной задачи нумерации лежит пересчет траектории  $\bar{n}$  в траекторию  $T = (N^{(1)}, \dots, N^{(r)})$ , где  $N^{(i)}$  — номер состояния в графе на  $i$ -м шаге в пей,  $i = 1, \dots, r$ . Тогда искомый номер  $N = N^{(r)}$ , очевидно, получается из известной пучковой структуры графа (Рис. 1), описанной в п. 3, и из того, что число состояний на любом шаге равно числу пучков на следующем шаге и вычисляется по рекурренте для  $i$ -го шага:

$$N^{(i)} = \sum_{j=1}^{N^{(i-1)}-1} k_j^{(i)} + n_i$$

при  $N^{(1)} = 1$ . Тогда

$$N = N^{(r)} = \sum_{j=1}^{N^{(r-1)}-1} k_j^{(r)} + n_r \quad (9)$$

Для иллюстрации практического решения задачи по формулам (9) приведем пример.

**Пример 5.** Пусть  $n = 5$ ,  $r = 4$ ,  $\bar{n} = (1, 2, 2, 2)$ , т. е.  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 2$ ,  $n_4 = 2$ . Требуется найти его номер  $N$  на 4-м шаге.

Приведем по шагам описанные в п. 3 пучковые структуры графа до  $r = 4$ :

$$K_1 = (1), \quad K_2 = (2), \quad K_3 = (2, 3), \quad K_4 = (2, 3, 3, 3, 4).$$

Так как всегда  $N^{(1)} = 1$ , то расчеты начнем со 2-го шага. Тогда  $N^{(2)} = n_2 = 2$ ,  $N^{(3)} = \sum_{j=1}^{2-1} k_j^{(3)} = 2 + 2 = 4$ ,  $N = N^{(4)} = \sum_{j=1}^{4-1} k_j^{(4)} + n_4 = 2 + 3 + 3 + 4 = 10$ .

Таким образом, получаем траекторию  $T = (1, 2, 4, 10)$ , где  $N = N^{(4)} = 10$  — искомый номер исхода, что совпадает с визуальным результатом по графу (Рис. 1).

## 5. Вероятностное распределение исходов схемы и распределение статистики непустых ячеек

Используя предложенный порядок шумерации исходов схемы, их вероятностное распределение можно получить численно по графу перечисления исходов или по очевидной рекурренте для распределений чисел  $X_i$  непустых ячеек на  $i$ -й итерации  $P(X_i = k) = P(i, k)$  со следующими начальными свойствами:  $P(i, 0) = 0$  при  $i \neq 0$ ;  $P(1, 1) = 1$ ;  $P(i, k) = 0$  при  $i < k$ :

$$P(i+1, k) = (k/n)P(i, k) + ((n-k+1)/n)P(i, k-1), \quad (10)$$

где  $i = 1, \dots, r$ ,  $k = 1, \dots, \min(n, r)$ . Отсюда получим вероятностное распределение всех исходов схемы.

## 6. Способы моделирования исходов схемы

*Первый способ моделирования* (отбраковкой) состоит в описанном в [2] моделировании исходов более общей вспомогательной схемы размещения  $r$  различных частиц по  $n$  различимым ячейкам с общим числом исходов  $n^r$  с отбраковкой исходов, отличающихся друг от друга только порядком ячеек, что и даст исходы нашей схемы с перазличимыми ячейками. Сразу договоримся, что при моделировании возможно получение одипаковых исходов. Приведем теперь пошаговый алгоритм моделирования исходов нашей схемы (частицы различимы, ячейки перазличимы).

1. Методом, описанным в [2], моделируем  $L$  исходов вспомогательной схемы в виде перечисления в возрастающем порядке номеров попавших в последовательно идущие различные ячейки.
2. По результатам шага 1 выявляем группы совпадающих исходов, если они есть, считаем их размеры (пусть это будут числа  $l_1, \dots, l_s$ ) и оставляем только разные.
3. По результатам шага 2 упорядочиваем перечни составов ячеек в по росту минимального номера частицы в ячейке.
4. По результату шага 3 отбраковываем повторяющиеся исходы, оставляя только разные.
5. Если в результате шага 2 выявлены совпадающие исходы в указанных количествах, то по каждому такому исходу совершим шаги 3 и 4 и добавляем их результаты к ранее полученным.

*Второй способ моделирования* состоит в использовании результата решения прямой задачи нумерации, решенной выше, путем разыгрывания номера исхода схемы. Это «быстрый» способ моделирования по одному случайному числу  $X$ . Приведем пошаговый алгоритм.

1. Генерируем одно случайное число  $X$ .
2. Методом маркировки (см. [2]) по полученному в п.5 дискретному распределению вероятностей всех исходов схемы разыгрываем его номер  $N$  по одному случайному числу  $X$ .

3. По таблице соответствия всех перечисленных исходов и их номеров или, решая по полученным в п.4 формулам прямую задачу нумерации, получаем вид моделируемого исхода.

*Третий способ моделирования* состоит в прямом моделировании схемы. Для этого предварительно по найденному распределению вероятностей всех исходов схемы групповым суммированием находим распределение вероятностей числа пустых ячеек  $k = 1, \dots, \min(r, n)$  в ней.

Приведем пошаговый алгоритм.

1. По распределению числа пустых ячеек методом маркировки (см. [2]) разыгрываем его значение  $k$ .

2. По [2] моделируем один из  $C_r^k$  наборов минимальных номеров частиц в  $k$  пустых ячейках. Пусть это будут в порядке возрастания номера частиц  $v_1, \dots, v_k$ . (Очевидно,  $v_1 = 1$ ).

3. Будем моделировать исход схемы в виде перечней номеров частиц в  $k$  пустых ячейках, нумеруя ячейки и перечисляя их в порядке роста выбранных на шаге 2 минимальных номеров содержащихся в них частиц, разыгрывая размещение остальных  $r - k$  частиц по этим  $k$  уже различимым (минимальными номерами содержащихся в них частиц) ячейкам способами, не нарушающими условие минимальности номеров уже лежащих там частиц. Т. е. все  $v_2 - v_1 - 1 = v_2 - 2$  частиц с номерами, меньшими  $v_2$ , должны однозначно попасть в первую ячейку, все  $v_3 - v_2 - 1$  частиц с номерами, меньшими  $v_3$ , должны равновероятно попасть в первую или вторую ячейки, все  $v_4 - v_3 - 1$  частиц с номерами, меньшими  $v_4$ , должны равновероятно попасть в первую, вторую или третью ячейки и т.д., все  $v_k - v_{k-1} - 1$  частиц с номерами, меньшими  $v_k$ , должны равновероятно попасть в одну из  $(k - 1)$  ячеек с номерами от 1 до  $v_{k-1}$ , все  $r - v_k$  частиц должны равновероятно попасть в одну из  $k$  ячеек с номерами от 1 до  $k$ .

Поясним 3-й шаг алгоритма на примере.

*Пример 6.* Пусть  $r = 10$ ,  $k = 4$ , и в качестве минимальных номеров частиц в  $k = 4$  ячейках в шаге 2 выбраны номера  $v_1 = 1, v_2 = 3, v_3 = 6, v_4 = 8$ . Тогда  $3 - 1 - 1 = 1$ , значит, частица с номером 2 должна попасть в ячейку 1;  $6 - 3 - 1 = 2$ , значит, частицы с номерами 4 и 5 должны равновероятно попасть в одну из ячеек 1 и 2;  $8 - 6 - 1 = 1$ , значит, частица должна равновероятно попасть в одну из ячеек 1,2,3;  $10 - 8 = 2$ , значит, частицы с номерами 9 и 10 должны равновероятно попасть в одну из ячеек 1,2,3,4.

Отметим, что разные способы моделирования порождают разные распределения на множестве исходов.

Автор признателен Валентину Федоровичу Колчину за полезные обсуждения.

## Список литературы

1. Сачков В.Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, М: МЦНМО, 2004, 384 с.
2. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р., *Стохастическое моделирование*, М.: МИЭМ, 2012, 185 с.

3. Эндрюс Г., *Теория разбиений*, М.: Наука, 1982, 256 с.; пер. с англ.: Andrews G. E., “The Theory of Partitions”, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, 2, Addison-Wesley, 1976, 255 pp.
4. Mansour T., *Combinatorics of set partitions.*, CRC Press, 2012, 600 pp.
5. Orlov M., “Efficient generation of set partitions”, Technical Report, 2002, <https://www.cs.bgu.ac.il/~orlov/papers/partitions.pdf>.

Статья поступила 07.05.2015.  
Переработанный вариант поступил 15.07.2015.