

НАУЧТЕХЛИТИЗДАТ

Издательство научно-технической литературы

Поиск по сайту:

Искать

[На главную»](#)

[Контакты»](#)

[Журналы»](#)

[Новости»](#)

[Оформление статей»](#)

[Реклама в журналах»](#)

[Обратная связь»](#)

[Книги»](#)

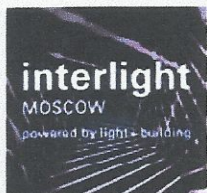
[О фирме»](#)

реклама



SEMIEXPO  
RUSSIA

semiexpo.ru



electrontech  
16-я Международная выставка

## Промышленные АСУ и контроллеры



Промышленные  
Контроллеры АСУ

Указатель статей, опубликованных в журнале "Промышленные АСУ и контроллеры" в №5 2017 года.

[<< Назад](#)

### ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

А.А. Третьяков, И.А. Елизаров, В.Н. Назаров  
Автоматизированная лабораторная установка для разработки и исследования технологий производства химических добавок в бетон

[Подробнее »](#)

А.В. Остроух  
Комплексная автоматизация технологических процессов производства бетонных блоков и двухслойной тротуарной плитки

[Подробнее »](#)

### ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ И УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Д.А. Чувиков  
Использование экспертной системы «Анализ ДТП» и системы имитационного моделирования VIRTUAL CRASH 3.0 для решения задач, поставленных перед экспертно-криминалистическим центром

[Подробнее »](#)

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

А.П. Шавва, В.А. Холопов  
Совместная обработка потоков видеоданных как метод повышения эффективности оптико-электронных систем

[Подробнее »](#)

Н.Ю. Энатская  
Анализ схем размещения частиц по ячейкам с ограничениями на заполнение ячеек

[Подробнее »](#)

### ОБОРУДОВАНИЕ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ И АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

А.С. Ганичев  
Метод оценки вероятных последствий отказа электроэнергетических установок с автоматическим резервированием

[Подробнее »](#)

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

А.Ю. Исаков, С.Ю. Исаков, А.Ю. Крайнов  
Особенности технологий беспроводной коммуникации в системах «мобильного доступа»

[Подробнее »](#)

### ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

разделы

[«О журнале](#)

[«Архив журнала](#)

[«Тематическая направленность журнала](#)

[«Правила оформления статей](#)

[«Этапы рассмотрения и публикации статей](#)

[«Правила рецензирования статей](#)

[«Редакционная и профессиональная этика](#)

[«Обнаружение плагиата](#)

[«Редакция и редакционная коллегия](#)

[«Новости журнала](#)

журналы

Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика

Приборостроение и средства автоматизации. Энциклопедический справочник

Промышленные АСУ и контроллеры

Экологические системы и приборы

Авиакосмическое приборостроение

Инженерная физика

История науки и техники

Музыка и время





Н.Р. Юсупбеков,  
Ш.М. Гулямов, Н.Б.  
Усманова, Д.А.  
Мирзаев

Прогнозирование ошибок в задачах обеспечения  
надежности программного обеспечения: подход на  
основе ассоциативных правил

[Подробнее »](#)

#### ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ

М.Ю. Титов, О.В.  
Трубиенко

Анализ основных подходов в создании надежной  
системы передачи информации

[Подробнее »](#)

А.А. Чертков

Кибербезопасность в промышленной  
автоматизации

[Подробнее »](#)

#### НОВОСТИ СИСТЕМОСТРОЕНИЯ

[Подробнее »](#)

Музыковедение

Бюллетень Главного  
ботанического сада

Всеобщая история

Справочник инженера

Прикладная физика и  
математика

Известия академии  
инженерных наук им.  
А.М. Прохорова

#### Последние новости:

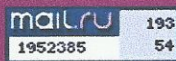
Сформирована деловая  
программа выставок  
«Передовые Технологии  
Автоматизации. ПТА-Урал  
2017» и «Электроника-  
Урал 2017»

Итоги V Международного  
Съезда TELECOMTREND

ADVANTECH для  
промышленной  
автоматизации на  
выставке «ПТА-Урал  
2017»: руководство к  
действию

«Автоматизация.  
Электроника-2018» 21-я  
международная  
специализированная  
выставка «Электротех.  
Свет-2018» 18-я  
международная  
специализированная  
выставка

Выставки по  
автоматизации и  
электронике «ПТА-Урал  
2017» и «Электроника-  
Урал 2017» состоятся в  
Екатеринбурге



© Издательство "НАУЧТЕХЛИТИЗДАТ",  
2005-2017

Система управления разработана в: [ananskikh.ru](http://ananskikh.ru)





НАУЧТЕХЛИТИЗДАТ

Издательство научно-технической литературы

Поиск по сайту:

Искать

## Промышленные АСУ и контроллеры



**Промышленные  
Контроллеры АСУ**

Аннотация к статье

<< Назад

**Анализ схем размещения частиц по ячейкам с ограничениями на заполнение ячеек**

**Н.Ю. Энатская**

Решаются задачи нахождения количества исходов в схемах размещения различных и неразличимых частиц по различным и неразличимым ячейкам при разных ограничениях на уровни заполнения ячеек, а также устанавливается порядок перечисления допустимых исходов и вычисляются их вероятностные распределения.  
Ключевые слова: схема размещений с ограничением; частицы различимы, неразличимы; ячейки различимы, неразличимы.

Контактная информация: E-mail: nat1943@mail.ru

Стр. 42-45.

разделы

«О журнале

«Архив журнала

«Тематическая направленность журнала

«Правила оформления статей

«Этапы рассмотрения и публикации статей

«Правила рецензирования статей

«Редакционная и профессиональная этика

«Обнаружение плагиата

«Редакция и редакционная коллегия

«Новости журнала

журналы

Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика

Приборостроение и средства автоматизации. Энциклопедический справочник

Промышленные АСУ и контроллеры

Экологические системы и приборы

Авиакосмическое приборостроение

Инженерная физика

История науки и техники

Музыка и время

На главную»

Контакты»

Журналы»

Новости»

Оформление статей»

Реклама в журналах»

Обратная связь»

Книги»

О фирме»

реклама



**SEMIEXPO  
RUSSIA**

semexpo.ru

**interlight  
MOSCOW**

powered by light + building

**electrontech**

16-я  
Международная  
выставка





*Н.Ю. Энатская*  
 канд. физ.-мат. наук, доцент  
 E-mail: nat1943@mail.ru  
 (Национальный исследовательский университет  
 «Высшая школа экономики»)  
 Москва, Российская Федерация

**Анализ схем размещения частиц по ячейкам с ограничениями на заполнение ячеек**

*Решаются задачи нахождения количества исходов в схемах размещения различных и неразличимых частиц по различным и неразличимым ячейкам при разных ограничениях на уровни заполнения ячеек, а также устанавливается порядок перечисления допустимых исходов и вычисляются их вероятностные распределения.*

*Ключевые слова:* схема размещения с ограничением; частицы различные, неразличимы; ячейки различные, неразличимы.

*N. Yu. Enatskaya*  
 Cand. of Phys.-Math. Sciences, Associate Professor  
 E-mail: nat1943@mail.ru  
 (Higher School of Economics – National Research University)  
 Moscow, Russian Federation

**The Analysis Scheme of Arrangement with Restriction on the Filling of Cells**

*We decide the problems of finding of quantities of outcomes in the scheme of the arrangement of distinguishable and indistinguishable particles to distinguishable and indistinguishable cells under different restrictions on the levels of the filling of cells and we establish the order of enumeration admissible outcomes establish and we calculate their probability distribution.*

*Keywords:* arrangement scheme with restrictions; particles distinguishable, indistinguishable; cells distinguishable, indistinguishable.

**Введение**

Хорошо известны (например, в работе [1]) численности исходов в схемах размещения различных и неразличимых частиц по различным ячейкам без ограничений на их заполнения и с ограничением: ячейка вмещает ровно одну частицу, что представляют комбинаторные числа следующей таблицы с обозначениями:  $p$  – различные,  $np$  – неразличимые частицы; с огр. – с данным выше ограничением, без огр. – без ограничений;  $n$  – число ячеек,  $r$  – число частиц;

	$p$	$np$
с огр.	$A_n^r$	$C_n^r$
без огр.	$n^r$	$C_{n+r-1}^r$

где  $A_n^r$  и  $C_n^r$  означают соответственно количества исходов в схемах размещения и сочетания.

Расширим область исследования схем размещения частиц по ячейкам на более общие ограничения для уровней заполнения  $\{\eta_i\}, i = \overline{1, n}$  вида  $l_1 \leq \eta_i \leq l_2$ , где  $l_1$  и  $l_2$  – целые числа, удовлетворяющие условию  $0 \leq l_1 < l_2 \leq n$ , при числе частиц в пределах  $nl_1 \leq r \leq nl_2$ , а также введем в рассмотрение случай неразличимых ячеек. Для ссылок выделим условия ограничений отдельной формулой:

$$l_1 \leq \eta_i \leq l_2, \quad i = \overline{1, n}, \quad nl_1 \leq r \leq nl_2. \quad (1)$$

**§1. Схема размещения  $r$  различных частиц по  $n$  различным ячейкам с ограничениями (1) (схема 1)**

Общее число исходов схемы  $N_1$  определяется всеми допустимыми по условию (1) вариантами заполнения ячеек по их численностям и составам.

Перебор разных составов ячеек при их фиксированных численностях заполнений осуществляется по схеме сочетаний, а перебор разных, допустимых условием (1) численностей заполнений ячеек, производится



перемножением сумм вариантов уровней заполнений каждой ячейки, обеспечивающих возможность выполнения условия (1) для всех последующих ячеек.

Итак, перебор составов частиц при их фиксированных количествах  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  задаются в порядке нумерации ячеек числами

$$C_r^{\eta_1}, C_{r-\eta_1}^{\eta_2}, C_{r-\sum_{i=1}^2 \eta_i}^{\eta_3}, \dots, C_{r-\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i}^{\eta_n}, C_{r-\sum_{i=1}^n \eta_i} = 1,$$

а перебор допустимых уровней заполнения определяется суммированием для ячеек от первой до  $n$ -ой соответственно в пределах, допускающих возможность заполнения с ограничениями (1) остальных ячеек, т. е. в пределах от  $L_1^{(1)}$  до  $L_2^{(1)}$ , где  $i$  – номер ячейки, а эти пределы принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &= l_1, L_2^{(1)} = l_2; \\ L_1^{(2)} &= \max(l_1, r - \eta_1 - (n-1)l_2), \\ L_2^{(2)} &= \min(l_2, r - \eta_1 - (n-1)l_1); \\ L_1^{(3)} &= \max(l_1, r - \sum_{i=1}^2 \eta_i - (n-2)l_2), \\ L_2^{(3)} &= \min(l_2, r - \sum_{i=1}^2 \eta_i - (n-2)l_1); \\ &\dots \\ L_1^{(j)} &= \max(l_1, r - \sum_{i=1}^{j-1} \eta_i - (n-j+1)l_2), \\ L_2^{(j)} &= \min(l_2, r - \sum_{i=1}^{j-1} \eta_i - (n-j+1)l_1); \\ &\dots; \\ j &= \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Введем обозначение  $R_j = r - \sum_{i=1}^{j-1} \eta_i, j = \overline{1, n}$ . Тогда для искомого числа  $N_1$  получим формулу:

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{R_1^{(1)}} C_{R_1}^{\eta_1} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{R_2^{(2)}} C_{R_2}^{\eta_2} \dots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{R_n^{(n)}} C_{R_n}^{\eta_n} = \\ &= \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{R_1^{(1)}} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{R_2^{(2)}} \dots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{R_n^{(n)}} \frac{r!}{\eta_1! \eta_2! \dots \eta_n!} \end{aligned}$$

**§2. Схема размещения  $r$  неразличимых частиц по  $n$  различным ячейкам с ограничениями (1) (схема 2)**

Общее число исходов схемы  $N_2$  определяется согласно работе [2] как коэффициент при  $x^{r-nl_1}$  в разложении функции  $\varphi(x) = ((1-x^s)/(1-x^l))^n$ , где  $s = l_2 - l_1 + 1$ .

В работе [3] получена явная формула для числа  $N_2$ , обозначенного как  $N(r, n, l)$ , где  $l = l_2 + 1$  и  $l_1 = 1$ , т. е. при  $l_1 = 1, l_2 = l - 1$ .

Искомое число  $N_2$  в общем случае ограничений (1) легко пересчитывается из полученной в работе [3] формулы для  $N(r, n, l)$  путем следующего рассуждения: для размещения частиц по ячейкам с ограничениями (1)

положим во все ячейки по  $(l_1 - 1)$  частиц, на что уйдет  $n(l_1 - 1)$  частиц, а останется  $r^*$  частиц:  $r^* = r - n(l_1 - 1)$ . Теперь для выполнения условий (1) нужно дополнительно разместить по  $n$  ячейкам без пустых ячеек  $r^*$  частиц так, чтобы в каждой ячейке было меньше  $l = l_2 - l_1 + 1$  частиц, т. е. в обозначениях [3] числом способов  $N(r^*, n, l) = N(r - n(l_1 - 1), n, l_2 - l_1 + 1)$ , что согласно работе [3] принимает следующую явную вид:

$$\begin{aligned} N_2 &= N(r - n(l_1 - 1), n, l_2 - l_1 + 1) = \\ &= \sum_{L_{1,2}} \sum_{L_{3,2}} \dots \sum_{L_{n,2}} C_n^{L_{1,2}} C_{L_{1,2}}^{L_{2,2}} C_{L_{2,2}}^{L_{3,2}} \dots C_{L_{n-2,2}}^{L_{n,2}} \end{aligned}$$

при  $n l_1 \leq r \leq n(l_2 - 1)$  ( $N_2 = 0$  в противном случае), где  $L_{j,2}$  – число непустых ячеек, когда в каждой меньше  $j$  частиц,  $L_{j,2} \leq L_{j+1,2} \leq L_{j,2}^*$  [ $Z$ ] – целая часть числа  $Z$ ;

$$\begin{aligned} L_{j,2} &= \left\lceil \frac{r - n - \sum_{i=j+1}^{k-2} L_i + j - 1}{j} \right\rceil; \\ L_{j,2}^* &= \min(n, r - n - \sum_{i=j+1}^{k-2} L_i). \end{aligned}$$

**§3. Схема размещения  $r$  неразличимых частиц по  $n$  различным ячейкам с ограничениями (1) (схема 3)**

Общее число исходов схемы  $N_3$  вычислено в явном виде в работе [4] в обозначении  $N_3 = N(r, n)$  с односторонними ограничениями  $l_1 = 1$ . В случае одностороннего нижнего предела для заполнения  $\eta$  ячеек вида  $\eta \geq l_1$  число исходов схемы пересчитывается из результата  $N(r, n)$  в работе [4] из следующих рассуждений: положим в каждую ячейку по  $(l_1 - 1)$  частиц, на это уйдет  $(l_1 - 1)n$  частиц, а остальные  $r^* = r - (l_1 - 1)n$  разместим по  $n$  ячейкам  $N_3 = N(r^*, n)$  способами, вычисленными в работе [4]. Таким образом, при ограничениях  $l_1 \leq \eta \leq l_2 - r$  в обозначениях работы [4] имеем:

$$N_3 = N(r - (l_1 - 1)n, n).$$

В общем случае при  $l_2 \leq r$  число исходов схемы с ограничениями (1) будем определять методом графов [5], т. е. путем построения графа случайного процесса последовательного равновероятного поединичного размещения частиц по ячейкам с нумерацией состояний процесса, в порядке попадания последней размещенной частицы в ячейку с растущим уровнем заполнения на предыдущем шаге.

Обозначим через  $E_j^{(i)}$  –  $j$ -е, состояние на  $i$ -м шаге (после размещения  $i$ -й частицы), которое описывается вектором  $\bar{\mu}^{(i)} = (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \dots, \mu_j^{(i)})$ , где  $\mu_j^{(i)}$  – число ячеек на  $i$ -м шаге, содержащих ровно  $j$  частиц ( $\sum_{j=1}^i \mu_j^{(i)} = n, \sum_{j=1}^i j \mu_j^{(i)} = i, j = \overline{0, i}$ ) или вариационным рядом заполнения  $n$  ячеек – вектором

$$\bar{\eta}^{(i)} = (\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \dots, \eta_{(i)}).$$



В общем виде при разных параметрах  $r, n, I_1, I_2$  можно рассматривать граф случайного процесса заданного размещения частиц не с начального состояния всех пустых ячеек, т. е. не полный, а частичный граф, описывающий случайный процесс размещения частиц, начинающийся с заполнения всех  $n$  ячеек до уровня  $I_1$  в каждой, т. е. в терминах векторов  $\mu^{(i)}$ , соответствующих состояниям процесса, первые шаги графа состояний процесса будут иметь вид, представленный на рисунке 1.

Здесь в начальном состоянии  $E_1^{(0)}$  единственная ненулевая компонента  $n$  стоит на  $(I_1 + 1)$ -м месте, а в дальнейших шагах ненулевые компоненты могут начинаться с  $(I_1 + 1)$ -го места в векторах от  $\mu^{(1)}$  до  $\mu^{(r)}$ .

Для иллюстрации перечисления допустимых состояний процесса рассмотрим числовой пример.

**Пример.** Пусть  $r = 10, n = 3, I_1 = 2, I_2 = 5$ . Выпишем граф состояний процесса с начальным состоянием  $\mu^{(0)} = (0, 0, 3)$  или  $\eta_{(3)} = (2, 2, 2)$ , соответствующим обозначению  $E_1^{(0)}$ , поэтому все возможные исходы схемы с данными параметрами получаются на 4-м шаге размещения в терминах векторов  $\mu^{(i)}$  по графу (рис. 2), где в терминах вектора  $\eta_{(i)}$  исходы на 4-м шаге представляют собой следующие вариационные ряды заполнения ячеек:

$$E_1^4 = (3, 3, 4), E_2^4 = (2, 4, 4), E_3^4 = (2, 3, 5), E_4^4 = (2, 2, 6),$$

откуда видно, что допустимыми являются первые три состояния:  $E_1^4, E_2^4, E_3^4$ , т. к. в состоянии  $E_4^4$  заполнение  $6 > I_2 = 5$ .

Вероятности получения допустимых исходов  $E_1^4, E_2^4, E_3^4$  легко вычисляются по рисунку 2, где на ребрах – стрелках переходов из состояния в состояние, указаны их вероятности. Поэтому по траекториям графа от  $E_1^{(4)}$  (или  $E_1^{(3)}$ ) до данного исхода, из допустимых на 4-м шаге, вычисляем их вероятности:

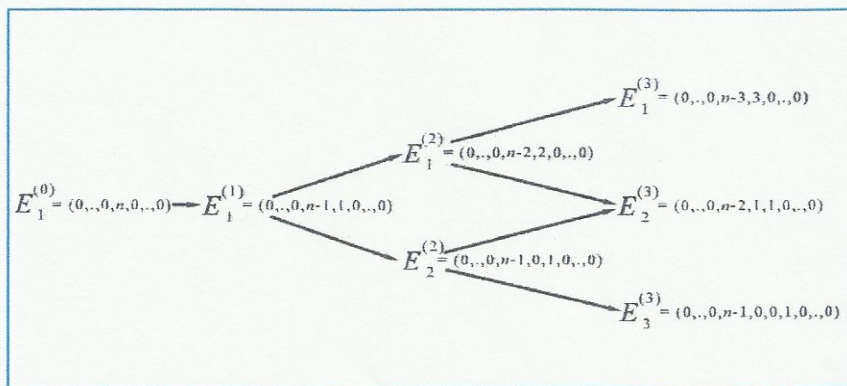


Рис. 1

$$P(E_1^{(4)}) = P(1, 1, 1, 1) + P(1, 1, 2, 1) + P(1, 2, 2, 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{27};$$

$$P(E_2^{(4)}) = P(1, 1, 2, 2) + P(1, 2, 2, 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{27};$$

$$P(E_3^{(4)}) = P(1, 1, 2, 3) + P(1, 2, 2, 3) + P(1, 2, 3, 3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27};$$

где обозначение  $P(a, b, c, d)$  означает вероятность траектории в графе  $E_a^{(1)} \rightarrow E_b^{(2)} \rightarrow E_c^{(3)} \rightarrow E_d^{(4)}$ . Отсюда вероятность попасть в допустимое состояние есть

$$\frac{12}{27} + \frac{6}{27} + \frac{8}{27} = \frac{26}{27}.$$

Для проверки вычислений найдем вероятность недопустимого состояния  $E_4^4$ :

$$P(E_4^{(4)}) = P(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27},$$

т. е. получаем, что  $\sum_{j=1}^4 P(E_j^{(4)}) = 1$ .

**Замечание.** Для перебора траекторий при вычислении вероятности фиксированного состояния предлагается в силу единственности начального состояния производить их просмотр справа налево и сверху вниз.

**§4. Схема размещения  $r$  различных частиц по  $n$  неразличимым ячейкам с ограничениями (1) (схема 4)**

Общее число исходов (схемы 3)  $N_3$  представлено алгоритмически в §3 через перечисление части исходов схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам, удовлетворяющих ограничениям (1), каждое из которых соответствует определенному вычисляемому числу исходов в исследуемой схеме 4 по формуле (1) согласно работе [5] для каждого  $j$ -го исхода схемы 3 ( $j = 1, N_3$ ):

$$S_j = \prod_{i=1}^r C_{n-\sum_{k=1}^{i-1} h_k^{(i)}}^{h_i^{(i)}} \frac{(i \mu_i^{(i)})!}{(i!)^{h_i^{(i)}} (\mu_i^{(i)})!},$$

тогда  $N_4 = \sum_{j=1}^{N_3} S_j$ , где  $N_4$  – искомое число исходов схемы 4.

Для перечисления состояний схемы 4 достаточно уметь перечислять все состояния схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам (алгоритм этого приведен в работе [6] с выбором



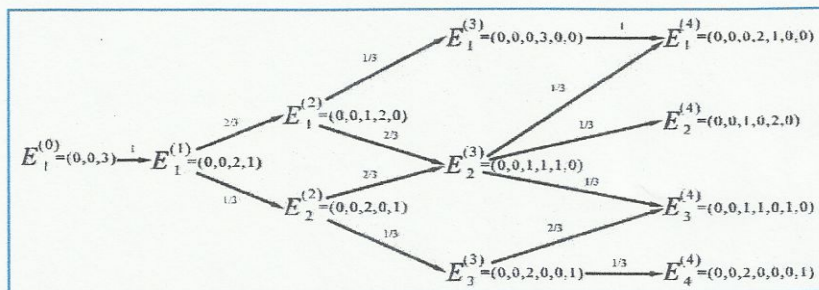


Рис. 2

из них допустимых в исследуемой схеме 4 состояний, что в терминах векторов  $\mu_j^r$  на  $r$ -м шаге соответствуют состояниям, описанным векторами на  $\{\mu_j^r\}$   $r$ -м шаге согласно работе [6] с нулевыми компонентами вне промежуточного компонента от  $(I_1 + 1)$ -й до  $(I_2 + 1)$ -й.

Вероятности допустимых состояний схемы 4 представляют собой соответствующую часть вероятностного распределения исходов схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам, полученного в работе [6].

Список литературы

1. Ширяев А.Н. *Вероятность*. М.: Наука, 1980. 575 с.
2. Виленкин Н.Я. *Комбинаторика*. М.: Наука, 1969. 323 с.
3. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. *Определение числа N размещений неразличимых шаров по различным ящикам с ограничением уровня их заполнения* / Материалы международной научно-практической конференции «Инновационные информационные технологии», Прага-2012, Апрель 23–27. С. 341–347.
4. Энатская Н.Ю., Колчин А.В., Хакимуллин Е.Р. *Анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам* / Труды Карельского научного центра РАН, г. Петрозаводск, 2014. С. 143–154.
5. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. *Анализ схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам* // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*. 2015, № 1. С. 19–24.

6. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. *Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики* // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*. 2014, № 8. С. 15–21.

References

1. Shiryayev A.N. *Veroyatnost [Probability]*. M.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»]. 1980. 575 p.
2. Vilenkin N.Ya. *Kombinatorika [Combinatoric]*. M.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»]. 1969. 323 p.
3. Enatskaya N.Yu., Khakimullin Ye.R. *Opreделение chisla N razmeshcheniy nerazlichimyykh sharov po razlichimyy yashchikam s ogranicheniem urovnya ikh zapolneniya [Definite of the number N of allocations indistinguishable balls to indistinguishable boxes]*. Materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Innovatsionnye informatsionnye tekhnologii» [Material of international research-practical conference «Innovation information technologies»]. Praga-2012, April 23–27, pp. 341–347.
4. Enatskaya N.Yu., Kolchin A.V., Khakimullin Ye.R. *Analiz skhemy razmeshcheniya nerazlichimyykh chastits po nerazlichimyy yacheykam [Analysis of a scheme of allocation indistinguishable particles to indistinguishable cells]*. Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN [Proceedings of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Matematical modelling and information technologies series]. Petrozavodsk, 2014, pp. 143–154.
5. Enatskaya N.Yu., Khakimullin Ye.R. *Analiz skhemy razmeshcheniya razlichimyykh chastits po nerazlichimyy yacheykam [Analysis of a scheme of allocation distinguishable particles to indistinguishable cells]*. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and Systems. Monitoring, Control and Diagnostics]. 2015, no. 1, pp. 19–24.
6. Enatskaya N.Yu., Khakimullin Ye.R. *Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitelnoy kombinatoriki [Method graphs for solving enumerative combinatorics]*. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and Systems. Monitoring, Control and Diagnostics]. 2014, no. 8, pp. 15–21.

Информация об авторах

Энатская Наталья Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент  
 E-mail: nat1943@mail.ru  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 101000, Российская Федерация, Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Information about the authors

Enatskaya Nataliya Yurevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor  
 E-mail: nat1943@mail.ru  
 Higher School of Economics – National Research University  
 101000, Russian Federation, Moscow, Str. Myasnitskaya, 20

www.priboi.ru