

Поиск по сайту:

- [На главную»](#)
- [Контакты»](#)
- [Журналы»](#)
- [Новости»](#)
- [Оформление статей»](#)
- [Реклама в журналах»](#)
- [Обратная связь»](#)
- [Книги»](#)
- [О фирме»](#)

реклама

Промышленные АСУ и контроллеры



Указатель статей, опубликованных в журнале "Промышленные АСУ и контроллеры" в №2 2017 года.

<< Назад

ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

- | | | |
|-----------------|--|-----------------------------|
| Е.В. Огорельцев | Противоаварийная защита на базе Triconex Safety View: новый взгляд на эксплуатацию опасных производственных объектов | Подробнее » |
| Ф.А. Мкртчян | Анализ эффективности мониторинговых систем дистанционного зондирования | Подробнее » |

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

- | | | |
|---------------|---|-----------------------------|
| В.В. Климов | Методика решения радиометрических задач при исследовании природных ресурсов | Подробнее » |
| Н.Ю. Энатская | Комбинаторный анализ схемы перестановок с повторением и близкой схемы | Подробнее » |
| С.М. Афонин | Структурно-параметрические модели электромагнитоупругих актуаторов для нано- и микроманипуляторов | Подробнее » |

ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ

- | | | |
|------------------------------|--|-----------------------------|
| А.А. Двилянский, В.А. Иванов | Методология оценки комплексной защищенности объектов инфокоммуникационных систем от воздействия деструктивных электромагнитных излучений (электронных кибератак) | Подробнее » |
| С.В. Скрыль, А.В. Щербаков | Методические основания для реализации процедур оптимизации комплексного технического контроля обеспечения защищенности информации на объектах информатизации специального назначения | Подробнее » |

ОБОРУДОВАНИЕ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ И АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

- | | | |
|---------------|--|-----------------------------|
| С.Н. Медведев | Шкафы SmartHVAC: гибкое конфигурируемое решение для энергоэффективной вентиляции | Подробнее » |
|---------------|--|-----------------------------|

СЕТЕВЫЕ МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КОНТРОЛЛЕРЫ

разделы

- [«О журнале](#)
- [«Архив журнала](#)
- [«Тематическая направленность журнала](#)
- [«Правила оформления статей](#)
- [«Этапы рассмотрения и публикации статей](#)
- [«Правила рецензирования статей](#)
- [«Редакционная и профессиональная этика](#)
- [«Обнаружение плагиата](#)
- [«Редакция и редакционная коллегия](#)
- [«Новости журнала](#)

журналы

-
Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика
-
Приборостроение и средства автоматизации. Энциклопедический справочник
-
Промышленные АСУ и контроллеры
-
Экологические системы и приборы
-
Авиакосмическое приборостроение
-
Инженерная физика
-
История науки и техники
-
Музыка и время
-



В.Н. Русанов, С.В. Куликов

Самодиагностируемый резервированный контроллер для ответственных применений

[Подробнее »](#)

ЭКОНОМИКА АВТОМАТИЗАЦИИ

С.А. Семёнов

Энергосервис в ритейле: как улучшить бизнес-результаты торговой сети?

[Подробнее »](#)

НОВОСТИ СИСТЕМОСТРОЕНИЯ

[Подробнее »](#)

Музыковедение

Бюллетень Главного ботанического сада

Всеобщая история

Справочник инженера

Прикладная физика и математика

Известия академии инженерных наук им. А.М. Прохорова

Последние новости:

Форум-выставка «Передовые Технологии Автоматизации. ПТА - Санкт-Петербург 2017» приглашает участников

Евроазиатский промышленный форум-выставка Астана 2017

Программа мероприятий международных специализированных выставок «Автоматизация. Электроника - 2017», «Электротех. Свет - 2017»

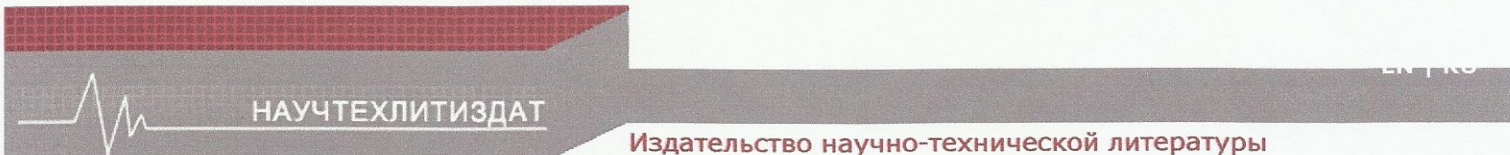
«Автоматизация. Электроника-2017» 20-я международная специализированная выставка. «Электротех. Свет-2017» 17-я международная специализированная выставка

Компания «Далькиа» приобретает «Фениче Рус»



© Издательство "НАУЧТЕХЛИТИЗДАТ", 2005-2017

Система управления разработана в: ananskikh.ru



Поиск по сайту:

Искать

- На главную»
- Контакты»
- Журналы»
- Новости»
- Оформление статей»
- Реклама в журналах»
- Обратная связь»
- Книги»
- О фирме»

Промышленные АСУ и контроллеры



Аннотация к статье

<< Назад

Комбинаторный анализ схемы перестановок с повторением и близкой схемы

Н.Ю. Энатская

Решается задача перечисления всех исходов в классической схеме перестановок с повторением и в близкой схеме с ее укрупненными исходами, задача нумерации исходов и их моделирования.
 Ключевые слова: перестановка с повторением; близкая схема; задача нумерации; моделирование.

Контактная информация: E-mail: nat1943@mail.ru

Стр. 19-22.

разделы

- «О журнале
- «Архив журнала
- «Тематическая направленность журнала
- «Правила оформления статей
- «Этапы рассмотрения и публикации статей
- «Правила рецензирования статей
- «Редакционная и профессиональная этика
- «Обнаружение плагиата
- «Редакция и редакционная коллегия
- «Новости журнала

журналы

- Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика
- Приборостроение и средства автоматизации. Энциклопедический справочник
- Промышленные АСУ и контроллеры
- Экологические системы и приборы
- Авиакосмическое приборостроение
- Инженерная физика
- История науки и техники
- Музыка и время

реклама



Н.Ю. Энатская
канд. физ.-мат. наук, доцент
E-mail: nat1943@mail.ru
(Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»)
Москва, Российская Федерация

Комбинаторный анализ схемы перестановок с повторением и близкой схемы

Решается задача перечисления всех исходов в классической схеме перестановок с повторением и в близкой схеме с ее укрупненными исходами, задача нумерации исходов и их моделирования.

Ключевые слова: перестановка с повторением; близкая схема; задача нумерации; моделирование.

N. Yu. Enatskaya
Cand. of Phys.-Math. Sciences, Associate Professor
E-mail: nat1943@mail.ru
(Higher School of Economics – National Research University)
Moscow, Russian Federation

Combinatorial Analysis of the Permutation Scheme with Repetition and Close Scheme

We solve the problem of enumeration of all outcomes and enumeration, problem on classical scheme of permutations with repetition and close scheme with extend outcomes.

Keywords: permutations with repetition; close scheme; enumeration problem; modelling.

Введение

Классическая схема перестановок с повторением возникает при делении n различных элементов на k различных частей (групп) (в данном ниже порядке перечисления их размеров), численностями $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, что соответствует схеме размещений n различных частиц по k различным ячейкам с заданными уровнями их заполнения:

$$n_1, n_2, \dots, n_k, \quad \left(\sum_{i=1}^k n_i = n \right).$$

Исходы этой схемы будем задавать в фигурных скобках последовательностью составов частей (ячеек) в форме номеров попавших в них элементов (частиц) в возрастающем порядке, заключенных в круглые скобки. (Указанное упорядочение номеров элементов в каждой скобке означает несущественность их порядка в каждой части и устанавливается для удобства сравнения исходов схемы.)

Приведем пример записи исхода схемы.

Пример 1. Пусть $n = 10$, $\bar{n} = (4, 3, 3)$ и элементы имеют номера от 0 до 9. Тогда один из требуемых исходов будем записывать в виде $\{(1, 4, 6, 9), (2, 3, 5), (0, 7, 8)\}$.

Наряду с этой схемой будем рассматривать аналогичную схему, отличную от первой неразличимостью

порядка частей при делении элементов или неразличимостью ячеек при размещении частиц. Указанные отличия схем и означают укрупнение состояний второй схемы по сравнению с первой. Тогда исходы второй схемы, очевидно, определяются вектором $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$, где μ_i – число частей (групп) размера i , и составами этих частей.

Исходы второй схемы будем задавать в фигурных скобках последовательностью составов частей в порядке увеличения их размеров, а элементы внутри каждой части будем перечислять по возрастанию номеров, входящих в них элементов. Части одинакового размера будем писать в порядке роста чисел, получаемых из упорядоченных номеров их элементов. Составы частей заключаем в круглые скобки (тогда указанное упорядочение скобок и номеров элементов в каждой скобке означает соответственно неразличимость частей и несущественность порядка элементов в каждой части и устанавливается для удобства сравнения исходов схемы). Приведем пример записи исхода схемы.

Пример 2. Пусть $n = 10$, $\bar{n} = (4, 3, 3)$ и элементы имеют номера от 0 до 9. Тогда один из исходов схемы будем записывать в виде $\{(0, 7, 8), (2, 3, 5), (1, 4, 6, 9)\}$, а, например, запись исхода в примере 1 не соответствует установленной выше форме для второй схемы.

Для краткости в дальнейшем будем называть первую схему схемой A , а вторую – схемой B .

1. Процедуры перечисления исходов схем

Схема A

Общее число исходов N_A схемы A известно и есть

$$N_A = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \tag{1}$$

Рассмотрим разные способы перечисления исходов схемы A :

• *Первый способ.* Шаги процедуры:

- 1) согласно работе [2] перечисляем в явном виде все $n!$ перестановок n -различимых элементов;
- 2) делим каждый исход 1-го шага (с его начала) на k частей в порядке задания их размеров n_1, n_2, \dots, n_k ;
- 3) в каждой части 2-го шага упорядочиваем элементы по возрастанию их номеров;
- 4) из исходов 3-го шага отбраковываем повторяющиеся.

В результате получаем полный перечень исходов схемы A .

• *Второй способ.* Шаги процедуры:

- 1) следуя работе [3], последовательно перечисляем все исходы схем сочетаний

$$C_n^{n_1}, C_{n-n_1}^{n_2}, C_{n-n_1-n_2}^{n_3}, \dots, C_{n-\sum_{i=1}^{k-1} n_i}^{n_k}, C_{n-\sum_{i=1}^{k-1} n_i}^{n_k}$$

путем перечисления в каждой упорядоченных по возрастанию номеров выбранных элементов;

- 2) соединяя каждый из исходов, перечисленных в шаге 1, схем сочетаний с каждым и записывая их в установленной во введении для схемы A форме, получаем полный перечень исходов схемы A .

Схема B

Введем обозначение $\omega = \prod_{i=1}^t (\mu_i!)$, где $t = \max \{n_k\}$.

Тогда общее число исходов N_B схемы B (в силу неразличимости порядков частей деления совокупности) вычисляется по формуле

$$N_B = \frac{N_A}{\omega} \tag{2}$$

Шаги процедуры:

- 1) по данному выше алгоритму получаем полный перечень исходов схемы A ;
- 2) все исходы из 1-го шага записываем в установленной для схемы B форме;
- 3) среди исходов 2-го шага отбраковываем повторяющиеся.

В результате получаем полный перечень исходов схемы B .

2. Нумерация исходов схем

Установление полноты перебора всех исходов схем в главе 1 и удобство дальнейшего его использования требует решения прямой и обратной задач нумерации, т. е. нахождения исхода R каждой рассматриваемой схемы по его номеру N и наоборот: нахождения номера N данного исхода R схемы.

Схема A

Прямая задача нумерации

Дан номер исхода N . Требуется найти его вид R .

Для решения задачи используем идею вывода формулы (1) в интерпретации деления n -различимых элементов на части заданных размеров n_1, n_2, \dots, n_k , путем последовательного применения схем сочетаний для перебора вариантов формирования этих частей, т. е. представление N_A в виде

$$N_A = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n-\sum_{i=1}^{k-2} n_i}^{n_{k-1}} \cdot C_{n-\sum_{i=1}^{k-1} n_i}^{n_k} = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k, \tag{3}$$

где $d_1 = C_n^{n_1}$,

$$d_j = C_{n-\sum_{i=1}^{j-1} n_i}^{n_j}, \quad j = \overline{2, k}, \tag{4}$$

откуда следует, что $d_k = 1$.

В работе [3] для схемы сочетаний решены прямая и обратная задачи нумерации, т. е. при выбранном порядке нумерации исходов схемы в их полном перечислении каждому исходу схемы можно взаимнооднозначно сопоставить его номер. Тогда прямая задача нумерации в схеме A решается путем перечисления исходов описанных выше промежуточных схем сочетаний в установленной во введении форме, а их нахождение сводит первоначальную задачу к определению номеров исходов этих промежуточных схем сочетаний N_1, N_2, \dots, N_k .

Обозначим соответствующие им, определяемые в работе [3], состояния этих схем через R_1, R_2, \dots, R_k .

Теперь для нахождения номеров N_1, N_2, \dots, N_k , во избежание громоздкости выражений, будем использовать обозначения формулы (4) и следующие обозначения: $I(z) = 1$ при $z = 0$ и $I(z) = 0$ при $z \neq 0$,

$$s_{v-1} = \left[\frac{s_v + d_v - 1}{d_v} \right],$$

$$v = \overline{1, k-1}, \quad s_k = N,$$

$$s_v \pmod{d_v} = t_v.$$

Тогда из процедуры перечисления исходов схемы A в интерпретации последовательного применения схем сочетаний, перечисленных в формуле (3), получаем

$$N_v = t_v + d_v I(t_v), \tag{5}$$

что и решает прямую задачу нумерации в схеме *A*. Приведем числовой пример.

Пример 3. Имея в виду, что идея решения не зависит от значений чисел k, d_1, d_2, \dots, d_k , зададим их для возможности ручного счета произвольно маленькими. Пусть $k = 4, d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 4, d_4 = 1, N = 20$. Требуется найти значения номеров N_1, N_2, N_3, N_4 , являющихся номерами исходов, представляющих их схем сочетаний. При таких данных ответ легко вычисляется устно по ниже приведенному рисунку 1: $N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 4, N_4 = 1$, и может служить контролем для вычислений по приведенным формулам в следующем порядке.

Сначала вычисляем значения s_4, s_3, s_2, s_1 :

$$\begin{aligned} s_4 &= N = 20; \\ s_3 &= [(20 + 1 - 1) / 1] = 20; \\ s_2 &= [(20 + 4 - 1) / 4] = 5; \\ s_1 &= [(5 + 3 - 1) / 3] = 2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $t_1 = 0, t_2 = 2, t_3 = 0, t_4 = 0$. Тогда по формуле (5) считаем искомые значения $N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 4, N_4 = 1$, что совпадает с ранее полученными результатами.

Для наглядности проиллюстрируем количество и номера исходов последовательного применения 4-х схем сочетаний по данным примера на каждом шаге перебора их исходов в соответствии с представлением формулы (3) (для вычисления числа исходов схемы *A*) с указанием номеров шагов и исходов на каждом шаге в виде соответствующего графа (рис. 1).

Обратная задача нумерации

Дан исход схемы *A* вида *R*. Требуется найти его номер *N*.

Для решения задачи снова используем идею вывода формулы (1) в интерпретации деления *n*-различимых

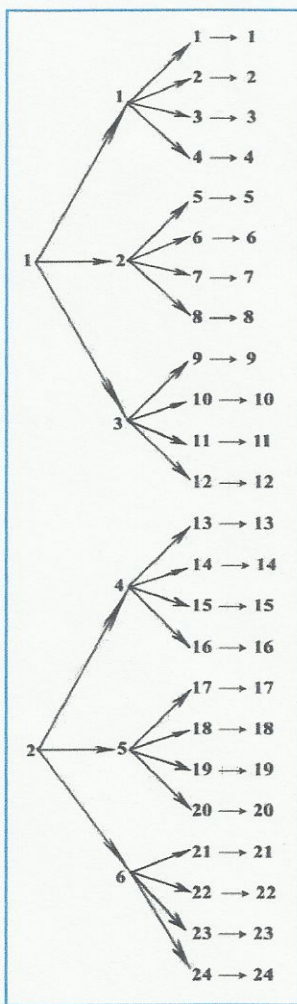


Рис. 1.

элементов на части заданных размеров n_1, n_2, \dots, n_k путем последовательного применения схем сочетаний для перебора вариантов формирования этих частей, т. е. представление N_A в виде формулы (3). Данный вид исхода *R* схемы *A*, как описано во введении, представляет собой группы последовательностей номеров элементов, заключенные в круглые скобки, каждая из которых соответственно описывает исходы последовательно примененных по формуле (1) составляющих схем сочетаний, т. е. R_1, R_2, \dots, R_k . А им, согласно работе [3], соответствуют номера N_1, N_2, \dots, N_k .

Таким образом, задача сводится к построению из этих номеров искомого номера *N*. Используя обозначения, введенные при решении прямой задачи, и структуру перебора всех вариантов исхода схемы *A*, для номера *N* получаем следующую формулу:

$$N = \sum_{j=1}^{k-1} (N_j - 1) \prod_{l=j}^{k-1} d_{l+1} + N_k. \tag{6}$$

Покажем на числовом примере вычисление номера *N* исхода *R*.

Пример 4. Пусть для наглядности решения с использованием рисунка 1, как и в примере 3, $k = 4, d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 4, d_4 = 1$ и по заданному виду исхода $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$, пусть совпадающему для удобства контроля с видом исхода примера 3, требуется найти его номер *N*.

По формуле (6) искомый номер *N* вычисляется из значений номеров N_1, N_2, N_3, N_4 , соответствующих (согласно работе [3]) данному набору значений R_1, R_2, R_3, R_4 , и принимает по примеру 3 следующие значения: $N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 4, N_4 = 1$. Тогда по примеру 3 должны получить значение $N = 20$.

Вычислим номер *N* по формуле (6):

$$\begin{aligned} N &= (N_1 - 1)d_2d_3d_4 + (N_2 - 1)d_3d_4 + (N_3 - 1)d_4 + N_4 = \\ &= 12 + 4 + 3 + 1 = 20, \end{aligned}$$

что совпадает с результатом примера 3.

Схема В

Прямую и обратную задачи нумерации для схемы *B* легко решить программно, путем составления таблицы соответствия всех исходов видов $R^{(B)}$ с их номерами $N^{(B)}$ при их полном перечислении по алгоритму главы 1, путем записи всех исходов схемы по форме исходов схемы *B* с отбраковкой повторяющихся, т. к. в схеме *B* (по сравнению со схемой *A*) происходит укрупнение состояний в результате их частичных объединений в схеме *A*.

Аналитическое решение этих задач в схеме *B* представляет значительные сложности и будет рассмотрено отдельно.

підприємство

Теперь для вида и соответствующего ему номера исхода схемы A введем новые обозначения: $R^{(a)}$ и $N^{(a)}$.

3. Моделирование исходов схем

Схема A

• *Первый способ.* Шаги моделирования:

1) согласно работе [1] моделируем значение перестановки из n элементов;

2) по данному вектору $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ делим перестановку из шага 1 на части компонент данного вектора \bar{n} в данном порядке;

3) записываем результат шага 2 в установленной во введении форме для исходов схемы A .

• *Второй способ.* Шаги моделирования:

1) делим отрезок $[0,1]$ на N_A частей;

2) генерируем одно случайное число;

3) находим номер подотрезка попадания случайного числа и считаем его номером исхода схемы $N^{(a)}$ в перечне всех исходов;

4) по установленному соответствию в задаче нумерации находим по номеру $N^{(a)}$ вид исхода $R^{(a)}$.

Схема B

• *Первый способ.* Шаги моделирования:

1) моделируем исход схемы A ;

2) записываем результат шага 1 в установленной во введении форме для исходов схемы B .

• *Второй способ.* Шаги моделирования:

1) делим отрезок $[0,1]$ на N_B частей;

2) генерируем одно случайное число;

3) находим номер подотрезка попадания случайного числа и считаем его номером исхода схемы $N^{(b)}$ в перечне всех исходов;

4) по установленному программным путем в главе 1 табличному соответствию в задаче нумерации находим по номеру $N^{(b)}$ вид исхода $R^{(b)}$.

Список литературы

1. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. *Стохастическое моделирование*. М.: МИЭМ, 2012.
2. Колчин А.В., Энатская Н.Ю. Комбинаторный анализ схемы перестановок // *Труды КНИЦ РАН*. 2014, № 4. С. 80–86.
3. Энатская Н.Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2015, № 8. С. 35–40.

References

1. Enatskaya N.Yu., Khakimullin Ye.R. *Stokhasticheskoe modelirovanie* [Stochastic modeling]. M.: MIEM [Moscow: Publishing house of the Moscow Institute of Electronics and Mathematics]. 2012.
2. Kolchin A.V., Enatskaya N.Yu. Kombinatornyy analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis permutation scheme]. *Trudy KNTs RAN* [Proceedings of the Karelian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]. 2014, no. 4, pp. 80–86.
3. Enatskaya N.Yu. Kombinatornyy analiz skhemy sochetaniy [Combinatorial analysis of the combination circuit]. *Promyshlennyye ASU i kontrolyery* [Industrial Automatic Control Systems and Controllers]. 2015, no. 8, pp. 35–40.

Информация об авторе

Энатская Наталья Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент

E-mail: nat1943@mail.ru

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

101000, Российская Федерация, Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Information about the author

Enatskaya Nataliya Yurevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

E-mail: nat1943@mail.ru

Higher School of Economics – National Research University

101000, Russian Federation, Moscow, Str. Myasnitskaya, 20