УДК: 514.7

Трансверсально аналитические лоренцевы слоения коразмерности два со связностью Эресмана на n-мерных многообразиях

А.В. Багаев [†], Н.И. Жукова [‡]

[†] a.v.bagaev@gmail.com; Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

[‡] nina.i.zhukova@yandex.ru; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Аннотация

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы лоренцево слоение коразмерности два, допускающее связность Эресмана, было римановым. Дано описание структуры неримановых трансверсально аналитических лоренцевых слоений коразмерности два со связностью Эресмана.

Ключевые слова: лоренцевы слоения, связность Эресмана, ростковая группа голономии слоя.

Исследуются лоренцевы слоения коразмерности два на гладких n-мерных многообразиях.

Напомним, что слоение (M, F), заданное N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$, называется лоренцевым, если на многообразии N (возможно несвязном) задана лоренцева метрика g^N, для которой все преобразования трансверсальных координат γ_{ij} являются локальными изометриями лоренцева многообразия (N, g^N).

В [1] дано описание структуры лоренцевых слоений коразмерности два на замкнутых трехмерных многообразиях в предположении трансверсальной полноты слоения. В отличие от [1] мы не накладываем никаких ограничений на размерность слоев слоений (M, F), не предполагаем компактности слоеного многообразия M, а трансверсальную полноту слоений (M, F) заменяем более слабым условием существования связности Эресмана для (M, F).

Понятие связности Эресмана для слоения введено в [2] как естественное обобщение связности в расслоении. По определению, связность Эресмана для слоения (M, F) коразмерности q есть такое q-мерное распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоению, для интегральных кривых которого определен перенос вдоль кривых в слоях.

В настоящее время римановы слоения образуют наиболее глубоко изученный класс среди слоений с трансверсальными геометрическими структурами. Напомним, что слоение, все слои которого компактны, называется компактным. Р.А.Волак [3] доказал, что любое полное компактное G-слоение конечного типа является римановым. В [4] он получил аналогичный результат для полных компактных слоений, допускающих трансверсальную систему дифференциальных уравнений произвольного порядка. В [5] этот результат распространен на полные компактные картановы слоения.

В [6] получен критерий римановости конформных слоений, утверждающий, что полное конформное слоение коразмерности q, $q \geq 3$, является римановым тогда и только тогда, когда все его группы голономии относительно компактны. Этот результат обобщен на слоения с трансверсальной параболической геометрией ранга один [8].

В [7, Теорема 5] доказано, что любое картаново слоение типа $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ компактно вложена в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, является римановым слоением.

Нами получен следующий критерий римановости лоренцевых слоений коразмерности два.

Теорема 1. *Лоренцево слоение (M, F) коразмерности два на n-мерном многообразии, допускающее связность Эресмана, является римановым тогда и только тогда, когда группа голономии каждого его слоя конечна и либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Пусть (M, F) — произвольное слоение. Подмножество многообразия M называется насыщенным, если его можно представить как объединение каких-либо слоев этого слоения.

Слой L слоения (M, F) коразмерности q называется локально стабильным в смысле Эресмана и Риба, если существует такое семейство насыщенных открытых множеств W_β, $\beta \in J$, что: 1) существует локально тривиальное расслоение $f_\beta \colon W_\beta \to L$, $\beta \in J$, слои которого диффеоморфны q-мерному диску D^q и трансверсальны слоям слоения (W_β, F_{W_β}); 2) для $\gamma \in J$ следы этих окрестностей образуют базу топологии слоя $f_\gamma^{-1}(x)$ расслоения $f_\gamma \colon W_\gamma \to L$ в точке $x \in L$.

Применяя методы работы [9], основанные на свойствах связности Эресмана для римановых слоений, мы доказали следующую структурную теорему.

Теорема 2. *Если лоренцево слоение (M, F) коразмерности два на n-мерном многообразии, допускающее связность Эресмана, является римановым, то реализуется одна из следующих трех возможностей:*

1) все слои слоения замкнуты, локально устойчивы, а пространство слоев является гладким двумерным орбифолдом, нетривиальные группы орбифолдности которого изоморфны $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2$;

2) замыкания слоев слоения (M, F) образуют риманово слоение $(M, \overline{F})$ коразмерности один, причем каждый слой слоения $(M, \overline{F})$ является минимальным множеством исходного слоения;

3) каждый слой слоения (M, F) всюду плотен в M, то есть M — минимальное множество.

Слоение (M, F), заданное N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, называется трансверсально аналитическим, если N — вещественное аналитическое многообразие, и все преобразования трансверсальных координат γ_{ij}, $i, j \in J$, — аналитические отображения. В случае, когда N — однородное пространство G/H, а γ_{ij} — ограничения на открытые подмножества сдвигов пространства G/H элементами группы Ли G, то (M, F) называется трансверсально однородным слоением.

Группа всех изометрий G псевдоримановой плоскости E_1^2 изоморфна полупрямому произведению $H \ltimes \mathbb{R}^2$ своих подгрупп H и $\mathbb{R}^2$, где H — стационарная подгруппа группы G в произвольной точке, а $\mathbb{R}^2$ — нормальный делитель в G, образованный сдвигами плоскости. Как известно, группа H изоморфна псевдоортогональной группе квадратных матриц второго порядка $O(1, 1)$.

Следующая теорема доказана без предположения о существовании связности Эресмана для слоения (M, F).

Теорема 3. *Пусть (M, F) — трансверсально аналитическое лоренцево слоение коразмерности два, не являющееся римановым. Тогда его трансверсальная гауссова кривизна постоянна и (M, F) является трансверсально однородным G/H-слоением, где $G = H \ltimes \mathbb{R}^2$, $H \cong O(1, 1)$.*

Нами доказана следующая структурная теорема.

Теорема 4. *Пусть (M, F) — трансверсально аналитическое нериманово лоренцево слоение коразмерности два со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Тогда:*

1) существует регулярное накрывающее отображение $k \colon \widetilde{M} \to M$, где $\widetilde{M} = L_0 \times B$, B — лоренцево многообразие постоянной гауссовой кривизны, диффеоморфное плос-

кости $\mathbb{R}^2$, L_0 *— многообразие, диффеоморфное любому слою без голономии, а индуцированное слоение* $\widetilde{F} = k^*F = \{L_0 \times \{z\} \mid z \in B\}$ *образовано слоями проекции* $r : \widetilde{M} = L_0 \times B \to B$;

2) *существует гомоморфизм* $\chi\colon \pi_1(M) \to Iso(B)$ *фундаментальной группы* $\pi_1(M)$ *в группу изометрий* $Iso(B)$ *лоренцева многообразия* B, *причем группа* $\Psi := \chi(\pi_1(M))$ *изоморфна группе накрывающих преобразований регулярного накрытия* $k\colon \widetilde{M} \to M$;

3) *ростковая группа голономии произвольного слоя* $L = L(x)$, $x \in M$, *слоения* (M, F) *изоморфна как стационарной подгруппе* Ψ_b *группы* Ψ *в точке* $b \in r(k^{-1}(x)) \subset B$, *так и группе* $\mathfrak{M}$*-голономии* $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ *этого слоя.*

Группа Ψ, удовлетворяющая теореме 4, называется глобальной группой голономии слоения (M, F). Подчеркнем, что трансверсаотные топологические свойства слоения (M, F) определяются свойствами его глобальной группы голономии. В частности, слоение (M, F) имеет замкнутый слой тогда, и только тогда, когда его глобальная группа голономии Ψ имеет замкнутую орбиту в многообразии B.

Построен пример трансверсально аналитического нериманова лоренцева слоения (M, F) коразмерности два на четырехмерном компактном многообразии M, являющегося хаотическим: это слоение имеет всюду плотный слой, а также всюду плотное множество компактных слоев. При этом группа голономии каждого компактного слоя изоморфна $\mathbb{Z}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00312-а) и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект № 90) в 2017.

Список литературы

[1] Boubel C., Mounoud P., Tarquini C. *Lorentzian foliations on 3-manifolds* // Ergodic Theory Dynam. System 2006. – V. 26. – N. 5. – P. 1339–1362

[2] Blumenthal R.A., Hebda J.J. *Ehresmann connections for foliations* // Indiana Univ. Math. J. – 1984. – V. 33. – N. 4. – P. 597–611.

[3] Wolak R.A. *Leaves of foliations with transverse G-srtuctures of finite type* // Publications Matematiques. – 1989. – V. 33. – P. 153–162.

[4] Wolak R.A. *Foliations admitting transverse systems of differential equations* // Compositio Math. – 1988. – V. 67. – P. 89–101.

[5] Жукова Н.И. *График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев* // Изв.вузов. Математ. – 1994. – № 2. – 79–81.

[6] Жукова Н.И. *Аттракторы и аналог гипотезы Лихнеровича для конформных слоений* // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52. – № 3. – С. 555–574.

[7] Жукова Н.И. *Минимальные множества картановых слоений* // Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова. – 2007. – Т. 256. – С. 115–147.

[8] Жукова Н.И. *Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 93. – № 6. – С. 944–946.

[9] Zhukova N. *On the stability of leaves of Riemannian foliation* // Ann. Global Anal. and Geom. – 1987. – V. 5. – N. 3. – P. 261–271.

Transversely analytical Lorentzian foliations of codimension two with Ehresmann connection on n-dimensional manifolds

A.V. Bagaev, N.I. Zhukova

Abstract

We prove a criterion for Lorentzian foliations of codimension two with Ehresmann connection to be Riemannian. A description of the structure of transverse analytic non-Riemannian Lorentzian foliations of codimension two is given.

Keywords: Lorentzian foliation, Ehresmann connection, the germ holonomy group of a leaf.