МЕТОДЫ СОГЛАСОВАНИЯ КВАРТАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ВЫПУСКА ПРОДУКТОВ И ОТРАСЛЕЙ С ГОДОВЫМИ ДАННЫМИ О ВЫПУСКЕ ПРОДУКЦИИ

В.И. Моторин,
Д.Д. Кенчадзе

В статье предложено семейство методов согласования предварительных квартальных оценок выпуска продуктов и/или отраслей с соответствующими показателями годовых выпусков при заданных квартальных объемах выпуска всей произведенной продукции. Математическую основу предложенного подхода составляет метод наименьших квадратов, применяемый в линейном пространстве векторов коэффициентов сезонности выпусков. Проблема согласования квартальных и годовых данных о выпуске продукции в разрезе видов экономической деятельности и отраслей сформулирована в виде общей задачи сепарабельного программирования с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями, решение которой получено в аналитической форме. Сепарабельность общей задачи позволяет ввести в рассмотрение ее «продуктовую» и «отраслевую» редуцированные модификации, которые, в частности, могут служить полезными средствами балансировки неполных наборов предварительных квартальных оценок суммарных объемов выпуска продуктов и отраслей с целью их согласования с соответствующими фрагментами годовой матрицы выпуска.

Преимуществами разработанных алгоритмов согласования квартальных оценок выпуска продуктов и/или отраслей с годовыми данными о выпуске продукции являются простота практической реализации расчетов по несложным формулам и весьма умеренная потребность в вычислительных ресурсах. Кроме того, предложенные методы демонстрируют высокую степень гибкости и адаптивности при решении задач согласования квартальных оценок выпуска продуктов и/или отраслей с годовыми данными о выпуске продукции, которая обеспечивается зависимостью общей задачи сепарабельного программирования и ее редуцированных модификаций от наборов экзогенных параметров, допускающих целенаправленное варьирование в ходе выполнения практических расчетов.

Ключевые слова: квартальный счет производства, выпуски продуктов и отраслей, принцип наименьших квадратов, задача условной минимизации, метод множителей Лагранжа.

JEL: E01, C61, C65.

Проблема согласования квартальных и годовых оценок выпуска продуктов и отраслей в отчетном году возникает в I квартале текущего года, когда становится известной годовая матрица выпуска продукции в разрезе видов экономической деятельности и отраслей в отчетном году. Сопоставление полученных годовых данных с имеющимися оценками выпуска продуктов и отраслей в первых трех кварталах отчетного года на практике обусловливает необходимость более или менее существенной корректировки квартальных счетов производства для отчетного года с целью приведения их в точное соответствие с годовым счетом производства.

Такую корректировку целесообразно проводить поэтапно: сначала обеспечить необходимое согласование окаймляющих итогов квартальных и годовой матриц выпуска продукции, а затем применить ту или иную согласующую процедуру ко всем элементам квартальных матриц с учетом результатов, полученных на первом этапе корректировки. Здесь следует подчеркнуть, что в рамках подобного подхода к согласованию квартальных и годовых оценок выпуска продукции априори предполагается, что годовые данные отличаются большей надежностью по сравнению с квартальными и что элементы матричной структуры типа «продукт - отрасль» демонстрируют меньшую на-

Моторин Владимир Ильич (motoriny@yandex.ru) - канд. экон. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории исследования проблем инфляции и экономического роста Экспертного института, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва, Россия).

Кенчадзе Дмитрий Дмитриевич (kenchadze@gks.ru) - заместитель начальника управления национальных счетов, Федеральная служба государственной статистики (Росстат) (г. Москва, Россия).

дежность по сравнению с окаймляющими итогами и тем более «углами» этой матрицы. Настоящая статья посвящена разработке операциональных и эффективных математических методов согласования окаймляющих итогов квартальных и годовой матриц выпуска продукции для использования на первом этапе корректировки квартальных счетов производства.

Основные балансовые соотношения. Совокупность отчетных данных о годовых объемах произведенной продукции в стоимостном выражении по видам экономической деятельности и по отраслям экономики удобно представлять в виде прямоугольной матрицы размерности $N \times M$:

$$V = \begin{array}{|ccccc|c|} \hline v_{11} & \cdots & v_{1m} & \cdots & v_{1M} & r_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} & \cdots & v_{nM} & r_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{N1} & \cdots & v_{Nm} & \cdots & v_{NM} & r_N \\ \hline c_1 & \cdots & c_m & \cdots & c_M & v \\ \hline \end{array}$$

где N - общее количество видов экономической деятельности; M - общее число отраслей в экономике; v_{nm} - объем выпуска n-го продукта m-й отраслью в данном году; r_n - суммарный объем выпуска n-го продукта всеми отраслями экономики в данном году; c_m - суммарный объем выпуска продукции всех видов m-й отраслью в данном году; v -совокупный объем выпуска продукции всех видов всеми отраслями экономики в данном году.

Введенные выше показатели в соответствии со своими определениями удовлетворяют следующим соотношениям:

$$r_n = \sum_{m=1}^{M} v_{nm}, \quad n = 1 \div N; \quad c_m = \sum_{n=1}^{N} v_{nm}; \quad m = 1 \div M,$$

$$v = \sum_{n=1}^{N} r_n = \sum_{m=1}^{M} c_m = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} v_{nm},$$

где символ «÷» между нижней и верхней границами диапазонов изменения индексов n и m означает, что индексы последовательно пробегают все целочисленные значения в указанных диапазонах.

В рамках постановки задачи согласования квартальных оценок выпуска продуктов и отраслей с годовыми данными (или, иначе, задачи квартальной декомпозиции окаймляющих итогов годовой матрицы выпуска продукции) формально положим

$$r_n = \sum_{t=1}^{T} r_n^t, \quad n = 1 \div N; \quad c_m = \sum_{t=1}^{T} c_m^t, \quad m = 1 \div M,$$

где T - число компонент в искомых квартальных разложениях окаймляющих итогов годовой матрицы выпуска продукции (количество периодов - кварталов - в году).

Из простых логических соображений нетрудно заключить, что неизвестные окаймляющие итоги квартальных матриц выпуска продукции r_n^t и c_m^t должны обладать следующим свойством:

$$\sum_{n=1}^{N} r_n^t = \sum_{m=1}^{M} c_m^t = v^t, \quad t = 1 \div T, \tag{1}$$

где v^t - сумма всех элементов («угол») неизвестной t-й квартальной матрицы выпуска продукции с элементами v_{nm}^t и, как следствие, $\sum_{t=1}^{T} v^t = v$.

Экзогенные предварительные оценки. Разумеется, поквартальное разложение окаймляющих итогов матрицы V (продуктовых и/или отраслевых) требует привлечения дополнительных данных в квартальном разрезе. Такими данными на практике могут служить экзогенные предварительные оценки величин $\tilde{p}_n^t$ ($n = 1 \div N$, $t = 1 \div T$) и/или $\tilde{q}_m^t$($m = 1 \div M$, $t = 1 \div T$) - суммарных объемов выпуска продуктов и отраслей экономики по кварталам данного года ($t = 1 \div T$), исчисляемых на основе имеющихся статистических данных, например на базе квартальных счетов производства для отчетного года или информации об объемах отгруженных товаров собственного производства, выполненных работ и услуг собственными силами по отдельным видам экономической деятельности.

Введенные в рассмотрение экзогенные оценки суммарных объемов выпуска продуктов и отраслей экономики по кварталам данного года в принципе должны быть согласованы с соответствующими элементами годовой матрицы и квартальными суммами выпуска продукции, то есть удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{t=1}^{T} \tilde{p}_n^t = r_n, \quad n = 1 \div N; \tag{2}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \tilde{q}_m^t = c_m, \quad m = 1 \div M; \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \tilde{p}_n^t = \sum_{m=1}^{M} \tilde{q}_m^t, \quad t = 1 \div T; \tag{4}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{N}\tilde{p}_n^t=\sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}\tilde{q}_m^t=v. \qquad (5)$$

Однако в практических ситуациях предварительные оценки суммарных квартальных объемов выпуска продуктов и отраслей экономики свойствами (2) - (5), конечно же, не обладают. Тем не менее на основе использования простейших приемов эти оценки можно нормализовать таким образом, чтобы соотношения (4) и (5) выполнялись. Здесь естественно рассмотреть три различных случая, когда заданы:

1) только предварительные оценки объемов выпуска продуктов $\tilde{p}_n^t$, $n=1\div N$, $t=1\div T$;

2) только предварительные оценки объемов выпуска отраслей $\tilde{q}_m^t$, $m=1\div M$, $t=1\div T$;

3) предварительные оценки как величин $\tilde{p}_n^t$, так и $\tilde{q}_m^t$, $n=1\div N$, $m=1\div M$, $t=1\div T$.

В первом случае предварительные оценки суммарных квартальных объемов выпуска продуктов нормализуются по формуле

$$p_n^t=\frac{v\tilde{p}_n^t}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{N}\tilde{p}_k^t},\quad n=1\div N;\;\; t=1\div T; \qquad (6)$$

которая, как нетрудно видеть, обеспечивает соблюдение необходимого условия согласования сумм квартальных и годовых данных (5). Кроме того, T внутриквартальных сумм нормализованных величин (6) можно рассматривать как оценки квартальных объемов выпуска всей продукции

$$v_{(q)}^t=\sum_{n=1}^{N}p_n^t=\frac{v\sum_{n=1}^{N}\tilde{p}_n^t}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{N}\tilde{p}_k^t},\quad t=1\div T, \qquad (7)$$

и тем самым специфицировать соотношения (1) в виде T уравнений с заданными правыми частями.

Во *втором случае* предварительные оценки суммарных квартальных объемов выпуска отраслей следует нормализовать по формуле

$$q_m^t=\frac{v\tilde{q}_m^t}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{M}\tilde{q}_k^t},\quad m=1\div M,\quad t=1\div T, \qquad (8)$$

обеспечив при этом, как и в первом случае, соблюдение необходимого условия согласования сумм квартальных и годовых данных (5). Далее, T внутриквартальных сумм нормализованных величин (8) определяют оценки квартальных объемов выпуска всей продукции

$$v_{(q)}^t=\sum_{m=1}^{M}q_m^t=\frac{v\sum_{m=1}^{M}\tilde{q}_m^t}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{M}\tilde{q}_k^t},\quad t=1\div T, \qquad (9)$$

которые позволяют ввести другую спецификацию правых частей соотношений (1), вообще говоря, отличную от (7).

В *третьем случае*, который является наиболее общим, расчетные оценки суммарных квартальных объемов выпуска продуктов (7) и суммарных квартальных объемов выпуска отраслей экономики (9) на практике, как правило, не совпадают между собой. Простейший способ согласования этих оценок основывается на использовании их выпуклой линейной комбинации

$$v_{(pq)}^t=\alpha v_{(p)}^t+(1-\alpha)v_{(q)}^t=$$
$$=\alpha v\frac{\sum_{n=1}^{N}\tilde{p}_n^t}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{N}\tilde{p}_k^t}+(1-\alpha)v\frac{\sum_{m=1}^{M}\tilde{q}_n^t}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{M}\tilde{q}_k^t},\quad t=1\div T, \qquad (10)$$

где скалярный коэффициент $a\in[0,1]$ характеризует априорную относительную надежность данных об объемах выпуска продуктов по сравнению с отраслевыми данными.

Нетрудно убедиться, что сумма квартальных оценок (10) равна совокупному годовому объему выпуска продукции всех видов всеми отраслями экономики v.

Нормализация предварительных оценок суммарных квартальных объемов выпуска продуктов осуществляется здесь по формулам

$$p_n^t=\frac{v_{(pq)}^t\tilde{p}_n^t}{\sum_{k=1}^{N}\tilde{p}_k^t}=\frac{\alpha v\tilde{p}_n^t}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{N}\tilde{p}_k^t}+\frac{(1-\alpha)v\tilde{p}_n^t}{\sum_{k=1}^{N}\tilde{p}_k^t}\frac{\sum_{m=1}^{M}\tilde{q}_m^t}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}\tilde{q}_m^t}, \qquad (11)$$
$$n=1\div N,\quad t=1\div T;$$

$$q_m^t = \frac{v_{(pq)}^t \tilde{q}_m^t}{\sum\limits_{k=1}^{M} \tilde{q}_k^t} = \frac{\alpha v \tilde{q}_m^t}{\sum\limits_{t=1}^{T}\sum\limits_{k=1}^{N} \tilde{q}_k^t} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} \tilde{p}_n^t}{\sum\limits_{t=1}^{T}\sum\limits_{n=1}^{N} \tilde{p}_n^t} + \frac{(1-\alpha) v \tilde{q}_m^t}{\sum\limits_{t=1}^{T}\sum\limits_{k=1}^{M} \tilde{q}_k^t},$$
$$m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T, \qquad (12)$$

которые, как нетрудно проверить, обеспечивают соблюдение необходимых условий согласования внутриквартальных данных (4) и сумм квартальных и годовых данных (5). Заметим, что формула (11) при $a = 1$ превращается в (6), а формула (12) при $a = 0$ совпадает с (8). Наконец, как и в предыдущих двух случаях, T оценок квартальных объемов выпуска всей продукции (10) позволяют специфицировать соотношения (1) в виде T уравнений с заданными правыми частями, хотя и не единственным способом ввиду наличия в (10) априорно устанавливаемого скалярного коэффициента a.

Постановка задачи согласования квартальных и годовых данных. Таким образом, в отличие от предварительных оценок $\tilde{p}_n^t$ и $\tilde{q}_m^t$, $n = 1 \div N$, $m = 1 \div M$, $t = 1 \div T$ нормализованные оценки (11) и (12) обеспечивают соблюдение условий (4) и (5). Однако согласующие соотношения (2) и (3) на практике обычно выполняются лишь с некоторой степенью точности

$$\sum_{t=1}^{T} p_n^t = r_n + \Delta r_n, \quad n = 1 \div N;$$
$$\sum_{t=1}^{T} q_m^t = c_m + \Delta c_m, \quad m = 1 \div M,$$

где Δr_n и Δc_m - расчетные невязки n-го уравнения (2) и m-го уравнения (3) соответственно.

В связи с этим возникает задача строгого согласования нормализованных квартальных оценок выпуска продуктов и отраслей с соответствующими годовыми выпусками при заданных квартальных объемах выпуска всей продукции.

Весьма общий способ решения этой задачи заключается в нахождении таких векторов квартальных объемов выпуска в разрезе продуктов r^t и отраслей c^t, $t = 1 \div T$, которые, с одной стороны, обеспечивают точное выполнение согласующих соотношений

$$\sum_{t=1}^{T} r_n^t = r_n, \quad n = 1 \div N; \quad \sum_{t=1}^{T} c_m^t = \Delta c_m, \quad m = 1 \div M;$$
$$\sum_{n=1}^{N} r_n^t = \sum_{m=1}^{M} c_m^t = v_{(pq)}^t, \quad t = 1 \div T, \qquad (13)$$

а с другой стороны, демонстрируют минимальное уклонение (в определенном смысле) от заданных векторов p^t и q^t нормализованных квартальных оценок (11) и (12) соответственно.

Использование принципа наименьших квадратов. Для того чтобы формализовать рассмотренную выше постановку задачи строгого согласования нормализованных квартальных оценок выпуска продуктов и отраслей с соответствующими годовыми выпусками, требуется определить количественную меру «уклонения» системы векторов r^t, c^t от системы заданных векторов p^t и q^t , $t = 1 \div T$, например, в виде взвешенной суммы

$$b \sum_{t=1}^{T} d_N(r^t, p^t) + (1-b) \sum_{t=1}^{T} d_M(c^t, q^t), \qquad (14)$$

где d_N и d_M - функции расстояния (*distance functions*) между двумя точками в N-мерном и M-мерном линейных пространствах соответственно, а скалярный параметр $b \in [0, 1]$ характеризует априорную относительную надежность данных о выпуске продуктов по сравнению с отраслевыми данными.

Если в качестве функции d выбрать квадрат евклидова расстояния в многомерном линейном пространстве, то такой выбор соответствует применению широко известного и весьма часто используемого в экономических исследованиях обобщенного принципа наименьших квадратов (*generalized least squares*, далее - GLS).

Идея математической балансировки национальных счетов на основе GLS восходит к пионерной работе [1] и за истекшие десятилетия получила значительное инструментальное развитие. В специальной литературе представлен целый ряд различных по эффективности алгоритмов, базирующихся на операциональных трактовках принципа наименьших квадратов применительно к тем или иным аспектам корректировки фрагментов панельных данных. Тем не менее можно констатировать, что к настоящему времени GLS-подход пока не нашел действительно широкого применения в международной статистической практике разработки и согласования национальных счетов. Сотрудники Бюро экономического анализа Министерства торговли США (*U.S. Bureau of Economic Analysis, the U.S. Department of Commerce*) в недавней публикации [2] указывают на две основные причины текущего положения дел: во-первых, это недостаточная эффективность технологий практического решения больших систем нормальных уравнений, сопряженного с реализацией GLS, и, во-вторых, отсутствие достоверной информации об относительной надежности (*relative reliability*) первичных данных для построения национальных счетов.

Влияние первой причины, разумеется, перманентно убывает по мере прогресса в области компьютерной техники независимо от усилий статистиков и экономистов. Тем не менее такие усилия предпринимаются, и прежде всего в направлении иерархической организации системы оптимизационных задач балансировки национальных счетов в рамках GLS-подхода (см., например, монографию [3]), декомпозиционный характер которой способствует значительному сокращению совокупной вычислительной трудоемкости всей процедуры балансировки. Что же касается квантификации относительной надежности первичных данных, то ввиду несомненного доминирования в национальных счетах невыборочных ошибок над выборочными на практике не остается ничего другого, как пытаться оценивать количественные показатели надежности на субъективной основе (весьма полный систематизированный обзор сопутствующих проблем и способов их разрешения можно найти в статье [4]).

Следует подчеркнуть, что рациональное комбинирование декомпозиционных, инструментальных и эвристических приемов позволяет компоновать вполне операциональные процедуры GLS-балансировки национальных счетов. Убедительным примером является предложенный Б. Чен (*Baoline Chen*) и используемый в Бюро экономического анализа алгоритм отраслевого распределения статистического расхождения в оценках ВВП по методам доходов и производства [5], который наглядно демонстрирует, что GLS-балансировка больших систем дезагрегированных счетов с использованием полуэвристических измерителей относительной надежности данных вполне может быть логически допустимой и вычислительно эффективной.

Масштабирование и нормировка переменных задачи. С целью надлежащего масштабирования переменных и параметров задачи строгого согласования нормализованных квартальных оценок выпуска продуктов и отраслей с соответствующими годовыми выпусками введем в рассмотрение квартальные коэффициенты сезонности выпуска n-го продукта и выпуска m-й отрасли в данном году, определяемые формулами

$$x_n^t = \frac{r_n^t}{r_n} \le 1, \quad n = 1 \div N, \quad t = 1 \div T;$$
$$y_m^t = \frac{c_m^t}{c_m} \le 1, \quad m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T, \qquad (15)$$

и используем их в качестве новых переменных анализируемой задачи (вместо неизвестных векторов r^t и c^t , $t = 1 \div T$ соответственно). В новых обозначениях приведенные выше согласующие соотношения (13) приобретают следующий вид:

$$\sum_{t=1}^{T} x_n^t = 1, \quad n = 1 \div N; \qquad (16)$$

$$\sum_{t=1}^{T} y_m^t = 1, \quad m = 1 \div M; \qquad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^t r_n = v_{(pq)}^t, \quad t = 1 \div T; \qquad (18)$$

$$\sum_{m=1}^{M} y_m^t c_m = v_{(pq)}^t, \quad t = 1 \div T. \qquad (19)$$

Просуммировав обе части уравнений (18) и (19) по t, получим

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{N} x_n^t r_n = \sum_{n=1}^{N} r_n \sum_{t=1}^{T} x_n^t = \sum_{n=1}^{N} r_n;$$
$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M} y_m^t c_m = \sum_{m=1}^{M} c_m \sum_{t=1}^{T} y_m^t = \sum_{m=1}^{M} c_m,$$

откуда немедленно следуют равенства (16) и (17). Таким образом, в системе согласующих соотношений (13), записанных в новых переменных, эти уравнения оказываются избыточными.

Соотношения (18) и (19) представляют собой систему $2T$ линейных уравнений с $(N+M)T$ неизвестными коэффициентами сезонности выпуска продукции, которая при N, $M > 1$ имеет бесконечное множество решений. Поэтому для корректной формулировки задачи строгого согласования нормализованных квартальных оценок выпуска продуктов и отраслей с соответствующими годовыми выпусками требуется разработать критериальную базу оценки решений этой системы, обеспечивающую точную (однозначную) идентификацию всех неизвестных коэффициентов сезонности (15).

По аналогии с (15) рассчитаем квартальные коэффициенты сезонности нормализованных оценок

$$\varphi_n^t = p_n^t \Big/ \sum_{k=1}^{T} p_n^k \le 1, \quad n = 1 \div N, \quad t = 1 \div T;$$

$$\psi_m^t = q_m^t \Big/ \sum_{k=1}^{T} q_m^k \le 1, \quad m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T \qquad (20)$$

и используем их в качестве «эталонных» для искомых коэффициентов сезонности (15). Заметим, что расчетные коэффициенты сезонности (20), как и неизвестные коэффициенты (15), имеют единичную нормировку в темпоральном разрезе. Поэтому здесь возникает потребность в построении таких наборов коэффициентов сезонности $x = \{x_n^t\}$ $y = \{y_m^t\}$, которые, с одной стороны, удовлетворяют уравнениям (18) и (19), а с другой - демонстрируют минимальные совокупные отклонения от массивов априори заданных (расчетных) величин $\varphi = \{\varphi_n^t\}$ и $\psi = \{\psi_m^t\}$ соответствующей размерности.

Формулировка задачи. Рассматриваемая задача строгого согласования нормализованных квартальных оценок выпуска продуктов и отраслей с соответствующими годовыми выпусками при заданных квартальных объемах выпуска всей продукции может быть сформулирована в терминах математического программирования следующим образом:

минимизировать целевую функцию d(x,y; φ, ψ) при линейных ограничениях (18) и/или (19), а также при естественных условиях неотрицательности неизвестных переменных задачи.

Если выбрать функцию d в соответствии с (14), где d_N и d_M - квадраты евклидова расстояния в N-мерном и M-мерном линейных пространствах коэффициентов сезонности, то сформулированная задача приобретает следующий вид:

минимизировать квадратичную целевую функцию

$$d(x,y;\varphi,\psi) = b\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{N}(x_n^t - \varphi_n^t) + $$
$$+(1-b)\sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}(y_m^t - \psi_m^t)^2 \qquad (21)$$

при *ограничениях*

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^t r_n = v_{(pq)}^t, \quad t = 1 \div T; \qquad (22)$$

$$\sum_{m=1}^{M} y_m^t c_m = v_{(pq)}^t, \quad t = 1 \div T \qquad (23)$$

и с учетом *условий неотрицательности переменных*

$$x_n^t,\ y_m^t \ge 0, \quad n = 1 \div N, \quad m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T.$$

Из (21) следует, что если расчетные экзогенные величины (20) удовлетворяют порождаемым уравнениями (18) и (19) балансовым требованиям

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi_n^t r_n = v_{(pq)}^t, \quad t = 1 \div T; \qquad (24)$$

$$\sum_{m=1}^{M} \psi_m^t c_m = v_{(pq)}^t, \quad t = 1 \div T, \qquad (25)$$

то в результате возникает тривиальное решение оптимизационной задачи (21) - (23) в виде $x = \varphi$, $y = \psi$, которому соответствует абсолютный минимум квадратичной целевой функции (21), равный нулю.

Запишем функцию Лагранжа для оптимизационной задачи (21) - (23) без учета условий неотрицательности переменных:

$$L_d(x,y;\varphi,\psi) = b\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{N}(x_n^t - \varphi_n^t)^2 +$$
$$+(1-b)\sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}(y_m^t - \psi_m^t)^2 -$$
$$-\sum_{t=1}^{T}\mu_t\Big(\sum_{n=1}^{N} x_n^t r_n - v_{(pq)}^t\Big) - \sum_{t=1}^{T}\rho_t\Big(\sum_{m=1}^{M} y_m^t c_m - v_{(pq)}^t\Big), \qquad (26)$$

где μ_t и ρ_t - множители Лагранжа, ассоциированные с t-м ограничением (22) и t-м ограничением (23) соответственно. Ввиду очевидной выпуклости квадратичной функции (21) оптимизационная задача (21) - (23) эквивалентна системе необходимых условий, определяющих стационарную точку функции Лагранжа (26).

Решение задачи минимизации функции (21) при ограничениях (22) и (23). Вычислив частные производные функции Лагранжа (26) по x_n^t, y_m^t, μ_t и ρ_t, а затем приравняв их нулю, получим следующую систему $(N+M+2)T$ линейных уравнений, разбитых на четыре группы:

$$\frac{\partial L_d}{\partial y_m^t} = 2b(x_n^t - \varphi_n^t) - \mu_t r_n = 0,$$
$$n = 1 \div N, \quad t = 1 \div T;$$
$$\frac{\partial L_d}{\partial y_m^t} = 2(1-b)(y_m^t - \psi_m^t) - \rho_t c_m = 0,$$
$$m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T;$$
$$\frac{\partial Ld}{\partial \mu_t} = \sum_{n=1}^{N} x_n^t r_n - v_{(pq)}^t = 0, \quad t = 1 \div T;$$
$$\frac{\partial Ld}{\partial \rho_t} = \sum_{m=1}^{M} y_m^t c_m - v_{(pq)}^t = 0, \quad t = 1 \div T.$$

Полученная система содержит $(N+M+2)T$ неизвестных: $(N+M)T$ неизвестных аргументов квадратичной целевой функции (21) и $2T$ неизвестных множителей Лагранжа. Из первой и второй групп уравнений имеем:

$$x_n^t = \varphi_n^t + \frac{1}{2b}\mu_t r_n, \quad n = 1 \div N, \quad t = 1 \div T; \qquad (27)$$

$$y_m^t = \psi_m^t + \frac{1}{2(1-b)}\rho_t c_m, \quad m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T. \qquad (28)$$

Подстановка этих соотношений в третью и четвертую группы уравнений позволяет исключить из системы $(N+M)T$ неизвестных x_n^t и y_n^t. После несложных преобразований возникает система $2T$ линейных уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi_n^t r_n + \frac{1}{2b}\mu_t \sum_{n=1}^{N} r_n^2 = v_{(pq)}^t, \quad t = 1 \div T;$$
$$\sum_{m=1}^{M} \psi_m^t c_m + \frac{1}{2(1-b)}\rho_t \sum_{m=1}^{M} c_m^2 = v_{(pq)}^t, \quad t = 1 \div T$$

с множителями Лагранжа μ_t и ρ_t в качестве неизвестных, решение которой записывается в простой аналитической форме

$$\mu_t = \frac{2b(v_{(pq)}^t - \sum_{n=1}^{N} \varphi_n^t r_n)}{\sum_{n=1}^{N} r_n^2}, \quad t = 1 \div T;$$

$$\rho_t = \frac{2(1-b)(v_{(pq)}^t - \sum_{m=1}^{M} \psi_m^t c_m)}{\sum_{m=1}^{M} c_m^2}, \quad t = 1 \div T. \qquad (29)$$

Подстановка (29) в (27) и (28) дает общее решение задачи минимизации целевой функции (21) при линейных ограничениях (22) и (23):

$$x_n^t = \varphi_n^t + \frac{v_{(pq)}^t - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k^t r_k}{\sum_{k=1}^{N} r_k^2} r_n, \quad n = 1 \div N, \quad t = 1 \div T; \qquad (30)$$

$$y_m^t = \psi_m^t + \frac{v_{(pq)}^t - \sum_{k=1}^{N} \psi_k^t c_k}{\sum_{k=1}^{N} c_k^2} c_m, \quad m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T. \qquad (31)$$

Здесь следует подчеркнуть, что полученное общее решение (30), (31) не зависит от скалярного параметра b, а также что при выполнении балансовых соотношений (24) и (25) оптимизационная задача (21) - (23) имеет тривиальное решение $x = \varphi$ и $y = \psi$, которому соответствует абсолютный (нулевой) минимум квадратичной целевой функции (21).

Решение задачи согласования квартальных и годовых данных. Установим условия, при выполнении которых общее решение (30), (31) задачи минимизации (21) - (23) обладает свойствами (16) и (17), то есть обеспечивает единичную нормировку квартальных коэффициентов сезонности суммарного выпуска каждого продукта и каждой отрасли. Просуммировав обе части равенств (30), (31) по t и приравняв результаты единице, получим систему уравнений

$$\sum_{t=1}^{T} x_n^t = \sum_{t=1}^{T} \varphi_n^t + \frac{r_n}{\sum_{k=1}^{N} r_k^2}\left(v - \sum_{k=1}^{N} r_k \sum_{k=1}^{T} \varphi_k^t\right) = 1, \quad n = 1 \div N;$$
$$\sum_{t=1}^{T} y_m^t = \sum_{t=1}^{T} \psi_m^t + \frac{c_m}{\sum_{k=1}^{N} c_k^2}\left(v - \sum_{k=1}^{M} r_k \sum_{k=1}^{T} \psi_k^t\right) = 1, \quad m = 1 \div M,$$

из которой можно заключить, что требуемая единичная нормировка квартальных коэффициентов сезонности суммарного выпуска каждого продукта и каждой отрасли гарантируется условиями

$$\sum_{t=1}^{T} \varphi_n^t = 1, \quad n = 1 \div N;$$
$$\sum_{t=1}^{T} \psi_m^t = 1, \quad m = 1 \div M, \qquad (32)$$

выполняющимися, в частности, при расчете экзогенных величин φ_n^t и ψ_m^t по формулам (20) при $n = 1 \div N$, $m = 1 \div M$, $t = 1 \div T$.

Далее, из определения коэффициентов сезонности следует, что искомые квартальные компоненты суммарного выпуска каждого продукта и каждой отрасли рассчитываются по формулам

$$r_n^t = x_n^t r_n = \varphi_n^t r_n + \left(v_{(pq)}^t - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k^t r_k \right) \frac{r_n^2}{\sum_{k=1}^{N} r_k^2},$$

$$n = 1 \div N, \quad t = 1 \div T; \tag{33}$$

$$c_m^t = y_m^t c_m = \psi_m^t c_m + \left(v_{(pq)}^t - \sum_{k=1}^{N} \psi_k^t c_k \right) \frac{c_m^2}{\sum_{k=1}^{M} c_k^2},$$

$$m = 1 \div M, \ \ t = 1 \div T. \tag{34}$$

В частности, если экзогенные величины φ_n^t и ψ_m^t определяются в соответствии с (20) для всех значений t при $n = 1 \div N$, $m = 1 \div M$, то

$$r_n^t = x_n^t r_n = \frac{r_n p_n^t}{\sum_{k=1}^{T} p_n^k} + \left(v_{(pq)}^t - \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k p_k^t}{\sum_{l=1}^{T} p_k^l} \right) \frac{r_n^2}{\sum_{k=1}^{N} r_k^2},$$

$$n = 1 \div N, \quad t = 1 \div T;$$

$$cm = y_m^t c_m = \frac{r_m q_m^t}{\sum_{k=1}^{T} q_m^k} + \left(v_{(pq)}^t - \sum_{k=1}^{M} \frac{c_k q_k^t}{\sum_{l=1}^{T} q_k^l} \right) \frac{c_m^2}{\sum_{k=1}^{M} c_k^2},$$

$$m = 1 \div M, \quad t = 1 \div T.$$

Таким образом, рассмотренная задача строгого согласования нормализованных квартальных оценок выпуска продуктов и отраслей с соответствующими годовыми выпусками при заданных квартальных объемах выпуска всей продукции (21) - (23) без учета условий неотрицательности переменных допускает решение в аналитической форме, что в известной степени повышает общий уровень ее операциональности и практической ценности.

Сепарабельность оптимизационной задачи (21) - (23). Нетрудно видеть, что целевая функция (21) представляет собой сумму квадратичных функций одной переменной, то есть является *сепарабельной*. Кроме того, сепарабельными также являются линейные функции в левых частях ограничений (22) и (23). Следовательно, оптимизационная задача (21) - (23) может быть отнесена к классу задач сепарабельного программирования (см., например, [6] - с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями).

Важным следствием сепарабельности выступает тот факт, что общая задача условной минимизации целевой функции (21) при ограничениях (22) и (23) без потери общности допускает декомпозицию на две частных задачи:

- минимизировать первое слагаемое целевой функции (21) с учетом линейных ограничений (22) при выполнении первого условия нормировки (32);
- минимизировать второе слагаемое целевой функции (21) с учетом линейных ограничений (23) при выполнении второго условия нормировки (32).

Заметим, что при этом оптимальное решение первой задачи определяется формулой (30), а второй - формулой (31).

Отмеченное выше свойство задачи строгого согласования нормализованных квартальных оценок выпуска продуктов и отраслей с соответствующими годовыми выпусками при заданных квартальных объемах совокупного выпуска продукции позволяет наряду с общей формулировкой (21) - (23) автономно рассматривать также и ее редуцированные модификации, а именно «продуктовую» задачу минимизации квадратичной функции (21) при $b = 1$ с учетом линейных ограничений (22) при $v_{(pq)}^t = v_{(p)}^t$, $t = 1 \div T$ и «отраслевую» задачу минимизации функции (21) при $b = 0$ с учетом линейных ограничений (23) при $v_{(pq)}^t = v_{(q)}^t$, $t = 1 \div T$. Следует подчеркнуть, что «продуктовая» задача (21), (22) представляет значительный практический интерес, поскольку на стадии формирования предварительных оценок суммарных квартальных объемов выпуска продуктов здесь открываются операциональные возможности использования не только квартальных счетов производства для отчетного года, но и имеющихся данных об объемах отгруженных товаров собственного производства, выполненных работ и услуг собственными силами по отдельным видам экономической деятельности.

Неполнота системы экзогенных предварительных оценок. На практике построение полной системы экзогенных предварительных оценок суммарных объемов выпуска продуктов и/или отраслей экономики по кварталам данного года часто сопряжено со значительными информационными трудностями (некоторые оценки выпуска продукции по видам и/или по отраслям оказываются настолько не надежными, что их лучше вообще исключить из дальнейших расчетов). В подобных случаях «продуктовая» и «отраслевая» модификации рассмотренной задачи согласования квартальных и годовых выпусков продукции (21) - (23) могут служить полезными средствами балансировки неполных наборов предварительных квартальных оценок суммарных объемов выпуска продуктов и отраслей с целью их согласования с соответствующими фрагментами годовой матрицы выпуска.

В рамках «продуктового» подхода величину N во всех полученных выше формулах следует интерпретировать не как общее количество видов деятельности, а как число видов продукции $N_1 \leqslant N$, для которых предварительные квартальные оценки суммарных объемов выпуска получены на приемлемом уровне надежности. Ясно, что при этом «контрольный» фрагмент годовой матрицы выпуска размерности $N \times M$ представляет собой ее подматрицу размерности $N_1 \times M$. Аналогично, величина M в рамках «отраслевого» подхода интерпретируется как количество отраслей $M_1 \leqslant M$, квартальные выпуски которых на предварительном этапе удалось оценить относительно надежно, а «контрольный» фрагмент годовой матрицы выпуска есть ее подматрица размерности $N \times M_1$.

Заключительные замечания. Важным достоинством разработанных методов согласования квартальных оценок выпуска продуктов и/или отраслей с годовыми данными о выпуске продукции является простота практической реализации расчетов по несложным формулам (33) и/или (34), а также весьма умеренная потребность в вычислительных ресурсах даже при обработке массивов данных большой размерности ($N \sim 10^3$, $M \sim 10^3$).

Тем не менее предложенные методы демонстрируют высокую степень гибкости и адаптивности при решении задач согласования квартальных оценок выпуска продуктов и/или отраслей с годовыми данными о выпуске продукции, которая обеспечивается зависимостью задачи минимизации (21) - (23) и ее редуцированных модификаций от наборов экзогенных параметров $\varphi = \{\varphi_n^t\}$, $\psi = \{\psi_m^t\}$ и $\{\nu_{(pq)}^t\}$, допускающих целенаправленное варьирование в ходе выполнения практических расчетов. В частности, на основе надлежащей регулировки двумерных массивов φ и ψ разработанные методы могут быть адаптированы к задачам согласования квартальных и годовых данных о выпуске продукции в текущих и среднегодовых ценах, а также в ценах базового года.

Другая цель варьирования указанных выше экзогенных параметров связана с тем, что задача минимизации (21) - (23) изначально сформулирована с учетом условий неотрицательности переменных, а ее аналитическое решение (30), (31) получено без учета этих условий. Поэтому в отдельных случаях расчеты по формулам (33) и/или (34) могут приводить к появлению отрицательных суммарных объемов выпуска продуктов и/или отраслей экономики по кварталам данного года. Обычно подобное явление наблюдается, когда какой-либо расчетный квартальный коэффициент сезонности нормализованных оценок (20) очень мал по сравнению с остальными коэффициентами из этой же группы. На практике отмеченную проблему появления отрицательных суммарных объемов выпуска нетрудно решить на основе целенаправленного малого возмущения «аномальных» коэффициентов сезонности (20).

Литература

1. **Stone R., Champernowne D.G., Meade J.E.** The precision of national income estimates // Review of Economic Studies. 1942. Vol. 9. No. 2. P. 111-125.

2. **Rassier D.G., Howells T.F., Empey N.R., Roesch C.E.** Implementing a reconciliation and balancing model in the U.S. industry accounts. BEA working paper WP2007-04. Washington D.C., 2007. 22 p.

3. **Dagum E.B., Cholette P.A.** Benchmarking, temporal distribution, and reconciliation methods for time series / Lecture Notes in Statistics. Vol. 186. New York: Springer Science+Business Media, 2006. 409 p.

4. **Bos F.** The art and craft of compiling national accounts statistics and their implications for reliability // Review of Income and Wealth. 2009. Ser. 55. No. 4. P. 930-958.

5. **Chen B.** A balanced system of U.S. industry accounts and distribution of the aggregate statistical discrepancy by industry // Journal of Business & Economic Statistics. 2012. Vol. 30. No. 2. P. 202-211.

6. **Таха Х.** Введение в исследование операций: В 2-х кн. Кн. 2 / пер. с англ. М.: Мир, 1985. 496 с.

THE METHODS FOR RECONCILING THE PRELIMINARY QUARTERLY ESTIMATES OF PRODUCT AND INDUSTRY OUTPUTS WITH ANNUAL PRODUCTION DATA

Vladimir I. Motorin
Author affiliation: National Research University Higher School of Economics (Moscow, Russia). E-mail: motoriny@yandex.ru.

Dmitriy D. Kenchadze
Author affiliation: Federal State Statistics Service (Rosstat) (Moscow, Russia). E-mail: kenchadze@gks.ru.

The aim of this article is to introduce a family of methods for reconciling the preliminary quarterly estimates of product and/or industry outputs with the corresponding annual outputs at given values of quarterly total outputs. Mathematical framework of the methods leans on generalized least squares principle, which is applied in linear vector space of output seasonal coefficients. The procedure for reconciling the quarterly and annual data on product and industry outputs is formulated as a separable programming problem with a quadratic objective function and linear constraints. The solution of this problem is obtained in analytical form. Separability of the reconciling problem allows introducing its «product» and «industry» reduced modifications. In particular, reduced modifications of the problem can serve as useful tools for balancing the incomplete sets of preliminary quarterly estimates of the product and industry outputs in order to bring them into conformity with the corresponding fragments of the annual output matrix.

Simplicity of practical calculations and a very moderate need for computational resources are valid advantages of the proposed methods. In addition, the methods demonstrate a high degree of flexibility and adaptability in solving problems of reconciling the quarterly estimates of product and/or industry outputs with annual output data. High flexibility is provided by the dependence of the separable programming problem and its reduced modifications on the exogenous parameters that are allowed purposeful varying during calculation process.

Keywords: quarterly production account, product and industry outputs, generalized least squares, conditional minimization problem, Lagrange multipliers.

JEL: E01, C61, C65.

References

1. **Stone R., Champernowne D.G., Meade J.E.** The precision of national income estimates. *Review of Economic Studies*, 1942, vol. 9, no. 2, pp. 111-125.

2. **Rassier D.G., Howells T.F., Empey N.R., Roesch C.E.** *Implementing a reconciliation and balancing model in the U.S. industry accounts*. BEA working paper WP2007-04. Washington D.C., 2007. 22 p.

3. **Dagum E.B., Cholette P.A.** *Benchmarking, temporal distribution, and reconciliation methods for time series* / Lecture Notes in Statistics. Vol. 186. New York, Springer Science+Business Media, 2006. 409 p.

4. **Bos F.** The art and craft of compiling national accounts statistics and their implications for reliability. *Review of Income and Wealth*, 2009, ser. 55, no. 4, pp. 930-958.

5. **Chen B.** A balanced system of U.S. industry accounts and distribution of the aggregate statistical discrepancy by industry. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2012, vol. 30, no. 2, pp. 202-211.

6. **Taha H.** *Operations research*: *An introductio*n. New York and London, Macmillan Publishing Co, Inc. and Collier Macmillan Publishers, 1982 (Russ. ed.: Takha Kh. *Vvedenie v issledovanie operatsii*: V 2-kh kn. Kn. 2. Moscow, Mir Publ., 1985. 496 p.).