



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 517.938, 514.83  
MSC 2010: 37E30

## О топологической структуре магнитного поля областей фотосферы

Е. В. Жужома, В. С. Медведев, Н. В. Исаенкова

В статье, используя методы теории динамических систем Морса–Смейла, авторы рассматривают топологическую структуру для точечно-зарядной модели магнитного поля областей фотосферы. Для произвольного количества зарядов (безотносительно к их местоположению) и не предполагая потенциальности поля  $\vec{B}$  (следовательно, не используя конкретных формул), авторы приводят оценки, связывающие количества зарядов определенного типа с количеством нуль-точек. Для граничных оценок описывается топологическая структура магнитного поля. Приводится бифуркация рождения большого числа сепараторов.

Ключевые слова: динамическая система Морса–Смейла, нулевые точки, сепаратор

---

Получено 25 мая 2017 года  
После доработки 30 июля 2017 года

---

Результаты работы, за исключением теоремы 3, были получены Е. В. Жужомой (при участии других соавторов) за счет средств гранта РФФ (проект 17-11-01041). Результаты теоремы 3 были получены авторами статьи при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко\_а) и в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 г. (ТЗ-90).

---

Жужома Евгений Викторович  
[zhuzhoma@mail.ru](mailto:zhuzhoma@mail.ru)  
Медведев Вячеслав Сергеевич  
[medvedev-1942@mail.ru](mailto:medvedev-1942@mail.ru)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12

Исаенкова Наталья Викторовна  
[nisaenkova@mail.ru](mailto:nisaenkova@mail.ru)  
Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации  
603950, Россия, г. Нижний Новгород, Анкудиновское шоссе, д. 3

## Введение

Изучение и предсказание солнечных вспышек является одной из актуальных задач астрофизики. Наблюдения показывают, что перед солнечными вспышками в фотосфере Солнца появляются локальные области (пятна) с интенсивными потоками магнитного поля. Другими словами, эти области проявляют себя как источники или стоки окружающего их магнитного поля. Несмотря на то, что экспериментально магнитные заряды (в отличие от электрических) не обнаружены, математическая идеализация таких областей с интенсивными магнитными потоками обсуждалась в работах [1, 13, 23] и в итоге привела к понятию *точечного заряда* магнитного поля (иногда точечный заряд называют положительным или отрицательным источником [10], см. рис. 1). Эффективное применение точечно-зарядной модели для анализа конкретной солнечной вспышки можно найти в работе [14], в которой теоретические выводы хорошо согласовывались с наблюдаемыми результатами. Точечно-зарядная идеализация также применялась в серии работ (см., например, [2, 4, 7]) для анализа триггеров солнечных вспышек и для исследования топологической структуры магнитного поля, предшествующей солнечной вспышке. Оказалось, что, несмотря на упрощенный характер, данная модель способна во многих случаях дать интересные результаты, которые могут пролить свет на более реальную физическую картину.

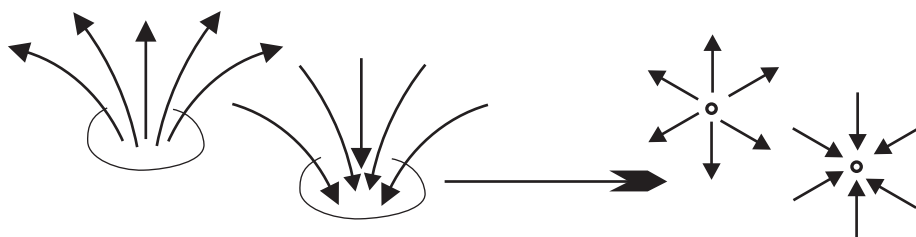


Рис. 1. Математическая идеализация локальных областей.

Во всех известных авторам работах, в которых применялась указанная модель, рассматривалось конечное и достаточно малое число зарядов. Например, в работах [9, 11] рассматривались группы из двух и трех зарядов. В работах [1, 6, 13, 14, 23] рассматривались группы из четырех зарядов. Наконец, в работе [5] рассматривалась группа из шести зарядов. Во всех работах конкретизировались координаты зарядов. Также предполагалась потенциальность поля магнитной индукции  $\vec{B}$ , для определения которой применялась конкретная формула. С помощью непосредственных вычислений находились так называемые нуль-точки поля  $\vec{B}$  и сепараторы (см. определения ниже), которые играют существенную роль в описании топологической структуры магнитного поля. Формула Эйлера–Пуанкаре применялась для проверки наличия нуль-точек. Отметим, что основное внимание в указанных работах было направлено на исследование перестроек магнитного поля при изменении положения зарядов.

В настоящей статье мы рассматриваем топологическую структуру магнитного поля для произвольного количества зарядов (безотносительно к их местоположению), используя методы теории динамических систем. Не предполагая потенциальности поля  $\vec{B}$  (следовательно, не используя конкретных формул), мы приводим оценки, связывающие количества зарядов определенного типа с количеством нуль-точек. Для граничных оценок описывается топологическая структура магнитного поля. Мы также приводим одну бифуркацию рождения большого числа сепараторов.

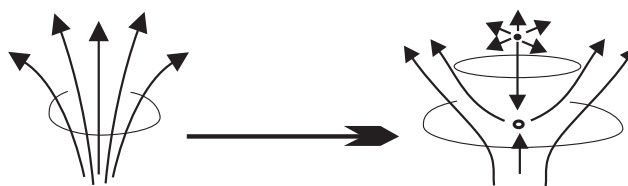


Рис. 2. Включение зарядов в магнитную трубку.

Отметим, что модель с точечными зарядами может быть применена даже в случае, когда область (пятно) с интенсивным магнитным полем содержит магнитные трубки или содержится в магнитной трубке (см. рис. 2).

Для формулировки основных результатов приведем некоторые определения. Заряд называется *положительным*, если его можно заключить в сколь угодно малый шар, на границе которого магнитное поле направлено наружу. Аналогично определяется отрицательный заряд. Заряды образуют множество особенностей магнитного поля  $\vec{B}$ . С точки зрения теории динамических систем, положительный заряд является источником, а отрицательный — стоком векторного поля. При изучении топологической структуры, не уменьшая общности, можно считать, что все особенности гиперболические (то есть действительные части всех собственных значений соответствующей матрицы Якоби отличны от нуля), поскольку узлы (стоки и источники) топологически эквивалентны гиперболическим узлам.

Наличие нескольких положительных или отрицательных зарядов приводит необходимо к существованию нулевых точек (называемых также нуль-точками [10]). Точка  $p_0$  магнитного поля  $\vec{B}$  называется *нулевой*, если  $\vec{B}(p_0) = 0$ . Мы рассматриваем гиперболические нулевые точки, когда действительные части собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$  в нулевой точке ненулевые. Из равенства  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  вытекает соотношение  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Не уменьшая общности, можно считать, что число  $\lambda_1$  действительное. Поэтому для гиперболической нулевой точки  $p_0$  возможны (с точностью до переобозначений собственных чисел) лишь следующие варианты:  $\lambda_1 > 0, \text{Re } \lambda_2, \text{Re } \lambda_3 < 0$  и  $\lambda_1 < 0, \text{Re } \lambda_2, \text{Re } \lambda_3 > 0$ . В первом случае нулевая точка  $p_0$  называется *положительной* (поскольку  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ ), а во втором — *отрицательной* (поскольку  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$ ); схематически положительная и отрицательная нулевые точки представлены на рисунке 3. Гиперболическая нуль-точка имеет одномерную сепаратрису, соответствующую собственному значению  $\lambda_1$ , и двумерную сепаратрису, соответствующую собственным значениям  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  [12].

Магнитное поле является *типичным*, если все его нуль-точки и особенности (заряды) гиперболические, двумерные сепаратрисы нуль-точек пересекаются трансверсально (если пересекаются), любая одномерная сепаратриса не имеет пересечений с двумерными сепаратрисами.

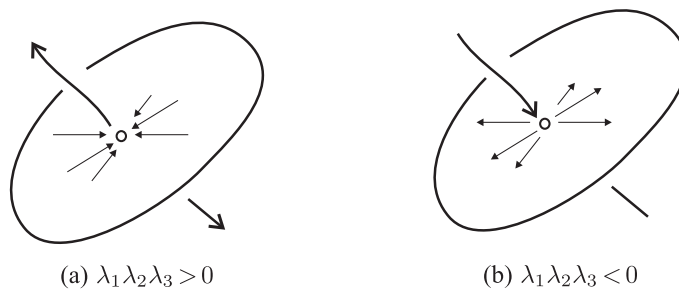


Рис. 3. Положительная и отрицательная нулевые точки.

ратрисами и нет одномерных сепаратрис, соединяющих нулевые точки (включая одну и ту же нулевую точку). Отметим, что одномерные сепаратрисы в общем случае либо не пересекаются, либо совпадают. Далее мы рассматриваем только типичные магнитные поля.

Поскольку Солнце излучает энергию, большое практическое значение имеет изучение так называемых положительно несбалансированных групп зарядов. Группа зарядов  $C$  называется *положительно несбалансированной*, если ее можно заключить в шар  $B$ , на границе которого магнитное поле направлено наружу, а внутри шара магнитное поле типично и нет замкнутых магнитных линий. Указанный шар  $B = B(C)$  будем называть *источниковой областью группы  $C$* . Более того, мы будем предполагать, что внутри источниковой области любая силовая линия, не образующая одномерную сепаратрису и не принадлежащая двумерной сепаратрисе нуль-точки, либо стремится к особенности магнитного поля, либо покидает источниковую область. Аналогично определяется *отрицательно несбалансированная группа* зарядов, и в этом случае говорят о стоковой области группы зарядов. Изучение отрицательно несбалансированных групп также важно, поскольку внутри положительно несбалансированной группы могут быть семейства отрицательно несбалансированных групп, бифуркации которых могут быть причиной вспышки [8].

Следуя [8, 10], будем называть магнитную линию, соединяющую две нулевые точки, *сепаратором*. Согласно представлениям современной астрофизики, солнечные вспышки происходят в результате магнитного пересоединения, связанного с изменением топологии магнитного поля вблизи сепаратора.

Введем для группы зарядов следующие обозначения:  $S^+$  — число положительных нуль-точек,  $S^-$  — число отрицательных нуль-точек,  $N^+$  — число положительных зарядов,  $N^-$  — число отрицательных зарядов. Можно показать (см. лемму 1), что из формулы Эйлера–Пуанкаре вытекает равенство

$$1 + N^- - S^+ + S^- - N^+ = 0.$$

Однако, как показывает первый основной результат данной статьи, не все неотрицательные числа  $S^+$ ,  $S^-$ ,  $N^+$ ,  $N^-$ , удовлетворяющие этой формуле, могут быть реализованы. Определение топологической структуры источника типа  $(l; l-1)$  дано в параграфе 1.

**Теорема 1.** Пусть положительно несбалансированная группа  $C$  содержит  $N^+ \geq 1$  положительных зарядов и  $N^- \geq 0$  отрицательных зарядов. Тогда в источниковой области  $B(C)$  этой группы имеется по крайней мере  $N^+ - 1$  отрицательных нулевых точек и  $N^-$  положительных нулевых точек,

$$S^- \geq N^+ - 1, \quad S^+ \geq N^-.$$

Если группа  $C$  состоит из  $N^+ \geq 2$  положительных зарядов и в  $B(C)$  содержится ровно  $N^+ - 1$  нулевых точек, то все нулевые точки являются отрицательными нулевыми точками и сепараторы в  $B(C)$  отсутствуют. Более того, магнитное поле в области  $B(C)$  имеет единственную с точностью до топологической эквивалентности структуру источника типа  $(N^+, N^+ - 1)$ .

**Следствие 1.** Пусть имеется отрицательно несбалансированная группа  $C$ , содержащая  $N^- \geq 2$  отрицательных зарядов. Тогда в стоковой области  $B(C)$  этой группы имеется по крайней мере  $N^- - 1$  положительных нулевых точек. Если группа  $C$  состоит из  $N^- \geq 2$  отрицательных зарядов и в  $B(C)$  содержится ровно  $N^- - 1$  нулевых точек, то все эти точки являются положительными нулевыми точками и сепараторы в  $B(C)$  отсутствуют.

При минимально возможных количествах как положительных, так и отрицательных нулевых точек (эти минимальные числа определяются в силу теоремы 1) сепараторов может не быть. Однако, как показывает следующая теорема, как только появляется хотя бы одна «лишняя» нулевая точка, то необходимо появляется хотя бы один сепаратор. Тип лишней нулевой точки роли не играет (она может быть как положительной, так и отрицательной). Мы для определенности формулируем утверждение, когда лишняя нулевая точка является отрицательной.

**Теорема 2.** Пусть положительно несбалансированная группа  $\mathcal{C}$  содержит  $N^+ \geq 2$  положительных и  $N^- \geq 0$  отрицательных зарядов. Если  $B(\mathcal{C})$  содержит ровно  $N^+$  отрицательных нулевых точек, то в  $B(\mathcal{C})$  существует хотя бы один сепаратор.

Следующая теорема демонстрирует один сценарий появления отрицательной нулевой точки, когда возникает семейство сепараторов, количество которых равно числу отрицательных нулевых точек (оно также равно числу положительных зарядов).

**Теорема 3.** Пусть имеется положительно несбалансированная группа  $\mathcal{C}$ , состоящая из  $N^+ \geq 2$  положительных зарядов и  $N^+ - 1$  отрицательных нулевых точек, лежащих на фотосфере. Тогда существует типичная бифуркация рождения  $N^+$  гетероклинических сепараторов и одной отрицательной нулевой точки, лежащих на фотосфере.

Отметим работы [3, 15], где другие достаточные условия существования сепараторов были получены методами теории динамических систем Морса–Смейла с дискретным временем. Настоящая статья является развитием работы [22].

## 1. Вспомогательные результаты

Все необходимые сведения, касающиеся результатов теории динамических систем Морса–Смейла на двумерных и трехмерных многообразиях, можно найти в книге [19].

Пусть  $f^t$  — поток, индуцированный гладким векторным полем  $\vec{V}$  на трехмерном замкнутом многообразии  $\mathbb{M}^3$ . Поскольку мы рассматриваем магнитные поля без замкнутых силовых линий, то везде далее для простоты будем считать, что  $f^t$  не имеет периодических траекторий. Обозначим через  $Fix(f^t)$  множество состояний равновесия потока  $f^t$ . Если все состояния равновесия гиперболические, то для любого  $p \in Fix(f^t)$  множество траекторий  $W^s(p)$ , стремящихся к  $p$  при неограниченном увеличении времени, образует гладко вложенное подмногообразие, которое называется *устойчивым многообразием* точки  $p$  [12]. Аналогично, обозначим через  $W^u(p)$  *неустойчивое многообразие*, которое представляет собой множество траекторий, стремящихся к  $p$  при неограниченном уменьшении времени. Отметим, что  $p \in W^s(p) \cap W^u(p)$ . Устойчивое и неустойчивое многообразия называются *инвариантными многообразиями* точки  $p$ . Известно, что инвариантное многообразие гиперболического состояния равновесия есть образ евклидова пространства  $\mathbb{R}^d$ ,  $0 \leq d \leq 3$ , относительно инъективной иммерсии  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^3$  [12]<sup>1</sup>. Из гиперболичности вытекает равенство  $\dim W^u(p) + \dim W^s(p) = 3$ .

Гиперболическое состояние равновесия  $p$  называется *седлом*, если  $1 \leq \dim W^u(p) \leq 2$ ,  $1 \leq \dim W^s(p) \leq 2$ . Для седла  $p$  множество  $W^u(p) \setminus \{p\}$  является неустойчивой сепаратрисой, а множество  $W^s(p) \setminus \{p\}$  — устойчивой сепаратрисой. Если  $\dim W^u(p) = 0$  и  $\dim W^s(p) = 3$ ,

<sup>1</sup>Под 0-мерным пространством понимается точка.

то  $p$  называется *стоком*. Если  $\dim W^u(p) = 3$  и  $\dim W^s(p) = 0$ , то  $p$  называется *источником*. Индекс Морса  $i_m(p)$  гиперболического состояния равновесия  $p$  равен размерности неустойчивого многообразия точки  $p$ ,  $i_m(p) = \dim W^u(p)$ . Топологический индекс равен  $I(p) = (-1)^{i_m(p)}$ .

Поток  $f^t$  называется *поток Морса–Смейла*, если все его состояния равновесия гиперболические, их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально и предельное множество любой траектории принадлежит  $Fix(f^t)$  [12]. Соответствующее векторное поле  $\vec{V}$  называется *векторным полем Морса–Смейла*.

Обозначим через  $\vec{v}_{source}$  векторное поле в шаре  $\mathbb{B}^3$ , направленное наружу на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и имеющее внутри шара ровно один гиперболический источник (рис. 4а). Положим  $\vec{v}_{sink} = -\vec{v}_{source}$ . Ясно, что векторное поле  $\vec{v}_{sink}$  имеет внутри шара  $\mathbb{B}^3$  ровно один гиперболический сток, и  $\vec{v}_{sink}$  на границе  $S^2$  направлено внутрь шара  $\mathbb{B}^3$ .

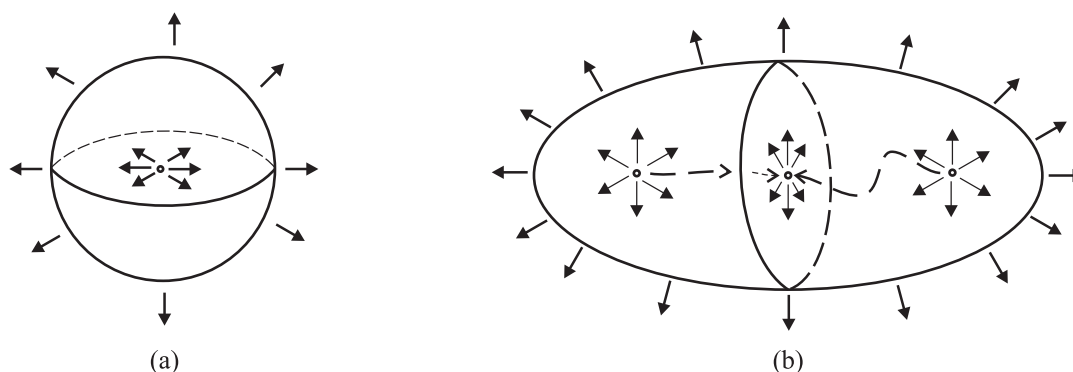


Рис. 4. (а) Векторное поле  $\vec{v}_{source}$ , (б) векторное поле  $\vec{v}_{uns}$  типа  $(2;1)$  в шаре  $\mathbb{B}^3$ .

Одним из ключевых шагов в доказательствах основных результатов является следующее утверждение.

**Предложение 1.** Пусть положительно несбалансированная группа  $\mathcal{C}$  содержит  $N^+$  (соответственно,  $N^-$ ) положительных (соответственно, отрицательных) зарядов и  $S^+$  (соответственно,  $S^-$ ) положительных (соответственно, отрицательных) нулевых точек. Тогда магнитное поле  $\vec{v}(\mathcal{C})$  в области  $B(\mathcal{C})$  продолжается до векторного поля  $\vec{V}(\mathcal{C})$  Морса–Смейла трехмерной сферы  $\mathbb{S}^3$  так, что неблуждающее множество поля  $\vec{V}(\mathcal{C})$  состоит из  $N^+$  источников,  $N^- + 1$  стоков,  $S^+$  седел с индексом Морса, равным единице, и  $S^-$  седел с индексом Морса, равным двум.

*Доказательство.* Напомним, что векторное поле  $\vec{v}(\mathcal{C})$  направлено наружу на границе  $\partial B(\mathcal{C})$  шара  $B(\mathcal{C})$ . Возьмем шар  $\mathbb{B}^3$  с векторным полем  $\vec{v}_{sink}$ . Если отождествить границы  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$ ,  $\partial B(\mathcal{C})$  шаров  $\mathbb{B}^3$  и  $B(\mathcal{C})$  соответственно, то получим трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$ . Можно подправить поле  $\vec{v}_{sink}$  вблизи границы  $\partial\mathbb{B}^3$  так, чтобы поля  $\vec{v}_{sink}$ ,  $\vec{v}(\mathcal{C})$  образовывали гладкое векторное поле Морса–Смейла на  $\mathbb{S}^3$ , которое мы обозначим через  $\vec{V}(\mathcal{C})$ . Ясно, что при этом можно сохранить глобальную топологическую структуру поля  $\vec{v}_{sink}$ . Тогда состояния равновесия  $\vec{V}(\mathcal{C})$  будут представлять собой объединение состояний равновесия поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  и стока поля  $\vec{v}_{sink}$ . ■

Векторное поле  $\vec{V}(\mathcal{C})$  будем называть *продолжением поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  группы зарядов  $\mathcal{C}$  на трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$* .



**Лемма 1.** Пусть положительно несбалансированная группа  $\mathcal{C}$  содержит  $N^+$  (соответственно,  $N^-$ ) положительных (соответственно, отрицательных) зарядов и  $S^+$  (соответственно,  $S^-$ ) положительных (соответственно, отрицательных) нулевых точек. Тогда имеет место равенство

$$1 + N^- - S^+ + S^- - N^+ = 0. \tag{1.1}$$

*Доказательство.* Пусть  $\vec{v}(\mathcal{C})$  — магнитное поле в  $B(\mathcal{C})$ , порожденное группой  $\mathcal{C}$ , и  $\vec{V}(\mathcal{C})$  — продолжение поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  на трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$ . Заряды и нулевые точки магнитного поля векторного поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  являются состояниями равновесия векторного поля Морса–Смейла  $\vec{V}(\mathcal{C})$ . Напомним, что  $\vec{V}(\mathcal{C})$  имеет по сравнению с  $\vec{v}(\mathcal{C})$  дополнительный сток, топологический индекс которого равен единице.

Индекс Морса (размерность неустойчивого многообразия) положительной нуль-точки равен единице. Поэтому топологический индекс такой точки равен минус единице. Аналогично, топологический индекс отрицательной нуль-точки равен единице, поскольку ее индекс Морса равен двум. Индекс Морса отрицательного (соответственно, положительного) заряда равен нулю (соответственно, трем). Поэтому топологический индекс отрицательного (соответственно, положительного) заряда равен единице (соответственно, минус единице). Известно, что эйлерова характеристика трехмерной сферы равна нулю. Применяя формулу Эйлера–Пуанкаре, согласно которой сумма топологических индексов состояний равновесия равна эйлеровой характеристике, получаем требуемый результат. ■

**Следствие 2.** Пусть выполняются условия леммы 1. Если в источниковой области нет отрицательных зарядов,  $N^- = 0$ , то

$$S^- = (N^+ - 1) + S^+ \geq N^+ - 1.$$

Для описания топологической структуры векторных полей нам понадобятся некоторые канонические поля. Напомним, что  $\vec{v}_{source}$  означает векторное поле в шаре  $\mathbb{B}^3$ , направленное наружу на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и имеющее один источник  $\alpha_0$  внутри шара  $\mathbb{B}^3$  (рис. 4а). Будем называть векторное поле  $\vec{v}_{source}$  источником типа  $(1; 0)$ . Рассмотрим векторное поле  $\vec{v}_{uns}$  в шаре  $\mathbb{B}^3$ , направленное наружу на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и имеющее  $l \geq 2$  источников  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  и  $l - 1$  седел  $\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}$  индекса Морса 2. Такое векторное поле  $\vec{v}_{uns}$  будем называть источником типа  $(l; l - 1)$ . Структура векторного поля типа  $(2; 1)$  изображена на рисунке 4б.

Положим  $\vec{v}_{sink} = -\vec{v}_{source}$ ,  $\vec{v}_{stab} = -\vec{v}_{uns}$ . Векторное поле  $\vec{v}_{sink}$  направлено внутрь на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и имеет один сток внутри шара  $\mathbb{B}^3$ . Векторное поле  $\vec{v}_{stab}$  направлено внутрь на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$ , имеет  $l \geq 2$  стоков  $\omega_1, \dots, \omega_l$  и  $l - 1$  седел индекса Морса 1. Такое векторное поле  $\vec{v}_{uns}$  будем называть стоком типа  $(l; l - 1)$ . Не уменьшая общности, можно считать (и мы будем так считать), что рассмотренные выше векторные поля ортогональны границе  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и являются единичными на этой границе.

Введем на множестве состояний равновесия  $Fix(f^t)$  потока Морса–Смейла  $f^t$  частичное отношение  $\prec$ . Для  $p, q \in Fix(f^t)$  положим  $p \prec q$ , если  $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$ . Удобно введенное отношение изображать на графе, точки которого отождествляются с состояниями равновесия  $Fix(f^t)$ . Вершины графа, соответствующие  $p, q \in Fix(f^t)$  и связанные отношением  $p \prec q$ , соединяются ребром, направленным из  $q$  к точке  $p$ . Так введенный ориентированный граф  $\Gamma(f^t)$  иногда называют графом (или диаграммой) Смейла.

Обозначим через  $A(f^t)$  объединение всех одномерных неустойчивых многообразий седел и всех стоков потока  $f^t$ . Известно [16–18], что  $A(f^t)$  является связным одномерным



подграфом графа  $\Gamma(f^t)$ , вершины которого отождествляются с соответствующими седлами и стоками. В этом случае ребра подграфа соответствуют одномерным неустойчивым сепаратрисам и снабжаются направлением из седел к стокам. Более того,  $A(f^t)$  является притягивающим множеством потока  $f^t$  [16–18]. Аналогично обозначим через  $R(f^t)$  объединение всех устойчивых одномерных сепаратрис седел и всех источников. Тогда  $R(f^t)$  есть связный ориентированный подграф, являющийся отталкивающим множеством потока  $f^t$  [16–18].

При отождествлении границ двух копий шара  $\mathbb{B}^3$  получается 3-сфера  $\mathbb{S}^3$ . Если на одной копии шара задан источник типа  $(l; l-1)$ , а на другой копии шара задано поле  $\vec{v}_{sink}$ , то на  $\mathbb{S}^3$  получаем гладкое векторное поле, которое обозначается через  $\vec{V}_{uns}(l; l-1)$ . По существу, из [18] вытекает следующее утверждение (многомерные аналоги см. в [20, 21]).

**Предложение 2.** Пусть на трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3$  задано векторное поле Морса–Смейла  $\vec{V}$ , неблуждающее множество которого состоит из  $l \geq 2$  источников,  $l-1$  седел индекса Морса 2 и одного стока. Тогда  $\vec{V}$  топологически эквивалентно  $\vec{V}_{uns}(l; l-1)$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $f^t$  поток Морса–Смейла, порожденный векторным полем  $\vec{V}$ . Так как число источников превышает на единицу число седел индекса Морса 2, то притягивающее множество  $A(f^t)$  представляет собой отрезок, на котором расположены стоки и седла. При этом седла чередуются с источниками, и на конечных точках отрезка  $A(f^t)$  расположены источники. Тогда множество  $A(f^t)$  имеет шаровую окрестность, которая является источником типа  $(l; l-1)$ . Вне этой окрестности находится сток. Отсюда следует требуемое утверждение. ■

## 2. Доказательство основных результатов

*Доказательство теоремы 1.* Пусть  $\vec{v}(C)$  — магнитное поле в  $B(C)$ , порожденное группой зарядов  $C$ , и  $\vec{V}(C)$  — продолжение поля  $\vec{v}(C)$  на трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$ . Таким образом, поле  $\vec{V}(C)$  имеет по сравнению с  $\vec{v}(C)$  еще один сток. Нам нужно доказать неравенство  $S^- \geq N^+ - 1$ , где  $S^-$  — число отрицательных нулевых точек поля  $\vec{V}(C)$ . Доказательство этого неравенства будем проводить методом математической индукции по числу  $l = N^+$  положительных зарядов, которое равно числу источников поля  $\vec{V}(C)$ . Напомним, что  $\vec{V}(C)$  является векторным полем Морса–Смейла, которое индуцирует поток  $f^t$  Морса–Смейла на  $\mathbb{S}^3$ .

Сперва покажем, что для любого  $l \geq 2$  существует хотя бы одна отрицательная нулевая точка (одновременно доказывается первый шаг индукции для  $N^+ = l = 2$ ). Обозначим через  $A = A(f^t)$  объединение всех стоков и неустойчивых (одномерных) сепаратрис всех седел индекса Морса один. Предположим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда дополнение к  $A$  есть объединение непересекающихся неустойчивых (трехмерных) многообразий  $l \geq 2$  источников. Поскольку дополнение к одномерному графу  $A$  является связным множеством, то мы получаем противоречие со связностью множества  $\mathbb{S}^3 \setminus A$ .

Предположим, что утверждение доказано для числа источников  $2, \dots, l \geq 2$ , и покажем, что оно верно для  $l+1 \geq 3$ . Из предыдущего следует существование по крайней мере одного седла  $\sigma$  индекса Морса два. Две (одномерные) устойчивые сепаратрисы  $Sep_1^s, Sep_2^s$  седла  $\sigma$  принадлежат неустойчивым многообразиям источников  $\alpha_1, \alpha_2$  соответственно. Рассмотрим два случая:  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  и  $\alpha_1 = \alpha_2$ . В первом случае множество  $\alpha_1 \cup Sep_1^s \cup \sigma \cup Sep_2^s \cup \alpha_2 = S$  является отталкивающим множеством. Из  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  вытекает, что это множество  $S$  имеет гомеоморфную 3-шару окрестность, которая выглядит как источник. Тогда исходный поток



можно заменить на поток, у которого вместо двух источников  $\alpha_1, \alpha_2$  и седла  $\sigma$  появился один источник. Для полученного потока выполняется предположение индукции. Поскольку этот поток имеет ровно на единицу меньше источников и седел, мы получаем требуемую оценку для исходного потока. Из приведенного рассуждения вытекает, что если существует седло индекса Морса два, для которого реализуется случай  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , то неравенство  $S^- \geq l - 1$  доказано.

Во втором случае  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Не уменьшая общности, можно считать, что этот случай реализуется для всех седел индекса Морса два. Тогда каждому такому седлу однозначно ставится в соответствие источник,  $\sigma \mapsto \alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ . Отсюда вытекает более сильное неравенство  $S^- \geq l$ .

Таким образом, неравенство  $S^- \geq l - 1$  доказано для любой группы зарядов, в которой имеется  $l \geq 2$  положительных зарядов. Заметим, что если в группе нет отрицательных зарядов, то  $N^+ = l$  и  $N^- = 0$ , и тогда неравенство  $S^- \geq l - 1$  вытекает из следствия 2.

Если  $S^- = l - 1$ , то из (1.1) следует, что  $S^+ = 0$ , а следовательно, все нулевые точки являются отрицательными нулевыми точками. Поэтому сепараторы в  $B(C)$  отсутствуют.

Утверждение о единственности топологической структуры непосредственно следует из предложения 2. ■

*Доказательство теоремы 2.* Пусть  $\vec{v}(C)$  — магнитное поле в  $B(C)$ , порожденное группой  $C$ , и  $\vec{V}(C)$  — продолжение поля  $\vec{v}(C)$  на трехмерную сферу  $S^3$ . По условию,  $N^+ = S^- = l$ . Отсюда и формулы (1.1) следует, что  $S^+ = 1 + N^- \geq 1$ .

Пусть  $f^t$  — поток Морса–Смейла, индуцированный векторным полем  $\vec{V}(C)$  на трехмерной сфере  $S^3$ . Рассмотрим связный одномерный граф  $R(f^t)$ , состоящий из всех одномерных устойчивых многообразий седел и всех источников потока  $f^t$ . Напомним, что  $R(f^t)$  является отталкивающим множеством потока  $f^t$ . Простой путь на графе  $R(f^t)$  представляет собой так называемый цикл типа (2; 3), поскольку состоит из седел с двумерными неустойчивыми многообразиями и источников с трехмерными неустойчивыми многообразиями.

**Предложение 3.** *Если число источников равно числу седловых состояний равновесия с топологическим индексом единица (индексом Морса два), то граф  $R(f^t)$  имеет окрестность  $U(R)$ , такую, что*

- граница  $\partial U(R)$  окрестности  $U(R)$  трансверсальна потоку  $f^t$ , причем траектории потока выходят из  $U(R)$  при увеличении времени,
- окрестность  $U(R)$  гомеоморфна полноторию (следовательно, граница  $\partial U(R)$  гомеоморфна двумерному тору),
- двумерное неустойчивое многообразие  $W^u(\sigma)$  каждого седла  $\sigma \in U(R)$  (отрицательная нулевая точка) пересекает тор  $\partial U(R)$  по замкнутой кривой, гомотопной нулевому меридиану тора  $\partial U(R)$ .

*Доказательство предложения 3.* По условию, вершины графа  $R(f^t)$  состоят из  $l$  седловых и  $l$  источниковых точек, причем в каждую седловую точку входят ровно два ребра, а из каждой источниковой точки выходит хотя бы одно ребро. Тогда  $R(f^t)$  содержит простой цикл  $C$  типа (2; 3), к которому подклеивается некоторое (возможно, нулевое) число сегментов, в каждом из которых содержится равное количество источниковых и седловых точек (равное числу ребер в сегменте). Цикл  $C$  имеет окрестность, которая гомеоморфна полноторию и из которой траектории выходят при увеличении времени, поскольку  $C$



имеет тип  $(2; 3)$ . Не уменьшая общности, можно считать, что эта окрестность не содержит сток (в противном случае уменьшим окрестность). Каждый из присоединенных сегментов имеет окрестность, гомеоморфную шару, из которого траектории выходят при увеличении времени. Отсюда вытекает существование требуемой окрестности  $U(R)$ , не содержащей стока. Из построения  $U(R)$  вытекает, что для достаточно малой окрестности  $U(R)$  двумерная неустойчивая сепаратриса каждого седла  $\sigma \in U(R)$  должна пересекать  $\partial U(R)$  по замкнутой кривой, гомеоморфной меридиану тора  $\partial U(R)$ . Предложение 3 доказано. ■

Обращая время, мы получаем аналогичное утверждение для графа  $A(f^t)$ . Равенство  $S^+ = 1 + N^-$  означает, что у потока  $f^t$  число стоков равно числу седловых состояний равновесия с топологическим индексом минус единица (индексом Морса единица). Поэтому  $A(f^t)$  имеет окрестность  $U(A)$ , гомеоморфную полноторию и такую, что его граница  $\partial U(A)$  трансверсальна потоку  $f^t$ , причем траектории входят в  $U(A)$  при увеличении времени. Для достаточно малой окрестности  $U(A)$  двумерная устойчивая сепаратриса каждого седла  $\sigma \in U(A)$  пересекает двумерный тор  $\partial U(A)$  по замкнутой простой кривой, гомотопной меридиану тора  $\partial U(A)$ . Обозначим одну из этих кривых через  $\mu_0$ .

Не уменьшая общности, можно считать, что окрестности  $U(R)$  и  $U(A)$  не пересекаются. Поскольку в их объединении лежат все состояния равновесия потока  $f^t$ , любая положительная полутраектория с начальной точкой на  $\partial U(R)$  должна пересечь тор  $\partial U(A)$ . Отсюда вытекает, что сферу  $S^3$  можно представить в виде двух полноториев  $U(R)$ ,  $U(A)$  после отождествления их границ  $\partial U(R)$ ,  $\partial U(A)$ . Пусть  $\vartheta : \partial U(A) \rightarrow \partial U(R)$  — гомеоморфизм, такой, что  $S^3 = U(A) \cup_{\vartheta} U(R)$ . Известно, что при склейке двух полноториев 3-сфера получается только в том случае, когда меридиан на одном граничном торе отождествляется с параллелью (возможно несколько раз еще прокрученной вдоль меридиана) на другом граничном торе. Следовательно, образ кривой  $\mu_0$  относительно  $\vartheta$  дает замкнутую кривую, которая пересекает любую замкнутую кривую на  $\partial U(R)$ , гомотопную нулевому меридиану тора  $\partial U(R)$ . Отсюда вытекает существование хотя бы одного сепаратора. ■

Непосредственно из доказательства предложения 3 вытекает следующее утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем.

**Предложение 4.** Пусть выполняются условия теоремы 2, и пусть  $f^t$  — поток Морса–Смейла, индуцированный векторным полем  $\vec{V}(C)$  на трехмерной сфере  $S^3$ , которое является продолжением магнитного поля в  $B(C)$ . Предположим, что граф  $A(f^t)$  есть простая замкнутая кривая. Тогда в  $B(C)$  существует по крайней мере  $N^+$  сепараторов.

*Доказательство.* В обозначениях предложения 3 получаем, что двумерная неустойчивая сепаратриса каждого седла из  $\partial U(R)$  пересекает  $\partial U(R)$  по замкнутой кривой, гомотопной нулевому меридиану тора  $\partial U(R)$ . Поскольку  $\partial U(R)$  содержит  $N^+$  седел, существует по крайней мере  $N^+$  сепараторов. ■

*Доказательство теоремы 3.* Для простоты мы построим требуемую бифуркацию для  $N^+ = 2$ . Из построения будет видно, что требуемую бифуркацию можно построить с произвольным числом  $N^+ \geq 2$  положительных зарядов. Введем две гладкие функции  $a(\mu)$ ,  $b(\mu)$ , зависящие от параметра  $0 \leq \mu \leq 1$  следующим образом:

$$a(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \mu \leq 0.1, \\ \downarrow & \text{при } 0.1 \leq \mu \leq 1, \\ 0 & \text{при } \mu = 1, \end{cases} \quad b(\mu) = \begin{cases} 0.1 & \text{при } \mu = 0, \\ \downarrow & \text{при } 0 \leq \mu \leq 0.1, \\ 0 & \text{при } 0.1 \leq \mu \leq 1. \end{cases}$$

Здесь символ  $\downarrow$  означает, что функция монотонно убывает. Рассмотрим в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , наделенном цилиндрической системой координат  $(\varrho; \varphi; z)$ , систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varrho} = [\varrho + b(\mu)] [\varrho - 1 + 2a(\mu)\Psi(\varrho; \varphi) + b(\mu)], \tag{2.1}$$

$$\dot{\varphi} = -\sin 2\varphi, \tag{2.2}$$

$$\dot{z} = z, \tag{2.3}$$

где

$$\Psi(\varrho; \varphi) = \sin^2\left(\frac{\varphi - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right).$$

Все состояния равновесия системы лежат в плоскости  $z = 0$ , которая является репеллером для векторного поля, определяемого данной системой. Поскольку система расщепляется на первые два уравнения (2.1), (2.2) и на третье уравнение (2.3), достаточно рассмотреть фазовый портрет в плоскости  $z = 0$ . В этой плоскости состояния равновесия могут быть только на лучах  $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi$  и  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ .

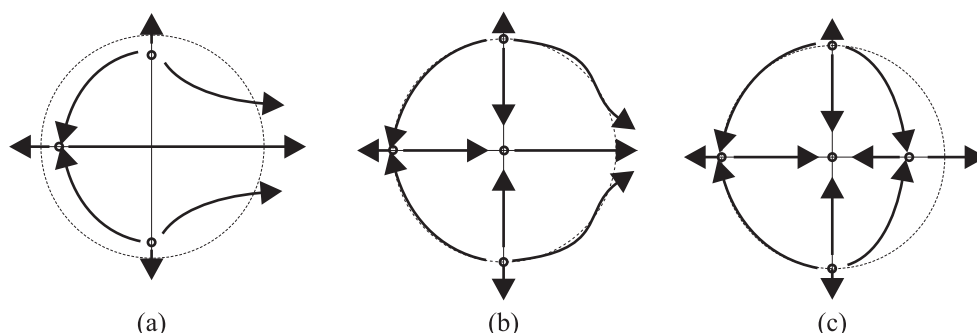


Рис. 5. (a)  $0 \leq \mu < 0.1$ ; (b)  $\mu = 0.1$ ; (c)  $0.1 < \mu \leq 1$ .

При  $0 \leq \mu < 0.1$  функции  $a(\mu), b(\mu)$  удовлетворяют соотношениям  $a(\mu) = 1, 0.1 \geq b = b(\mu) > 0$ . Поэтому уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varrho} = \begin{cases} (\varrho + b)^2 & \text{при } \varphi = 0, \\ (\varrho + b)(\varrho + b - 1) & \text{при } \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что имеются три состояния равновесия:  $O_2\left(1 - b; \frac{\pi}{2}\right)$  — источник,  $O_3(1 - b; \pi)$  — седло,  $O_4\left(1 - b; \frac{3\pi}{2}\right)$  — источник (рис. 5а). Седло  $O_3(1 - b; \pi)$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  имеет индекс Морса два. Поскольку других седел нет, то сепараторы отсутствуют.

При  $\mu = 0.1$  имеем  $a(\mu) = 1, b(\mu) = 0$ . Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varrho} = \begin{cases} \varrho^2 & \text{при } \varphi = 0, \\ \varrho(\varrho - 1) & \text{при } \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$



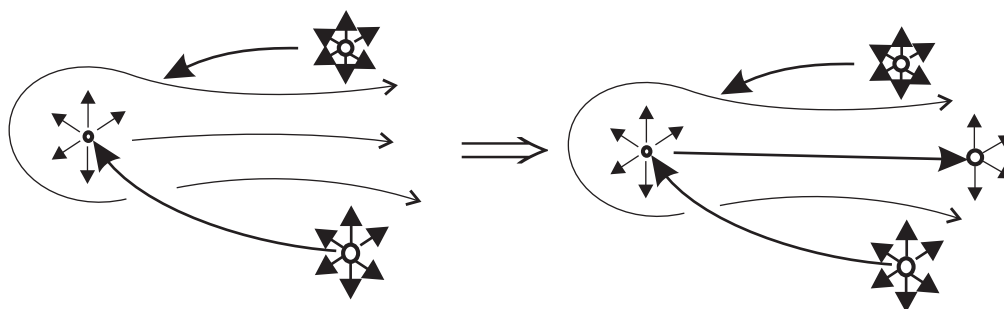


Рис. 6. Бифуркация рождения седло-узла.

К имеющимся уже состояниям равновесия  $O_2\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $O_3(1; \pi)$ ,  $O_4\left(1; \frac{3\pi}{2}\right)$  добавляется седло-узел  $O_0(0; 0)$  в начале координат (рис. 5b). Для наглядности мы приводим бифуркацию рождения седло-узла  $O_0(0; 0)$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  на рисунке 6.

При  $0.1 < \mu \leq 1$  функции  $a(\mu)$ ,  $b(\mu)$  удовлетворяют соотношениям  $1 > a(\mu) = a \geq 0$ ,  $b(\mu) = 0$ . Поэтому уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varrho} = \begin{cases} \varrho(\varrho - 1 + a) & \text{при } \varphi = 0, \\ \varrho(\varrho - 1) & \text{при } \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

В плоскости  $(\varrho; \varphi)$  седло-узел  $O_0(0; 0)$  распадается на сток  $O_0(0; 0)$  и седло  $O_1(1 - a; 0)$  (рис. 5c). В результате этой бифуркации появляются два сепаратора. ■

## Заключение

Математическая идеализация локальных областей с интенсивным магнитным полем на фотосфере Солнца приводит к точечно-зарядной модели магнитного поля. Хорошее обоснование этой модели дано в работе [4]. Эта модель была успешно применена для изучения топологической структуры магнитного поля фотосферы до солнечной вспышки и после нее (см. [2, 4, 7, 14]). Большую роль в этих исследованиях играло доказательство существования нуль-точек и сепараторов, соединяющих нуль-точки. При малом числе зарядов (мы не знаем работ, в которых их число было больше шести) наличие нуль-точек можно было извлечь из формулы Эйлера–Пуанкаре. Однако при большом числе зарядов этой формулы недостаточно. Более того, существуют физически нереализуемые наборы зарядов и нуль-точек, удовлетворяющие формуле Эйлера–Пуанкаре. В настоящей работе получены соотношения между числом зарядов и числом нуль-точек (а также их типом), не вытекающие из формулы Эйлера–Пуанкаре. Эти соотношения получены методами теории динамических систем Морса–Смейла и могут быть применены для анализа магнитного поля фотосферы для больших наборов зарядов.

Авторы благодарят Ю. В. Думина за ряд критических замечаний. Особая благодарность за финансовую поддержку Константину Витальевичу Кирсенко (просветителю и бизнесмену).

## Список литературы

- [1] Baum P. J., Bratenahl A. Flux linkages of bipolar sunspot groups: A computer study // *Sol. Phys.*, 1980, vol. 67, no. 2, pp. 245–258.
- [2] Brown D. S., Priest E. R. The topological behaviour of 3D null points in the Sun's corona // *Astron. Astrophys.*, 2001, vol. 367, pp. 339–346.
- [3] Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E. On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids // *Phys. D*, 2015, vol. 294, pp. 1–5.
- [4] Longcope D. W. Topological and current ribbons: A model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona // *Sol. Phys.*, 1996, vol. 169, no. 1, pp. 91–121.
- [5] Maclean R., Beveridge C., Longcope D., Brown D., Priest E. A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2005, vol. 461, no. 2059, pp. 2099–2120.
- [6] Maclean R., Beveridge C., Priest E. Coronal magnetic topologies in a spherical geometry: 2. Four balanced flux sources // *Sol. Phys.*, 2006, vol. 238, no. 1, pp. 13–27.
- [7] Oreshina A. V., Oreshina I. V., Somov B. V. Magnetic-topology evolution in NOAA AR 10501 on 2003 November 18 // *Astron. Astrophys.*, 2012, vol. 538, A138, 6 pp.
- [8] Priest E. *Solar magnetohydrodynamics*. Dordrecht: Reidel, 1982. 459 pp.
- [9] Priest E. R., Bungey T. N., Titov V. S. The 3D topology and interaction of complex magnetic flux systems // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 1997, vol. 84, nos. 1–2, pp. 127–163.
- [10] Priest E. R., Forbes T. G. *Magnetic reconnection: MHD theory and applications*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 616 pp.
- [11] Priest E., Schriver C. Aspects of three-dimensional magnetic reconnection // *Sol. Phys.*, 1999, vol. 190, nos. 1–2, pp. 1–24.
- [12] Smale S. Differentiable dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1967, vol. 73, pp. 747–817.
- [13] Sweet P. A. The production of high energy particles in solar flares // *Il Nuovo Cimento*, 1958, vol. 8, Suppl. 2, pp. 188–196.
- [14] Горбачев В. С., Кельнер С. Р., Сомов Б. В., Шварц А. С. Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек // *Астрономический журнал*, 1988, т. 65, № 3, с. 601–612.
- [15] Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Зинина С. Х. Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса–Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы // *Нелинейная динамика*, 2014, т. 10, № 4, с. 427–438.
- [16] Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С. Новые соотношения для потоков и диффеоморфизмов Морса–Смейла // *Докл. РАН*, 2002, т. 382, № 6, с. 730–733.
- [17] Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С. Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами // *Матем. сб.*, 2003, т. 194, № 7, с. 25–56.
- [18] Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла // *Дифференциальные уравнения и топология. 2: Сб. ст.: К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина / отв. ред. Е. Ф. Мищенко. (Тр. МИАН, т. 271.) Москва: МАИК, 2010. С. 111–133.*
- [19] Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 424 с.
- [20] Гуревич Е. Я. О диффеоморфизмах Морса–Смейла на многообразиях размерности большей 3 // *Журн. СВМО*, 2003, т. 5, № 1, с. 162–168.
- [21] Гуревич Е. Я., Медведев В. С. О многообразиях размерности  $n$ , допускающих диффеоморфизмы с седловыми точками индексов 1 и  $n - 1$  // *Журн. СВМО*, 2006, т. 8, № 1, с. 204–208.
- [22] Жужома Е. В., Медведев В. С. Рождение сепараторов // *Динамические системы*, 2016, т. 6, № 34, с. 35–45.
- [23] Молоденский М. М., Сыроватский С. И. Магнитные поля активных областей и их нулевые точки // *Астрономический журнал*, 1977, т. 54, № 6, с. 1293–1304.

## On the topological structure of the magnetic field of regions of the photosphere

Evgeniy V. Zhuzhoma<sup>1</sup>, Viacheslav S. Medvedev<sup>2</sup>, Natalia V. Isaenkova<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>National research University “Higher school of Economics”

ul. Bolshaya Pecherskaya 25/12, Nizhni Novgorod, 603005, Russia

<sup>3</sup>Nizhniy Novgorod Academy of the Ministry of the Interior of the Russian Federation

Ankudinovskoe Shosse 3, Nizhni Novgorod, 603950, Russia

<sup>1</sup>zhuzhoma@mail.ru, <sup>2</sup>medvedev-1942@mail.ru, <sup>3</sup>nisaenkova@mail.ru

In this paper, using methods of Morse–Smale dynamical systems, we consider the topological structure of the magnetic field of regions of the photosphere for a point-charge model. For an arbitrary number of charges (regardless of their location), without assuming a potentiality of the field  $\vec{B}$  (and hence without applying specific formulas), we give estimates that connect the numbers of charges of a certain type with the numbers of null-points. For the boundary estimates, we describe the topological structure of the magnetic field. We present a bifurcation of the birth of a large number of separators.

MSC 2010: 37E30

Keywords: dynamical Morse–Smale system, null-points, separator

Received May 25, 2017, accepted July 30, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 399–412 (Russian)

