В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, Аналог теоремы Смейла для гомеоморфизмов с регулярной динамикой, *Матем. заметки*, 2017, том 102, выпуск 4, 613–618

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm11650

Математические заметки

Том 102 выпуск 4 октябрь 2017

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Аналог теоремы Смейла для гомеоморфизмов с регулярной динамикой

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка

Ключевые слова: гомеоморфизмы Морса–Смейла, топологическая трансверсальность, подмногообразия.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11650

Динамические системы, называемые сейчас *системами Морса–Смейла*, были введены Смейлом в 1960 г. в работе [1]. Условия, выделяющие эти системы, обобщают необходимые и достаточные условия грубости потоков на двумерной сфере, полученные Андроновым и Понтрягиным в классической работе [2]. Несмотря на то, что системы Морса–Смейла на многообразиях размерности 2 и выше (для каскадов), и 3 и выше (для потоков) уже не исчерпывают класса грубых систем, они продолжительное время находятся в фокусе внимания математиков. Это объясняется как значимостью систем Морса–Смейла для приложений, так и замечательной взаимосвязью между их динамикой и топологией несущего многообразия, что делает возможным получить весьма законченные результаты по топологической классификации таких систем. К настоящему времени получены исчерпывающие результаты по топологической классификации потоков и каскадов Морса–Смейла на многообразиях размерности 1, 2 и 3 (см. для ссылок обзор [3]), а также сделаны первые шаги в изучении диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях большей размерности (см. [4]–[7]). Дополнительные сложности, возникающие при решении этой задачи, связаны с относительно небольшим числом результатов по топологии гладких многомерных многообразий, а также имеющимися в этих размерностях принципиальными различиями между топологической и гладкой категориями. В связи с этим при решении задачи о топологической классификации гладких динамических систем естественно возникает вопрос о выделении тех свойств систем, которые не зависят от гладкости, но в то же время порождают топологические инварианты.

В настоящей работе вводится класс гомеоморфизмов n-мерных многообразий, названных гомеоморфизмами Морса–Смейла, и изучается взаимосвязь между их динамикой и топологией несущего многообразия; а именно доказывается теорема, обобщающая на случай гомеоморфизмов Морса–Смейла теорему 2.3 из [1].

Напомним, что линейный автоморфизм $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *гиперболическим*, если его матрица не имеет собственных чисел, равных по модулю единице. В этом случае пространство $\mathbb{R}^n$ единственным образом раскладывается в прямую сумму L-инвариантных подпространств E^s, E^u таких, что $\|L|_{E^s}\| < 1$ и $\|L^{-1}|_{E^u}\| < 1$ в некоторой норме $\|\cdot\|$ (см., например, предложения 2.9, 2.10 гл. 2 в [8]).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041) (доказательство теоремы) и в рамках Программы Фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2017 г. (проект 90) (доказательство леммы).

В силу предложения 5.4 книги [8] любой гиперболический автоморфизм L топологически сопряжен с линейным отображением следующего вида:

$$a_{\lambda,\mu,\nu}(x_1, x_2, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n) = \biggl(2\mu x_1, 2x_2, \dots, 2x_\lambda, \frac{1}{2}\,\nu x_{\lambda+1}, \frac{1}{2}\,x_{\lambda+2}, \dots, \frac{1}{2}\,x_n\biggr),$$

где $\lambda = \dim E^u \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mu, \nu \in \{-1, 1\}$, причем $\mu = -1$ $(\nu = -1)$, если ограничение $L|_{E^u}$ $(L|_{E^s})$ меняет ориентацию E^u (E^s) и $\mu = 1$ $(\nu = 1)$, если ограничение $L|_{E^u}$ $(L|_{E^s})$ сохраняет ориентацию E^u (E^s).

Положим

$$\mathbb{E}^s_\lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_\lambda = 0\},$$
$$\mathbb{E}^u_\lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{\lambda+1} = x_{\lambda+2} = \dots = x_n = 0\},$$

и обозначим через P^s_x (P^u_y) гиперплоскость, параллельную гиперплоскости $\mathbb{E}^s_\lambda$ $(\mathbb{E}^u_\lambda)$ и проходящую через точку $x \in \mathbb{E}^u_\lambda$ $(y \in \mathbb{E}^s_\lambda)$. Совокупности $\mathcal{P}^s_\lambda = \{P^s_x\}_{x \in \mathbb{E}^u_\lambda}$, $\mathcal{P}^u_\lambda = \{P^u_y\}_{y \in \mathbb{E}^s_\lambda}$ образуют $a_{\lambda,\mu,\nu}$-инвариантные слоения.

Пусть M^n – n-мерное топологическое многообразие, $f\colon M^n \to M^n$ – гомеоморфизм и p – неподвижная точка гомеоморфизма f. Назовем точку p *топологически гиперболической точкой индекса* λ_p, если существует ее окрестность $U_p \subset M^n$, числа $\lambda_p \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mu_p, \nu_p \in \{+1, -1\}$ и гомеоморфизм $h_p\colon U_p \to \mathbb{R}^n$ такие, что $h_p f|_{U_p} = a_{\lambda_p,\mu_p,\nu_p} h_p|_{U_p}$ всякий раз, когда левая и правая части определены.

Для топологически гиперболической неподвижной точки p гомеоморфизма f множества $h_p^{-1}(E^s)$, $h_p^{-1}(E^u)$ будем называть ее *локальными инвариантными многообразиями* и обозначать их $W^s_{p,\mathrm{loc}}$, $W^u_{p,\mathrm{loc}}$ соответственно. Множества

$$W^s_p = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(W^s_{p,\mathrm{loc}}), \qquad W^u_p = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(W^u_{p,\mathrm{loc}})$$

будем называть *устойчивым* и *неустойчивым инвариантными многообразиями точки* p соответственно. Из определения следует, что

$$W^s_p = \Bigl\{x \in M^n : \lim_{i \to +\infty} f^i(x) = p\Bigr\}, \qquad W^u_p = \Bigl\{x \in M^n : \lim_{i \to +\infty} f^{-i}(x) = p\Bigr\}$$

и $W^u_p \cap W^u_q = \varnothing$ $(W^s_p \cap W^s_q = \varnothing)$ для любых различных гиперболических точек p, q. Кроме того, существует инъективная непрерывная иммерсия $J\colon \mathbb{R}^{\lambda_p} \to M^n$ такая, что $W^u_p = J(\mathbb{R}^{\lambda_p})$[1].

Точки индексов n и 0 будем называть *источниковыми* и *стоковыми* соответственно; любую точку p такую, что $0 < \lambda_p < n$, будем называть *седловой*.

Периодическую точку p периода m_p гомеоморфизма f будем называть *топологически гиперболической* (*стоковой*, *источниковой*, *седловой*), если она является топологически гиперболической (стоковой, источниковой, седловой) неподвижной точкой для гомеоморфизма f^{m_p}. Устойчивым и неустойчивым многообразием периодической точки p будем называть устойчивое и неустойчивое многообразие точки p как неподвижной точки для гомеоморфизма f^{m_p}.

Если p – седловая периодическая точка, то каждую компоненту связности множества $W^s_p \setminus p$ $(W^u_p \setminus p)$ будем называть *устойчивой* (соответственно *неустойчивой*) *сепаратрисой* и обозначать через l^s_p (соответственно l^u_p).

Пусть p – седловая периодическая точка периода m_p гомеоморфизма f. Тогда линеаризующий гомеоморфизм $h_p\colon U_p \to \mathbb{R}^n$ индуцирует на окрестности U_p пару трансверсальных слоений

$$\mathcal{F}^s_p = h_p^{-1}(\mathcal{P}^s_{\lambda_p}), \qquad \mathcal{F}^u_p = h_p^{-1}(\mathcal{P}^u_{\lambda_p}),$$

[1] Отображение $J\colon \mathbb{R}^m \to M^n$ называется *иммерсией*, если для любой точки $x \in \mathbb{R}^m$ существует окрестность $U_x \in \mathbb{R}^m$ такая, что ограничение $J|_{U_x}$ отображения J на U_x является гомеоморфизмом.

каждый слой которых является открытым λ_p-диском или $(n-\lambda_p)$-диском соответственно[2]. Для любой точки $x \in U_p$ обозначим через $F^s_{p,x}$, $F^u_{p,x}$ слой слоения $\mathcal{F}^s_p$, $\mathcal{F}^u_p$ соответственно, проходящий через точку x.

Будем говорить, что многообразия W^s_p и W^u_q седловых периодических точек гомеоморфизма f пересекаются *согласованно трансверсально*, если выполняется одно из следующих условий:

1) $W^s_p \cap W^u_q = \varnothing$;
2) $W^s_p \cap W^u_q \neq \varnothing$ и $F^s_{q,x} \subset W^s_p$; $F^u_{p,y} \subset W^u_q$ для любой точки $x \in W^s_p \cap U_q$ и любой точки $y \in W^u_q \cap U_p$.

Определение. Назовем гомеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ *гомеоморфизмом Морса–Смейла*, если выполняются следующие условия:

1) его неблуждающее множество Ω_f конечно, и любая точка $p \in \Omega_f$ является топологически гиперболической;
2) инвариантные многообразия любых двух седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересекаются согласованно трансверсально.

Лемма. *Пусть $f\colon M^n \to M^n$ – гомеоморфизм Морса–Смейла. Тогда выполнены следующие утверждения*:

1) $W^u_p \cap W^s_p = p$ *для любой седловой точки* $p \in \Omega_f$;
2) *для любых седловых точек* $p, q, r \in \Omega_f$ *из условий*
$$(W^s_p \setminus p) \cap (W^u_q \setminus q) \neq \varnothing, \qquad (W^s_q \setminus q) \cap (W^u_r \setminus r) \neq \varnothing$$
следует, что
$$(W^s_p \setminus p) \cap (W^u_r \setminus r) \neq \varnothing;$$
3) *не существует последовательности различных седловых точек* $p_1, p_2, \dots, p_k \in \Omega_f$, $k > 1$, *такой, что*
$$(W^s_{p_i} \setminus p_i) \cap (W^u_{p_{i+1}} \setminus p_{i+1}) \neq \varnothing, \quad i \in \{1, \dots, k-1\}, \qquad (W^s_{p_k} \setminus p_k) \cap (W^u_{p_1} \setminus p_1) \neq \varnothing.$$

Доказательство. Не уменьшая общности, предположим, что неблуждающее множество Ω_f состоит только из неподвижных точек и ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразие любой неподвижной точки является сохраняющим ориентацию (в противном случае перейдем к подходящей степени f^N диффеоморфизма f).

Докажем утверждение 1). Предположим, что существует точка $x \in W^s_p \cap W^u_p$, отличная от p, и покажем, что точка x является неблуждающей. Тогда отсюда будет следовать, что для любого $m > 0$ точка $f^m(x)$ также неблуждающая, что противоречит конечности неблуждающего множества гомеоморфизма f.

Пусть $U_p \subset M^n$ – такая окрестность точки p, что $f|U_p$ топологически сопряжен с линейным гиперболическим автоморфизмом $a_{\lambda_p,1,1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Не уменьшая общности, предположим, что точка x принадлежит $W^s_{p,\mathrm{loc}} \subset U_p$. Так как $x \in W^u_p$, то существует такое $m > 0$, что $f^{-m}(x) \subset W^u_{p,\mathrm{loc}}$. Обозначим через $u_x \subset U_p$ такую окрестность точки x, что $f^{-m}(u_x) \subset U_p$. Из определения согласованной трансверсальности следует, что существует $k > 0$ такое, что $f^k(u_x) \cap f^{-m}(u_x) \neq \varnothing$, откуда следует, что
$$f^k(f^m(u_x)) \cap u_x \neq \varnothing,$$
т.е. точка x неблуждающая.

[2]Напомним, что n-*шаром* (n-*диском*) называется многообразие с краем, гомеоморфное стандартному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}$. *Открытым* n-шаром (n-диском) называется многообразие, гомеоморфное внутренности $\mathbb{B}^n$.

Докажем утверждение 2). Пусть $U_q \subset M^n$ – такая окрестность точки q, что $f|U_q$ топологически сопряжен с линейным гиперболическим автоморфизмом $a_{\lambda_q,1,1}$. Из условия предложения следует, что существуют точки

$$x \in W^s_{q,\mathrm{loc}} \cap W^u_r, \qquad y \in W^u_{q,\mathrm{loc}} \cap W^s_p.$$

Так как W^u_r (W^s_p) является образом $\mathbb{R}^{\lambda_r}$ $(\mathbb{R}^{n-\lambda_p})$ относительно иммерсии, то существует диск $\widetilde{B}^{\lambda_r}_x \subset W^u_r \cap U_q$ (соответственно $\widetilde{B}^{n-\lambda_p}_y \subset W^s_p \cap U_q$), содержащий точку x (соответственно y). Из согласованной трансверсальности пересечений $W^s_q \cup W^u_r$, $W^s_p \cup W^u_q$ следует, что $\lambda_p \leqslant \lambda_q \leqslant \lambda_r$ и существует такое k, что

$$f^k(\widetilde{B}^{\lambda_r}_x) \cap \widetilde{B}^{n-\lambda_p}_y \neq \varnothing, \qquad \text{т.е.} \quad W^u_r \cap W^s_p \neq \varnothing.$$

Докажем утверждение 3). Предположим, что существует последовательность различных седловых точек $p_1, p_2, \dots, p_k$, $k > 1$, такая, что

$$(W^s_{p_i} \setminus p_i) \cap (W^u_{p_{i+1}} \setminus p_{i+1}) \neq \varnothing, \quad i \in \{1, \dots, k-1\}, \qquad (W^s_{p_k} \setminus p_k) \cap (W^u_{p_1} \setminus p_1) \neq \varnothing.$$

Тогда в силу пункта 2) $W^s_{p_1} \cap W^u_{p_1} \setminus p_1 \neq \varnothing$, что невозможно в силу пункта 1).

Следующее утверждение доказано в книге [9] (см. лемму 2.1.1).

Предложение. *Пусть $a_{\lambda,\mu,\nu}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – гиперболический автоморфизм, $0 < \lambda < n$. Тогда если $\{x_m\}$ – последовательность точек из $\mathbb{R}^n \setminus (E^s \cup E^u)$, сходящаяся при $m \to \infty$ к некоторой точке $x \in E^u \setminus \{O\}$, то существует подпоследовательность $\{x_{m_j}\}$ последовательности $\{x_m\}$, последовательность натуральных чисел $\{k_{m_j}\}$ и точка $y \in E^s \setminus \{O\}$ такая, что последовательность $\{y_j\} = \{f^{-k_{m_j}}(x_{m_j})\}$ сходится при $j \to \infty$ к точке y.*

Основным результатом работы является следующая теорема, обобщающая на случай гомеоморфизмов Морса–Смейла теорему 2.3 из [1].

Теорема. *Пусть $f\colon M^n \to M^n$ – гомеоморфизм Морса–Смейла. Тогда выполнены следующие утверждения*:

1) $M^n = \bigcup_{p\in\Omega_f} W^u_p$;
2) *для любой точки $p \in \Omega_f$ многообразие W^u_p является топологическим подмногообразием*[3] *многообразия M^n*;
3) *для любой точки $p \in \Omega_f$ и компоненты связности l^u_p множества $W^u_p \setminus p$ верно равенство*[4]
$$\mathrm{cl}\, l^u_p \setminus (l^u_p \cup p) = \bigcup_{q\in\Omega_f\colon W^s_q \cap l^u_p \neq \varnothing} W^u_q.$$

Замечание. Утверждения теоремы остаются справедливыми после формальной замены символов u, s на символы s, u соответственно.

Доказательство. Доказательство первого утверждения дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения теоремы 2.1.1 в книге [9]. Докажем утверждения 2 и 3. Не уменьшая общности, предположим, что неблуждающее множество Ω_f состоит только из неподвижных точек и ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразие любой неподвижной точки является сохраняющим ориентацию.

[3]Многообразие N^k размерности k называется *подмногообразием* многообразия M^n размерности n, $k \leqslant n$, если для любой точки $x \in N^k$ существует окрестность $U(x) \subset M^n$ точки x и гомеоморфизм $\varphi\colon U(x) \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi(N^k \cap U(x)) = \mathbb{R}^k$, где $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство, а $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}$.

[4]Здесь $\mathrm{cl}\, l^u_p$ обозначает замыкание множества l^u_p.

Пусть $x \in W^u_p$ и $T_p(x) \subset W^u_p$ – компактная окрестность точки x. Так как иммерсия является вложением на компакте, то существует карта (U_x, ψ_x) в структуре многообразия M^n такая, что

$$\psi_x(T_p(x) \cap U_x) = \mathbb{R}^{\lambda_p}.$$

Если $\lambda_p \in \{0, n\}$, то $T_p(x) \cap U_x = W^u_p \cap U_x$, откуда следует, что неустойчивое многообразие любой стоковой или источниковой точки является топологическим подмногообразием.

Покажем теперь, что неустойчивое многообразие произвольной седловой точки $p \in \Omega_f$ является топологическим подмногообразием многообразия M^n. Предположим противное: пусть W^u_p не является топологическим подмногообразием. Тогда существует точка $x \in W^u_p$ такая, что $U_x \cap W^u_p \setminus T_p(x) \neq \varnothing$ для любой окрестности $U_x \in M^n$ точки x. Следовательно, существует последовательность $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset W^u_p \setminus T_p(x)$, сходящаяся к x при $i \to +\infty$.

Из предложения следует, что существует подпоследовательность $\{x_{i_j}\}$ последовательности $\{x_i\}$, последовательность натуральных чисел $\{k_{i_j}\}$ такая, что $k_{i_j} \to \infty$ при $j \to \infty$ и точка $y \in W^s_p \setminus p$ такая, что последовательность $\{y_j\} = f^{-k_{i_j}}(x_{i_j})$ сходится при $j \to \infty$ к точке y. В силу первого пункта точка y принадлежит неустойчивому многообразию некоторой точки $q \in \Omega_f$. Точка q не является стоковой точкой, так как множество $W^s_p \setminus p$ не содержит неблуждающих точек. Точка q не является также источниковой, так как в этом случае W^u_q было бы открыто в M^n и существовала бы подпоследовательность $\{y_{\tilde{j}}\}$ последовательности $\{y_j\}$, принадлежащая W^u_q, что невозможно, так как из определения следует, что неустойчивые многообразия различных периодических точек не пересекаются. Таким образом, точка q является седловой. В силу пункта 1) утверждения леммы точка q отлична от точки p. Тогда существует последовательность ν_k натуральных чисел и подпоследовательность $\{y_{j_k}\}$ последовательности $\{y_j\}$ такая, что последовательность $\{z_k = f^{-\nu_k}(y_{j_k})\}$ сходится к некоторой точке $z \in W^s_q$. Точка z принадлежит неустойчивому многообразию некоторой точки $r \in \Omega_f$, которая в силу тех же аргументов, что и выше, является седловой точкой, отличной от точки q. Точка r не совпадает также и с точкой p, так как это означало бы, что

$$(W^s_p \setminus p) \cap (W^u_q \setminus q) \neq \varnothing, \qquad (W^s_q \setminus q) \cap (W^u_p \setminus p) \neq \varnothing,$$

что невозможно в силу пункта 3) утверждения леммы. Продолжая рассуждения, получим бесконечную последовательность попарно различных седловых точек, что противоречит конечности множества Ω_f.

Для доказательства утверждения 3) достаточно доказать следующие импликации:

3a) если $x \in \operatorname{cl} l^u_p \setminus (l^u_p \cup p)$, то $x \in W^u_r$ для некоторой точки $r \in \Omega_f$ такой, что $W^s_r \cap l^u_p \neq \varnothing$;

3b) если $W^s_r \cap l^u_p \neq \varnothing$ для некоторой точки $r \in \Omega_f$, то $W^u_r \subset \operatorname{cl} l^u_p \setminus (l^u_p \cup p)$.

Докажем импликацию 3a). Пусть $x \in \operatorname{cl} l^u_p \setminus (l^u_p \cup p)$. Тогда существует последовательность $\{x_i\} \in l^u_p \setminus p$, сходящая к x при $i \to +\infty$. В силу первого пункта $x \in W^u_r$ для некоторой точки $r \in \Omega_f$. Точка r не может быть источником, так как в этом случае $x_i \in W^u_r$ для всех i, начиная с некоторого, и $W^u_p \cap W^u_r \neq \varnothing$, что противоречит определению. Если r – сток, то $W^u_r = r$, $x = r$ и $x_i \subset W^s_r$ для всех i, начиная с некоторого, т.е. $l^u_p \cap W^s_r \neq \varnothing$ и импликация 3a) верна.

Пусть r – седло. Тогда в силу предложения существует подпоследовательность $\{x_{i_j}\}$ последовательности $\{x_i\}$ и последовательность натуральных чисел $\{m_j\}$ такая, что последовательность $\{y_j\} = \{f^{-m_j}(x_{i_j})\}$ сходится к некоторой точке $y \in W^s_r$. В силу первого пункта существует точка $v \in \Omega_f$ такая, что $y \in W^u_v$. Рассуждая, как выше, получим, что v не может быть источником. Очевидно, v не может быть и стоком, так как в этом случае $W^u_v = v$. Таким образом, v – седловая точка. В силу пункта 1) предложения точка v отлична от точки r. Если $v = p$ и $y \in l^u_v$, то импликация верна. Если $v = p$, но $y \in W^u_v \setminus l^u_v$, то из предложения следует, что существует последовательность $\{y_k\} \subset W^u_v \setminus l^u_v$, сходящаяся к точке x, что противоречит установленному в пункте 2) факту, что W^u_v является топологическим подмногообразием. Если v отлична от p, то, повторяя рассуждения, учитывая пункт 2) предложения и конечность неблуждающего множества, получим требуемое утверждение через конечное число шагов.

Докажем 3b). Возможно два случая: r – сток и r – седло.

Если r – сток и $x \in l_p^u \cap W_r^s$, то $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = r$, следовательно, $r = W_r^u$ лежит в множестве $\operatorname{cl} l_p^u \setminus (l_p^u \cup p)$.

Пусть r – седло, U_r – окрестность точки r такая, что $f|_{U_r}$ локально топологически сопряжен с линейным отображением $a_{\lambda_r,1,1}$, $x \in l_p^u \cap W_{r,\mathrm{loc}}^s$, $\widetilde{B}_x^{\lambda_p} \subset l_p^u \cap U_r$ – диск, содержащий внутри точку x, $y \in W_r^u \setminus r$ – произвольная точка и $\widehat{B}_y^{n-\lambda_r}$ – диск, трансверсально пересекающий W_r^u в единственной точке y. Тогда существует диск $\widetilde{B}_y^{n-\lambda_r} \subset \widehat{B}_y^{n-\lambda_r}$, $y \in \widetilde{B}_y^{n-\lambda_r}$, и число $m > 0$ такие, что

$$f^{-m}(\widetilde{B}_y^{n-\lambda_r}) \subset U_r.$$

В силу пункта 2) предложения существует такое $k > 0$, что $f^k(\widetilde{B}_x^{\lambda_p}) \cap f^{-m}(\widetilde{B}_y^{n-\lambda_r}) \neq \varnothing$; тогда $f^{k+m}(\widetilde{B}_x^{\lambda_p}) \cap (\widetilde{B}_y^{n-\lambda_r}) \neq \varnothing$. В силу произвольного выбора точки y и диска $\widetilde{B}_x^{\lambda_p}$ отсюда следует, что

$$W_r^u \subset \operatorname{cl} l_p^u \setminus (l_p^u \cup p).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817. **[2]** А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250. **[3]** В. З. Гринес, О. В. Починка, *УМН*, **68**:1 (409) (2013), 129–188. **[4]** В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 62–85. **[5]** V. Z. Grines, E. A. Gurevich, O. V. Pochinka, *J. Math. Sci.*, **208** (2015), 81–90. **[6]** V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma, *Topology Appl.*, **160**:3 (2013), 498–507. **[7]** Е. В. Жужома, В. С. Медведев, *Матем. сб.*, **207**:5 (2016), 69–92. **[8]** Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Мир, М., 1986. **[9]** V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016.

В. З. Гринес
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)
E-mail: vgrines@hse.ru

Поступило
20.04.2017

Е. Я. Гуревич
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)
E-mail: egurevich@hse.ru

В. С. Медведев
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)
E-mail: vmedvedev@hse.ru

О. В. Починка
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)
E-mail: opochinka@hse.ru