УДК 515.145

А. А. Айзенберг

Локально стандартные действия тора и пучки над множествами Буксбаума

Многообразия с локально стандартным действием тора половинной размерности образуют широкий и важный класс пространств. Их кольца когомологий описаны лишь в частных случаях. В общем случае неизвестны даже числа Бетти. В работе предлагается подход к этой задаче на основе фильтрации многообразия по типу орбит, и исследуется индуцированная этой фильтрацией спектральная последовательность в гомологиях. Эта последовательность вырождается во втором члене только в случае, когда пространство орбит действия гомологически тривиально. Явное описание кольца когомологий в этом случае известно. Тем не менее, спектральная последовательность может быть полностью описана в более общей ситуации, а именно в случае, когда все собственные грани пространства орбит ацикличны. Для вычислений используется теория пучков и копучков на конечных частично упорядоченных множествах. Доказываются обобщения двойственности Пуанкаре и спектральной последовательности Зимана–МакКрори для пучков идеалов внешних алгебр.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: Локально стандартное действие, многообразие с углами, симплициальное частично упорядоченное множество, пучок над частично упорядоченным множеством, спектральная последовательность Зимана–МакКрори.

§ 1. Введение

Действие компактного тора T^n на компактном гладком многообразии M размерности $2n$ называется локально стандартным, если оно локально диффеоморфно стандартному представлению тора T^n на пространстве $\mathbb{C}^n$. Пространством орбит стандартного представления является неотрицательный конус: $\mathbb{C}^n/T^n \cong \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0\}$, следовательно пространство орбит $Q = M/T^n$ имеет естественную структуру многообразия с углами. Точки из внутренностей k-мерных граней Q соответствуют k-мерным орбитам действия. Для каждой грани G пространства Q можно рассмотреть стабилизатор $T_G \subset T^n$ точек из внутренности G. Отображение, которое сопоставляет каждой грани G торическую подгруппу T_G называется характеристическим отображением.

Каждому многообразию M с локально стандартным действием можно сопоставить главное T^n-расслоение $Y \to Q$ над пространством орбит $Q = M/T$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00414)

такое что M эквивариантно гомеоморфно фактор-пространству $X = Y/\sim$. Здесь $\sim$ отождествляет точки над $G \subset Q$ отличающиеся на элемент из T_G [8, 16]. Таким образом, каждое многообразие с локально стандартным действием однозначно определяется тремя объектами: многообразием с углами Q, главным T^n-расслоением Y над Q (такое расслоение кодируется своим "классом Эйлера" $a \in H^2(Q;\mathbb{Z}^n)$), и характеристическим отображением.

Сопоставим многообразию с углами Q двойственное частично упорядоченное множество S_Q. Элементами S_Q являются грани Q, упорядоченные по обратному включению. Если Q — пространство орбит многообразия с локально стандартным действием, то S_Q — симплициальное множество.

Описание топологических свойств пространства X в терминах кодирующих его комбинаторных данных — задача сложная и, в общем, далекая от разрешения. Ни кольца когомологий и эквивариантных когомологий, ни даже числа Бетти в общем случае явно не описаны.

Тем не менее, есть несколько хорошо изученных важных частных случаев. Если пространство орбит Q изоморфно простому многограннику, многообразие X называется квазиторическим. Этот класс примеров был введен и исследован в работе Дэвиса и Янушкиевича [8], заложившей фундамент торической топологии. Квазиторические многообразия являются естественным топологическим обобщением гладких проективных торических многообразий. Причина, из-за которой квазиторические многообразия оказались удобными в исследовании, кроется в топологической тривиальности пространства орбит (выпуклость оказывается не столь важна).

Можно обобщить этот класс примеров до случая, когда все грани пространства орбит Q ацикличны. Эта ситуация близка к квазиторическим многообразиям, и ответ получается похожий [10]:

$$H^*_{T^n}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[S_Q]; \qquad H^*(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[S_Q]/(\theta_1,\dots,\theta_n),$$

где $\mathbb{Z}[S_Q]$ — кольцо граней симплициального множества S_Q, а $(\theta_1,\dots,\theta_n)$ — регулярная последовательность степени 2 в кольце $\mathbb{Z}[S_Q]$, определяемая характеристическим отображением.

Имеется несколько работ, в которых топологические инварианты посчитаны для более общих примеров локально стандартных многообразий. В [1] было доказано, что в случае когда все собственные грани пространства Q ацикличны, и $Y \to Q$ — тривиальное расслоение, кольцо эквивариантных когомологий многообразия X расщепляется в прямую сумму (и как колец и как модулей над $H^*(BT^n;\mathbb{Z})$):

$$H^*_{T^n}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[S_Q] \oplus H^*(Q;\mathbb{Z}).$$

Также были посчитаны числа Бетти и частично описана мультипликативная структура кольца $H^*(X,\mathbb{Z})$ в случае, когда X — ориентируемое торическое оригами многообразие с ацикличными собственными гранями пространства орбит. Оригами многообразия — это очень узкий класс многообразий с локально стандартным действием тора, однако даже этот случай позволил увидеть интересные закономерности. Числа Бетти 4-мерных торических оригами многообразий без каких-либо дополнительных ограничений были посчитаны в [9]. Кольца когомологий 4-мерных многообразий, пространствами орбит которых являются многоугольники с многоугольными дырками, были описаны в [14].

В работе [16] Йосида рассмотрел когомологическую спектральную последовательность, сходящуюся к $H^*(X;\mathbb{Z})$ для любого локально стандартного многообразия X, однако в общем случае эта спектральная последовательность не вырождается во втором члене, и поэтому из нее трудно извлечь какую-либо явную информацию, вроде чисел Бетти.

В нашей работе гомологическая структура многообразия X исследуется с помощью фильтрации X по типу орбит:

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = X. \tag{1.1}$$

Здесь X_i — объединение всех T^n-орбит действия, имеющих размерность не более i, поэтому $\dim X_i = 2i$. Фильтрация индуцирует спектральную последовательность $(E_X)^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(X)$, где $(E_X)^1_{p,q} \cong H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$. По размерностным соображениям, $(E_X)^r_{p,q} = 0$ при $p < q$ и $r \geqslant 1$.

Имеется естественная топологическая фильтрация на Y, покрывающая фильтрацию на X, а отображение $f\colon Y \to X$ индуцирует отображение гомологических спектральных последовательностей

$$f^r_*\colon (E_Y)^r_{p,q} \to (E_X)^r_{p,q}. \tag{1.2}$$

Мы доказываем, что в случае, когда все собственные грани пространства Q ацикличны, отображение f^2_* является изоморфизмом при $p > q$ (Теорема 3). Следовательно, каждый внедиагональный член $(E_X)^r_{p,q}$ можно явно описать, во всяком случае, если известны соответствующие члены $(E_Y)^2_{p,q}$. Вычисление диагональных членов $(E_X)^r_{q,q}$ требует дополнительной работы. Это вычисление проделано в отдельной статье [2]. Заметим, что диагональные члены играют особую роль, поскольку они соответствуют эквивариантным циклам многообразия X, задаваемым гранными подмногообразиями.

Для доказательства упомянутого изомормизма (Теоремы 3), мы встраиваем отображения $f^2_*\colon (E_Y)^2_{p,q} \to (E_X)^2_{p,q}$ в длинную точную последовательность, и показываем, что промежуточные члены этой последовательности зануляются. Эти промежуточные члены суть когомологии $H^*(S_Q;\mathcal{I})$ градуированного пучка $\mathcal{I}$ на множестве S_Q, чьими значениями являются идеалы в алгебре гомологий $H_*(T^n)$ порожденные векторными подпространствами $H_1(T_G) \subset H_1(T^n)$. Обнуление когомологий такого пучка в нужных размерностях — есть основной нетривиальный результат работы. Он следует из двойственности:

$$H^{n-1-i}(S_Q;\mathcal{I}) \cong H_i(S_Q;\widehat{\Pi}), \tag{1.3}$$

(Теорема 2), имеющей место для произвольного гомологического многообразия S_Q, и являющейся обобщением двойственности Пуанкаре $H^{n-1-i}(S_Q;\Bbbk) \cong H_i(S_Q;\Bbbk)$. Здесь $\widehat{\Pi}$ — вспомогательный клеточный копучок на S_Q, определенный в работе.

Эту двойственность можно понимать более широким и естественным образом. Для симплициального частично упорядоченного множества S имеется спектральная последовательность Зимана–МакКрори $(E_{ZM})^r_{p,q}$. Она сходится к гомологиям S, а ее второй член — когомологии пучка локальных гомологий $\mathcal{U}_*$ на S. Если S — многообразие, то она вырождается во втором члене, и из нее следует двойственность Пуанкаре. Поэтому последовательность Зимана–МакКрори часто рассматривают как обобщение двойственности Пуанкаре на не-многообразия.

Мы доказываем, что существует спектральная последовательность, стартующая с $H^*(S;\mathcal{U}_*\otimes\mathcal{I})$, и сходящаяся к $H_*(S;\widehat{\Pi})$ (Теорема 1). Для гомологических многообразий эта последовательность вырождается и дает изоморфизм (1.3).

Упомянем напоследок интересную взаимосвязь топологической задачи, изучаемой в статье, с тропической геометрией. Как упомянуто в аннотации, спектральная последовательность $(E_X)^r_{p,q}$ вырождается во втором члене, если пространство орбит Q гомологически тривиально (т.е. все грани Q ацикличны). В частности, это соображение применимо в случае, когда X — гладкое полное торическое многообразие. Гомологии X совпадают с когомологиями пучка $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ на S_Q. Значением $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ на симплексе $I\in S_Q$ является внешняя алгебра $H_*(T^n/T_I)$. Можно построить тропическое торическое многообразие $\operatorname{trop}(X)$, соответствующее X (см., например, [15]) и вычислить его тропические гомологии, используя технику, описанную в [4]. По определению тропические гомологии совпадают с $H^*(S_Q,\mathcal{L}/\mathcal{I})$ (с точностью до переворота индексов). Таким образом, мы приходим к известному утверждению, что гомологии полного гладкого торического многообразия совпадают с тропическими гомологиями его тропикализации. Аналогичное утверждение верно и для когомологий.

Структура работы такова. В параграфе 2 дан обзор основных технических понятий: симплициальные частично упорядоченные множества, пучки, копучки, и последовательность Зимана–МакКрори. Термин “пучок” всегда обозначает пучок над конечным частично упорядоченным множеством, т.е. локальную систему коэффициентов, и не используется в своем наиболее общем категорном смысле. В параграфе 3 вводится понятие гомологической характеристической функции, и определяются два основных связанных с ней объекта: пучок $\mathcal{I}$ и копучок $\widehat{\Pi}$, а также формулируются Теоремы 1 и 2, доказывающие двойственность (1.3). Теорема 1 доказана в параграфе 4, а Теорема 2 является ее частным случаем. Основные сведения о многообразиях с локально стандартным действием тора приведены в параграфе 5. Там же определены топологические фильтрации на Q, X и Y, и приведена Теорема 3, утверждающая изоморфизм модулей $(E_X)^r_{p,q}$ и $(E_Y)^2_{p,q}$ при $p>q$. Параграф 6 посвящен доказательству Теоремы 3; здесь многообразия с локально стандартным действием исследуются с помощью техники пучков, развитой в первой части работы.

§ 2. Пучки и копучки над симплициальными множествами

2.1. Симплициальные частично упорядоченные множества.

Определение 1. Конечное частично упорядоченное множество S называется симплициальным, если в нем есть минимальный элемент $\hat{0}\in S$, и для каждого $I \in S$, нижний порядковый идеал $\{J \in S \mid J \leqslant I\}$ изоморфен булевой решетке $2^{[k]}$ (множеству граней $(k-1)$-мерного симплекса) для некоторого $k \geqslant 0$. Для сокращения записи, мы будем называть такие множества просто симплициальными множествами.

Элементы симплициального множества S называются *симплексами.* Число k из определения обозначается $|I|$ и называется рангом симплекса I. Положим $\dim I = |I| - 1$. Симплекс ранга 1 называется *вершиной*; множество всех вершин множества S будет обозначаться $\mathrm{Vert}(S)$. Подмножество $L \subset S$, содержащее вместе с любым элементом I все элементы меньшие I, называется симплициальным подмножеством.

Обозначение $I \overset{i}{<} J$ используется в ситуации, когда $I \leqslant J$, и $|J| - |I| = i$. Если S — симплициальное множество, то для каждого $I \overset{2}{<} J \in S$, существуют ровно два симплекса $J' \neq J''$ между I и J:

$$I \overset{1}{<} J', J'' \overset{1}{<} J. \tag{2.1}$$

Для симплициального множества S можно выбрать "соглашение о знаках". Это означает, что каждой паре $I \overset{1}{<} J \in S$ можно сопоставить число инцидентности $[J : I] = \pm 1$ таким образом, чтобы для любой четверки вида (2.1) было выполнено

$$[J : J'] \cdot [J' : I] + [J : J''] \cdot [J'' : I] = 0 \tag{2.2}$$

Выбор знакового соглашения эквивалентен выбору ориентации каждого симплекса в S. Зафиксируем произвольное соглашение о знаках.

Заметим, что множество симплексов любого конечного симплициального комплекса является симплициальным множеством. Поэтому симплициальные множества обобщают симплициальные комплексы.

Для симплекса $I \in S$ рассмотрим следующее подмножество:

$$\mathrm{st}^{\circ}_S I = \{J \in S \mid J \geqslant I\},$$

называемое *открытой звездой* симплекса I. Легко проверить, что $S \setminus \mathrm{st}^{\circ}_S I$ является симплициальным подмножеством в S.

Определим *линк* симплекса $I \in S$:

$$\mathrm{lk}_S I = \{J \in S \mid J \geqslant I\}.$$

Это множество наследует порядок из S, и относительно этого порядка $\mathrm{lk}_S I$ является симплициальным множеством, с минимальным элементом I. Причина, по которой для одного объекта используются два разных обозначения такова: удобно различать $\mathrm{st}^{\circ}_S I$, который является подмножеством S (но не симплициальным подмножеством!), и $\mathrm{lk}_S I$, который рассматривается как отдельное симплициальное множество. Заметим, что $\mathrm{lk}_S \hat{0} = S$.

Рассмотрим барицентрическое подразбиение S' симплициального множества S. По определению, S' есть симплициальный комплекс на множестве $S \setminus \hat{0}$, симплексами которого являются цепи элементов S. По определению, геометрической реализацией S называется геометрическая реализация его барицентрического разбиения $|S| \overset{\mathrm{def}}{=} |S'|$. Можно также понимать $|S|$ как клеточный комплекс, клетки которого соответствуют элементам S и являются симплексами. Подобные топологические модели симплициальных множеств изучались в [5] и назывались симплицально-клеточными комплексами.

Симплициальное множество S называется *чистым*, если все его максимальные по включению симплексы имеют одинаковые размерности. Множество S чистое тогда и только тогда, когда S' чистое.

В дальнейшем $\Bbbk$ обозначает основное кольцо: это может быть либо поле, либо кольцо $\mathbb{Z}$. (Ко)гомологиями симплициального множества S называются (ко)гомологии его геометрической реализации. Если кольцо коэффициентов в записи (ко)гомологий явно не указано, предполагается, что это $\Bbbk$.

Определение 2. Симплициальный комплекс K размерности $n-1$ называется комплексом Буксбаума (над $\Bbbk$) если $\widetilde{H}_i(\mathrm{lk}_K\, I;\Bbbk)=0$ для всех $\hat{0}\neq I\in K$ и $i\neq n-1-|I|$. Если K — комплекс Буксбаума и, кроме того, $\widetilde{H}_i(K;\Bbbk)=0$ при $i\neq n-1$, то K называется комплексом Коэна–Маколея.

Симплициальное множество S называется множеством Буксбаума (соотв. Коэна–Маколея), если S' является комплексом Буксбаума (соотв. Коэна–Маколея).

Замечание 1. Согласно [13; Sec.6], S является множеством Буксбаума тогда и только тогда, когда $\widetilde{H}_i(\mathrm{lk}_S\, I;\Bbbk)=0$ для всех $\hat{0}\neq I\in S$ и $i\neq n-1-|I|$. Аналогично, S является множеством Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда $\widetilde{H}_i(\mathrm{lk}_S\, I;\Bbbk)=0$ при всех $I\in S$ и $i\neq n-1-|I|$.

Типичными примерами множеств Буксбаума являются триангуляции (или, более общо, симплициально-клеточные разбиения) многообразий. Типичными примерами множеств Коэна–Маколея являются триангуляции сфер. Симплициальное множество является множеством Буксбаума в том и только том случае, когда все его собственные линки являются множествами Коэна–Маколея.

Легко проверяется, что связное симплициальное множество Буксбаума является чистым. В дальнейшем рассматриваются только чистые симплциальные множества.

2.2. Клеточные пучки. Пусть $\textsc{mod}_{\Bbbk}$ — категория $\Bbbk$-модулей, $\dim V$ обозначает ранг $\Bbbk$-модуля V.

Каждое симплициальное множество S можно превратить в малую категорию $\textsc{cat}(S)$, объекты которой — это элементы S, а морфизмы — всевозможные неравенства $I\leqslant J$. *Клеточным пучком* [7] (также используется название стэк [12], либо локальная система коэффициентов) на S называется ковариантный функтор $\mathcal{A}\colon \textsc{cat}(S)\to\textsc{mod}_{\Bbbk}$. Мы будем просто называть $\mathcal{A}$ пучком на S в надежде, что это не вызовет путаницы, т.к. в более общем смысле термин “пучок” в работе не используется. Гомоморфизмы $\mathcal{A}(J_1\leqslant J_2)$ называются *отображениями ограничения*. Определим коцепной комплекс $(C^*(S;\mathcal{A}),d)$:

$$C^*(S;\mathcal{A})=\bigoplus_{i\geqslant -1}C^i(S;\mathcal{A}),\qquad C^i(S;\mathcal{A})=\bigoplus_{\dim I=i}\mathcal{A}(I),$$

$$d\colon C^i(S;\mathcal{A})\to C^{i+1}(S;\mathcal{A}),\qquad d=\bigoplus_{I\overset{1}{<}I',\dim I=i}[I':I]\mathcal{A}(I\leqslant I').\tag{2.3}$$

Соглашение о знаках (2.2) обеспечивает равенство $d^2 = 0$. Определим когомологии $\mathcal{A}$ как когомологии дифференциального комплекса $(C^*(S;\mathcal{A}), d)$:

$$H^*(S;\mathcal{A}) \overset{\text{def}}{=} H^*(C^*(S;\mathcal{A}), d). \tag{2.4}$$

Замечание 2. Определенные таким образом когомологии $\mathcal{A}$ совпадают с любым другим осмысленным определением. Например, задавая когомологии как производные функторы от функтора глобальных сечений, мы получим те же группы (2.4) (см. [7]).

Пучок $\mathcal{A}$, заданный на множестве S, можно ограничить на любое симплициальное подмножество $L \subset S$. Комплексы $(C^*(L,\mathcal{A}), d)$ и $(C^*(S;\mathcal{A})/C^*(L;\mathcal{A}), d)$ определяются обычным образом. Последний комплекс позволяет определить относительные когомологии пучка: $H^*(S, L;\mathcal{A})$.

Замечание 3. В топологической литературе обычно рассматриваются пучки, не принимающие значения на $\hat{0} \in S$, поскольку этот элемент не имеет геометрического смысла. Тем не менее, это дополнительное значение $\mathcal{A}(\hat{0})$ сыграет важную роль в рассмотрениях параграфа 6. Поэтому, вообще говоря, модули когомологий могут быть нетривиальными в градуировке $-1 = \dim \hat{0}$. Для пучка $\mathcal{A}$, заданного на S, можно рассмотреть его обрезанную версию $\underline{\mathcal{A}}$, которая совпадает с $\mathcal{A}$ на $S \setminus \{\hat{0}\}$ и зануляется на $\hat{0}$.

Понятия морфизмов, (ко)ядер, (ко)образов, тензорных произведений и прямых сумм пучков над S задаются покомпонентно очевидным образом. Например, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два пучка на S, то $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ является пучком на S, со значениями $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})(I) = \mathcal{A}(I)\otimes\mathcal{B}(I)$ и гомоморфизмами ограничения $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})(I \leqslant J) = \mathcal{A}(I \leqslant J)\otimes\mathcal{B}(I \leqslant J)$. Все сложности, возникающие в алгебраической геометрии из-за различия между пучками и предпучками, над конечными симплициальными множествами исчезают.

Пример 1. Рассмотрим $\Bbbk$-модуль W. Обозначим также через W постоянный пучок на S, т.е. пучок, принимающий одно и то же значение W на всех $I \neq \hat{0}$, и обнуляющийся на $\hat{0}$. Все нетривиальные гомоморфизмы ограничения суть тождественные изоморфизмы на W. Если в W нет кручения, то $H^*(S;W) \cong H^*(S;\Bbbk)\otimes W$ по теореме об универсальных коэффициентах.

Пример 2. Локально постоянный пучок со значением в $W \in \textsc{mod}_{\Bbbk}$ — это пучок $\mathcal{W}$, удовлетворяющий условиям $\mathcal{W}(\hat{0}) = 0$, $\mathcal{W}(I) \cong W$ при $I \neq \hat{0}$, и все нетривиальные морфизмы ограничения которого являются изоморфизмами (но, возможно, не тождественными).

Пример 3. Руководствуясь работой [12], определим пучок i-х локальных гомологий $\mathcal{U}_i$ на S, положив $\mathcal{U}_i(\hat{0}) = 0$, и

$$\mathcal{U}_i(J) = H_i(S, S \setminus \operatorname{st}^{\circ}_S J;\Bbbk) \tag{2.5}$$

при $J \neq \hat{0}$. Гомоморфизмы ограничения $\mathcal{U}_i(J_1 < J_2)$ индуцированы включениями подмножеств $\operatorname{st}^{\circ}_S J_2 \hookrightarrow \operatorname{st}^{\circ}_S J_1$. Стандартные топологические рассуждения показывают, что симплициальное множество S является множеством Буксбаума в том и только том случае, когда $\mathcal{U}_i = 0$ при $i \neq n-1$ (см. также замечание 5 ниже).

Определение 3. Множество Буксбаума S называется гомологическим многообразием (ориентируемым над $\Bbbk$), если пучок его локальных гомологий $\mathcal{U}_{n-1}$ изоморфен постоянному пучку $\Bbbk$.

S является ориентируемым гомологическим многообразием в том и только том случае, когда его геометрическая реализация является гомологическим многообразием в обычном топологическом смысле.

2.3. Копучки. Клеточным копучком [7] называется контравариантный функтор $\widehat{\mathcal{A}}\colon \textsc{cat}(S)^{op} \to \textsc{mod}_{\Bbbk}$. Гомологии копучка определяются аналогично когомологиям пучка:

$$C_*(S;\widehat{\mathcal{A}}) = \bigoplus_{i\geqslant -1} C_i(S;\widehat{\mathcal{A}}) \quad C_i(S;\widehat{\mathcal{A}}) = \bigoplus_{\dim I=i} \widehat{\mathcal{A}}(I)$$

$$d\colon C_i(S;\widehat{\mathcal{A}}) \to C_{i-1}(S;\widehat{\mathcal{A}}), \quad d = \bigoplus_{I>_1 I', \dim I=i} [I:I']\widehat{\mathcal{A}}(I\geqslant I'),$$

$$H_*(S;\widehat{\mathcal{A}}) \stackrel{\text{def}}{=} H_*(C_*(S;\widehat{\mathcal{A}}),d).$$

Относительные гомологии $H_*(S,L;\widehat{\mathcal{A}})$ копучка $\widehat{\mathcal{A}}$ при $L\subset S$ определяются как группы гомологий дифференциального комплекса $C_*(S,L;\widehat{\mathcal{A}}) = C_*(S;\widehat{\mathcal{L}})/C_*(L;\widehat{\mathcal{A}})$.

Пример 4. Каждый локально постоянный пучок $\mathcal{W}$ на S определяет локально постоянный копучок $\widehat{\mathcal{W}}$, попросту переворачиванием всех стрелок: $\widehat{\mathcal{W}}(I)\cong \mathcal{W}(I)$ и $\widehat{\mathcal{W}}(I>J) = (\mathcal{W}(J<I))^{-1}$.

Замечание 4. Заметим, что запись $H_*(S;\Bbbk)$ может обозначать как гомологии геометрической реализации $|S|$, так и гомологии локально постоянного копучка $\Bbbk$ на S. Очевидно, что оба значения согласованы, и то же верно и для когомологий.

2.4. Коостовная фильтрация и двойственные грани. В дальнейшем предполагается, что S — чистое симплициальное множество, $\dim S = n-1$.

Конструкция 1. Приведем конструкцию *коостовной фильтрации* на $|S|$. Рассмотрим барицентрическое подразбиение S' чистого симплициального множества S. По определению, S' является симплициальным комплексом на множестве $S\setminus\hat{0}$ и k-симплексы S' имеют вид $(I_0<I_1<\ldots<I_k)$, где $I_i\in S\setminus\hat{0}$. Для каждого $I\in S\setminus\{\hat{0}\}$ рассмотрим подкомплекс в барицентрическом подразбиении:

$$G_I = \{(I_0<I_1<\ldots)\in S' \text{ такие что } I_0\geqslant I\}\subset S',$$

и подмножества

$$\partial G_I = \{(I_0<I_1<\ldots)\in S' \text{ такие что } I_0> I\}\subset S', \text{ и } \quad G_I^\circ = G_I\setminus \partial G_I.$$

Видно, что $\dim G_I = n-1-\dim I$, поскольку S чистый. Для пары $J<I$ имеем $G_I\subset G_J$. Комплекс G_I (либо его геометрическая реализация $|G_I|$) называется *гранью* или *псевдоклеткой* множества $|S|$, двойственной к симплексу $I\in S$. Граница ∂G_I грани G_I является объединением граней меньших размерностей.

Пусть $S_i = \bigcup_{\dim G_I \leqslant i} G_I$ при $-1 \leqslant i \leqslant n-1$. Таким образом S_i является симплициальным подкомплексом комплекса S'. Фильтрация

$$\emptyset = S_{-1} \subset S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_{n-1} = S', \tag{2.6}$$

и соответствующая топологическая фильтрация

$$\emptyset = |S_{-1}| \subset |S_0| \subset |S_1| \subset \ldots \subset |S_{n-1}| = |S|, \tag{2.7}$$

называются коостовными фильтрациями S' и $|S|$ соответственно [12].

Для пары $I \overset{1}{<} J \in S$ рассмотрим гомоморфизм:

$$\begin{aligned} m^q_{I,J} \colon H_{q+\dim G_I}(G_I, \partial G_I) \to H_{q+\dim G_I - 1}(\partial G_I) \to \\ \to H_{q+\dim G_I-1}(\partial G_I, \partial G_I \setminus G^\circ_J) \cong H_{q+\dim G_J}(G_J, \partial G_J), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где первое отображение есть связывающий гомоморфизм в длинной точной последовательности гомологий пары $(G_I, \partial G_I)$, а последний изоморфизм — свойство вырезания. Гомологическая спектральная последовательность, порожденная фильтрацией (2.7) имеет вид

$$(E_S)^1_{p,q} = H_{p+q}(S_p, S_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(S).$$

Первый дифференциал $(d_S)^1$ есть сумма гомоморфизмов $m^q_{I,J}$ по всем парам $I \overset{1}{<} J$, $I, J \in S$.

Конструкция 2. Имея фиксированное соглашение о знаках на S, рассмотрим для каждого q пучок $\mathcal{H}_q$ на S, заданный следующим образом:

$$\mathcal{H}_q(I) = H_{q+\dim G_I}(G_I, \partial G_I)$$

при $I \neq \hat{0}$, и $\mathcal{H}_q(\hat{0}) = 0$. Для соседних симплексов $I \overset{1}{<} J$ положим $\mathcal{H}_q(I \overset{1}{<} J) = [J : I] m^q_{I,J}$. Для произвольной пары $I \overset{k}{<} J$ рассмотрим любую насыщенную цепь между I и J:

$$I \overset{1}{<} J_1 \overset{1}{<} \ldots \overset{1}{<} J_{k-1} \overset{1}{<} J,$$

и положим

$$\mathcal{H}_q(I < J) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{H}_q(J_{k-1} < J) \circ \ldots \circ \mathcal{H}_q(I < J_1).$$

Лемма 2.1. *Гомоморфизм $\mathcal{H}_q(I < J)$, определенный таким образом, не зависит от выбора насыщенной цепи между I и J.*

Доказательство. Дифференциал $(d_S)^1$ удовлетворяет $((d_S)^1)^2 = 0$, следовательно $m^q_{J',J} \circ m^q_{I,J'} + m^q_{J'',J} \circ m^q_{I,J''} = 0$. Объединяя это равенство с равенством (2.2), получаем, что $\mathcal{H}_q(I < J)$ не зависит от цепи в случае $I \overset{2}{<} J$. В общем случае, поскольку множество $\{T \mid I \leqslant T \leqslant J\}$ является булевой решеткой, любые две насыщенные цепочки между I и J соединены последовательностью элементарных флипов $[J_k \overset{1}{<} T_1 \overset{1}{<} J_{k+2}] \rightsquigarrow [J_k \overset{1}{<} T_2 \overset{1}{<} J_{k+2}]$, откуда и следует утверждение.

Таким образом, пучки $\mathcal{H}_q$ корректно определены. В дальнейшем они будут называться структурными пучкам множества S. Следующее утверждение напрямую следует из определения коцепного комплекса пучка.

Следствие 1. *Коцепной комплекс структурных пучков совпадает с* $(E_S)^1_{*,*}$ *с точностью до замены индекса:*

$$((E_S)^1_{*,q}, (d_S)^1) \cong (C^{n-1-*}(\mathcal{H}_q), d).$$

Здесь d — стандартный дифференциал коцепного комплекса, определенный в (2.3).

Замечание 5. Имеется изоморфизм пучков

$$\mathcal{H}_q \cong \mathcal{U}_{q+n-1}, \tag{2.9}$$

где $\mathcal{U}_*$ — пучки локальных гомологий, определенные в примере 3. Действительно, можно показать, что $H_i(S, S \setminus \mathrm{st}^\circ_S I) \cong H_{i-\dim I}(G_I, \partial G_I)$, и что эти изоморфизмы можно выбрать согласованными с гомоморфизмами ограничений. Для симплциальных комплексов этот факт доказан в [12; Sec.6.1]; случай симплициальных множеств аналогичен. Заметим, что определение $\mathcal{H}_*$ зависит от знакового соглашения, в то время как $\mathcal{U}_*$ — нет. Здесь нет противоречия, поскольку сам выбор изоморфизма (2.9) зависит от ориентаций.

Из изоморфизма (2.9) следует, что S — множество Буксбаума в том и только том случае, когда $\mathcal{H}_q = 0$ при $q \neq 0$. Симплициальное множество S является ориентируемым многообразием, если оно множество Буксбаума и, кроме того, $\mathcal{H}_0 \cong \Bbbk$.

2.5. Спектральная последовательность Зимана–МакКрори. Из рассмотрений предыдущего параграфа следует

Предложение 1 (McCrory, [12]). *Существует спектральная последовательность в четвертой четверти*

$$(E_{ZM})^r_{p,q}, \quad d^r\colon (E_{ZM})^r_{p,q} \to (E_{ZM})^r_{p-r,q+r-1}; \tag{2.10}$$

$$(E_{ZM})^2_{p,q} \cong H^{n-1-p}(S; \mathcal{U}_{n-1+q}) \Rightarrow H_{p+q}(S; \Bbbk). \tag{2.11}$$

Она изоморфна гомологической спектральной последовательности, индуцированной коостовной фильтрацией на $|S|$.

Нам, тем не менее, будет удобнее работать со структурными пучками $\mathcal{H}_*$ вместо пучков локальных гомологий $\mathcal{U}_*$. Для множества Буксбаума пучок $\mathcal{H}_i$ обнуляется при $i \neq 0$. Следовательно $(E_{ZM})^2_{p,q} = 0$ при $q \neq 0$ и спектральная последовательность вырождается во втором члене, индуцируя изоморфизм

$$H^{n-1-p}(S; \mathcal{H}_0) \cong H_p(S; \Bbbk).$$

Если S — ориентируемое гомологическое многообразие, то этот изоморфизм дает двойственность Пуанкаре:

$$H^{n-1-p}(S; \Bbbk) \cong H_p(S; \Bbbk).$$

2.6. Корафинация пучка. В этом параграфе будет введено техническое понятие, используемое в последующих доказательствах. Пусть $\mathcal{A}$ — пучок на S. Определим копучок $\widehat{\mathcal{A}}'$ на барицентрическом подразбиении S':

$$\widehat{\mathcal{A}}'(I_1 < \ldots < I_k) = \mathcal{A}(I_1),$$

где гомоморфизмы коограничения задаются в терминах гомоморфизмов ограничения пучка $\mathcal{A}$:

$$\widehat{\mathcal{A}}'((I_1 < \ldots < I_k) \supset (J_1 < \ldots < J_s)) = \mathcal{A}(I_1 \leqslant J_1).$$

Назовем копучок $\widehat{\mathcal{A}}'$ корафинацией пучка $\mathcal{A}$. Грани G_I, и их границы ∂G_I являются симплициальными подкомплексами в S', поэтому копучок $\widehat{\mathcal{A}}'$ можно огранчить на них. Следующая лемма без труда следует из определений.

Лемма 2.2.

$$H_q(S_p, S_{p-1}, \widehat{\mathcal{A}}') \cong \bigoplus_{I, \dim G_I = p} H_q(G_I, \partial G_I; \widehat{\mathcal{A}}').$$

Аналогично (2.8), имеется гомоморфизм

$$\begin{aligned} m_{I,J}^{q,\mathcal{A}}\colon H_{q+\dim G_I}(G_I, \partial G_I; \widehat{\mathcal{A}}') \to H_{q+\dim G_I - 1}(\partial G_I; \widehat{\mathcal{A}}') \to \\ \to H_{q+\dim G_I - 1}(\partial G_I, \partial G_I \setminus G_J^\circ; \widehat{\mathcal{A}}') \cong H_{q+\dim G_J}(G_J, \partial G_J; \widehat{\mathcal{A}}'). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Эти гомоморфизмы позволяют определить новые пучки $\overline{\mathcal{A}}_q$ на S: положим $\overline{\mathcal{A}}_q(I) = H_{q+\dim G_I}(G_I, \partial G_I; \widehat{\mathcal{A}}')$, а гомоморфизмы ограничения задается аналогично 2.

Лемма 2.3. *Если $\mathcal{A}(I)$ не содержит кручения для всех $I \in S$, то имеются естественные изоморфизмы*

$$H_r(G_I, \partial G_I; \widehat{\mathcal{A}}') \cong H_r(G_I, \partial G_I; \Bbbk) \otimes \mathcal{A}(I).$$

Гомоморфизмы $m_{I,J}^{q,\mathcal{A}}$ совпадают с $m_{I,J}^{q} \otimes \mathcal{A}(I < J)$ с точностью до этих изоморфизмов. Пучок $\overline{\mathcal{A}}_q$ изоморфен $\mathcal{H}_q \otimes \mathcal{A}$.

Доказательство. По определению $\widehat{\mathcal{A}}'$ имеем

$$H_r(G_I, \partial G_I; \widehat{\mathcal{A}}') \cong H_r(G_I, \partial G_I; \mathcal{A}(I)),$$

т.к. значениями $\widehat{\mathcal{A}}'$ на всех симплексах подмножества G_I° является модуль $\mathcal{A}(I)$. Остальное следует из теоремы об универсальных коэффициентах.

§ 3. Внешние алгебры и характеристические функции

Пусть V — свободный $\Bbbk$-модуль ранга $\mathtt{N}$. Рассмотрим $\Lambda[V]$ — свободную внешнюю алгебру, порожденную V, т.е. фактор свободной тензорной алгебры $T[V]$ по соотношениям $v \otimes v = 0$ для всех $v \in V$. Алгебра $\Lambda[V]$ градуирована степенями внешних форм.

Определение 4. Зафиксируем симплициальное множество S и локально постоянный пучок $\mathcal{V}$ на S. Набор векторов $\{\omega_i \in \mathcal{V}(i) \mid i \in \mathrm{Vert}(S)\}$ называется гомологической $\Bbbk$-характеристической функцией, если он удовлетворяет следующему $(*_{\Bbbk})$-условию:

Для каждого симплекса $I \in S \setminus \hat{0}$ с вершинами $i_1, \ldots, i_k$, векторы

$$\mathcal{V}(i_1 \leqslant I)(\omega_{i_1}), \ldots, \mathcal{V}(i_k \leqslant I)(\omega_{i_k}) \in \mathcal{V}(I)$$

линейно независимы над $\Bbbk$ и порождают прямое слагаемое в $\mathcal{V}(I)$.

Для локально постоянного пучка $\mathcal{V}$ на S, имеющего значения в векторном пространстве V, рассмотрим пучок $\mathcal{L} = \Lambda[\mathcal{V}]$ градуированных внешних алгебр, порожденный $\mathcal{V}$. Это означает, что $\mathcal{L}(I) = \Lambda[\mathcal{V}(I)]$, и $\mathcal{L}(I \leqslant J)$ есть изоморфизм внешних алгебр, порожденный изоморфизмом $\mathcal{V}(I \leqslant J)\colon \mathcal{V}(I) \to \mathcal{V}(J)$. Пусть $\widehat{\mathcal{L}}$ обозначает локально постоянный копучок внешних алгебр, соответствующий пучку $\mathcal{L}$ (см.Пример 4).

Пусть $\{\omega_i \in \mathcal{V}(i) \mid i \in \mathrm{Vert}(S)\}$ — гомологическая характеристическая функция. Если i — вершина симплекса I, то гомоморфизм ограничения $\mathcal{V}(i \leqslant I)$ отправляет вектор $\omega_i \in \mathcal{V}(i)$ в некоторый вектор из $\mathcal{V}(I)$. Образ вектора мы будем обозначать тем же символом ω_i. Таким образом, из определения гомологической характеристической функции следует, что множество $\{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ свободно порождает прямое слагаемое в $\mathcal{V}(I)$, если $i_1, \ldots, i_k$ — вершины I. Заметим, что $\mathcal{L}(I)$ — это внешняя алгебра, порожденная $\mathcal{V}(I)$, а значит векторы ω_i можно рассматривать как элементы степени 1 алгебры $\mathcal{L}(I)$.

Конструкция 3. Определим подпучок $\mathcal{I} \subset \mathcal{L}$: для произвольного симплекса $I \in S$ с вершинами $i_1, \ldots, i_k$ положим $\mathcal{I}(I)$ равным идеалу в $\mathcal{L}(I)$, порожденным векторами $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$:

$$\mathcal{I}(I) = (\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}).$$

Легко видеть, что при $I \leqslant J$, гомоморфизм ограничения $\mathcal{L}(I \leqslant J)$ отправляет идеал $\mathcal{I}(I)$, порожденный меньшим множеством элементов в идеал $\mathcal{I}(J)$, порожденный большим множеством элементов. Поэтому гомоморфизмы ограничения пучка $\mathcal{I}$ корректно индуцированы соответствующими гомоморфизмами пучка $\mathcal{L}$.

Конструкция 4. Построим еще один вид идеалов, связанных с характеристической функцией. Пусть $J = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — непустое подмножество вершин симплекса $I \in S$. Рассмотрим элемент $\pi_J \in \mathcal{L}(I) = \widehat{\mathcal{L}}(I)$, $\pi_J = \bigwedge_{i \in J} \omega_i$. По определению характеристической функции, элементы $\{\omega_i \mid i \in J\}$ линейно независимы, следовательно π_J является ненулевым элементом степени $|J|$. Пусть $\Pi_J \subset \mathcal{L}(I)$ — главный идеал, порожденный элементом π_J. Гомоморфизмы ограничения $\mathcal{L}(I < I')$ (и гомоморфизмы коограничения $\widehat{\mathcal{L}}(I' > I) = \mathcal{L}(I < I')^{-1}$) отождествляют $\Pi_J \subset \mathcal{L}(I)$ с $\Pi_J \subset \mathcal{L}(I')$.

Определим подкопучок $\widehat{\Pi}$ идеалов в $\widehat{\mathcal{L}}$. Если J есть множество всех вершин симплекса $I \neq \hat{0}$, положим $\widehat{\Pi}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_J \subset \widehat{\mathcal{L}}(I)$. Если $I' < I$, то гомоморфизм коограничения $\widehat{\mathcal{L}}(I' > I)$ инъективно отображает $\widehat{\Pi}(I')$ в $\widehat{\Pi}(I)$, поскольку внешняя форма $\pi_{I'}$ делится на π_I. Следовательно $\widehat{\Pi}$ есть корректно определенный градуированный подкопучок в $\widehat{\mathcal{L}}$. Формально положим $\widehat{\Pi}(\hat{0}) = 0$.

Сформулируем основные гомологические результаты работы:

Теорема 1. *Пусть S — чистое симплициальное множество размерности $n-1$, и $\mathcal{I}$, $\widehat{\Pi}$ — пучок и копучок на S, определяемые некоторой гомологической $\Bbbk$-характеристической функцией. Тогда имеется спектральная последовательность*

$$E^2_{s,k} \cong H^{n-1-s}(S;\mathcal{H}_k\otimes\mathcal{I}) \Rightarrow H_{s+k}(S;\widehat{\Pi}),$$

$$d^r\colon E^r_{s,k}\to E^r_{s-r,k+r-1}$$

сохраняющая внутренние градуировки $\mathcal{I}$ и $\widehat{\Pi}$.

Если S — множество Буксбаума, спектральная последовательность Теоремы 1 вырождается во втором члене и дает следующий результат.

Теорема 2. *Для симплициального множества Буксбаума S размерности $n-1$ имеет место изоморфизм $H^k(S;\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{I}) \cong H_{n-1-k}(S;\widehat{\Pi})$, сохраняющий внутренние градуировки $\mathcal{I}$ и $\widehat{\Pi}$.*

Следствие 2. *Если S — гомологическое $(n-1)$-многообразие, то имеет место изоморфизм $H^k(S;\mathcal{I}) \cong H_{n-1-k}(S;\widehat{\Pi})$, сохраняющий внутренние градуировки.*

Пусть $\mathcal{I}^{(q)},\widehat{\Pi}^{(q)}$ — однородные компоненты внутренней градуировки q пучка $\mathcal{I}$ и копучка $\widehat{\Pi}$ соответственно.

Следствие 3 (Основное следствие). *Если S — множество Буксбаума, то $H^j(S;\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{I}^{(q)})=0$ при $j\leqslant n-1-q$.*

Доказательство. Согласно Теореме 2, достаточно доказать, что $H_j(S;\widehat{\Pi}^{(q)})=0$ при $j\geqslant q$. Идеал $\widehat{\Pi}(I)=\Pi_I$ порожден элементом π_I степени $|I|=\dim I+1$. Значит $\Pi_I^{(q)}=0$ при $q\leqslant\dim I$. Следовательно, соответствующая часть цепного комплекса обнуляется, что влечет обнуление гомологий в нужных степенях.

Замечание 6. Внешние формы максимальной степени, $\Lambda[V]^{(\mathtt{N})}\cong\Bbbk$, лежат во всех идеалах $\mathcal{I}(I)$ и $\widehat{\Pi}(I)$. Поэтому изоморфизм Теоремы 2, в максимальной степени дает в точности двойственность Пуанкаре:

$$H^k(S;\mathcal{H}_0)=H^k(S;\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{I}^{(\mathtt{N})})\cong H_{n-1-k}(S;\widehat{\Pi}^{(\mathtt{N})})=H_{n-1-k}(S;\Bbbk).$$

Спектральная последовательность Теоремы 1 в свою очередь, в максимальной степени дает спектральную последовательность Зимана–МакКрори.

§ 4. Доказательство Теоремы 1

Идея доказательства такова: будет построен дифференциальный бикомплекс $\mathcal{X}_{k,l}$, и будут исследоваться различные спектральные последовательности, сходящиеся к его тотальным гомологиям.

В дальнейшем нам потребуется техническая лемма. Пусть $J\in S$ — симплекс. Если i — вершина J, то имеется гомоморфизм $\eta_i\colon\Pi_i\hookrightarrow\mathcal{I}(J)$, который вкладывает идеал Π_i, порожденный формой ω_i, в идеал $\mathcal{I}(J)$, порожденный большим числом линейных форм. Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$0 \leftarrow \mathcal{I}(J) \overset{\eta}{\leftarrow} \bigoplus_{\substack{I, \dim I = 0 \\ I \leqslant J}} \Pi_I \overset{\xi}{\leftarrow} \bigoplus_{\substack{I, \dim I = 1 \\ I \leqslant J}} \Pi_I \overset{\xi}{\leftarrow} \bigoplus_{\substack{I, \dim I = 2 \\ I \leqslant J}} \Pi_I \overset{\xi}{\leftarrow} \dots \tag{4.1}$$

где η — прямая сумма гомоморфизмов η_i по всем $i \in \mathrm{Vert}(S)$, $i \leqslant J$; а ξ — прямая сумма вложений $\Pi_I \hookrightarrow \Pi_{I'}$, подкрученных на знак инцидентности $[I : I']$. Из соглашения о знаках следует, что (4.1) является дифференциальным комплексом. Однако, можно сказать больше.

Лемма 4.1. *Последовательность* (4.1) *точна.*

Доказательство. Вид утверждения напоминает резольвенту Кошуля максимального идеала в коммутативном кольце многочленов, но наша ситуация отличается тем, что Π_I не есть свободные модули над Λ. Однако доказательство аналогично коммутативному случаю: точность последовательности (4.1) следует из принципа включения-исключения. Чтобы конкретизировать эти рассуждения (а также включить случай $\Bbbk = \mathbb{Z}$) сделаем следующее.

Согласно $(*_{\Bbbk})$-условию, модуль $\langle \omega_j \mid j \in J\rangle$ является прямым слагаемым в $V \cong \Bbbk^{\mathtt{N}}$. Выберем базис $\{\nu_1, \dots, \nu_{\mathtt{N}}\}$ в V такой что его первые $|J|$ векторов — это в точности ω_j, $j \in J$. Будем отождествлять J с подмножеством $\{1, \dots, |J|\} \subseteq [\mathtt{N}]$. Модуль $\Lambda[V]$ расщепляется в сумму по мультистепеням: $\Lambda = \bigoplus_{A \subseteq [\mathtt{N}]} \Lambda_A$, где Λ_A есть одномерный $\Bbbk$-модуль, порожденный элементом $\bigwedge_{i \in A} \nu_i$. Все модули и гомоморфизмы в (4.1) уважают это расщепление. Следовательно (4.1) можно переписать в виде

$$0 \longleftarrow \bigoplus_{A \cap J \neq \emptyset} \Lambda_A \longleftarrow \bigoplus_{I \subseteq J, |I| = 1} \bigoplus_{A \supseteq I} \Lambda_A \longleftarrow \bigoplus_{I \subseteq J, |I| = 2} \bigoplus_{A \supseteq I} \Lambda_A \longleftarrow \dots,$$

$$\bigoplus_{A, A \cap J \neq \emptyset} \left(0 \longleftarrow \Lambda_A \longleftarrow \bigoplus_{I \subseteq A \cap J, |I| = 1} \Lambda_A \longleftarrow \bigoplus_{I \subseteq A \cap J, |I| = 2} \Lambda_A \longleftarrow \dots \right).$$

Для каждого A, гомологии комплекса в скобках совпадают с $\widetilde{H}_*(\Delta_{A \cap J}; \Lambda_A) \cong \widetilde{H}_*(\Delta_{A \cap J}; \Bbbk)$ — приведенными симплициальным гомологиями симплекса на множестве $A \cap J \neq \emptyset$. Поэтому гомологии равны 0.

Определим копучок $\hat{\mathcal{N}}$ на S, принимающий значения в градуированных дифференциальных комплексах. Положим $\hat{\mathcal{N}}(I) = C_*(G_I; \Pi_I)$, — симплициальные цепи симплициального комплекса G_I с постоянными коэффициентами Π_I. Гомоморфизмы коограничения $\hat{\mathcal{N}}(I > J)$ естественно индуцированы вложениями граней $G_I \hookrightarrow G_J$ и вложениями модулей коэффициентов $\widehat{\Pi}(I > J)\colon \Pi_I \hookrightarrow \Pi_J$.

Цепной комплекс

$$\mathcal{X}_{*,*} = (C_*(S; \hat{\mathcal{N}}_*); d_H), \qquad \mathcal{X}_{k,l} = \bigoplus_{I, \dim I = k} C_l(G_I; \Pi_I)$$

является бикомплексом. У него есть горизонтальный гомологический дифференциал $d_H\colon \mathcal{X}_{k,l} \to \mathcal{X}_{k-1,l}$ (происходящий из копучка) и вертикальный дифференциал $d_V\colon C_l(G_I; \Pi_I) \to C_{l-1}(G_I; \Pi_I)$ (внутренний дифференциал). Дифференциалы коммутируют, $d_H d_V = d_V d_H$, поэтому можно определить тотальный дифференциальный комплекс

$$\mathcal{X}_j = \bigoplus_{k+l=j} \mathcal{X}_{k,l}, \qquad d_{Tot} = d_H + (-1)^k d_V \colon \mathcal{X}_j \to \mathcal{X}_{j-1}.$$

Лемма 4.2. $H_k(\mathcal{X}, d_{Tot}) \cong H_k(S; \widehat{\Pi})$.

Доказательство. Рассмотрим вертикальную спектральную последовательность [11] сходящуюся к $H_k(\mathcal{X}, d_{Tot})$:

$$(E_V)^r_{*,*}, \qquad (d_V)_r \colon (E_V)^r_{k,l} \to (E_V)^r_{k-r,l+r-1},$$

которая вначале вычисляет вертикальные гомологии, потом горизонтальные. Имеем

$$(E_V)^1_{k,l} = \bigoplus_{I, \dim I = k} H_l(G_I; \Pi_I).$$

Поскольку клетка G_I стягиваема, $H_l(G_I; \Pi_I) = 0$ при $l \neq 0$ и $H_0(G_I; \Pi_I) = \Pi_I$. Следовательно

$$(E_V)^1_{k,l} = \begin{cases} \bigoplus_{\dim I = k} \Pi_I = C_k(S; \widehat{\Pi}), & \text{если } l = 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$(E_V)^2_{k,l} = \begin{cases} H_k(S; \widehat{\Pi}), & \text{если } l = 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Спектральная последовательность вырождается во втором члене, значит $H_k(\mathcal{X}, d_{Tot}) \cong H_k(S; \widehat{\Pi})$.

Наша следующая цель — посчитать гомологии тотального комплекса, вначале вычисляя горизонтальные гомологии, затем вертикальные. Напомним, что G_I является симплициальным подкомплексом в S', следовательно модуль $C_*(G_I; \Pi_I)$ можно рассматривать как цепной комплекс постоянного копучка Π_I. Пусть копучок $\widehat{\mathcal{I}}'$ обозначает корафинацию пучка $\mathcal{I}$, определенную в параграфе 2.6.

Лемма 4.3. *Последовательность*

$$0 \longleftarrow C_*(S'; \widehat{\mathcal{I}}') \longleftarrow \bigoplus_{I, \dim I = 0} C_*(G_I; \Pi_I) \longleftarrow \bigoplus_{I, \dim I = 1} C_*(G_I; \Pi_I) \longleftarrow \dots \tag{4.2}$$

точна.

Доказательство. Поскольку все гомоморфизмы $C_*(G_I; \Pi_I) \to C_*(G_I; \Pi_I)$ индуцированы включениями симплициальных подкомплексов, последовательность (4.2) расщепляется в прямую сумму по всем симплексам $\Delta = (I_1 < \dots < I_k) \in S'$:

$$\bigoplus_{\Delta \in S'} \left(0 \longleftarrow \widehat{\mathcal{I}}'(\Delta) \longleftarrow \bigoplus_{\substack{I, \dim I = 0 \\ \Delta \in G_I}} \Pi_I \longleftarrow \bigoplus_{\substack{I, \dim I = 1 \\ \Delta \in G_I}} \Pi_I \longleftarrow \dots \right)$$

Из того факта, что условие $\Delta \in G_I$ эквивалентно условию $I_1 \geqslant I$, и определения корафинации $\widehat{\mathcal{I}}'$, получаем, что выражение в скобках совпадает с

$$0 \longleftarrow \mathcal{I}(I_1) \longleftarrow \bigoplus_{\substack{I, \dim I=0\\ I\leqslant I_1}} \Pi_I \longleftarrow \bigoplus_{\substack{I, \dim I=1\\ I\leqslant I_1}} \Pi_I \longleftarrow \dots$$

Эта последовательность точна по Лемме 4.1

Вернемся к бикомплексу $\mathcal{X}$. Рассмотрим горизонтальную спектральную последовательность

$$(E_H)^r_{*,*} \Rightarrow H_*(\mathcal{X}, d_{Tot}), \qquad (d_H)_r \colon (E_H)^r_{k,l} \to (E_H)^r_{k+r-1,l-r}$$

которая вначале считает горизонтальные гомологии, затем вертикальные.

Лемма 4.4. $H_l(\mathcal{X}, d_{Tot}) \cong H_l(S'; \widehat{\mathcal{I}}')$.

Доказательство. Согласно Лемме 4.3, горизонтальные гомологии $\mathcal{X}$ обнуляются везде, кроме степеней $k = 0$, где они изоморфны $C_*(S'; \widehat{\mathcal{I}}')$. Следовательно

$$(E_H)^2_{k,l} \cong \begin{cases} H_l(S'; \widehat{\mathcal{I}}'), & \text{если } k = 0;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Спектральная последовательность вырождается, откуда и следует утверждение.

Используем, наконец, коостовную фильтрацию на S'.

Лемма 4.5. *Существует спектральная последовательность* $E^r_{s,k} \Rightarrow H_{s+k}(S'; \widehat{\mathcal{I}}')$, $d^r \colon E^r_{s,k} \to E^r_{s-r,k+r-1}$, $E^2_{s,k} \cong H^{n-1-s}(S; \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{I})$. *Эта спектральная последовательность сохраняет внутренние градуировки в* $\mathcal{I}$ *и* $\widehat{\mathcal{I}}'$

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность, связанную с коостовной фильтрацией S' и системой коэффициентов (копучком) $\widehat{\mathcal{I}}'$:

$$E^r_{s,k} \Rightarrow H_{s+k}(S'; \widehat{\mathcal{I}}'), \quad d^r \colon E^r_{s,k} \to E^r_{s-r,k+r-1},$$

$$E^1_{s,k} \cong H_{s+k}(S_s, S_{s-1}; \widehat{\mathcal{I}}').$$

Имеем

$$E^1_{s,k} \cong H_{s+k}(S_s, S_{s-1}; \widehat{\mathcal{I}}') = \bigoplus_{I, \dim G_I = s} H_{s+k}(G_I, \partial G_I; \widehat{\mathcal{I}}') = \bigoplus_{I, \dim G_I = s} \overline{\mathcal{I}}_k(I)$$

по Лемме 2.2. Поскольку значения пучка $\mathcal{I}$ не имеют кручения, из Леммы 2.3 следует

$$\bigoplus_{I, \dim G_I = s} \overline{\mathcal{I}}_k(I) \cong \bigoplus_{I, \dim G_I = s} (\mathcal{I} \otimes \mathcal{H}_k)(I) = C^{n-1-s}(S; \mathcal{I} \otimes \mathcal{H}_k).$$

Значит, $E^2_{s,k} \cong H^{n-1-s}(S; \mathcal{I} \otimes \mathcal{H}_k)$, откуда и следует утверждение.

Совокупность Лемм 4.2, 4.4, и 4.5 доказывает Теорему 1.

§ 5. Многообразия с локально стандартными действиями тора

5.1. Пространство орбит. Пусть T^n — компактный n-мерный тор. Стандартным представлением T^n называется представление T^n на $\mathbb{C}^n$, заданное покоординатными вращениями

$$(t_1,\dots,t_n)\cdot(z_1,\dots,z_n)=(t_1z_1,\dots,t_nz_n),$$

где $z_i,t_i\in\mathbb{C}$, $|t_i|=1$. Действие T^n на (компактном связном гладком) многообразии M^{2n} называется *локально стандартным*, если на M имеется атлас стандартных карт, каждая из которых изоморфна подмножеству стандартного представления. Более точно, стандартной картой на M называется тройка (U,f,ψ), где $U\subset M$ есть T^n-инвариантное открытое подмножество, ψ — автоморфизм тора T^n, а f — ψ-эквивариантный гомеоморфизм $f\colon U\to W$ на T^n-инвариантное открытое подмножество $W\subset\mathbb{C}^n$ (т.е. $f(t\cdot y)=\psi(t)\cdot f(y)$ для всех $t\in T^n$, $y\in U$).

Пространство орбит $\mathbb{C}^n/T^n$ стандартного представления совпадает с неотрицательным конусом $\mathbb{R}^n_{\geqslant}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_i\geqslant 0\}$. Следовательно, пространство орбит локально стандартного действия обладает естественной структурой компактного связного n-мерного многообразия с углами. Напомним, что многообразием с углами называется топологическое пространство, локально моделируемое открытыми подмножествами неотрицательного конуса $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$, с комбинаторной стратификацией, индуцированной структурой граней конуса $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$ (технические детали, имеющие отношение к действиям тора, см. в [6] или [16]).

5.2. Характеристические функции. Пусть $Q=M/T^n$ — пространство орбит локально стандартного действия. Пусть $\mathrm{Fac}(Q)$ обозначает множество гиперграней (т.е. граней коразмерности 1). Каждая грань F коразмерности k лежит ровно в k различных гипергранях Q (многообразия с углами, обладающие этим свойством, называются *хорошими* в [10] или *многообразиями с гранями*). Рассмотрим множество S_Q всех граней пространства Q, включая само Q, и зададим на S_Q порядок обратного включения. Поскольку Q — хорошее многообразие с углами, S_Q является симплициальным множеством. Минимальным элементом S_Q является максимальная по включению грань, т.е. само пространство Q. Гиперграни Q соответствуют вершинам множества S_Q. Для удобства абстрактные элементы S_Q мы обозначаем I,J, и т.д., а соответствующие грани пространства Q обозначаются F_I, F_J, и т.д.

Если $F\in\mathrm{Fac}(Q)$ и x — точка из внутренности F, то стабилизатор точки x, обозначаемый $\lambda(F)$, является одномерной торической подгруппой в T^n. Если F_I является гранью коразмерности k в Q, содержащейся в гипергранях $F_1,\dots,F_k\in\mathrm{Fac}(Q)$, то стабилизатором орбиты $x\in F_I^\circ$ является k-мерный тор $T_I=\lambda(F_1)\times\ldots\times\lambda(F_k)\subset T^n$, где произведение свободно внутри T^n. Это условие накладывает определенные ограничения на подгруппы $\lambda(F)$, $F\in\mathrm{Fac}(Q)$. В общем случае, отображение

$$\lambda\colon\ \mathrm{Fac}(Q)\to\{\text{одномерные торические подгруппы в } T^n\}\tag{5.1}$$

называется *характеристической функцией*, если, для любых пересекающихся гиперграней $F_1, \dots, F_k$ отображение

$$\lambda(F_1) \times \ldots \times \lambda(F_k) \to T^n,$$

индуцированное вложениями $\lambda(F_i) \hookrightarrow T^n$, инъективно и расщепимо. Это условие называется $(*)$-условием. Заметим, что $F_1, \dots, F_k$ имеют непустое пересечение в том и только том случае, когда соответствующие вершины S_Q являются вершинами некоторого симплекса.

Из $(*)$-условия следует, что гомоморфизм

$$H_1(\lambda(F_1) \times \ldots \times \lambda(F_k); \Bbbk) \to H_1(T^n; \Bbbk) \tag{5.2}$$

также инъективен и расщепим для любого кольца $\Bbbk$. Поэтому фундаментальные классы $\omega_1, \dots, \omega_k$ подгрупп $\lambda(F_1), \dots, \lambda(F_k)$ свободно порождают прямое слагаемое в $H_1(T^n; \Bbbk)$. Эти рассуждения послужили мотивацией к определению гомологической характеристической функции из параграфа 3. Разумеется, внешняя алгебра $\Lambda[V]$ порожденная $\Bbbk$-модулем V есть не что иное, как вся алгебра гомологий тора: $\Lambda[H_1(T^n; \Bbbk)] \cong H_*(T^n; \Bbbk)$.

Если функция (5.1) удовлетворяет условию (5.2) для некоторого кольца $\Bbbk$, мы говорим, что λ удовлетворяет $(*_\Bbbk)$-условию. Видно, что топологическое $(*)$-условие эквивалентно $(*_\mathbb{Z})$, и что из $(*_\mathbb{Z})$ следует $(*_\Bbbk)$ для любого $\Bbbk$.

5.3. Модельные пространства. Пусть M — многообразие с локально стандартным действием, и $\mu\colon M \to Q$ — проекция на пространство орбит. Свободная часть действия имеет вид $\mu|_{Q^\circ}\colon \mu^{-1}(Q^\circ) \to Q^\circ$, где $Q^\circ = Q \setminus \partial Q$ — внутренность многообразия с углами. Свободная часть действия является главным T^n-расслоением над Q°. Это расслоение можно однозначно продолжить до главного T^n-расслоения $\rho\colon Y \to Q$, поскольку $Q \simeq Q^\circ$.

Таким образом каждое многообразие с локально стандартным действием определяет три объекта: хорошее многообразие с углами Q, главное T^n-расслоение $\rho\colon Y \to Q$, и характристическую функцию λ. Многообразие M может быть восстановлено по этим объектам с помощью следующей стандартной конструкции.

Конструкция 5 (Модельное пространство). Пусть $\rho\colon Y \to Q$ — главное T^n-расслоение над хорошим многообразием с углами Q, а λ — характеристическая функция на $\mathrm{Fac}(Q)$. Рассмотрим пространство $X \stackrel{\text{def}}{=} Y/\sim$, где $y_1 \sim y_2$ в том и только том случае, когда $\rho(y_1) = \rho(y_2) \in F_I^\circ$ для некоторой грани F_I пространства Q, и y_1, y_2 лежат в одной T_I-орбите действия. Имеется естественное T^n-эквивариантное отображение $f\colon Y \to X$.

Каждое многообразие с локально стандартным действием тора эквивариантно гомеоморфно своему модельному пространству ([16; Cor.2]), поэтому в дальнейшем мы работаем с моделью X вместо M.

5.4. Фильтрации. На многообразии с углами Q имеется естественная фильтрация:

$$\emptyset = Q_{-1} \subset Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_{n-1} = \partial Q \subset Q = Q_n, \tag{5.3}$$

где Q_i есть объединение всех граней размерностей $\leqslant i$. Эта фильтрация поднимается до T^n-инвариантной фильтрации на Y:

$$\emptyset = Y_{-1} \subset Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_{n-1} \subset Y_n = Y, \tag{5.4}$$

где $Y_i = \rho^{-1}(Q_i)$. Она в свою очередь опускается до фильтрации на X:

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_{n-1} \subset X_n = X, \tag{5.5}$$

$X_i = f(Y_i)$. Видно что (5.5) есть фильтрация X по типу орбит, т.е. X_i есть объединение орбит размерности не больше i. Имеем $\dim X_i = 2i$. Отображения $\mu\colon X \to Q$, $\rho\colon Y \to Q$ и $f\colon Y \to X$, очевидно, уважают фильтрации.

Фильтрации порождают спектральные последовательности в гомологиях:

$$\begin{aligned}
(E_Q)^1_{p,q} &= H_{p+q}(Q_p, Q_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(Q), & (d_Q)^r &\colon (E_Q)^r_{*,*} \to (E_Q)^r_{*-r,*+r-1} \\
(E_Y)^1_{p,q} &\cong H_{p+q}(Y_p, Y_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(Y), & (d_Y)^r &\colon (E_Y)^r_{*,*} \to (E_Y)^r_{*-r,*+r-1} \\
(E_X)^1_{p,q} &\cong H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(X), & (d_X)^r &\colon (E_X)^r_{*,*} \to (E_X)^r_{*-r,*+r-1}.
\end{aligned}$$

Нам также потребуется спектральная последовательность, ассоциированная с фильтрацией на Q, оборванной на члене $Q_{n-1} = \partial Q$:

$$\emptyset = Q_{-1} \subset Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_{n-1} = \partial Q, \tag{5.6}$$

$$(E_{\partial Q})^1_{p,q} = \begin{cases} H_{p+q}(Q_p, Q_{p-1}) \text{ при } p < n, \\ 0, \text{ при } p = n \end{cases} \Rightarrow H_{p+q}(\partial Q).$$

Заметим, что $(E_X)^1_{p,q} = 0$ при $q > p$ по размерностным соображениям. Отображение $f\colon Y \to X$ индуцирует гомоморфизм спектральных последовательностей

$$f^r_*\colon (E_Y)^r_{p,q} \to (E_X)^r_{p,q}.$$

Основной топологический результат работы следующий.

Теорема 3. *Если Q ориентируемо и все собственные грани Q ациклични над $\Bbbk$, то гомоморфизм $f^2_*\colon (E_Y)^2_{p,q} \to (E_X)^2_{p,q}$ является изоморфизмом при $q < p$ либо $q = p = n$, и является инъективным при $q = p < n$.*

§ 6. Доказательство Теоремы 3

Вначале докажем техническую лемму, позволяющую переходить от топологии Q к топологии соответствующего симплициального множества S_Q.

Для симплициального множества S рассмотрим пространство $P = \operatorname{Cone}|S|$. Коостовная фильтрация на $|S|$ продолжается естественным образом до коостовной фильтрации на P:

$$|S_0| \subset \ldots \subset |S_{n-1}| = |S| \subset P.$$

Соответствующая ей гомологическая спектральная последовательность обозначается $(E_P)^*_{*,*}$.

Сформулируем для удобства следующее определение

Определение 5. Ориентируемое многообразие с углами Q называется многообразием Буксбаума, если все его собственные грани ацикличны над $\Bbbk$. Если Q — многообразие Буксбаума, и, кроме того, Q само ациклично над $\Bbbk$, то Q называется многообразием Коэна–Маколея.

Каждая грань G многообразия Буксбаума Q сама по себе является многообразием с углами. Из ацикличности G следует равенство $H_j(G, \partial G) = 0$ при $j \neq \dim G$ и $H_{\dim G}(G, \partial G) \cong \Bbbk$ согласно двойственности Пуанкаре–Лефшеца.

Лемма 6.1.

$(1)_n$ *Пусть Q — многообразие Буксбаума, $\dim Q = n$, S_Q — двойственное симплициальное множество, а $P = \operatorname{Cone}(|S_Q|)$. Тогда существует сохраняющее грани отображение $\varphi\colon Q \to P$, которое индуцирует тождественный изоморфизм частично упорядоченных множеств граней, а также изоморфизм спектральных последовательностей $\varphi_*\colon (E_{\partial Q})^r_{*,*} \overset{\cong}{\Rightarrow} (E_S)^r_{*,*}$ при $r \geqslant 1$.*

$(2)_n$ *Если Q — многообразие Коэна–Маколея размерности n, то φ индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей $\varphi_*\colon (E_Q)^r_{*,*} \overset{\cong}{\Rightarrow} (E_P)^r_{*,*}$ при $r \geqslant 1$.*

Доказательство. Отображение φ строится индуктивно. 0-остовы как Q, так и P естественно отождествляются с множеством максимальных симплексов в S. Продолжение φ на грани высших размерностей всегда существует, поскольку все грани P являются конусами. Утверждение доказывается при помощи следующей схемы индукции: $(2)_{\leqslant n-1} \Rightarrow (1)_n \Rightarrow (2)_n$. База $n = 0$ очевидна.

Докажем импликацию $(1)_n \Rightarrow (2)_n$. Отображение φ индуцирует гомоморфизм длинных точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_*(\partial Q) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{H}_*(Q) \arrow[r] \arrow[d] & H_*(Q, \partial Q) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{H}_{*-1}(\partial Q) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{H}_{*-1}(Q) \arrow[d] \\
\widetilde{H}_*(\partial P) \arrow[r] & \widetilde{H}_*(P) \arrow[r] & H_*(P, \partial P) \arrow[r] & \widetilde{H}_{*-1}(\partial P) \arrow[r] & \widetilde{H}_{*-1}(P)
\end{tikzcd}$$

Гомоморфизмы $\widetilde{H}_*(Q) \to \widetilde{H}_*(P)$ являются изоморфизмами, поскольку обе группы тривиальны. Гомоморфизмы $\widetilde{H}_*(\partial Q) \to \widetilde{H}_*(\partial P)$ являются изоморфизмами, поскольку $(E_{\partial Q}) \overset{\cong}{\Rightarrow} H_*(\partial Q)$, $(E_{\partial P}) \overset{\cong}{\Rightarrow} H_*(\partial P)$, а спектральные последовательности изоморфны согласно предположению $(1)_n$. Из Леммы о пяти гомоморфизмах следует, что $\varphi_*\colon (E_Q)^1_{n,*} \to (E_P)^1_{n,*}$ также является изоморфизмом, что доказывает утверждение $(2)_n$.

Докажем импликацию $(2)_{\leqslant n-1} \Rightarrow (1)_n$. Пусть F_I — грани Q, а G_I — грани P. Все собственные грани Q являются многообразиями Коэна–Маколея размерности $\leqslant n-1$. Поэтому из предположения $(2)_{\leqslant n-1}$ следуют изоморфизмы $H_*(F_I, \partial F_I) \to H_*(G_I, \partial G_I)$, которые в сумме дают изоморфизм $\varphi_*\colon (E_{\partial Q})^1_{*,*} \overset{\cong}{\Rightarrow} (E_{\partial P})^1_{*,*}$.

Следствие 4. *Если Q — многообразие Буксбаума, то S_Q является множеством Буксбаума. Более того, в этом случае S_Q является гомологическим многообразием. Если Q — многообразие Коэна–Маколея, то S_Q — гомологическая сфера.*

С этого момента мы будем предполагать, что Q обозначает многообразие Буксбаума. Именно это условие фигурирует в формулировке Теоремы 3. Следовательно, S_Q есть симплициальное множество Буксбаума.

Вернемся к пространствам Y и X над Q. Как и ранее, пусть F_I — грань многообразия Q, соответствующая симплексу $I \in S_Q$. Пусть $Y_I = \rho^{-1}(F_I)$ и $X_I = f(Y_I)$ — подмножества пространств Y и X соответственно. В действительности $X_I \subset X$ является замкнутым подмногообразием размерности $2\dim F_I$, называемым гранным подмногообразием. Положим $\partial Y_I = \rho^{-1}(\partial F_I)$ и $\partial X_I = f(\partial Y_I)$ (множество ∂X_I не является границей в топологическом смысле, однако такое обозначение будет для нас удобным). Заметим, что $Y_{\hat{0}} = Y$ и $X_{\hat{0}} = X$.

Имеем

$$(E_Y)^1_{p,q} \cong H_{p+q}(Y_p, Y_{p-1}) \cong \bigoplus_{|I|=n-p} H_{p+q}(Y_I, \partial Y_I)$$

$$(E_X)^1_{p,q} \cong H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \cong \bigoplus_{|I|=n-p} H_{p+q}(X_I, \partial X_I)$$

Замечание 7. Гомоморфизм $f^1_*\colon (E_Y)^1_{n,q} \to (E_X)^1_{n,q}$, совпадающий с гомоморфизмом $f_*\colon H_*(Y, \partial Y) \to H_*(X, \partial X)$, является изоморфизмом, поскольку отождествление $\sim$ из Конструкции 5 затрагивает лишь границу ∂Y, а значит $Y/\partial Y \cong X/\partial X$.

Пространство Y_I является главным T^n-расслоением над Q_I. Для каждого $I \in S \setminus \hat{0}$, грань Q_I ациклична. Следовательно, существует тривиализация $Y_I \cong Q_I \times T^n$. Имеем

$$H_{p+q}(Y_I, \partial Y_I) \cong \bigoplus_{i+j=p+q} H_i(F_I, \partial F_I) \otimes H_j(T^n) \cong H_q(T^n), \tag{6.1}$$

(модули $H_i(F_I, \partial F_I)$ зануляются при $i \neq p$, а $H_p(F_I, \partial F_I) \cong \Bbbk$). Аналогично для X имеем отождествление

$$H_*(X_I, \partial X_I) \cong H_*(F_I \times T^n/T_I, \partial F_I \times T^n/T_I),$$

следовательно

$$H_{p+q}(X_I, \partial X_I) \cong H_q(T^n/T_I). \tag{6.2}$$

Рассмотрим градуированный пучок $\mathcal{H}^Y_q$ на S_Q, принимающий значение $H_{p+q}(Y_I, \partial Y_I)$ на симплексе $I \in S_Q$ (включая $I = \hat{0}$). Гомоморфизмы ограничения извлекаются из дифференциала $(d_Y)^1$ аналогично Конструкции 2. Согласно (6.1), обрезанная часть $\underline{\mathcal{H}}^Y_* = \bigoplus_q \underline{\mathcal{H}}^Y_q$ (см. Замечание 3) является локально постоянным пучком $\mathcal{L}$, принимающим в качестве значения внешнюю алгебру.

Аналогично можно определить градуированный пучок $\mathcal{H}^X_q$ на S_Q принимающий значение $H_{p+q}(X_I, \partial X_I)$ на $I \in S$. Его обрезанная часть $\underline{\mathcal{H}}^X_* = \bigoplus_q \underline{\mathcal{H}}^X_q$ является пучком фактор-алгебр $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ согласно (6.2). Действительно, алгебра гомологий $H_*(T^n/T_I)$ естественно отождествляется с фактором $H_*(T^n)/\mathcal{I}(I)$, где $\mathcal{I}(I)$ — идеал, порожденный подпространством $H_1(T_I) \subset H_1(T^n)$.

Гомоморфизм $f^1_*\colon (E_Y)^1_{*,*} \to (E_X)^1_{*,*}$ совпадает с гомоморфизмом $f_*\colon C^*(S; \mathcal{H}^Y_*) \to C^*(S; \mathcal{H}^X_*)$. Последний гомоморфизм совпадает с $f_*\colon C^*(S; \mathcal{L}) \to C^*(S; \mathcal{L}/\mathcal{I})$ вне элемента $\hat{0}$.

Лемма 6.2. *Имеется короткая точная последовательность градуированных пучков*

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{H}^Y \to \mathcal{H}^X \to 0.$$

Доказательство. Это следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \underline{\mathcal{H}}^Y \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \underline{\mathcal{H}}^X \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r, hook] & \mathcal{H}^Y \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathcal{H}^X \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
 & & \mathcal{H}^Y/\underline{\mathcal{H}}^Y \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathcal{H}^X/\underline{\mathcal{H}}^X \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

в которой все вертикальные и две горизонтальных последовательности точны. Нижние пучки сконцентрированны в элементе $\hat{0} \in S_Q$ и градуированный изоморфизм между ними следует из Замечания 7.

Наконец, короткая точная последовательность Леммы 6.2 индуцирует длинную точную последовательность когомологий пучков:

$$\to H^{i-1}(S_Q; \mathcal{I}^{(q)}) \to H^{i-1}(S_Q; \mathcal{H}^Y_q) \xrightarrow{f^2_*} H^{i-1}(S_Q; \mathcal{H}^X_q) \longrightarrow H^i(S_Q; \mathcal{I}^{(q)}) \to \tag{6.3}$$

Симплициальное множество S_Q является гомологическим многообразием. Следовательно, его структурный пучок постоянен: $\mathcal{H}_0 \cong \Bbbk$. Из Следствия 3 следует, что модули $H^i(S_Q; \mathcal{I}^{(q)})$ обнуляются при $i \leqslant n-1-q$. Из длинной точной последовательности (6.3) видно, что гомоморфизм

$$f_*\colon H^{i-1}(S_Q; \mathcal{H}^Y_q) \to H^{i-1}(S_Q; \mathcal{H}^X_q)$$

является изоморфизмом при $i \leqslant n-1-q$, и инъективен при $i = n-q$. Этот гомоморфизм совпадает с

$$f^2_*\colon (E_Y)^2_{n-i,q} \to (E_X)^2_{n-i,q}.$$

Замена индекса $p = n - i$ завершает доказательство Теоремы 3.

Замечание 8. Заметим, что аналогичное рассуждение доказывает, что гомоморфизм $f^*\colon (E_{\partial Y})^2_{p,q} \to (E_{\partial X})^2_{p,q}$ является изоморфизмом при $p > q$, инъективен при $p = q$.

Благодарности

Я выражаю благодарность профессору Микийе Масуде за его гостеприимство и замечательную рабочую атмосферу в Университете Города Осака. Задача вычисления кольца когомологий торических оригами многообразий, над которой мы совместно работали с 2013 года, оказалась замечательной мотивацией для данного исследования (и послужила хорошей средой для проверки общих гипотез). Также благодарю анонимных рецензентов за замечания, способствоваше улучшению качества текста.

Список литературы!!!!!

[1] A. Ayzenberg, M. Masuda, S. Park, H. Zeng, "Cohomology of toric origami manifolds with acyclic proper faces", *preprint arXiv:1407.0764*, 2014.

[2] A. Ayzenberg, "Locally standard torus actions and h'-vectors of simplicial posets", *J. Math. Soc. Japan*, **68**:4 (2016), 1–21.

[3] A. Björner, "Posets, regular CW complexes and Bruhat order", *European J. Combin.*, **5** (1984), 7–16.

[4] E. Brugallé, I. Itenberg, G. Mikhalkin, K. Shaw, "Brief introduction to tropical geometry", *preprint arXiv:1502.05950.*

[5] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, "Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия", *Тр. МИАН*, **247** (2004), 41–58.

[6] V. Buchstaber, T. Panov, *Toric Topology*, Math. Surveys Monogr., **204**, AMS, Providence, RI, 2015.

[7] J. M. Curry, "Sheaves, Cosheaves and Applications", *preprint arXiv:1303.3255v1.*

[8] M. Davis, T. Januszkiewicz, "Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions", *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.

[9] T. Holm and A. R. Pires, "The fundamental group and Betti numbers of toric origami manifolds", *Algebr. Geom. Topol.*, **15**:4 (2015), 2393–2425.

[10] M. Masuda, T. Panov, "On the cohomology of torus manifolds", *Osaka J. Math.*, **43** (2006), 711–746..

[11] J. McCleary, *A User's Guide to Spectral Sequences, second edition*, Cambridge studies in advanced mathematics, **58**.

[12] C. McCrory, "Zeeman's filtration on homology", *Trans.of the AMS*, **250** (1979).

[13] I. Novik, Ed Swartz, "Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets", *Adv. Math.*, **222** (2009), 2059–2084.

[14] M. Poddar, S. Sarkar, "A class of torus manifolds with nonconvex orbit space", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **143**:4 (2015).

[15] T. Kajiwara, "Tropical toric geometry", *Toric Topology (M.Harada et al, eds.)*, Contemporary Mathematics, **460**, AMS, Providence, RI, 2008, 197–208.

[16] T. Yoshida, "Local torus actions modeled on the standard representation", *Adv. Math. 227*, 2011, 1914–1955.

А. А. Айзенберг (Антон Айзенберг)
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия
E-mail: ayzenberga@gmail.com

Поступила в редакцию
11/JUL/2016