

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Сироткин, Д. С. Малышев, Способ редукции графов и его приложения, *Дискрет. матем.*, 2017, том 29, выпуск 3, 114–125

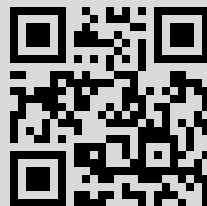
DOI: <http://dx.doi.org/10.4213/dm1440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 82.208.100.166

7 сентября 2017 г., 09:56:51



Способ редукции графов и его приложения

© 2017 г. Д. В. Сироткин*, Д. С. Малышев**

Задача о независимом множестве для заданного обыкновенного графа состоит в вычислении размера наибольшего множества его попарно несмежных вершин. Предлагается новый способ редукции графов. С его помощью получено новое доказательство NP-полноты задачи о независимом множестве в классе планарных графов и доказана NP-полнота данной задачи в классе плоских графов, имеющих только треугольные внутренние грани, с максимальной степенью вершин 18.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01336).

Ключевые слова: независимые множества, планарный граф, планарная триангуляция, вычислительная сложность

1. Введение

Независимым множеством (кратко, н.м.) обыкновенного графа называется любое множество его попарно несмежных вершин. *Наибольшее независимое множество* (кратко, наибольшее н.м.) графа G — это н.м. графа G с наибольшим количеством вершин, а его размер называется *числом независимости* графа G и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* (кратко, задача НМ) для заданных графа G и натурального числа k состоит в том, чтобы выяснить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geq k$.

Известно несколько алгоритмических инструментов для редукции графов при решении задачи НМ. Например, если в графе G вершина a смежно поглощает вершину b (т. е. $ab \in E(G)$ и $N(a) \supseteq N(b) \setminus \{a\}$, где $N(v)$ — окрестность вершины v), то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{a\})$. Это так называемое *правило смежностного поглощения*. Смежностное поглощение является частным представителем так называемых *сжатий* [1], т. е. отображений множества вершин графа в себя, не являющихся автоморфизмами, при которых любые две различные несмежные вершины переходят в различные несмежные вершины. Таким образом, сжатие преобразует граф в его порождённый

*Места работы: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

**Места работы: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

подграф, при этом, очевидно, сохраняется число независимости. Напомним, что граф H называется *порождённым подграфом* графа G , если H получается удалением некоторых вершин графа G .

В этой статье мы предлагаем новый способ преобразования графов. Он основан на «локальной хирургии»: если в заданном графе G имеется фрагмент G_1 со специальным вхождением в граф G , то фрагмент G_1 заменяется графом G_2 , причём разность между числами независимости результата и графа G зависит только от G_1 и G_2 и не зависит от G . Предлагаемый нами способ является частным случаем так называемых схем замен, введённых в [3]. Там рассматривается довольно общий класс преобразований, при которых число независимости в точности сохраняется, но отмечается, что ничего принципиально нового не будет, если допустить изменение числа независимости на некоторую константу. Однако в [3] уделяется мало внимания конкретным схемам замен и их приложению к анализу сложности задачи НМ в различных классах графов.

Предлагаемый метод мы используем для доказательства NP-полноты задачи НМ в двух классах графов. Первый из них — класс планарных графов \mathcal{P} . Факт NP-полноты задачи НМ в классе \mathcal{P} был впервые доказан в работе [6]; её основной идеей данной работы является «планаризация» заданного графа, а именно, вставка специального «шунта» в каждое пересечение рёбер графа. К сожалению, в [6] не объясняется, каким образом был получен соответствующий «шунт». При помощи метода «локальной хирургии» мы предлагаем другой «шунт», построение которого представляется более простым. Второй класс — множество плоских почти триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Напомним, что *плоской почти триангуляцией* называется такой плоский граф, что каждая его грань (кроме, быть может, внешней) ограничена 3-циклом. Наш результат в чём-то улучшает утверждение из [4] о NP-полноте задачи НМ в классе 4-связных плоских почти триангуляций с логарифмической по количеству вершин максимальной степени вершин. Упомянем некоторые известные случаи полиномиальной разрешимости задачи НМ в подмножествах класса \mathcal{P} [5, 8–10].

2. Используемые обозначения

В данной работе мы будем использовать следующие обозначения:

символ \triangleq означает равенство по определению,

для целых чисел $a < b$ через $\overline{a, b}$ обозначено множество $\{a, a + 1, \dots, b\}$,

$N(x)$ — окрестность вершины x , а $\deg(x)$ — её степень,

если G — граф и $V' \subseteq V(G)$, то $G[V']$ — подграф графа G , порождённый подмножеством вершин V' , а $G \setminus V'$ — результат удаления из графа G всех элементов множества V' (вместе со всеми инцидентными им рёбрами),

O_2 — пустой граф с двумя вершинами, $K_{1,3}$ — граф с четырьмя вершинами, одна из которых смежна с тремя другими, которые попарно не смежны.

3. Операция замены и её значение

Пусть H_1 и H_2 — графы, $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$. Будем говорить, что H_1 и H_2 являются α -подобными относительно A , если существует такая константа c , что для любого $X \subseteq A$ (в том числе и $X = \emptyset$) выполняется равенство $\alpha(H_1 \setminus X) = \alpha(H_2 \setminus X) + c$. Ясно, что $c = \alpha(H_1) - \alpha(H_2)$.

Пусть G — некоторый граф, а H — некоторый его порождённый подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовём H -отделяющим, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$.

Пусть H_1 и H_2 — графы, $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$, H_1 и H_2 являются α -подобными относительно A . Допустим, что граф G содержит порождённый подграф H_1 с H_1 -отделяющим множеством A . Замена H_1 на H_2 в графе G состоит в образовании графа G^* с множеством вершин $(V(G) \setminus V(H_1)) \cup V(H_2)$ и множеством рёбер $(E(G) \setminus E(H_1)) \cup E(H_2)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если граф G^* — результат замены H_1 на H_2 в графе G , то графы G^* и G являются α -подобными относительно A .*

Доказательство. Предположим, что $A = \{v_1, \dots, v_k\}$. Рассмотрим произвольное подмножество $I \subseteq \overline{1, k}$. Пусть $G_I \triangleq G \setminus \{v_i \mid i \in I\}$ и $G_I^* \triangleq G^* \setminus \{v_i \mid i \in I\}$. Пусть S_I — наибольшее н.м. графа G_I , $M_I \triangleq S_I \setminus V(H_1)$ и $X_I \triangleq \bigcup_{x \in M_I} (N(x) \cap V(H_1))$, где окрестность вершины x рассматривается в графе G_I . Поскольку $X_I \subseteq A$ и A — H_1 -отделяющее множество, то $\alpha(G_I) = |M_I| + \alpha(H_1 \setminus X_I)$. Если к множеству M_I в графе G_I^* добавить наибольшее н.м. графа $H_2 \setminus X_I$, то получится н.м. мощности $|M_I| + \alpha(H_2 \setminus X_I)$. Следовательно, $\alpha(G_I^*) \geq |M_I| + \alpha(H_2 \setminus X_I) = \alpha(G_I) - \alpha(H_1 \setminus X_I) + \alpha(H_2 \setminus X_I) = \alpha(G_I) - \alpha(H_1) + \alpha(H_2)$. Аналогично доказывается обратное неравенство.

Из доказательства леммы 1 следует, что справедливо равенство $\alpha(G^*) = \alpha(G) + \alpha(H_2) - \alpha(H_1)$.

Пусть H — некоторый граф и $A \subseteq V(H)$. Определим семейство $\mathfrak{M}(H, A)$, состоящее из таких подмножеств $X \subseteq A$, что для любого $Y \subset X$ выполнено неравенство $\alpha(H \setminus (A \setminus X)) > \alpha(H \setminus (A \setminus Y))$. Например, для простого пути $H \triangleq (v_1, v_2, v_3)$ множество $\mathfrak{M}(H, \{v_1, v_2, v_3\})$ совпадает с множеством $\{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_3\}\}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть H_1 и H_2 — графы и $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$. Тогда H_1 и H_2 являются α -подобными относительно A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}(H_1, A) = \mathfrak{M}(H_2, A)$.*

Доказательство. Очевидно, что если H_1 и H_2 являются α -подобными относительно A , то $\mathfrak{M}(H_1, A) = \mathfrak{M}(H_2, A)$.

Предположим, что $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ и что $\mathfrak{M}(H_1, A) = \mathfrak{M}(H_2, A)$. Для каждого $i \in \overline{1, 2}$ определим функцию $f_{(H_i, A)}(\cdot): \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, \dots, k\}$ следующим образом. Для булева вектора (x_1, \dots, x_k) значение $f_{(H_i, A)}(\cdot)$ на нём положим равным $\alpha(H_i) - \alpha(H_i \setminus \{v_j \mid x_j = 1\})$. Очевидно, что обе функции $f_{(H_1, A)}(\cdot)$ и $f_{(H_2, A)}(\cdot)$ являются монотонными, причём $f_{(H_1, A)}(0, \dots, 0) = f_{(H_2, A)}(0, \dots, 0) = 0$. Поэтому для каждого $i \in \overline{1, 2}$ функция $f_{(H_i, A)}(\cdot)$ однозначно определяется набором

$(M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \dots, M_k^{(i)})$, где $M_j^{(i)}$ — множество всех нижних аргументов, на которых функция $f_{(H_i, A)}(\cdot)$ принимает значение, равное j . Для каждого $i \in \overline{1, 2}$ множество $\mathfrak{M}(H_i, A)$ в точности состоит из всех элементов, соответствующих (нижним) аргументам, на которых меняется значение функции $f_{(H_i, A)}(\cdot)$. Отсюда и из того, что $\mathfrak{M}(H_1, A) = \mathfrak{M}(H_2, A)$, $f_{(H_1, A)}(0, \dots, 0) = f_{(H_2, A)}(0, \dots, 0) = 0$, следует, что для любого $j \in \overline{1, k}$ выполнено равенство $M_j^{(1)} = M_j^{(2)}$. Поэтому функции $f_{(H_1, A)}(\cdot)$ и $f_{(H_2, A)}(\cdot)$ совпадают. Значит, H_1 и H_2 являются α -подобными относительно A .

4. Новое доказательство NP-полноты задачи НМ в классе планарных графов

Классическое доказательство NP-полноты задачи НМ в классе \mathcal{P} , предложенное в [6], содержит полиномиальное сведение задачи НМ к той же задаче для планарных графов и основано на следующей идее. Пусть G — произвольный граф. Рассмотрим изображение графа G на плоскости, в котором вершины графа G изображены точками, а рёбра графа G — отрезками. Будем считать, что никакие три ребра не пересекаются в одной точке и никакое ребро не содержит никакой вершины в качестве своей внутренней точки. Очевидно, что такое изображение обязательно существует. Более того, такая укладка графа G может быть построена за время $O(|V(G)|)$ [7]. Рассмотрим в данном изображении каждое пересечение двух рёбер. Количество пересечений рёбер можно оценить сверху величиной $\binom{|E(G)|}{2}$. Для точки пересечения любых двух пересекающихся рёбер (a, b) и (a', b') выделим такую её малую окрестность в евклидовой метрике, что окрестности не принадлежат никакая вершина или участок ребра, отличного от рассматриваемых пересекающихся. Удалим из графа G рёбра (a, b) и (a', b') , а затем добавим к получившемуся графу рёбра (a, v) , (u, b) , (a', v') , (u', b') и отождествим вершины v, u, v', u' с одноимёнными вершинами «шунта» H , изображённого на следующем рисунке.

Понятно, что получившийся граф будет планарным. Для этого достаточно поместить «шунт» H в окрестность точки пересечения рёбер (a, b) и (a', b') , а вершины v, u, v', u' разместить на границе данной окрестности. В [6] показано, что предложенное «шунтирование» каждой точки пересечения рёбер увеличивает число независимости графа на 9. Тем самым, задача НМ полиномиально сводится к той же задаче в классе \mathcal{P} .

К сожалению, в [6] не поясняется, каким образом был получен граф H . Далее, используя «хирургию» из предыдущего раздела настоящей работы, мы построим другой «шунт» H^* . Хотя граф H^* будет содержать больше вершин, чем граф H , процесс его построения, на наш взгляд, более понятен, чем процесс построения графа H .

Лемма 3. Пусть G_1 и G_2 — графы, изображённые на рис. 2. Тогда они являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

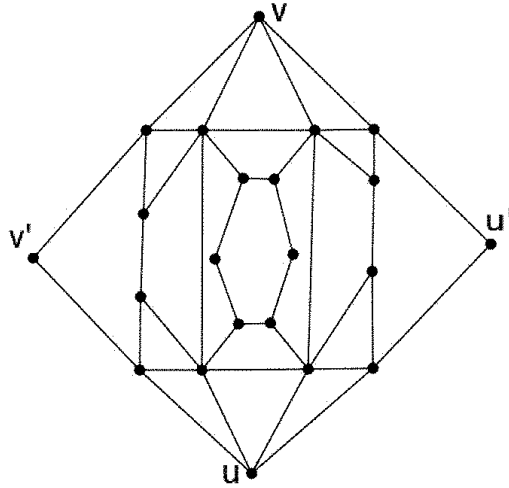


Рис. 1. «Шунт» H

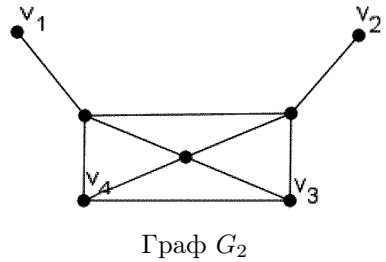
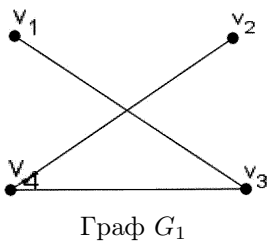


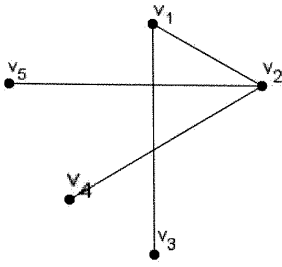
Рис. 2. Графы G_1 и G_2

Доказательство. Имеет место равенство $\mathfrak{M}(G_1, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \mathfrak{M}(G_2, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\}$, в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой. Поэтому по лемме 2 графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

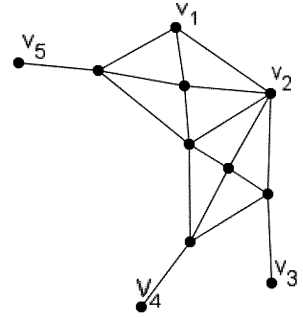
Лемма 4. Пусть G_3 и G_4 — графы, изображённые на рис. 3. Тогда они являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Доказательство. Рассмотрим в графе G_3 подграф, рёбра которого выделены на рис. 4 жирным. Этот подграф изоморфен графу G_1 . Выполним замену данного подграфа на граф G_2 (см. рис. 4). В получившемся графе также рассмотрим подграф, рёбра которого выделены жирным и который изоморфен G_1 , и выполним его замену на G_2 (см. рис. 4). В результате получим граф, изоморфный графу G_4 . Отсюда и лемм 1 и 3 следует, что графы G_3 и G_4 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Лемма 5. Пусть G_5 и G_7 — графы, изображённые на рис. 5 и 6. Тогда они являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.



Граф G_3



Граф G_4

Рис. 3. Графы G_3 и G_4

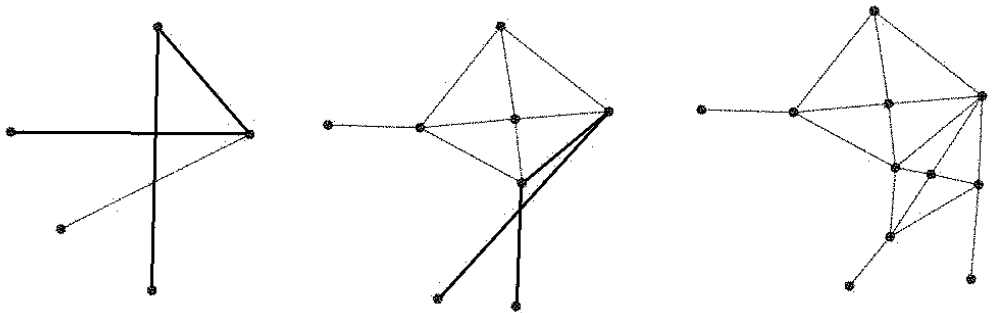


Рис. 4. Преобразование графа G_3 в граф G_4

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{M}(G_5, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\}$. Рассмотрим граф G_6 из рисунка 5 и покажем, что множество $\mathfrak{M}(G_6, \{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ такое же.

Все вершины графа G_6 можно разбить на 3 цикла: (v_4, AD_1, CD_2, BC_1) , (v_2, AD_2, AB_2, BC_2) , $(v_1, AB_1, AB_3, v_3, CD_3, CD_1)$. Любое н.м. графа G_6 содержит не более двух вершин каждого из первых двух циклов и не более трёх вершин из третьего. Предположим, что $\alpha(G_6) = 7$. Тогда любому наибольшему н.м. графа G_6 принадлежат ровно две вершины из первых двух циклов и три из третьего. В первом цикле наибольшему н.м. графа G_6 могут принадлежать либо только вершины AD_1 и BC_1 , либо только вершины v_4 и CD_2 , а во втором — либо AD_2 и BC_2 , либо AB_2 и v_2 . Пары вершин (v_4, CD_2) и (v_2, AB_2) одновременно не могут принадлежать никакому н.м. графа G_6 , а значит, для любого наибольшего н.м. графа G_6 хотя бы одна из пар вершин (AD_1, BC_1) и (AD_2, BC_2) принадлежит ему. Из этого следует, что для любого наибольшего н.м. графа G_6 хотя бы один из двух наборов вершин (CD_1, CD_3) и (AB_1, AB_3) не принадлежит ему. Отсюда следует, что никакому наибольшему н.м. графа G_6 одновременно не могут принадлежать три вершины цикла $(v_1, AB_1, AB_3, v_3, CD_3, CD_1)$, что приводит к противоречию. Значит $\alpha(G_6) < 7$. При этом $\{v_1, v_4, AD_2, CD_2, BC_2, CD_3\}$ — н.м. графа G_6 , а значит, $\alpha(G_6) = 6$.

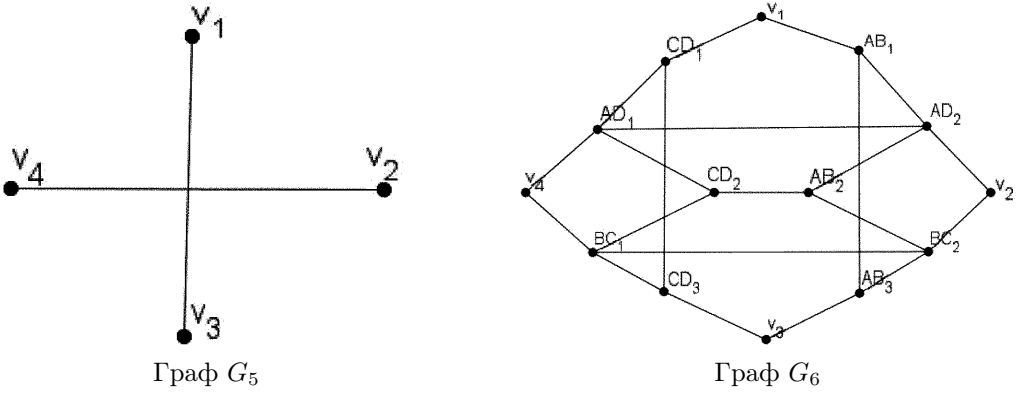


Рис. 5. Графы G_5 и G_6

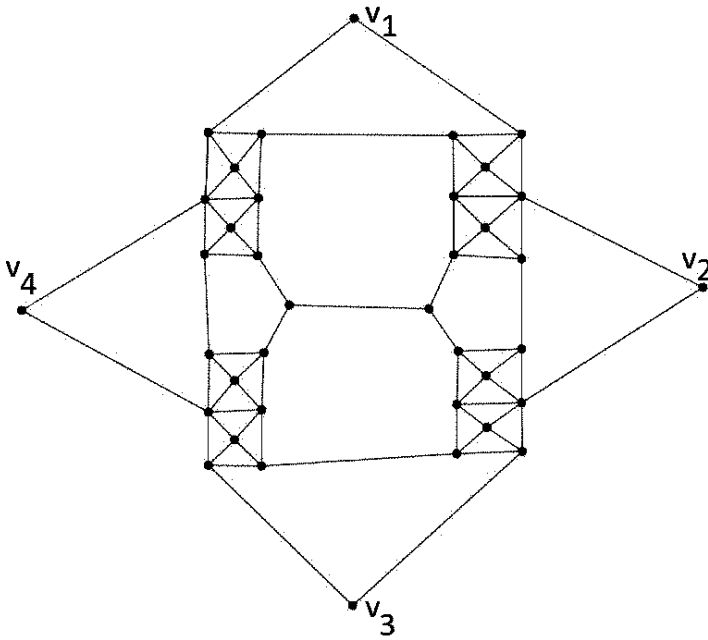


Рис. 6. Граф G_7

Рассмотрим в графе G_6 подмножества его вершин $\{v_1, v_2, AB_2, AB_3, AD_1, BC_1\}$, $\{v_3, v_4, CD_1, CD_2, AD_2, BC_2\}$, $\{v_2, v_3, AB_1, AB_2, AD_1, BC_1\}$, $\{v_1, v_4, CD_2, CD_3, AD_2, BC_2\}$. Каждое из них является независимым множеством графа G_6 . Тем самым, для любого $i \in \overline{1, 4}$ справедливо равенство $\alpha(G \setminus \{v_i, v_{(i+1) \bmod 4}\}) = \alpha(G)$.

При удалении из графа G_6 вершин v_2 и v_4 все оставшиеся вершины принадлежат циклу $(v_1, AB_1, AD_2, AB_2, BC_2, AB_3, v_3, CD_3, BC_1, CD_2, AD_1, CD_1)$, состоящему из 12 вершин. Если $\alpha(G_6 \setminus \{v_2, v_4\}) = 6$, то вершины любого наибольшего н.м. графа $G_6 \setminus \{v_2, v_4\}$ должны чередоваться в данном цикле. Это невозможно. При этом в графе $G_6 \setminus \{v_2, v_4\}$ существует н.м. $\{v_1, AD_2, BC_2, v_3, BC_1\}$, т.е. $\alpha(G_6 \setminus \{v_2, v_4\}) = 5$.

Рассмотрим граф $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$. Предположим, что $\alpha(G_6 \setminus \{v_1, v_3\}) = 6$. Рассмотрим два подграфа графа $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$, порождённые множествами вершин $\{v_4, AD_1, BC_1, CD_1, CD_2, CD_3\}$ и $\{v_2, AD_2, BC_2, AB_1, AB_2, AB_3\}$. Ни один из этих подграфов, очевидно, не может содержать больше трёх вершин любого н.м. графа $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$. Первый из этих подграфов содержит только два трёхвершинных н.м. — это $\{v_4, CD_2, CD_1\}$ и $\{v_4, CD_2, CD_3\}$, а второй из них тоже содержит только два трёхвершинных н.м. — $\{v_2, AB_2, AB_1\}$ и $\{v_2, AB_2, AB_3\}$. Так как вершины CD_2 и AB_2 не могут одновременно присутствовать ни в каком н.м. графа $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$, то получаем противоречие с равенством $\alpha(G_6 \setminus \{v_1, v_3\}) = 6$. При этом в графе $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$ существует н.м. $\{v_4, CD_2, CD_1, v_2, AB_1\}$, т.е. $\alpha(G_6 \setminus \{v_2, v_4\}) = 5$.

При удалении из графа G_6 любых трёх вершин, принадлежащих множеству $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, в получившемся подграфе образуется одно из следующих четырёх н.м.: $\{v_1, AD_1, AB_2, AB_3, CD_3\}$, $\{v_2, AB_1, AB_2, CD_3, AD_1\}$, $\{v_3, BC_1, AB_2, AB_1, CD_1\}$, $\{v_4, CD_2, CD_1, BC_2, AB_1\}$. Отсюда и рассуждений из предыдущих двух абзацев следует, что число независимости получившегося подграфа равно 5.

При удалении вершин v_1, v_2, v_3, v_4 из графа G_6 множество вершин получившегося графа можно покрыть двумя циклами $(AD_1, CD_1, CD_3, BC_1, CD_2)$ и $(AD_2, AB_1, AB_3, BC_2, AB_2)$. Каждому из этих циклов принадлежит не более двух вершин любого н.м. графа $G_6 \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, значит, $\alpha(G_6 \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) < 5$. При этом существует н.м. $\{CD_1, BC_1, AB_1, BC_2\}$ графа $G_6 \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Из этого следует, что $\alpha(G_6 \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = 4$.

Итак, $\mathfrak{M}(G_5, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \mathfrak{M}(G_6, \{v_1, v_2, v_3, v_4\})$. Поэтому по лемме 2 графы G_5 и G_6 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Процесс получения графа G_7 из графа G_6 представлен на рис. 7. На каждом его шаге рассматривается подграф, порождённый рёбрами, выделенными жирным, который изоморфен графу G_3 . Такой подграф заменяется на граф G_4 .

Поэтому по леммам 1 и 4 графы G_6 и G_7 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Тем самым графы G_5 и G_7 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

«Шунт» H^* , о котором говорилось в начале этого раздела работы, совпадает с графом G_7 .

5. NP-полнота задачи НМ в одном классе плоских почти триангуляций с максимальной степенью вершин 18

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 1. *Задача НМ является NP-полной в классе плоских почти триангуляций с максимальной степенью вершин 18.*

Хорошо известно, что задача НМ является NP-полной в классе $\mathcal{P}(3)$ планарных графов со степенями всех вершин не более 3. Это следует, например, из результатов [6] и техники уменьшения степеней вершин графов из [2]. Покажем, что задача

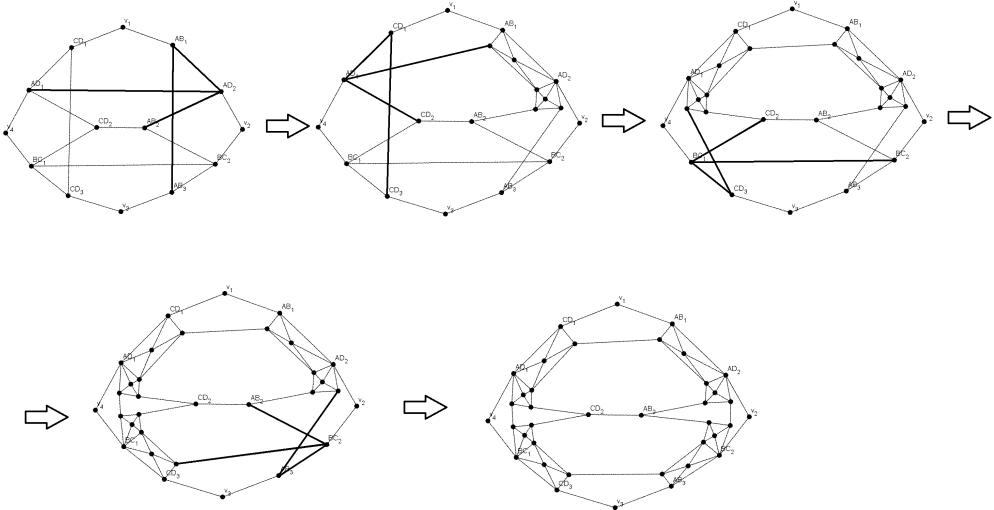


Рис. 7. Процесс получения графа G_7 из графа G_6

НМ в классе $\mathcal{P}(3)$ полиномиально сводится к той же задаче для плоских почти триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Отсюда будет следовать справедливость теоремы 1.

Если v — висючая вершина графа G , а u — сосед v , то по правилу смежностного поглощения справедливо равенство $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{u\})$. Если G_1, \dots, G_p — все компоненты связности графа G , то $\alpha(G) = \sum_{i=1}^p \alpha(G_i)$. Тем самым, задача НМ в классе $\mathcal{P}(3)$ полиномиально сводится к той же задаче для связных графов из $\mathcal{P}(3)$, не содержащих висючих вершин.

Лемма 6. Пусть граф O_2 образован вершинами v и u , а граф $K_{1,3}$ образован вершиной x и её соседями y, v, u . Тогда они являются α -подобными относительно $\{v, u\}$.

Доказательство. Справедливо равенство $\mathfrak{M}(O_2, \{v, u\}) = \mathfrak{M}(K_{1,3}, \{v, u\})$, в чём можно убедиться непосредственной проверкой. Поэтому графы O_2 и $K_{1,3}$ являются α -подобными относительно $\{v, u\}$ по лемме 2.

Отметим, что если в укладке планарного графа некоторое ребро лежит внутри грани, то при подсчёте числа рёбер, ограничивающих данную грань, мы считаем это ребро два раза. Так, например, на рис. 8 грани ограничены семью и восемью рёбрами соответственно.

Далее будет реализовано полиномиальное сведение задачи НМ в множестве связных графов без висючих вершин из класса $\mathcal{P}(3)$ к задаче НМ в классе плоских почти

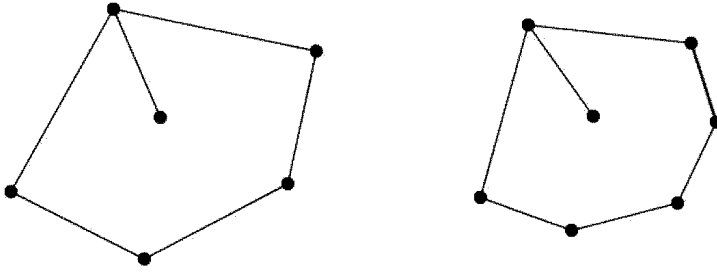


Рис. 8. Грани, ограниченные 7 и 8 рёбрами

триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Оно будет представлено в виде цельного текста без разбиения рассуждений на леммы и теоремы.

Рассмотрим произвольный связный граф $G \in \mathcal{P}(3)$ без висячих вершин и его плоскую укладку. Все его грани ограничены циклами. Для каждой внутренней грани рассматриваемой укладки графа G выполним описанную ниже операцию, состоящую из двух подопераций.

Подоперация 1. Эта операция применяется к внутренней грани графа G , ограниченной $n \geq 6$ рёбрами. Такая грань разбивается на k меньших граней, каждая с пятью или шестью цикловыми рёбрами, так, как показано на рис. 9.

По леммам 1 и 6 разбиение одной внутренней грани графа G увеличивает его число независимости ровно на $k - 1$.

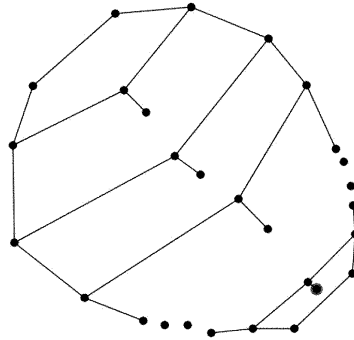


Рис. 9. Разбиение грани графа, подоперация 1

Подоперация 1 применяется к каждой внутренней грани графа G . В результате получится плоский граф G' , степень каждой вершины которого не превосходит 6 (поскольку каждая вершина графа G входит не более чем в три его грани). В графе G' имеются внутренние грани только следующих типов — ограниченные 3-, 4-, 5-циклами и ограниченные семью и восемью рёбрами, как показано на рис. 9.

Подоперация 2. Внутренняя грань графа G' разбивается на треугольники так, как показано на рис. 10 (рёбра граней графа G' выделены жирным).

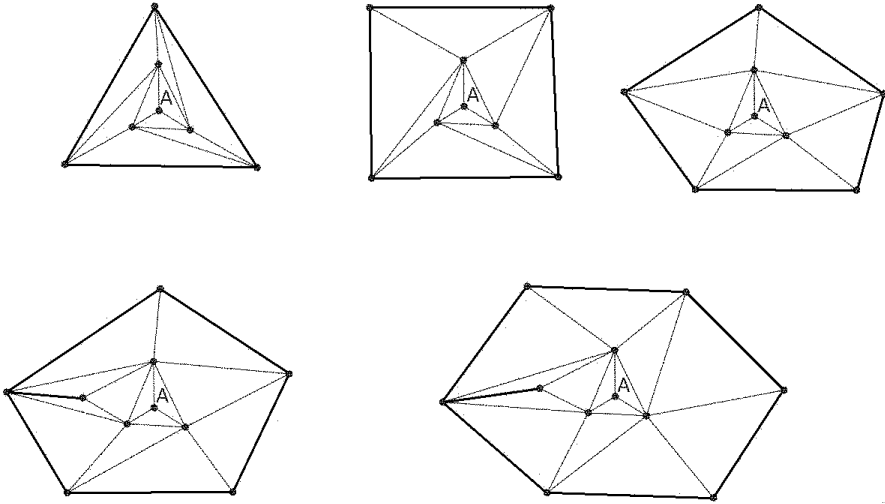


Рис. 10. Разбиение грани графа, подоперация 2

После применения подоперации 2 к каждой внутренней грани графа G' мы получим граф G'' . Рассмотрим в каждом из разбиений рис. 10 ту вершину, которая отмечена буквой A . Назовём её A -вершиной. Окрестность каждой из A -вершин строго включена в объединение окрестности любого её соседа и самого этого соседа. Отсюда и из правила смежностного поглощения следует, что множество всех A -вершин принадлежит некоторому наибольшему н.м. графа G'' . Отсюда следует, что при удалении из графа G'' любой A -вершины вместе с её окрестностью его число независимости уменьшится ровно на 1. Таким образом, удалив все A -вершины и их окрестности, мы получим граф, изоморфный графу G' .

Из построения графа G'' следует, что если x — его вершина максимальной степени и $\deg(x) \geq 8$, то x — не висячая вершина графа G' . Если $x \in V(G)$, то эта вершина входит не более чем в три грани графа G , а значит, не более, чем в шесть граней графа G' . Поэтому при построении графа G'' в каждой грани графа G' вершине x становятся инцидентны не более двух новых рёбер. Значит, $\deg(x) \leq 18$. Если x — вершина графа G' , смежная с висячей вершиной этого графа, то вершина x принадлежит ровно двум граням графа G' . По построению графа G'' одна из данных граней содержит не более пяти рёбер, инцидентных x , а другая — не более четырёх таких рёбер. Значит, $\deg(x) \leq 7$. Поэтому степени всех вершин графа G'' не превосходят 18.

Тем самым, задача НМ в множестве $\mathcal{P}(3)$ полиномиально сводится к той же задаче в классе плоских почти триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы 1.

Список литературы

1. Алексеев В.Е., “О сжимаемых графах”, *Проблемы кибернетики*, **36** (1979), 23–31.

2. Алексеев В.Е., “О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа”, *Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике*, 1983, 3–13.
3. Алексеев В.Е., Лозин В.В., “О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **5:1** (1998), 3–19.
4. Кобылкин К.С., “Вычислительная сложность задачи вершинного покрытия в классе планарных триангуляций”, *Труды ин-та матем. и мех. УрО РАН*, **22:3** (2016), 153–159.
5. Alekseev V.E., Malyshev D.S., “Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time”, *J. Appl. Industr. Math.*, **3:1** (2008), 1–5.
6. Garey M.R., Johnson D.S., Stockmeyer L., “Some simplified NP-complete graph problems”, *Theor. Comput. Sci.*, **1:3** (1976), 237–267.
7. Hopcroft J., Tarjan R.E., “Efficient planarity testing”, *ACM*, **21:4** (1974), 549–568.
8. Lozin V.V., Milanic M., “On the maximum independent set problem in subclasses of planar graphs”, *J. Graph Algor. Appl.*, **14:2** (2010), 269–286.
9. Lozin V.V., Monnot J., Ries B., “On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs”, *J. Discr. Algor.*, **31** (2015), 104–112.
10. Malyshev D.S., “Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable”, *J. Appl. Industr. Math.*, **7:4** (2013), 537–548.

Статья поступила 16.12.2016.

Переработанный вариант поступил 01.06.2017.