ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2017. Том 24, № 3. С. 35–60

УДК 519.17 DOI: 10.17377/daio.2017.24.549

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ В ОДНОМ КЛАССЕ СУБКУБИЧЕСКИХ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ [*)]

Д. С. Малышев[a], *Д. В. Сироткин*[b]
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия
E-mail: [a]dmalishev@hse.ru, dsmalyshev@rambler.ru,
[b]dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

Аннотация. Задача о независимом множестве для заданного обыкновенного графа состоит в вычислении размера наибольшего множества его попарно несмежных вершин. В данной работе доказываем полиномиальную разрешимость этой задачи для субкубических планарных графов, не содержащих порождённого дерева, получаемого отождествлением концов трёх путей длины 3, 3 и 2 соответственно. Библиогр. 10.

Ключевые слова: задача о независимом множестве, редукция графов, эффективный алгоритм.

Введение

Данная работа является продолжением цикла работ [3–6, 8–10], в которых рассматривалась алгоритмическая сложность задачи о независимом множестве (задачи НМ). Напомним, что *независимым множеством* (н. м.) обыкновенного графа называется любое множество его попарно несмежных вершин. *Наибольшее независимое множество* (н. н. м.) графа G — н. м. с наибольшим количеством вершин; его размер называется *числом независимости* графа G и обозначается через $\alpha(G)$. Задача НМ для заданных графа G и натурального числа k состоит в том, чтобы выяснить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geqslant k$.

Известны несколько алгоритмических инструментов для редукции графов при решении задачи НМ. Например, так называемое *правило*

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16–31–60008-мол_а_дк, 17–01–00710-а), гранта Президента РФ МК-4819.2016.1 и лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

смежностного поглощения. Говорят, что вершина a в графе G *смежно поглощает* вершину b, если $ab \in E(G)$ и $N(a) \supseteq N(b) \setminus \{a\}$. В этом случае $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{a\})$. Смежностное поглощение является частным представителем так называемых *сжатий* [1], т. е. отображений множества вершин графа в себя, не являющихся автоморфизмами, при которых любые две различные несмежные вершины переходят в различные несмежные вершины. Таким образом, сжатие преобразует граф в его порождённый подграф, при этом, очевидно, сохраняется число независимости. Напомним, что граф H называется *порождённым подграфом* графа G, если H получается удалением некоторых вершин графа G. Граф H называется *минором* графа G, если H получается из G удалением вершин и рёбер, а также стягиванием рёбер.

Классом графов называется любое множество обыкновенных графов, замкнутое относительно изоморфизма. Класс графов будем называть *НМ-простым*, если задача НМ для графов из этого класса полиномиально разрешима. Класс графов с NP-полной задачей НМ будем называть *НМ-сложным*.

Класс называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{S}$ своих минимальных запрещённых порождённых подграфов, при этом принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$. Наследственный класс называется *конечно определённым*, если множество его минимальных запрещённых порождённых подграфов конечно. *Минорно замкнутый* класс графов — такой класс, который вместе с каждым своим графом содержит все миноры этого графа. Любой минорно замкнутый класс может быть задан множеством своих запрещённых миноров. Например, класс планарных графов $\mathcal{P}$ минорно замкнут, множество его запрещённых миноров состоит из графов $K_{3,3}$ и K_5 по критерию Вагнера.

Триодом $T_{i,j,k}$ называется дерево, получаемое отождествлением трёх концевых вершин путей $P_{i+1}, P_{j+1}, P_{k+1}$ соответственно. Класс $\mathcal{T}$ состоит из всевозможных графов, каждая компонента связности которых является деревом с не более чем тремя листьями (т. е. триодом). В [5] доказано, что любой конечно определённый класс $\mathcal{X}$, содержащий $\mathcal{T}$, является НМ-сложным. Это же верно, если вместо $\mathcal{X}$ рассматривать класс $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{X}$, где $\mathcal{P}(3)$ — множество *субкубических планарных графов*, т. е. планарных графов со степенями всех вершин не более чем 3. В той же работе [5] выдвинуто предположение о том, что любой конечно определённый класс, не включающий $\mathcal{T}$, является НМ-простым. Для этого достаточно показать, что для любого графа $G \in \mathcal{T}$ класс $\mathrm{Free}(G)$

НМ-простой. В настоящее время это доказано для любого графа $G \in \mathcal{T}$ с не более чем 5 вершинами. Сложностной статус задачи НМ не известен уже для класса $\mathrm{Free}(P_6)$.

Вместе с тем, было бы интересным исследовать сложность задачи НМ для классов вида $\mathcal{Y} \cap \mathrm{Free}(G)$, $G \in \mathcal{T}$, где $\mathcal{Y}$ — собственное наследственное подмножество множества всех графов. Рядом авторов ранее доказано, что следующие классы графов, свободных от триодов заданного типа, НМ-просты: класс $\mathcal{D}(d) \cap \mathrm{Free}(T_{1,i,i})$ [8] для любых $d, i \in \mathbb{N}$, где $\mathcal{D}(d)$ — класс графов со степенями всех вершин не более чем d; для любого $i \in \mathbb{N}$ классы $\mathcal{P} \cap \mathrm{Free}(T_{1,2,i})$ [3, 9], $\mathcal{P} \cap \mathrm{Free}(T_{1,i,i})$ [6] и $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{2,2,i})$ [4], а также класс $\mathcal{D}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{2,2,2})$ [10].

В настоящей работе доказывается, что класс графов $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$ НМ-простой.

1. Обозначения

В статье будем использовать следующие обозначения: P_n — простой путь с n вершинами, K_n — полный граф с n вершинами, $K_{n,m}$ — полный двудольный граф с n вершинами в одной доле и m вершинами в другой, $\overline{a, b}$ — множество натуральных чисел $\{a, a+1, \ldots, b\}$, $N(x)$ — окрестность вершины x. Граф $G \setminus V'$ получается из графа G удалением всех вершин из подмножества $V' \subseteq V(G)$, а $G[V']$ — подграф графа G, порождённый подмножеством вершин $V' \subseteq V(G)$.

Запись $[a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2]$ означает, что указанные вершины порождают триод $T_{3,3,2}$ с множеством рёбер $\{ab_1, b_1b_2, b_2b_3, ac_1, c_1c_2, c_2c_3, ad_1, d_1d_2\}$.

Область в плоской укладке планарного графа, ограниченную порождённым циклом $(v_1, \ldots, v_k)$ этого графа, обозначим через $D(v_1, \ldots, v_k)$.

2. Операция замены и её значение

В данной работе используются некоторые локальные преобразования графов, являющиеся частным случаем так называемых схем замен, предложенных в работе [2]. В [2] рассматривается достаточно общий класс преобразований, при которых число независимости в точности сохраняется, но отмечается, что ничего принципиально нового не будет, если допустить изменение числа независимости на некоторую константу.

Пусть H_1 и H_2 — графы и $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$. Будем говорить, что графы H_1 и H_2 являются *α-подобными относительно* A, если существует такая константа c, что для любого $X \subseteq A$ выполняется равенство $\alpha(H_1 \setminus X) = \alpha(H_2 \setminus X) + c$.

Пусть G — некоторый граф, а H — некоторый его порождённый подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовём *H-отделяющим*, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$.

Пусть графы H_1 и H_2 являются α-подобными относительно подмножества $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$. Допустим, что граф G содержит порождённый подграф H_1 с H_1-отделяющим множеством A. *Замена подграфа H_1 в графе G на граф H_2* состоит в образовании графа G^* с множеством вершин $(V(G) \setminus V(H_1)) \cup V(H_2)$ и множеством рёбер $(E(G) \setminus E(H_1)) \cup E(H_2)$.

Лемма 1. *Если граф G^* — результат замены H_1 на H_2 в графе G, то $\alpha(G^*) = \alpha(G) + \alpha(H_2) - \alpha(H_1)$.*

Доказательство. Пусть S — н. н. м. графа G, $M = S \setminus V(H_1)$ и $X = \bigcup\limits_{x \in M} (N(x) \cap V(H_1))$. Поскольку $X \subseteq A$, то $\alpha(G) = |M| + \alpha(H_1 \setminus X)$. Если в графе G^* к множеству M добавить н. н. м. графа $H_2 \setminus X$, то получится н. м. мощности $|M| + \alpha(H_2 \setminus X)$. Следовательно,

$$\alpha(G^*) \geqslant |M| + \alpha(H_2 \setminus X)$$
$$= \alpha(G) - \alpha(H_1 \setminus X) + \alpha(H_2 \setminus X) = \alpha(G) - \alpha(H_1) + \alpha(H_2).$$

Аналогично доказывается обратное неравенство. Лемма 1 доказана.

Операция замены является важнейшим инструментом для получения основного результата настоящей работы.

3. Неприводимые графы и их свойства

3.1. Сжимаемые подграфы с малым отделяющим множеством. Пусть H — граф, $A \subseteq V(H)$ и $B = V(H) \setminus A$. Обозначим через $\mathfrak{M}(H, A)$ семейство всех таких множеств $X \subseteq A$, что для всякого $Y \subset X$ выполняется неравенство $\alpha(G[B \cup Y]) < \alpha(G[B \cup X])$. Из определения α-подобия видно, что $c = \alpha(H_1) - \alpha(H_2)$, так что $\alpha(H_1) - \alpha(H_1 \setminus X) = \alpha(H_2) - \alpha(H_2 \setminus X)$ для любого $X \subseteq A$. Значит, при удалении из графов H_1 и H_2 вершин любого множества $X \subseteq A$ числа независимости изменяются одинаково. Отсюда следует, что $\mathfrak{M}(H_1, A) = \mathfrak{M}(H_2, A)$ для α-подобных графов H_1 и H_2 относительно множества A. Столь же очевидно и обратное: графы H_1 и H_2 α-подобны относительно $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}(H_1, A) = \mathfrak{M}(H_2, A)$.

Пару (H, A) назовём *вырожденной*, если объединение всех элементов множества $\mathfrak{M}(H, A)$ не равно A.

Лемма 2. *Если граф G содержит порождённый подграф H с H-отделяющим множеством A и (H, A) — вырожденная пара, то для некоторой вершины $x \in A$ имеет место $\alpha(G \setminus \{x\}) = \alpha(G)$.*

Доказательство. Пусть вершина $x \in A$ не принадлежит ни одному из множеств семейства $\mathfrak{M}(H, A)$. Допустим, что S — н. н. м. графа G и $x \in S$. Множество $X = A \cap S$ не принадлежит семейству $\mathfrak{M}(H, A)$. Тогда существует такое $Y \subset X$, что $x \notin Y$ и

$$\alpha(H[B \cup X]) = \alpha(H[B \cup Y]) = |S \cap V(H)|.$$

Пусть Z — н. н. м. в графе $H[B \cup Y]$. Тогда $(S \setminus V(H)) \cup Z$ — н. м. мощности $\alpha(G)$ в графе $G \setminus \{x\}$. Лемма 2 доказана.

Далее в п. 3.1 будем предполагать, что пара (H, A) невырожденная. Если $A = \{v_1, v_2\} \subseteq V(H)$, то имеются ровно три возможных случая:
(I) $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1, v_2\}\}$;
(II) $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$;
(III) $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$.
Для каждого из них определим граф H' следующим образом:
(I) H' — простой путь (v_1, v_3, v_2);
(II) H' — полный граф на двух вершинах v_1, v_2;
(III) H' — пустой граф на двух вершинах v_1 и v_2.
В каждом из этих случаев графы H и H' α-подобны относительно множества A.

Лемма 3. *Предположим, что $H = (V, E)$ — связный порождённый подграф графа G, содержащий H-отделяющее множество $A = \{v_1, v_2\}$, и $|V(H)| \geqslant 3$. Пусть $G^*(t)$ — результат замены H на $H'(t)$ в графе G, где граф $H'(t)$ определяется правилом с номером t. Тогда для любого t граф $G^*(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$, если граф G не содержит разделяющих клик и принадлежит тому же множеству.*

Доказательство. Очевидно, что $G^*(t) \in \mathcal{P}(3)$. Предположим, что граф $G^*(t)$ содержит порождённый триод $T_{3,3,2}$. Поскольку G не содержит разделяющих клик и $|V(H)| \geqslant 3$, то v_1v_2 не является ребром графа G. Отсюда и ввиду связности графа H следует, что в H между вершинами v_1 и v_2 есть порождённый путь длины не менее чем 2. Поэтому граф G содержит порождённый подграф $T_{3,3,2}$ в каждом из случаев (I)–(III) по определению $H'(t)$; противоречие. Значит, предположение было неверным. Лемма 3 доказана.

Будем называть порождённый связный подграф H некоторого графа *2-сжимаемым*, если H содержит H-отделяющее множество ровно с двумя вершинами и $|V(H)| \geqslant 4$.

Пусть H — граф и $A = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V(H)$. В зависимости от семейства $\mathfrak{M}(H, A)$ в каждом из случаев определим граф H':

(I) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то H' — простой путь $(v_1, v_3, v_4, v_5, v_2)$;

(II) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1, v_2, v_3\}\}$, то в качестве графа H' возьмём простой путь $(v_1, v_4, v_2, v_5, v_3)$;

(III) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2, v_3\}\}$, то граф H' — простой путь (v_1, v_2, v_4, v_3);

(IV) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то H' — дерево с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 и рёбрами $v_1v_4, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_3$;

(V) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$, то H' — граф с вершинами $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ и рёбрами $v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_5, v_5v_6, v_6v_3$;

(VI) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$, то положим $H' = K_3$ с вершинами v_1, v_2, v_3;

(VII) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то H' — простой путь $(v_1, v_4, v_5, v_3, v_2)$.

В каждом из этих случаев графы H и H' являются α-подобными относительно A.

Порождённый подграф H некоторого графа назовём $(3, t)$-*сжимаемым*, если H-отделяющее множество содержит ровно три вершины, причём $|V(H)| \geqslant 4$ (если $t = \mathrm{VI}$), или $|V(H)| \geqslant 5$ (если $t = \mathrm{III}$), или $|V(H)| \geqslant 6$ (если $t \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{VII}\}$), или $|V(H)| \geqslant 7$ (если $t = \mathrm{V}$). В дальнейшем каждое из описанных выше семи сжатий будем применять к графам из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$ так, что результат снова будет принадлежать этому же классу (как правило, результат применения замены к графу G будет порождённым подграфом графа G).

Пусть теперь H — граф и $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq V(H)$. Вновь в каждом из случаев семейства $\mathfrak{M}(H, A)$ определим граф H':

(I) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}$, то в качестве графа H' рассмотрим простой цикл (w_1, w_3, w_2, w_4);

(II) если

$$\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\},$$

то H' — граф с вершинами w_1, w_2, w_3, w_4 и рёбрами w_1w_2, w_3w_4;

(III) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}\}$, то H' — граф с множеством вершин $V(H') = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$ и множеством рёбер $E(H') = \{w_1w_5, w_5w_6, w_6w_2, w_6w_7, w_7w_3, w_3w_8, w_8w_2, w_8w_4\}$;

(IV) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_2, v_4\}, \{v_1, v_3\}\}$, то H' — граф, с множеством вершин $V(H') = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$ и множеством рёбер $E(H') = \{w_1w_5, w_5w_6, w_6w_2, w_6w_7, w_7w_3, w_3w_4, w_4w_8, w_2w_8\}$.

В каждом из этих случаев графы H и H' α-подобны относительно множества A.

Порождённый подграф H некоторого графа назовём $(4, t)$-*сжимаемым*, если H-отделяющее множество содержит ровно четыре вершины, причём $|V(H)| \geqslant 5$ (если $t \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$) или $|V(H)| \geqslant 9$ (если $t \in \{\mathrm{III}, \mathrm{IV}\}$). В дальнейшем будем применять каждое из описанных четырёх сжатий к графам из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$ так, что результат снова будет принадлежать этому же классу (как правило, результат применения замены к графу G будет порождённым подграфом графа G).

H-отделяющее множество будем записывать в виде набора, который будем называть H-*отделителем* (в отличие от множества). Предполагаем, что при замене i-й элемент набора переходит в вершину v_i.

3.2. Понятие неприводимого графа и его значение. Связный граф G будем называть *неприводимым*, если одновременно выполнены следующие условия.

1°. G принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$.

2°. G не содержит разделяющих клик.

3°. G не содержит порождённого подграфа H и H-отделяющего множества A таких, что $|V(H)| \leqslant 12$, $|A| \leqslant 4$ и пара (H, A) вырожденна.

4°. G не содержит связного порождённого подграфа H_1 с не более чем 12 вершинами такого, что к G можно применить операцию замены подграфа H_1 на некоторый граф H_2 такой, что $|V(H_2)| < |V(H_1)|$ и результат замены принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$.

Известно, что задача НМ для наследственного класса графов $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче для части $\mathcal{X}$, образованной всеми связными графами из $\mathcal{X}$, не содержащими разделяющих клик [5]. Пусть граф $G \in \mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$. Перебором всех подмножеств его вершин мощности не более 12 и перебором всех графов с не более чем 11 вершинами, а также решением не более чем $2^4 = 16$ задач НМ для каждого из графов с не более чем 12 вершинами можно за время $O(|V(G)|^{12})$ проверить, удовлетворяет ли граф G условиям 3° и 4°. Принадлежность графа с n вершинами и m рёбрами классу $\mathcal{P}(3)$ распознаётся за время $O(n + m)$ [7]. Принадлежность графа с n вершинами классу $\mathrm{Free}(T_{3,3,2})$ распознаётся за время $O(n^9)$ перебором всех 9-элементных подмножеств вершин и проверкой порождаемости подграфа $T_{3,3,2}$ одним из таких подмножеств. Из перечисленных фактов и леммы 2 следует, что задача НМ для графов из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$ полиномиально сводится к задаче НМ для неприводимых графов из этого класса.

3.3. Некоторые вспомогательные результаты

Лемма 4. *Для любого порождённого* 5*-цикла неприводимого графа* G *не менее четырёх вершин цикла имеют степень* 3.

Доказательство. Предположим противное: в графе G имеется порождённый цикл $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, в котором либо $\deg(x_3) = \deg(x_5) = 2$, либо $\deg(x_4) = \deg(x_5) = 2$. В первом случае пара $(G[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5], \{x_1, x_2, x_4\})$ вырожденна. Во втором случае получаем $(3, \mathrm{VI})$-сжимаемый подграф $H = G[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ с H-отделителем (x_1, x_2, x_3). Результат сжатия, обозначаемый через G^*, является минором графа G, так как получается стягиванием рёбер x_1x_5, x_4x_3, поэтому $G^* \in \mathcal{P}(3)$. Граф G^* не содержит порождённого триода $T_{3,3,2}$ — для этого достаточно показать, что никакой порождённый триод $T_{3,3,2}$ графа G^* не содержит ребра x_1x_3. Действительно, если такой триод $T_{3,3,2}$ в G^* существует, то граф G содержит порождённый триод $T_{3,3,2}$, одним из рёбер которого является ребро x_1x_5. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть G — планарный субкубический граф и C_1^*, C_2^*, C_3^* — его три попарно различных порождённых цикла таких, что каждое из множеств $E(C_1^*) \cap E(C_2^*)$, $E(C_2^*) \cap E(C_3^*)$, $E(C_1^*) \cap E(C_3^*)$ порождает в G простой путь. Пусть также в графе G существуют три ребра e_1^*, e_2^*, e_3^*, образующих в указанном порядке порождённый путь, причём*

$$\begin{aligned} e_1^* &\in (E(C_1^*) \cap E(C_2^*)) \setminus E(C_3^*), \\ e_2^* &\in E(C_1^*) \cap E(C_2^*) \cap E(C_3^*), \\ e_3^* &\in (E(C_2^*) \cap E(C_3^*)) \setminus E(C_1^*). \end{aligned}$$

Тогда для любой плоской укладки графа G справедливо одно из включений $D(C_3^*) \subset D(C_2^*)$ или $D(C_1^*) \subset D(C_2^*)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную плоскую укладку графа G. Достаточно рассмотреть два случая: либо $D(C_2^*) \subset D(C_1^*)$, либо $D(C_2^*) \nsubseteq D(C_1^*)$ и $D(C_1^*) \nsubseteq D(C_2^*)$. Поскольку для любых различных i и j множество $E(C_i^*) \cap E(C_j^*)$ порождает в G простой путь и G является субкубическим планарным, множество $D(C_i^*) \cap D(C_j^*)$ представляет собой жорданову кривую. Пусть P — простой путь в G, порождаемый множеством рёбер $E(C_1^*) \cap E(C_2^*)$. Ясно, что $e_1^*, e_2^* \in E(P)$. Так как $e_3^* \notin E(C_1^*)$, то $e_3^* \notin E(P)$. Понятно, что e_2^* — концевое ребро пути P, иначе e_2^*, e_3^* и ребро пути P, соседнее с e_2^* и отличное от e_1^*, имеют общую вершину и принадлежат C_2^*.

Напомним, что $D(C_2^*) \cap D(C_3^*)$ — жорданова кривая, частью которой являются рёбра e_2^*, e_3^* и не является ребро e_1^*, причём G — субкубический планарный граф. Отсюда, очевидно, следует, что $D(C_3^*) \subset D(C_2^*)$ в обоих указанных выше случаях. Лемма 5 доказана

4. Несуществование неприводимых графов, содержащих достаточно большие порождённые триоды

Целью этого раздела является доказательство того, что не существует неприводимого графа, содержащего порождённый триод $T_{2,2,10}$. Предположим, что такой граф $G = (V, E)$ существует. Рассмотрим его порождённый триод $T_{2,2,10}$. Обозначим вершину триода степени три через o, вершины ветви с десятью вершинами обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ (в порядке удаления от o), вершины других двух ветвей — через b_1, b_2 и c_1, c_2 (также в порядке удаления от o).

В следующих трёх леммах покажем невозможность равенства

$$N(b_2) \setminus \{b_1\} = N(c_2) \setminus \{c_1\}.$$

Докажем эти леммы от противного, при этом положим $N' = N(b_2) \setminus \{b_1\}$. Заметим, что $N' \neq \varnothing$, иначе b_1 образует разделяющую клику графа G. Очевидно, что N' состоит либо из одной вершины x, либо из двух вершин x и y. При доказательстве следующих трёх лемм будем считать, что x и y несмежны, иначе подграф $G[b_2, c_2, x, y]$ является 2-сжимаемым. Наконец, будем предполагать, что $\deg(b_1) \geqslant \deg(c_1)$, поскольку это предположение не уменьшает общности.

Лемма 6. *Каждый элемент множества $N' = N(b_2) \setminus \{b_1\}$ не смежен ни с одной вершиной множества $\{a_1, a_2, a_3\}$.*

Доказательство. Предположим, что некоторый элемент $x \in N'$ имеет соседа $a_{i'} \in \{a_1, a_2, a_3\}$. Очевидно, что это может быть только a_1, иначе $[a_{i'}, a_{i'+1}, a_{i'+2}, a_{i'+3}, a_{i'-1}, a_{i'-2}, a_{i'-3}, x, c_2]$, где $a_0 = o$, $a_{-1} = b_1$.

Пусть $N' = \{x, y\}$. Если $yb_1 \in E$, то $[a_1, a_2, a_3, a_4, x, b_2, y, o, c_1]$. Понятно, что y имеет соседа $a_{i''} \in \{a_2, a_3, a_4\}$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, x, c_2, y, o, b_1]$, но тогда

$$[a_{i''}, a_{i''+1}, a_{i''+2}, a_{i''+3}, a_{i''-1}, a_{i''-2}, a_{i''-3}, y, c_2].$$

Далее, пусть $N' = \{x\}$. Существует вершина $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{b_2, o\}$, иначе вершины x и a_1 образуют разделяющую клику графа G. В случае, когда $b'_1c_1 \in E$, очевидно, что b'_1 должна быть смежна с некоторой вершиной $a_{i'''} \in \{a_2, a_3, a_4\}$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b'_1, x, c_2]$. Легко видеть, что $i''' \neq 2$, иначе $\{b'_1, a_2\}$ — разделяющая клика G. Тогда

$$[a_{i'''}, a_{i'''+1}, a_{i'''+2}, a_{i'''+3}, b'_1, b_1, b_2, a_{i'''-1}, a_{i'''-2}].$$

Рассмотрим случай, когда b'_1 и c_1 несмежны. Понятно, что b'_1 смежна хотя бы с одной из вершин a_2 и a_3, иначе $[x, a_1, a_2, a_3, b_2, b_1, b'_1, c_2, c_1]$. Можем считать, что b'_1 несмежна с a_2, иначе $\{x, a_1\}$ — разделяющая клика графа G (если $\deg(c_1) = 2$) или c_1 имеет соседа, не принадлежащего множеству $\{o, c_2, b'_1\}$ и смежного с a_3, причём b'_1 и этот сосед схожи с точки зрения рассуждений. Иными словами, можно считать, что $b'_1 a_3 \in E$.

Предположим, что c_1 имеет соседа $c'_1 \notin \{o, c_2, b'_1\}$. В этом случае либо $b'_1 c'_1 \in E$, либо $c'_1 a_2 \in E$, иначе $[x, b_2, b_1, b'_1, c_2, c_1, c'_1, a_1, a_2]$. Пусть сначала $b'_1 c'_1 \in E$. Если $c'_1 a_2 \in E$, то $\{b'_1, a_3\}$ — разделяющая клика G; в противном случае $[b'_1, c'_1, c_1, c_2, a_3, a_2, a_1, b_1, b_2]$. Пусть, напротив, $b'_1 c'_1 \notin E$. Тогда вершина c'_1 смежна с вершиной a_2, иначе $[x, b_2, b_1, b'_1, c_2, c_1, c'_1, a_1, a_2]$. Понятно, что c'_1 должна быть смежна с некоторой вершиной a_i при $i \in \{4, 5\}$, иначе $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, x, b_2, c'_1, c_1]$. Отсюда $[a_1, a_2, c'_1, a_i, o, b_1, b'_1, x, c_2]$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\deg(c_1) = 2$. Вершина a_2 имеет соседа $a'_2 \notin \{a_1, a_3\}$, так как иначе b'_1 и a_3 образуют разделяющую клику графа G. Вершины a'_2 и b'_1 несмежны, иначе $[a_3, a_4, a_5, a_6, b'_1, b_1, b_2, a_2, a_1]$. Но тогда $[x, b_2, b_1, b'_1, a_1, a_2, a'_2, c_2, c_1]$.

Во всех случаях получили противоречие. Значит, предположение о существовании вершины x неверно. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если* $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$ *и* $c'_1 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$, *то* $b'_1 = c'_1$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть v — произвольная вершина из множества $N' = N(b_2) \setminus \{b_1\}$. По лемме 6 никакая из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$ не является соседом v. Не уменьшая общности, можно рассмотреть два случая: 1) $b'_1 v \notin E$, $c'_1 v \notin E$; 2) $b'_1 v \notin E$, $c'_1 v \in E$.

1) Каждая из вершин b'_1 и c'_1 имеет соседа в множестве $\{a_1, a_2, a_3\}$, иначе $[o, c_1, c_2, v, a_1, a_2, a_3, b_1, b'_1]$ или $[o, b_1, b_2, v, a_1, a_2, a_3, c_1, c'_1]$. Положим, что $b'_1 a_3 \in E$. Тогда

$$\begin{aligned}
&[b_1, b_2, v, c_2, b'_1, a_3, a_4, o, a_1], \quad \text{если } b'_1 a_4 \notin E,\ b'_1 a_1 \notin E;\\
&[b_1, b_2, v, c_2, b'_1, a_4, a_5, o, a_1], \quad \text{если } b'_1 a_4 \in E,\ b'_1 a_1 \notin E;\\
&[b_1, o, c_1, c'_1, b'_1, a_3, a_4, b_2, v], \quad \text{если } b'_1 a_1 \in E.
\end{aligned}$$

Допустим, что $b'_1 a_2 \in E$, $c'_1 a_1 \in E$, $b'_1 a_3 \notin E$, $c'_1 a_3 \notin E$. При этих условиях вершины b'_1 и c'_1 несмежны, иначе $[b'_1, b_1, b_2, v, a_2, a_3, a_4, c'_1, c_1]$. Тогда $[b_1, b'_1, a_2, a_3, o, c_1, c'_1, b_2, v]$. Этим случай 1 исчерпывается.

2) Если $N' = \{v\}$, то подграф $H_1 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, c'_1, v]$ с H_1-отделителем (o, c'_1, b_1) является $(3, \mathrm{I})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G.

Пусть $N' = \{v, u\}$. Если $uc'_1 \in E$, то подграф $G[b_2, c_2, v, u, c_1, c'_1]$ является 2-сжимаемым. В противном случае $uc'_1 \notin E$. Тогда при $ub'_1 \notin E$ имеет место противоречие по аналогии со случаем 1, а при $ub'_1 \in E$ подграф $H_2 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, v, u, b'_1, c'_1]$ с H_2-отделителем (b'_1, o, c'_1) является $(3, \mathrm{II})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин u, v, b_2, c_2 из G.

Во всех случаях имеем противоречие. Значит, предположение $b_1' \neq c_1'$ неверно. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Выполняется неравенство* $N(b_2) \setminus \{b_1\} \neq N(c_2) \setminus \{c_1\}$.

Доказательство. Предположим противное. Как и ранее, положим $N' = N(b_2) \setminus \{b_1\}$. Возможны два случая: 1) $N' = \{x\}$; 2) $N' = \{x, y\}$, причём вершины x и y несмежны.

1) Пусть $\deg(x) = 2$. Тогда существуют вершины $b_1' \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$ и $c_1' \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$, иначе $\{o, b_1\}$ или $\{o, c_1\}$ является разделяющей кликой графа G. По лемме 7 имеет место равенство $b_1' = c_1'$. Тогда подграф $G[b_1', o, b_1, c_1, b_2, c_2, x]$ является 2-сжимаемым.

Будем считать, что $\deg(x) = 3$. Рассмотрим возможные подслучаи.

1.1: $\deg(b_1) \in \{2, 3\}$, $\deg(c_1) = 2$. При этих условиях порождённый подграф $H_1 = G[o, b_1, c_1, b_2, c_2, x]$ с H_1-отделителем (o, b_1, x) $(3, \mathrm{III})$-сжимаемый. Результат сжатия получается удалением вершин c_1 и c_2 из графа G.

1.2: $\deg(b_1) = 3$, $\deg(c_1) = 3$. В этом подслучае по лемме 7 вершины b_1, c_1 смежны с одной и той же вершиной $p \neq o$. Понятно, что при этом вершины p и x несмежны, иначе $\{o\}$ — разделяющая клика G. Тогда подграф $H_2 = G[o, p, b_1, c_1, b_2, c_2, x]$ с H_2-отделителем (o, p, x) является $(3, \mathrm{IV})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин c_1, c_2 из графа G.

2) Не уменьшая общности, будем считать, что $\deg(x) \geqslant \deg(y)$. Возможны три подслучая.

2.1: $\deg(b_1) = \deg(c_1) = 2$. Если $\deg(x) = 2$ и $\deg(y) = 2$, то o образует разделяющую клику G. Если $\deg(x) = 3$, то этот вариант полностью эквивалентен подслучаю 1.2.

2.2: $\deg(b_1) = 3, \deg(c_1) = 2$. Если $\deg(x) = \deg(y) = 2$, то $\{o, b_1\}$ — разделяющая клика графа G. Если $\deg(x) = 3$ и $\deg(y) = 2$, то подграф $H_3 = G[o, b_1, c_1, b_2, c_2, x, y]$ с H_3-отделителем (b_1, x, o) является $(3, \mathrm{I})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_2 и y из G.

Предположим, что $\deg(x) = \deg(y) = 3$. Из соображений симметрии можно считать, что в некоторой плоской укладке графа G вершина y лежит внутри области $D' = D(o, c_1, c_2, x, b_2, b_1)$. Понятно, что если $b_1' \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$, то b_1' смежна хотя бы с одной из вершин a_1, a_2, a_3, иначе $[o, c_1, c_2, x, a_1, a_2, a_3, b_1, b_1']$. Следовательно, вершины $b_1', a_1, \ldots, a_{10}$ либо одновременно лежат внутри области D', либо одновременно лежат вне D'. Если они лежат внутри D', то они обязаны лежать внутри области $D'' = D(o, c_1, c_2, y, b_2, b_1)$. Стало быть, сосед вершины y, отличный от b_2 и c_2, обязан принадлежать D'', иначе $\{b_1, o\}$ — разделяющая клика G. Поэтому $\{x\}$ — разделяющая клика графа G. Если $b_1, a_1, \ldots, a_{10}$ не принадлежат D', то сосед вершины x, отличный от b_2 и c_2, должен также лежать вне области D', иначе $\{b_1, o\}$ — разделяющая клика графа G. Значит, y образует разделяющую клику G.

2.3: $\deg(b_1) = \deg(c_1) = 3$. По лемме 7 вершины b_1 и c_1 смежны с общей вершиной $q \neq o$. Если одно из рёбер qx и qy принадлежит E, то порождённый подграф $G[o, q, b_1, c_1, b_2, c_2, x, y]$ является 2-сжимаемым. Если же $\{o, q, x, y\}$ — независимое множество графа G, то порождённый подграф $H_4 = G[o, q, b_1, c_1, b_2, c_2, x, y]$ с H_4-отделителем (o, q, x, y) является $(4, \mathrm{I})$-сжимаемым. Результат сжатия представляет собой минор графа G, поскольку он получается стягиванием рёбер $b_1b_2, c_1c_2, b_2y, xc_2$. Следовательно, этот минор будет субкубическим планарным графом. Нетрудно проверить, что если полученный граф содержит порождённый триод $T_{3,3,2}$, то и граф G содержит порождённый триод $T_{3,3,2}$.

Во всех случаях получается противоречие. Тем самым неприводимого графа G с условием $N(b_2) \setminus \{b_1\} = N(c_2) \setminus \{c_1\}$ не существует. Лемма 8 доказана.

Итак, показано, что существует вершина d графа G, не принадлежащая триоду $T_{2,2,10}$ и смежная ровно с одной из вершин b_2 и c_2. Не уменьшая общности, будем считать, что эта вершина смежна с b_2. Понятно, что d обязана быть смежна хотя бы с одной вершиной из множества $\{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\}$, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2]$.

Лемма 9. *Равенство* $N(d) \cap \{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\} = \{b_1\}$ *невозможно.*

Доказательство. Предположим противное: указанное равенство выполняется. Понятно, что $\deg(b_2) = \deg(d) = 3$, иначе G содержит разделяющую клику $\{b_1, b_2\}$. С учётом этого можно считать, что существуют вершины $b_2' \in N(b_2) \setminus \{b_1, d\}$ и $d' \in N(d) \setminus \{b_1, b_2\}$. Если $d' = b_2'$, то подграф $G[b_1, b_2, d, d']$ является 2-сжимаемым, поэтому предполагаем, что $b_2' \neq d$. Каждая из вершин b_2' и d' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин c_1, c_2, a_1, a_2, a_3, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, d, d', c_1, c_2]$ или $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_2', c_1, c_2]$. Тем самым хотя бы одна из вершин b_2' и d' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_1, a_2, a_3, иначе в множестве $\{b_2', d'\}$ существует вершина (скажем, d'), имеющая в множестве $\{c_1, c_2\}$ ровно одного соседа — вершину c_2. Значит, определено число $k = \max(\{i \in \overline{1,3} \mid a_ib_2' \in E\} \cup \{i \in \overline{1,3} \mid a_id' \in E\})$. Положим, что вершина d' является соседом вершины a_k, и рассмотрим каждый из возможных случаев: $k = 1$, $k = 2$ и $k = 3$.

1. Пусть $k = 1$. Очевидно, что $b'_2c_1 \in E$, так как иначе $b'_2c_2 \in E$, $b'_2c_1 \notin E$ и $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b'_2, b_1, d]$. Поэтому $[a_1, o, c_1, c_2, d', d, b_2, a_2, a_3]$ (если $c_2d' \notin E$), или $[d', c_2, c_1, b'_2, a_1, a_2, a_3, d, b_1]$ (если $c_2d' \in E$, $c_2b'_2 \notin E$), или $[a_1, a_2, a_3, a_4, d', c_2, b'_2, o, b_1]$ (если $c_2d' \in E$, $c_2b'_2 \in E$).

2. Пусть $k = 2$. Если $a_1d' \in E$, то подграф $H = G[o, b_1, b_2, d, d', a_1, a_2]$ с H-отделителем (o, b_2, a_2) является $(3, \mathrm{V})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением a_1 из G. Будем считать, что $d'a_1 \notin E$. Вершина d' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_3, a_4, a_5, иначе $[a_2, d', d, b_2, a_3, a_4, a_5, a_1, o]$. Более того, вершина d' смежна именно с вершиной a_3, поскольку иначе $[d', a_2, a_1, o, a_4, a_5, a_6, d, b_2]$ (если $d'a_4 \in E$) или $[d', a_2, a_1, o, a_5, a_6, a_7, d, b_2]$ (если $d'a_5 \in E$). Если $\deg(a_1) = 2$, то пара $(G[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, d'], \{o, b_2, a_3\})$ вырожденная. Рассмотрим два подслучая, а именно $b'_2a_1 \in E$ и $b'_2a_1 \notin E$.

2.1: $b'_2a_1 \in E$. Если при этом $b'_2c_1 \in E$, то имеем 2-сжимаемый подграф $G[o, a_1, a_2, a_3, c_1, b_1, b_2, b'_2, d, d']$. Если же $b'_2c_1 \notin E$, а $b'_2c_2 \in E$, то необходимо $\deg(c_1) = 2$. Действительно, допустим $c'_1 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$; тогда $[a_1, o, c_1, c'_1, b'_2, b_2, d, a_2, a_3]$. Таким образом при $b'_2c_1 \notin E$ и $b'_2c_2 \in E$ получаем 2-сжимаемый подграф $G[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b_1, b_2, b'_2, d, d']$. Наконец, если $b'_2c_1 \notin E$ и $b'_2c_2 \notin E$, то $[a_1, o, c_1, c_2, b'_2, b_2, d, a_2, a_3]$.

2.2: $b'_2a_1 \notin E$. В этом подслучае необходимо $b'_2c_1 \in E$, иначе $b'_2c_2 \in E$, $b'_2c_1 \notin E$ и $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b'_2, b_1, d]$. Тем самым имеется вырожденная пара $(G[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, d, d', c_1], \{a_3, a_1, c_1, b'_2\})$.

3. Пусть $k = 3$. В силу случая 2 будем считать, что $d'a_2 \notin E$. Понятно, что $d'a_1 \notin E$, иначе $[d', a_3, a_4, a_5, a_1, o, c_1, d, b_2]$. Вершина d' должна быть смежна с одной из вершин a_4, a_5, иначе $[a_3, a_2, a_1, o, d', d, b_2, a_4, a_5]$. Вершина d' должна быть смежна именно с a_4, иначе $d'a_5 \in E$, $d'a_4 \notin E$ и $[d', a_5, a_6, a_7, a_3, a_2, a_1, d, b_2]$. Рассмотрим подслучаи, когда $\deg(a_2) = 2$ и $\deg(a_2) = 3$.

3.1: Пусть существует вершина $a'_2 \in N(a_2) \setminus \{a_1, a_3\}$. Положим сначала $a'_2a_1 \notin E$. Тогда вершина a'_2 должна иметь соседа в множестве $\{c_1, c_2\}$, иначе $[o, a_1, a_2, a'_2, b_1, d, d', c_1, c_2]$. Если $a'_2c_2 \in E$, но $a'_2a_5 \notin E$, то $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, o, b_1, a'_2, c_2]$. Если в E имеются оба ребра a'_2c_2 и a'_2a_5, то $[a_2, a'_2, a_5, a_6, a_3, d', d, a_1, o]$. Наконец, если $a'_2c_2 \notin E$, то $a'_2c_1 \in E$ и вместе с тем $b'_2c_2 \in E$ и $b'_2a_1 \in E$ (иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, c_1, c_2]$). Отсюда $[a_1, a_2, a_3, a_4, b'_2, b_2, d, o, c_1]$.

Предположим, что $a'_2a_1 \in E$. Тогда $\deg(a'_2) = 3$, иначе в G содержится разделяющая клика $\{a_1, a_2\}$. Ясно, что $b'_2c_1 \in E$, иначе $b'_2c_2 \in E$, $b'_2c_1 \notin E$ и $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b'_2, b_1, d]$. Пусть $a''_2 \in N(a'_2) \setminus \{a_1, a_2\}$. Если $a''_2 = b'_2$, то подграф $G[o, a_1, a_2, a_3, a_4, a'_2, b_1, b_2, d, d', c_1, b'_2]$ является

2-сжимаемым. Если же $a_2'' \neq b_2'$, то вершины b_2' и a_2'' смежны (иначе $[o, a_1, a_2', a_2'', b_1, d, d', c_1, b_2']$), так что $[b_2', a_2'', a_2', a_2, b_2, d, d', c_1, o]$.

3.2: $\deg(a_2) = 2$. В этом подслучае получаем вырожденную пару $(G[o, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, d, d'], \{a_1, o, b_2, a_4\})$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Равенство* $N(d) \cap \{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\} = \{c_1\}$ *невозможно.*

Доказательство. Предположим, напротив, что указанное равенство выполняется. Очевидно, что $\deg(c_2) \geqslant 2$, иначе c_1 образует разделяющую клику G. Рассмотрим произвольную вершину $e \in N(c_2) \setminus \{c_1\}$. Легко видеть, что $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} \neq \varnothing$, так как в противном случае $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e, b_1, b_2]$. Если $ea_3 \in E$, $ea_1 \notin E$, $ea_2 \notin E$, то вершина e должна быть смежна с некоторой вершиной a_i при $i \in \overline{4,6}$ (иначе $[a_3, a_4, a_5, a_6, a_2, a_1, o, e, c_2]$), но тогда $[c_1, c_2, e, a_i, o, a_1, a_2, d, b_2]$. Если $ea_2 \in E$, $ea_1 \notin E$, $ea_3 \notin E$, $eb_1 \notin E$, то e должна быть смежна с некоторой вершиной a_i при $i \in \{4, 5\}$ (иначе $[a_2, a_1, o, b_1, a_3, a_4, a_5, e, c_2]$), так что $[e, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, c_2, c_1, d, a_2, a_1]$. Если же $ea_1 \in E$, $ea_2 \notin E$, $ea_3 \notin E$, $eb_1 \notin E$, $eb_2 \notin E$, то $ea_4 \in E$ (иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_2, e, c_2]$), и тогда $[e, a_4, a_5, a_6, c_2, c_1, d, a_1, a_2]$.

Из этих рассуждений следует, что возможны следующие случаи:

1) $ea_1 \in E$, $ea_2 \in E$; 2) $ea_1 \in E$, $ea_3 \in E$; 3) $ea_2 \in E$, $ea_3 \in E$;
4) $ea_2 \in E$, $eb_1 \in E$; 5) $ea_1 \in E$, $eb_1 \in E$; 6) $ea_1 \in E$, $eb_2 \in E$;
7) $eb_1 \in E$, $ed \in E$; 8) $eb_2 \in E$, $ed \in E$; 9) $eb_1 \in E$, $eb_2 \in E$;
10) $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}$; 11) $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$.

Вначале рассмотрим случаи, когда e смежна с некоторыми двумя элементами множества $\{b_1, b_2, d\}$. Понятно, что в каждом таком случае степени вершин $o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e$ равны 3, иначе порождаемый ими граф 2-сжимаем. Рассмотрим любую плоскую укладку графа G. Очевидно, что вершины c_2, e либо одновременно лежат в области $D(o, b_1, b_2, d, c_1)$, либо находятся вне её.

Пусть $eb_1 \in E$, $eb_2 \in E$. Дополнительно предположим, что вершины c_2 и e лежат внутри $D(o, b_1, b_2, d, c_1)$. Очевидно, что элемент множества $N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$ либо принадлежит $D(c_1, o, b_1, e, c_2)$, либо принадлежит $D(c_1, c_2, e, b_2, d)$. В первом случае вершины $a_1, \ldots, a_{10}$ принадлежат $D(c_1, o, b_1, e, c_2)$ (иначе $\{c_2\}$ — разделяющая клика G), и тогда $\{d\}$ — разделяющая клика G. Во втором случае элемент множества $N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$ принадлежит $D(c_1, c_2, e, b_2, d)$ (иначе $\{c_2\}$ — разделяющая клика G), но тогда $\{o\}$ — разделяющая клика G. Случай, когда вершины c_2 и e лежат вне области $D(o, b_1, b_2, d, c_1)$, рассматривается аналогично.

По аналогии с рассуждениями из предыдущего абзаца показывается, что c_1 и b_2 не могут одновременно иметь степень 3, если $eb_1 \in E$, $ed \in E$.

Если $eb_2 \in E$, $ed \in E$, то подграф $H_1 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e]$ с H_1-отделителем (b_1, o, c_2) является $(3, \mathrm{III})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин e, b_2, d из графа G.

Всюду далее будем предполагать, что ни одна вершина из $N(c_2) \setminus \{c_1\}$ не смежна ни с какими двумя элементами множества $\{b_1, b_2, d\}$.

(a) Пусть сначала $N(e) \cap \{b_1, b_2\} \neq \varnothing$. Возможный сосед e' вершины c_2, отличный от c_1 и e, равноправен с вершиной e. В частности, вершина e' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин b_1, b_2, a_1, a_2, a_3. Соображения симметрии приводят к тому, что возможны только три варианта:

(i) существует вершина из $N(c_2) \setminus \{c_1\}$, смежная хотя бы с одной из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$, или $\deg(c_2) = 2$ и у вершины e существует сосед, смежный хотя бы с одной из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$;

(ii) $\deg(c_2)=2$ и ни вершина e, ни один сосед вершины e не смежен ни с одной из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$;

(iii) $N(c_2) = \{e, e', c_1\}$ и для вершин e и e' имеют место равенства $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}$ и $N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$.

Пусть выполнено условие (i). Тогда в графе G существует порождённый цикл C'_1, содержащий рёбра a_1o, oc_1, c_1c_2. Рассмотрим циклы

$$C'_2 = \begin{cases} (o, c_1, c_2, e, b_1), & \text{если } eb_1 \in E, \\ (o, c_1, c_2, e, b_2, b_1), & \text{если } eb_1 \notin E,\ eb_2 \in E, \end{cases}$$

$$C'_3 = (o, b_1, b_2, d, c_1).$$

Для рёбер c_2c_1, c_1o, ob_1 и циклов C'_1, C'_2, C'_3 выполнены условия леммы 5. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G. Тогда по лемме 5 $D(C'_3) \subset D(C'_2)$ или $D(C'_1) \subset D(C'_2)$.

(i.1) Пусть $eb_1 \in E$. Нетрудно видеть, что в любой плоской укладке графа G в каждом из случаев $D(C'_3) \subset D(C'_2)$ и $D(C'_1) \subset D(C'_2)$ вершины $a_1, \ldots, a_{10}$ и вершины b_2, d лежат по разные стороны от C'_2. Ребро цикла C'_1, инцидентное c_2 или e и отличное от рёбер ec_2 и c_2c_1, лежит по одну сторону от C'_2 вместе с вершинами $a_1, \ldots, a_{10}$. Если существует $b'_2 \in N(b_2) \setminus \{b_1, d\}$, то $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, c_1, c_2]$. Поэтому по лемме 4 $\deg(d) = 3$, так как (o, b_1, b_2, d, c_1) — порождённый цикл графа G. Заметим, что в G существует порождённый путь $(e, v_1, \ldots, v_k, d)$, иначе $\{d\}$ — разделяющая клика графа G. Каждая из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$ и любая вершина этого пути лежат по разные стороны от C'_2, поэтому $k = 1$ (иначе $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, d, v_k, b_1, e]$). Тогда подграф $H_2 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, v_1]$ с H_2-отделителем (o, c_2, v_1) является $(3, \mathrm{II})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_1, b_2, d из графа G.

(i.2) Предположим, что $eb_2 \in E$. С учётом случаев 1–11 либо $ea_1 \in E$, либо $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$. Рассмотрим подслучай, когда вершина d лежит внутри области $D(C'_2)$, т. е. $D(C'_3) \subset D(C'_2)$. Второй подслучай рассматривается аналогично. Ввиду наличия цикла C'_1 вершины $a_1, \ldots, a_{10}$ не принадлежат области $D(C'_2)$. Поэтому возможный элемент e' множества $N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$ не принадлежит области $D(C'_2)$, так как $N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} \neq \varnothing$.

Возможный элемент множества $N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$ не принадлежит $D(C'_3)$, т. е. принадлежит разности $D(C'_2) \setminus D(C'_3)$, иначе либо $\{d\}$ — разделяющая клика графа G, либо в $D(C'_3)$ имеется вершина $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$. В последнем случае либо $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b'_1, e, c_2]$ (если $ea_1 \in E$), либо $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e, b_1, b'_1]$ (если $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$).

Если $ea_1 \in E$, то $\deg(d) = 2$, иначе $\{d\}$ — разделяющая клика графа G. При этом вершины b_1 и c_2 имеют степень 3, иначе порождённый подграф $G[o, a_1, c_1, c_2, e, b_1, b_2, d]$ является 2-сжимаемым. Тогда хотя бы один из двух элементов множества $(N(b_1) \cup N(c_2)) \setminus \{o, b_2, c_1, e\}$ принадлежит области $D(o, c_1, c_2, e, a_1)$, и поэтому либо $\{c_2\}$, либо $\{b_1\}$ является разделяющей кликой графа G.

Если $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$, то хотя бы одна из вершин d и e имеет степень 3, иначе пара $(G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e], \{o, b_1, c_2\})$ вырожденна.

(i.2.1) Пусть $\deg(c_2) = 2$. Понятно, что $\deg(d) = 2$, иначе множество $(N(d) \cup N(e)) \setminus \{c_1, c_2, b_2\}$ содержит два элемента, которые лежат в разности $D(C'_2) \setminus D(C'_3)$, поскольку $\{d\}$ не является разделяющей кликой графа G. Тогда пара $(G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e], \{o, b_1, e\})$ вырожденна.

(i.2.2) Пусть $\deg(c_2) = 3$ и существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{e, c_1\}$. Тогда $e' \notin D(C'_2)$. В этом случае найдётся вершина $x \in N(e) \setminus \{b_2, c_2\}$, иначе либо $\{d\}$ — разделяющая клика графа G, либо образуется вырожденная пара $(G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e], \{o, b_1, c_2\})$. Вершины x и b_1 не могут быть смежны, иначе $\deg(d) = 2$ и подграф $H_3 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x]$ с H_3-отделителем (o, c_2, x) является $(3, \mathrm{II})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_1, b_2, d из графа G.

Случай, когда $N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}$, разберём при рассмотрении условия (iii), поэтому будем считать, что вершина e' имеет соседа среди вершин a_1, a_2, a_3. Определим числа

$$i' = \max\{i \in \overline{1,3} \mid a_i e' \in E\}, \quad i'' = \min\{i \in \overline{1,3} \mid a_i e' \in E\}.$$

Если $e' = x$ и $i' = 1$, то $\deg(b) = 2$ (иначе $\{b\}$ — разделяющая клика графа G) и подграф $G[o, a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d, x]$ является 2-сжимаемым. Если $e' = x$ и $i' > 1$, то $[a_{i'}, a_{i'+1}, a_{i'+2}, a_{i'+3}, a_{i'-1}, a_{i'-2}, a_{i'-3}, x, e]$, где $a_0 = o$ и $a_{-1} = b_1$.

Если $e' \neq x$ и $e'b_1 \notin E$, то $i' \neq i''$ ввиду случаев 1–11. Тогда

$$\begin{aligned} &[c_2, c_1, o, b_1, e', a_{i'}, a_{i'+1}, e, x], && \text{если } a_{i'+1}x \notin E;\\ &[e, c_2, e', a_{i''}, x, a_{i'+1}, a_{i'+2}, b_2, b_1], && \text{если } a_{i'+1}x \in E,\ a_{i'+2}x \notin E;\\ &[e, c_2, e', a_{i''}, x, a_{i'+2}, a_{i'+3}, b_2, b_1], && \text{если } a_{i'+1}x \in E,\ a_{i'+2}x \in E. \end{aligned}$$

Если $e' \neq x$ и $e'b_1 \in E$, то $i' \in \{1, 2\}$ ввиду случаев 1–11. При $i' = 2$ имеем

$$\begin{aligned} &[b_1, e', a_2, a_3, b_2, e, x, o, c_1], && \text{если } a_3x \notin E;\\ &[e, c_2, e', a_2, x, a_3, a_4, b_2, d], && \text{если } a_3x \in E,\ a_4x \notin E;\\ &[e, c_2, e', a_2, x, a_4, a_5, b_2, d], && \text{если } a_3x \in E,\ a_4x \in E. \end{aligned}$$

Отметим, что в двух последних случаях $x \notin D(C_2')$, поскольку $a_3x \in E$.

Наконец, при $i' = 1$ получаем, что $\deg(b) = \deg(e) = 3$, иначе образуется 2-сжимаемый подграф $G[o, a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, e', x]$. Следовательно, $x \in D(C_2') \setminus D(C_3')$, и поэтому $\{e', a_1\}$ — разделяющая клика графа G. Этим заканчивается рассмотрение условия (i).

Предположим, что выполнено условие (ii), т. е. $\deg(c_2){=}2$ и ни e, ни один сосед вершины e не смежен ни с одной из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$.

(ii.1) Если $eb_1 \in E$, то (o, c_1, c_2, e, b_1) — порождённый 5-цикл графа G. По лемме 4 найдётся $x \in N(e) \setminus \{c_2, b_2\}$, при этом заметим, что вершина x не смежна ни с одной из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$. Вершины x и d смежны, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, e, x, c_1, d]$. Вершины x и b_2 несмежны, иначе $\{o\}$ — разделяющая клика графа G. Тогда подграф $H_4 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x]$ с H_4-отделителем (o, b_2, x) является $(3, \mathrm{II})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин c_1, c_2, e из графа G.

(ii.2) Если $eb_2 \in E$, то (c_1, c_2, e, b_2, d) — порождённый 5-цикл графа G. По лемме 4 существуют вершины $x \in N(e) \setminus \{c_2, b_2\}$ и $y \in N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$.

(ii.2.1) При $x = y$ вершины x и b_1 несмежны, иначе $\{o\}$ — разделяющая клика G. Тогда подграф $H_5 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x]$ с H_5-отделителем (x, o, b_1) является $(3, \mathrm{VII})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин c_1, c_2, e из графа G.

(ii.2.2) Предположим, что $x \neq y$.

(ii.2.2.1) Пусть $N(y) \cap \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$. Рассмотрим циклы

$$C_1'' = \begin{cases} (o, c_1, d, y, a_1), & \text{если } a_1y \in E,\\ (o, c_1, d, y, a_2, a_1), & \text{если } a_1y \notin E,\ a_2y \in E, \end{cases}$$

$$C_2'' = (o, b_1, b_2, d, c_1), \quad C_3'' = (c_1, c_2, e, b_2, d).$$

Для рёбер c_1o, dc_1, b_2d и циклов C''_1, C''_2, C''_3 выполнены условия леммы 5. Поэтому для произвольной плоской укладки графа G имеет место $D(C''_3) \subset D(C''_2)$ или $D(C''_1) \subset D(C''_2)$. Рассмотрим $D(C''_3) \subset D(C''_2)$, второе включение рассматривается аналогично. Вершины c_2, e, x принадлежат области $D(o, c_1, d, b_2, b_1)$, а вершины $a_1, \ldots, a_{10}$ и y не принадлежат ей. Существует вершина $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$, принадлежащая данной области (иначе $\{e\}$ — разделяющая клика графа G), но тогда $[d, b_2, b_1, b'_1, y, a_i, a_{i+1}, c_1, c_2]$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$.

(ii.2.2.2) Предположим, что $ya_1 \notin E$ и $ya_2 \notin E$. Если при этом выполнено $xy \notin E$, то $[c_1, o, a_1, a_2, c_2, e, x, d, y]$. Если же $xy \in E$, то подграф $H_6 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d, x, y]$ с H_6-отделителем (o, b_1, x, y) является $(4, \mathrm{II})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин c_1, c_2, b_2, d, e из графа G.

Перейдём к условию (iii). Напомним, что здесь $N(c_2) = \{e, e', c_1\}$, $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}$, $N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$. При этом будем считать, что $ee' \notin E$, иначе образуется 2-сжимаемый подграф $G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, e']$.

Заметим, что в любой плоской укладке графа G вершины d и e лежат по разные стороны от цикла $(o, b_1, b_2, e', c_2, c_1)$. Отсюда нетрудно вывести, что $\deg(d) = 2$ или $\deg(e) = 2$, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, e', c_1, d, d']$ или $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, e, e'', c_1, d]$, где $d' \in N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$ и $e'' \in N(e) \setminus \{b_1, c_2\}$.

Из соображений симметрии можно положить $\deg(d) = 2$ и $\deg(e) = 3$. Тогда подграф $H_7 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, e']$ с H_7-отделителем (o, e, e') является $(3, \mathrm{II})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_2, d, c_1 из графа G.

(b) Пусть далее $N(e) \cap \{b_1, b_2\} = \varnothing$. Ввиду случаев 1–11 вершина e смежна ровно с двумя вершинами из множества $\{a_1, a_2, a_3\}$. Также заметим, что $\deg(c_2) = 2$, иначе возможный элемент из $N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$, равноправный с вершиной e, имеет ровно двух соседей в множестве $\{a_1, a_2, a_3\}$. Рассмотрим все три возможных варианта пересечения $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3\}$.

(b.1) В случае $ea_1 \in E$, $ea_2 \in E$ в графе G образуется вырожденная пара $(G[o, a_1, a_2, c_1, c_2, e], \{a_2, o, c_1\})$.

(b.2) Предположим, что $ea_2 \in E$, $ea_3 \in E$. Отдельно рассмотрим два варианта: $\deg(a_1) = 2$ и $\deg(a_1) = 3$.

(b.2.1) Пусть $\deg(a_1) = 2$. Тогда подграф $H_8 = G[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e]$, с H_8-отделителем (a_3, o, c_1) является $(3, \mathrm{VI})$-сжимаемым. В результате сжатия имеем минор G' графа G, который получается стягиванием рёбер a_2a_1, a_1o, c_2e, c_1c_2. Следовательно, G' принадлежит классу $\mathcal{P}(3)$ и не содержит порождённого триода $T_{3,3,2}$.

(b.2.2) Предположим, что существует вершина $a_1' \in N(a_1) \setminus \{a_2, o\}$. Тогда $N(a_1') \cap \{b_2, d\} \neq \varnothing$, иначе $[c_1, c_2, e, a_3, o, a_1, a_1', d, b_2]$.

(b.2.2.1) Если $a_1'b_2 \in E$ и $a_1'd \in E$, то находим 2-сжимаемый подграф $G[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, a_1']$.

(b.2.2.2) Если $a_1'b_2 \in E$, $a_1'd \notin E$, то имеем $(4, \mathrm{III})$-сжимаемый подграф $H_9 = G[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, a_1']$ с H_9-отделителем (a_3, a_1', b_1, d). Результат сжатия получается удалением вершин c_1, c_2, e из графа G.

(b.2.2.3) Если $a_1'd \in E$, $a_1'b_2 \notin E$, то возникает вырожденная пара $(G[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, a_1'], \{a_3, a_1', b_1, b_2\})$.

(b.3) Пусть $ea_1 \in E$ и $ea_3 \in E$. Если также $\deg(a_2) = 2$, то подграф $H_{10} = G[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e]$ с H_{10}-отделителем (a_3, o, c_1) является $(3, \mathrm{VI})$-сжимаемым. При сжатии стягиванием рёбер a_2a_1, a_1o, c_2e, c_1c_2 получаем минор G' графа G. Следовательно, G' принадлежит классу $\mathcal{P}(3)$ и не содержит порождённого триода $T_{3,3,2}$.

Если существует вершина $a_2' \in N(a_2) \setminus \{a_3, a_1\}$, то a_2' смежна с некоторой вершиной a_i, $i \in \overline{4, 6}$, иначе $[a_3, a_4, a_5, a_6, e, c_2, c_1, a_2, a_2']$. Вершина a_2' смежна с одной из вершин b_1 и b_2, иначе $[a_1, a_2, a_2', a_i, o, b_1, b_2, e, c_2]$. Тогда

$$\begin{aligned} &[a_2', a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, b_1, b_2, d, a_2, a_1], \quad \text{если } a_2'b_1 \in E; \\ &[a_2', a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, b_2, d, c_1, a_2, a_1], \quad \text{если } a_2'b_2 \in E. \end{aligned}$$

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Вершина d не может быть смежна с одной из вершин a_1, a_2, a_3 или быть одновременно смежна с вершинами b_1 и c_1.*

Доказательство. Предположим противное. Если вершина d смежна с вершиной b_1, то по лемме 9 вершина d смежна и с одной из вершин c_1, a_1, a_2, a_3. При условии, что $da_i \in E$ для некоторого $i \in \overline{1, 3}$, получаем $[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i-1}, a_{i-2}, a_{i-3}, d, b_2]$, где $a_0 = o$, $a_{-1} = c_1$, $a_{-2} = c_2$.

Предположим, что $db_1 \in E$ и $dc_1 \in E$. Тогда существует вершина $b_2' \in N(b_2) \setminus \{b_1, d\}$, иначе $\{b_1, d\}$ — разделяющая клика графа G. Если $b_2'c_2 \in E$, то подграф $H_1 = G[o, c_1, c_2, b_1, b_2, d, b_2']$ с H_1-отделителем (b_2', c_2, o) является $(3, \mathrm{III})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_1, b_2, d из графа G. Если $b_2'c_2 \notin E$, то b_2' и d равноправны с точки зрения рассуждений, причём $b_2'b_1 \notin E$.

Таким образом, всюду далее полагаем $db_1 \notin E$, а по лемме 10 получаем, что вершина d имеет соседа среди вершин a_1, a_2, a_3. Положим $i' = \max\{i \mid da_i \in E,\ i \in \overline{1, 3}\}$.

(a) Предположим, что существует вершина $e \in N(c_2) \setminus \{c_1\}$, несмежная с b_2. Вершины e и d равноправны с точки зрения рассуждений, поэтому можем считать, что $ec_1 \notin E$ и вершина e имеет соседа $a_{i''}$, где

$i'' = \max\{i \mid ea_i \in E,\ i \in \overline{1,3}\}$. Из соображений симметрии будем предполагать, что $i' \geqslant i''$. Понятно, что $i'' \in \{1,2\}$.

(a.1) Пусть $i'' = 1$. Если $ea_4 \in E$, то $[a_4, a_5, a_6, a_7, e, c_2, c_1, a_3, a_2]$; при условии $ea_4 \notin E$ необходимо $eb_1 \in E$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_2, e, c_2]$. Если $\deg(c_2) = 2$, то пара $(G[o, a_1, b_1, c_1, c_2, e], \{a_1, b_1, c_1\})$ вырожденна. Если же существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{e, c_1\}$, то она смежна с одной из вершин b_2, a_2, a_3, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e', b_1, b_2]$ или

$$N(e') \cap \{c_1, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3\} = \{c_1\}.$$

Последнее невозможно по лемме 9 и ввиду того, что вершины d и e' равноправны.

Тем самым подграф $G[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, e']$ содержит $K_{3,3}$ в качестве минора. Для его получения нужно стянуть ребро c_1c_2, а также стянуть подграф $G[a_2, a_3, b_2, d, e']$ в вершину. Следовательно, граф G не является планарным по критерию Вагнера.

(a.2) Пусть $i'' = 2$. В этом случае $i' = 3$. Если $da_i \in E$ для некоторого $i \in \overline{5,8}$, то $[d, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_3, a_2, a_1, b_2, b_1]$. Если $ea_4 \in E$, получаем $[a_4, a_3, d, b_2, e, c_2, c_1, a_5, a_6]$, а если $ea_5 \in E$, то $[a_5, a_6, a_7, a_8, e, c_2, c_1, a_4, a_3]$. Поэтому обязательно $da_4 \in E$, иначе $[a_3, a_2, e, c_2, d, b_2, b_1, a_4, a_5]$. Рассмотрим два варианта: $ea_1 \notin E$ и $ea_1 \in E$.

(a.2.1) При условиях $ea_1 \notin E$, $ea_4 \notin E$, $ea_5 \notin E$ находим $eb_1 \in E$, иначе имеем $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, o, b_1, e, c_2]$. Если существует принадлежащая разности $(N(c_1) \cup N(c_2)) \setminus \{o, c_1, c_2, e\}$ вершина x_1, то $x_1b_2 \notin E$, иначе подграф $G[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x_1]$ содержит $K_{3,3}$ в качестве минора. Тогда необходимо $x_1a_1 \in E$, иначе

$$\begin{aligned} &[b_1, o, c_1, x_1, b_2, d, a_4, e, a_2], && \text{если } x_1c_1 \in E; \\ &[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, x_1, b_1, b_2], && \text{если } x_1c_1 \notin E,\ x_1c_2 \in E. \end{aligned}$$

Наконец, находим либо $[a_2, a_1, x_1, c_1, e, b_1, b_2, a_3, a_4]$ (если $x_1c_1 \in E$), либо $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_2, x_1, c_2]$ (если $x_1c_2 \in E$). Таким образом, справедливы равенства $\deg(c_1) = \deg(c_2) = 2$ и имеет место противоречие с леммой 4: в графе G образуется порождённый 5-цикл (o, c_1, c_2, e, b_1).

(a.2.2) Пусть $ea_1 \in E$. Если $\deg(c_2) = 2$, то образуется вырожденная пара $(G[o, a_1, a_2, c_1, c_2, e], \{a_2, o, c_1\})$. Предположим, что существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$. По леммам 9 и 10 либо $e'b_2 \in E$, либо $e'b_1 \in E$ и $e'c_1 \in E$. Во втором случае в графе G находится 2-сжимаемый подграф $G' = G[o, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, c_1, c_2, e, e', d]$. Пусть $e'b_2 \in E$. Наличие в E ребра $e'b_1$ также приводит к 2-сжимаемому подграфу G', так что

$e'b_1 \notin E$. В таком случае $[a_5, a_4, a_3, a_2, a_6, a_7, a_8, e', b_2]$, если $e'a_5 \in E$, и $[b_2, d, a_4, a_5, e', c_2, e, b_1, o]$ — иначе.

(b) Предположим, что существует вершина $e \in N(c_2) \setminus \{c_1\}$, смежная с b_2. Кроме того, пусть найдётся вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$. Вершины d и e' равноправны, поэтому $e'c_1 \in E$, $e'b_1 \in E$ по леммам 9 и 10 и в силу доказанного в (a). Следовательно, подграф $H_2 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, e']$ с H_2-отделителем (e, b_2, o) является $(3, \mathrm{III})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин c_1, c_2, e' из графа G.

Тем самым показано, что $\deg(c_2) = 2$. Вершина e не может быть смежна с вершиной a_i при $i \in \overline{3,7}$, иначе $[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, e, c_2, c_1, a_{i-1}, a_{i-2}]$. Также $eb_1 \notin E$ — в противном случае образуется вырожденная пара $(G[o, c_1, c_2, b_1, b_2, e], \{b_1, o, c_1\})$. Рассмотрим возможные значения i'.

(b.1) При $i' = 1$ получаем $[a_4, a_5, a_6, a_7, d, b_2, b_1, a_3, a_2]$, если $da_4 \in E$, и $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, c_1, c_2, d, b_2]$, если $da_4 \notin E$.

(b.2) Пусть $i' = 3$. Если $da_1 \in E$, то $[d, a_3, a_4, a_5, a_1, o, c_1, b_2, e]$. Если $da_2 \in E$, $ea_1 \notin E$, то $[b_2, b_1, o, a_1, d, a_3, a_4, e, c_2]$. Если $da_2 \in E$, $ea_1 \in E$, то пара $(G[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d], \{b_1, c_1, a_3\})$ является вырожденной. Если $da_1 \notin E$, $da_2 \notin E$ и $ea_1 \notin E$, то

$$\begin{aligned} &[b_2, b_1, o, a_1, d, a_4, a_5, e, c_2] \quad \text{при } da_4 \in E;\\ &[b_2, b_1, o, a_1, d, a_3, a_4, e, c_2] \quad \text{при } da_4 \notin E. \end{aligned}$$

Наконец, если $da_2 \notin E$, $da_1 \notin E$ и $ea_1 \in E$, то в графе G находим порождённый 5-цикл (a_1, o, c_1, c_2, e). По лемме 4 вершина c_1 имеет соседа $v \notin \{o, c_2\}$. Поскольку граф G планарен, $va_2 \notin E$ и $va_4 \notin E$ (иначе обнаруживается минор $K_{3,3}$). Тогда

$$\begin{aligned} &[e, c_2, c_1, v, a_1, a_2, a_3, b_2, b_1], \quad \text{если } vb_1 \notin E;\\ &[b_2, b_1, v, c_1, d, a_3, a_4, e, a_1], \quad \text{если } vb_1 \in E,\ da_4 \notin E;\\ &[b_2, b_1, v, c_1, d, a_4, a_5, e, a_1], \quad \text{если } vb_1 \in E,\ da_4 \in E. \end{aligned}$$

(b.3) Пусть $i' = 2$. В этом случае если $ea_1 \notin E$, то

$$\begin{aligned} &[d, a_2, a_1, o, a_4, a_5, a_6, b_2, e] \quad \text{при } da_4 \in E;\\ &[a_2, a_1, o, c_1, d, b_2, e, a_3, a_4] \quad \text{при } da_4 \notin E. \end{aligned}$$

Если же $ea_1 \in E$, то (a_1, o, c_1, c_2, e) — порождённый 5-цикл графа G. По лемме 4 вершина c_1 имеет соседа $u \notin \{o, c_2\}$, а в силу планарности графа G получаем $ua_3 \notin E$ и $ua_4 \notin E$. Тогда

$$\begin{aligned} &[e, c_2, c_1, u, a_1, a_2, a_3, b_2, b_1], && \text{если } ub_1 \notin E; \\ &[b_2, b_1, u, c_1, d, a_3, a_4, e, a_1], && \text{если } ub_1 \in E,\ da_4 \notin E; \\ &[b_2, b_1, u, c_1, d, a_4, a_5, e, a_1], && \text{если } ub_1 \in E,\ da_4 \in E. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда $da_1 \in E$. Если $\deg(b_1) = \deg(c_1) = 2$, то подграф $H_3 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, e]$ с H_3-отделителем (e, b_2, o) является $(3, \mathrm{III})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин c_1 и c_2 из графа G. Тем самым либо $N(b_1) \setminus \{o, b_2\} \neq \varnothing$, либо $\deg(b_2) = 2$ и $N(c_1) \setminus \{o, c_2\} \neq \varnothing$.

(b.3.1) Пусть существует вершина $x_2 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$. Если $x_2c_1 \notin E$ и $x_2e \notin E$, то

$$\begin{aligned} &[b_2, b_1, x_2, a_3, e, c_2, c_1, d, a_1] && \text{при } x_2a_3 \in E; \\ &[b_2, e, c_2, c_1, d, a_2, a_3, b_1, x_2] && \text{при } x_2a_3 \notin E. \end{aligned}$$

Если $x_2c_1 \in E$ и $\deg(x_2) = 2$, то подграф $H_4 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_2]$ с H_4-отделителем (o, b_2, e) является $(3, \mathrm{VII})$- сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_1, x_2 из графа G.

Если $x_2c_1 \in E$ и найдётся вершина $y \in N(x_2) \setminus \{b_1, c_1\}$, то $y \neq a_3$ и $ya_3 \notin E$, иначе подграф $G[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d, x_2, y]$ содержит $K_{3,3}$ в качестве минора. Вместе с тем $y \neq e$, иначе имеем 2-сжимаемый подграф $G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_2]$. Вершины y и e смежны — в противном случае $[b_2, b_1, x_2, y, d, a_2, a_3, e, c_2]$. Заметим, что (c_1, c_2, e, y, x_2) — порождённый 5-цикл графа G, поэтому по лемме 4 вершина y смежна также с некоторой вершиной $z \in N(y) \setminus \{x_2, e\}$. Тогда $[e, c_2, c_1, o, b_2, d, a_2, y, z]$.

Если $x_2e \in E$ и $\deg(x_2) = 2$, то подграф $H_5 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_2]$ с H_5-отделителем (o, b_2, c_1) является $(3, \mathrm{I})$-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_1, x_2 из графа G.

Наконец, если при $x_2e \in E$ существует вершина $y' \in N(x_2) \setminus \{b_1, e\}$, то $y' \neq a_3$ и $y'a_3 \notin E$, иначе G не является планарным. Тогда

$$\begin{aligned} &[o, b_1, b_2, e, a_1, a_2, a_3, c_1, y'], && \text{если } y'c_1 \in E; \\ &[e, c_2, c_1, o, b_2, d, a_2, x_2, y'], && \text{если } y'c_1 \notin E. \end{aligned}$$

(b.3.2) Пусть $\deg(b_1) = 2$ и существует вершина $x_3 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$. Вершина x_3 необходимо смежна с одной из вершин e и a_3, поскольку иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, e, c_1, x_3]$. Если $x_3e \in E$, получаем $(3, \mathrm{II})$-сжимаемый подграф $H_6 = G[o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_3]$ с H_6-отделителем (o, b_2, x_3).

Результат сжатия получается удалением вершин c_1, c_2 из графа G. Если же $x_3a_3 \in E$ и $x_3e \notin E$, то

$$[c_1, x_3, a_4, a_5, c_2, e, b_2, o, a_1] \quad \text{при } x_3a_4 \in E;$$
$$[c_1, x_3, a_3, a_4, c_2, e, b_2, o, a_1] \quad \text{при } x_3a_4 \notin E.$$

Лемма 11 доказана.

5. Основной результат

Теорема 1. *Класс* $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$ *является НМ-простым.*

Доказательство. Из лемм 8–11 следует, что произвольный неприводимый граф принадлежит классу $\mathrm{Free}(T_{2,2,10})$. Значит, задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{2,2,10})$. Класс $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{2,2,10})$ является НМ-простым [4]. Следовательно, класс графов $\mathcal{P}(3) \cap \mathrm{Free}(T_{3,3,2})$ также НМ-прост. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** О сжимаемых графах // Пробл. кибернетики. 1979. Вып. 36. С. 23–31.
2. **Алексеев В. Е., Лозин В. В.** О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 1. С. 3–19.
3. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Классы планарных графов с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 1. С. 3–10.
4. **Малышев Д. С.** Классы субкубических планарных графов, для которых задача о независимом множестве полиномиально разрешима // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 3. С. 26–44.
5. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. 2003. Vol. 132, No. 1–3. P. 17–26.
6. **Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Milanič M.** The maximum independent set problem in planar graphs // Proc. 33th Int. Symp. Mathematical Foundations of Computer Science (Torun, August 25–29, 2008). Heidelberg: Springer-Verl., 2008. P. 96–107. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 5162)
7. **Hopcroft J., Tarjan R. E.** Efficient planarity testing // J. Assoc. Comput. Machinery. 1974. Vol. 21, No. 4. P. 549–568.
8. **Lozin V. V., Milanič M.** Maximum independent sets in graphs of low degree // Proc. 18th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (New Orleans, Jan. 7–9, 2007). Philadelphia, PA: SIAM, 2007. P. 874–880.

9. **Lozin V. V., Milanič M.** On the maximum independent set problem in subclasses of planar graphs // J. Graph Algorithms Appl. 2010. Vol. 14, No. 2. P. 269–286.
10. **Lozin V. V., Monnot J., Ries B.** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // J. Discrete Algorithms. 2015. Vol. 31. P. 104–112.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
Сироткин Дмитрий Валерьевич

Статья поступила
25 июля 2016 г.

Исправленный вариант —
12 января 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2017. Volume 24, No. 3. P. 35–60

UDC 519.17 DOI: 10.17377/daio.2017.24.549

POLYNOMIAL-TIME SOLVABILITY OF THE INDEPENDENT SET PROBLEM IN A CERTAIN CLASS OF SUBCUBIC PLANAR GRAPHS

D. S. Malyshev[a] and *D. V. Sirotkin*[b]
National Research University Higher School of Economics,
25/12 Bolshaya Pechyorskaya St., 603155 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: [a]dmalishev@hse.ru, dsmalyshev@rambler.ru,
[b]dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

Abstract. The independent set problem for a given simple graph is to compute the size of a maximum subset of its pairwise non-adjacent vertices. In this paper we prove polynomial-time solvability of the problem for subcubic planar graphs not containing an induced tree, obtained by coinciding ends of three paths of lengths 3, 3, and 2 correspondingly. Bibliogr. 10

Keywords: independent set problem, graph reduction, efficient algorithm.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev,** On compressible graphs, in *Problemy kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 36, pp. 23–31, Nauka, Moscow, 1979 [Russian].
2. **V. E. Alekseev** and **V. V. Lozin,** On local graph transformations preserving independence number, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **5**, No. 1, 3–19, 1998 [Russian].
3. **V. E. Alekseev** and **D. S. Malyshev,** Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **15**, No. 1, 3–10, 2008 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **3**, No. 1, 1–4, 2009.
4. **D. S. Malyshev,** Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 3, 26–44, 2013 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **7**, No. 4, 537–548, 2013.
5. **V. E. Alekseev,** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem, *Discrete Appl. Math.,* **132**, No. 1–3, 17–26, 2003.

6. **V. E. Alekseev, V. V. Lozin, D. S. Malyshev,** and **M. Milanič,** The maximum independent set problem in planar graphs, in *Mathematical Foundations of Computer Science 2008* (Proc. 33rd Int. Symp. MFCS, Toruń, Poland, Aug. 25–29, 2008), pp. 96–107, Springer, Heidelberg, 2008 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 5162).
7. **J. E. Hopcroft** and **R. E. Tarjan,** Efficient planarity testing, *J. ACM,* **21**, No. 4, 549–568, 1974.
8. **V. V. Lozin** and **M. Milanič,** Maximum independent sets in graphs of low degree, in *Proc. 18th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, New Orleans, USA, Jan. 7–9, 2007,* pp. 874–880, SIAM, Philadelphia, PA, 2007.
9. **V. V. Lozin** and **M. Milanič,** On the maximum independent set problem in subclasses of planar graphs, *J. Graph Algorithms Appl.,* **14**, No. 2, 269–286, 2010.
10. **V. V. Lozin, J. Monnot,** and **B. Ries,** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs, *J. Discrete Algorithms,* **31**, 104–112, 2015.

Dmitry S. Malyshev,
Dmitry V. Sirotkin

Received
25 July 2016

Revised
12 January 2017