О проблеме Римана-Гильберта для разностных и q-разностных систем

Илья Вьюгин, Роман Левин

UDK 517.927.7

Мы посвящаем нашу работу памяти нашего учителя, выдающегося математика Дмитрия Викторовича Аносова.

Аннотация

В работе рассматривается аналог классической проблемы Римана-Гильберта, сформулированный для классов разностных и q-разностных систем. Мы предлагаем некоторое усиление теоремы существования Биркгофа.

1 Введение

Аналитическая теория разностных и q-разностных уравнений появилась в начале XX века и достигла своего наибольшего развития в работах Биркгофа. Он ввел формальные и настоящие решения для разностных и q-разностных линейных систем, он также определил специальные периодические (q-периодические) матричные функции, которые в некотором смысле являются матрицами монодромии этих систем. Здесь следует отметить, что эти матрицы монодромии разностных (q-разностных систем) определяются не через ветвление решений при обходе по пути, а как отношение двух специальных фундаментальных матриц. Таким образом, матрица монодромии системы разностных (q-разностных) уравнений скорее соответствует понятию матриц Стокса в теории линейных дифференциальных уравнений.
Получив точный вид матрицы монодромии и матрицы коэффициентов, Дж. Биркгоф сформулировал аналог проблемы Римана–Гильберта для систем линейных разностных и q-разностных уравнений, который он назвал *обобщенной проблемой Римана–Гильберта*. Чтобы избежать недоразумений, сразу отметим, что имеется несколько различных проблем, аналогов классической проблемы Римана–Гильберта, которые носят название обобщенной проблемы Римана–Гильберта. Мы же будем иметь в виду ту, которая была сформулирована Биркгофом. Биркгоф поставил следующую проблему:

Построить систему разностных (q-разностных) уравнений, обладающую заданной матрицей монодромии, предписанными характеристическими константами и матрицей коэффициентов, представляющей собой матричный многочлен определенной степени.

Результат, полученный Биркгофом, дает неполное решение этой проблемы. Дж. Биркгоф показал, что по любым матрице монодромии и набору характеристических констант можно построить систему, которая имеет заданную монодромию или почти заданную монодромию – характеристические константы построенной системы либо совпадают с заданными, либо отличаются от них сдвигами на целые числа. Сдвинутыми на целые числа могут быть характеристические константы, отвечающие степенным асимптотикам решений. В данной работе мы проводим дальнейшее исследование этой проблемы и предлагаем ее решение. У системы, построенной нами, корни определителя матрицы коэффициентов могут отличаться от аналогичных корней системы Биркгофа на целые числа, но эти характеристики не фиксируются в формулировке обобщенной проблемы Римана-Гильберта.

2 Случай разностных систем

2.1 Введение в теорию линейных разностных уравнений

Система линейных разностных уравнений имеет вид:

$$Y(z+1) = A(z)Y(z), \tag{1}$$

где $Y(z)$ — $n \times n$-матрица, $A(z)$ — рациональная $n \times n$-матрица коэффициентов. Эта система может быть преобразована к полиномиальному виду

$$A(z) = A_r z^r + \ldots + A_0 \tag{2}$$

с помощью следующего преобразования:

$$\tilde{Y}(z) = \Gamma(z - x_1) \cdot \ldots \cdot \Gamma(z - x_s) Y(z),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, а $(z - x_1) \cdot \ldots \cdot (z - x_s)$ — общий знаменатель элементов матрицы $A(z)$.

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — собственные значения матрицы A_r и $\rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_n \neq 0$, $\rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}$ при $i \neq j$. Тогда, как следует из теорем существования (см. [2]) для разностных уравнений, формальное решение системы (1) имеет вид:

$$\hat{Y}(z) = z^{rz} e^{-rz} \left(\hat{Y}_0 + \frac{\hat{Y}_1}{z} + \ldots \right) \mathrm{diag}(\rho_1^z z^{d_1}, \ldots, \rho_n^z z^{d_n}). \tag{3}$$

Без ограничения общности положим, что $A_r = \mathrm{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$. Это можно легко доказать, подставив матрицу $\hat{Y}(z)$ вида (3) в систему (1). Кроме того, нетрудно увидеть, что величины $\rho_1 d_1, \ldots, \rho_n d_n$ совпадают с диагональными элементами матрицы A_{r-1} из формулы (2).

Обозначим корни многочлена $\det A(z)$ через $q_1, \ldots, q_{rn}$. Из теоремы Виета следует, что:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{j=1}^{rn} q_j = 0.$$

Это равенство является аналогом соотношения Фукса для линейных дифференциальных уравнений.

Ряд, стоящий в выражении (3), формальный. Прямой подстановкой матрицы (3) в систему (1) можно проверить, что оно формально удовлетворяет системе. Настоящие решения системы были построены Биркгофом.

Теорема 1 (Биркгоф [2], Th. III). *Пусть*

$$A_r = \mathrm{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n),$$

$$\rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_n \neq 0; \qquad \forall i \neq j: \quad \rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}.$$

Тогда существует единственное решение $Y^l(z)$ ($Y^r(z)$) системы (1), такое, что:

(i) Функция $Y^l(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$, а $Y^r(z)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{p_i\}$, где p_i — точки конгруэнтные полюсам функции $\det A^{-1}(z-1)$, лежащие слева от них (две точки гонгруэнтные, если их разность – целое число);

(ii) В любой левой (правой) полуплоскости решение $Y^l(z)$ ($Y^r(z)$) имеет асимптотическое разложение (3).

Мы говорим, что матрица $Y^l(z)$ ($Y^r(z)$) имеет *асимптотическое разложение* (3) в произвольной левой (правой) полуплоскости если выполнено, что

$$\left| Y^{l,r}(z) z^{-rz} e^{rz} \mathrm{diag}(\rho_1^{-z} z^{-d_1}, \ldots, \rho_n^{-z} z^{-d_n}) - \hat{Y}_0 - \frac{\hat{Y}_1}{z} - \ldots - \frac{\hat{Y}_{k-1}}{z^{k-1}} \right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|z|^k}, \quad \mathrm{Re}\, z \to \mp\infty$$

при том, что мнимая часть z ограничена.

2.2 Матрица монодромии разностной системы

Рассмотрим матрицу $P(z) = (Y^r(z))^{-1} Y^l(z)$. Матрица $P(z)$ периодическая:

$$P(z+1) = P(z).$$

Назовем матрицу $P(z)$ *матрицей монодромии* системы (1). Следующая теорема дает явную форму элементов матрицы $P(z)$.

Теорема 2 (Биркгоф [2], Th. IV). *В предположениях теоремы 1 элементы $p_{kl}(z)$ матрицы $P(z) = (Y^r(z))^{-1} Y^l(z)$ могут быть представлены в виде:*

$$p_{kk}(z) = 1 + c_{kk}^{(1)} e^{2\pi i z} + \ldots + c_{kk}^{(r-1)} e^{2\pi (r-1) i z} + e^{2\pi i d_k} e^{2\pi r i z}, \tag{4}$$

$$p_{kl}(z) = e^{2\pi \lambda_{kl} z} \left(c_{kl}^{(0)} + c_{kl}^{(1)} e^{2\pi i z} + \ldots + c_{kl}^{(r-1)} e^{2\pi (r-1) i z} \right), \quad k \neq l,$$

где $c_{kl}^{(s)}$ — некоторые константы, λ_{kl} — минимальные целые, превосходящие $\mathrm{Re} \frac{\ln \rho_l - \ln \rho_k}{2\pi i}$ для всех k и l, соответственно (ветви $\ln z$ фиксированы в левой и правой полуплоскостях).

2.3 Обобщенная проблема Римана–Гильберта

Матричный многочлен $A(z) = A_r z^r + \ldots + A_0$ с диагональной матрицей $A_r = \mathrm{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $\rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_n \neq 0$, $\rho_k \neq \rho_l$, $k \neq l$ определяет (см. теоремы 1 и 2) *характеристические константы* $\{d_k\}, \{c_{kl}^{(s)}\}$. Число характеристических констант равно числу элементов матриц $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}$. Мы будем изучать отображение

$$(A_0, \ldots, A_{r-1}) \longmapsto \left(\{d_k\}, \{c_{kl}^{(s)}\} \right), \tag{5}$$

если константы $\rho_1, \ldots, \rho_n$ фиксированы. Теперь мы можем сформулировать обобщенную проблему Римана–Гильберта:

Построить систему (1), (2) имеющую предписанные характеристические константы $\{d_k\}, \{c_{kl}^{(s)}\}$ и заданную матрицу A_r (изучается обращение отображения (5)).

Биркгоф сформулировал следующий результат:

Теорема 3 (Birkhoff [3]). *Для любых ненулевых $\rho_1, \ldots, \rho_n$, т.ч. $\forall i \neq j : \rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}$, существуют матрицы $A_0, \ldots, A_{r-1}$, определяющие систему (1), (2) с $A_r = \operatorname{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ и заданными характеристическими константами $\{d_k\}, \{c_{kl}^{(s)}\}$ или константами $\{d_k + l_k\}, \{c_{kl}^{(s)}\}$, где $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}$.*

Теорема 4 (Биркгоф [2], Th. VII). *Предположим, что имеются две полиномиальные матрицы $A'(z) = A'_r z^r + \ldots + A'_0$ and $A''(z) = A''_r z^r + \ldots + A''_0$ with*

$$A'_r = A''_r = \operatorname{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n), \qquad \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_n \neq 0; \quad \rho_k/\rho_l \notin \mathbb{R}, \quad k \neq l,$$

такие, что наборы характеристических констант систем

$$Y'(z+1) = A'(z)Y'(z), \qquad Y''(z+1) = A''(z)Y''(z)$$

совпадают. Тогда существует рациональная матрица $R(z)$, такая, что

$$A''(z) = R(z+1)A'(z)R^{-1}(z), \tag{6}$$

и $(Y'')^{l,r} = R(Y')^{l,r}$.

Мы представляем усиление теоремы Биркгофа 3. Мы показываем, что можно не сдвигать заданные характеристические константы. Здесь мы приводим формулировку теоремы, доказательство которой будет приведено ниже в нескольких леммах.

Теорема 5. *Для произвольных ненулевых $\rho_1, \ldots, \rho_n$, таких что $\rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}$ при $i \neq j$ и любых константах $\{d_k\}, \{c_{kl}^{(s)}\}$, таких что определитель матрицы $P(z)$, определенной формулами (4), не имеет кратных нулей, существуют матрицы $A_0, \ldots, A_{r-1}$, определяющих систему (1), (2) с $A_r = \operatorname{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ и характеристическими константами равными в точности $\{d_k\}, \{c_{kl}^{(s)}\}$.*

2.4 Леммы

Лемма 1. *Рассмотрим систему (1), (2) с*

$$A_r = \operatorname{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n), \qquad \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_n \neq 0; \qquad \forall i \neq j : \quad \rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R} \tag{7}$$

и с набором характеристических констант $d_1, \ldots, d_n$. Тогда для произвольных констант $\tilde{d}_i$, $i = 1, \ldots, n$, т.ч. $\tilde{d}_i - d_i \in \mathbb{Z}$ при $i = 1, \ldots, n$, существует другая система

$$Y'(z+1) = A'(z)Y'(z) \tag{8}$$

с матрицей коэффициентов

$$A'(z) = A'_r z^r + A'_{r-1} z^{r-1} + \ldots + A'_0 + \ldots + A'_{-s} z^{-s} + \ldots, \quad A'_r = A_r \tag{9}$$

и характеристическими константами $\tilde{d}_i$, $i = 1, \ldots, n$, *т.ч.* $A'(z) = M(z+1)A(z)M^{-1}(z)$, *где* $M(z)$ *— рациональная матрица.*

Доказательство. Докажем лемму по индукции. Наличие исходной системы (1), (2), (7) дает нам базу индукции. Шаг индукции осуществим следующим образом. Преобразуем систему (1), (2), (7) с константами $d_1, \ldots, d_n$ в систему с константами $\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_n$, такими, что $\tilde{d}_i = d_i$, $i \neq k$, $\tilde{d}_k = d_k \pm 1$ для произвольного k.

Докажем это, будем строить калибровочное преобразование в виде композиции двух преобразований. Матрица $\hat{Y}_0 = I$ из формулы (3) – это единичная матрица, потому что ведущая матрица A_r системы (1), (2), (7) диагональна. Первым шагом применим преобразование

$$Y'(z) = z^{D_k^{\pm}} Y(z),$$

с матрицей $D_k^{\pm} = \mathrm{diag}(\ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots)$, где k-й элемент равен ± 1. Вторым шагом применим постоянное преобразование $Y''(z) = \hat{Y}_0'^{-1} Y'(z)$, где $\hat{Y}_0'$ — первый элемент формального степенного ряզложения (3) матрицы $Y'(z)$. Нетрудно увидеть, что матрица $A''(z) = Y''(z+1)Y''^{-1}(z)$ имеет вид (9). Полное доказательство леммы проводится конечным количеством шагов. В результате мы получим систему (8), (9) и матрицу $M(z)$, которая является композицией описанных преобразований на каждом шаге. (Более детальное описание можно найти в доказательстве Леммы 3.) □

Теперь мы можем приступить к доказательству Теоремы 5.

Доказательство Теоремы 5. Рассмотрим случай, когда Теорема 3 дает систему (1), (2):

$$Y(z+1) = A(z)Y(z), \qquad A(z) = A_0 + \ldots + A_{r-1} z^{r-1} + A_r z^r \tag{10}$$

с заданной матрицей монодромии $P(z)$ и сдвинутыми константами $\tilde{d}_1 = d_1 + l_1, \ldots, \tilde{d}_n = d_n + l_n$, $l_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$. С помощью Леммы 1 построим систему (8), (9)

$$Y'(z+1) = A'(z)Y'(z), \qquad A'(z) = A'_r z^r + A'_{r-1} z^{r-1} + \ldots + A'_0 + \ldots + A'_{-s} z^{-s} + \ldots \tag{11}$$

с той же монодромией $P(z)$ и характеристическими константами $d_1, \ldots, d_n$. Обозначим через $Y(z)$ и $Y'(z)$ фундаментальные матрицы систем (10) и (11). Они имеют в точности одинаковые матрицы монодромии, равные $P(z)$.

Рассмотрим матрицу $M^{-1}(z) = Y(z)Y'^{-1}(z)$, построенную в Лемме 1. Очевидно, что матрица $M(z)$ голоморфно обратима в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ по построению. Лемма Соважа (см. [1]) дает нам следующее разложение матрицы $M^{-1}(z)$:

$$U(z)M^{-1}(z) = z^{-K} W(z), \tag{12}$$

где $U(z)$ голоморфно обратима в $\mathbb{C}$, $W(z)$ — голоморфно обратима в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, $K = \mathrm{diag}(k_1, \ldots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$, $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_n$.

Имеем следующее представление

$$Y'(z) = M(z)Y(z) = W^{-1}(z)z^K U(z)Y(z).$$

Преобразуем систему (10) с помощью преобразования $\tilde{Y}(z) = U(z)Y(z)$:

$$\tilde{Y}(z+1) = \tilde{A}(z)\tilde{Y}(z), \qquad \tilde{A}(z) = U(z+1)A(z)U^{-1}(z). \tag{13}$$

Преобразуем систему (11) с помощью преобразования $\tilde{Y}'(z) = W(z)Y'(z)$:

$$\tilde{Y}'(z+1) = \tilde{A}'(z)\tilde{Y}'(z), \qquad \tilde{A}'(z) = W(z+1)A'(z)W^{-1}(z). \tag{14}$$

Итак, очевидно, что системы (13) и (14) связаны следующим образом:

$$\tilde{Y}'(z) = z^K \tilde{Y}(z).$$

Действительно, имеем следующее:

$$\tilde{Y}'(z+1)\tilde{Y}'^{-1}(z) = \tilde{A}'(z) = (z+1)^K \tilde{A}(z) z^{-K}. \tag{15}$$

Кроме того, матрица коэффициентов $\tilde{A}(z)$ системы (13) является полиномиальной матрицей переменной z (но, возможно, большей степени), а матрица коэффициентов $\tilde{A}'(z)$ системы (14) рациональна и имеет с полюс порядка r в бесконечности, равный порядку полюса исходной матрицы коэффициентов $\tilde{A}(z)$ системы (11) в бесконечности. Более того, характеристические константы системы (14) в точности равны $\{d_i\}$, так как $W(z)$ голоморфно обратима в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$.

Оставшаяся часть доказательства проводится по индукции. Пара систем (13) и (14) дает базу индукции. Рассмотрим теперь матрицу K из (12). Отметим, что если L^1-норма матрицы K равна нулю, то системы (13) и (14) совпадают. Таким образом, мы стремимся к тому, чтобы $\|K\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |k_i| = 0$. Чтобы добиться этого, докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $\det P(z)$ *не имеет кратных нулей, тогда существует преобразование систем (13) и (14), которое сохраняет вид матриц коэффициентов (*$\tilde{A}(z)$ *— матричный полином,* $\tilde{A}'(z)$ *— мероморфная матрица с полюсом в порядка* r *в точке* $z = \infty$*), характеристические константы системы (14) и приводит к новой паре систем с фундаментальными матрицами*

$$\overline{Y}'(z) = z^{\overline{K}}\overline{Y}(z)$$

где $\|\overline{K}\|_1 \leq \|K\|_1 - 1$*, что означает, что эти системы ближе друг к другу в смысле* L^1*-метрики, чем исходные.*

Доказательство. Заметим, что корни $\det A(z)$ и $\det \tilde{A}(z)$ совпадают, что следует из (13). Предположим, что в элементах $\{k_i\}$ матрицы K есть отрицательные, то есть существует l, т.ч. $k_1 \geq \ldots \geq k_{l-1} \geq 0 > k_l \geq \ldots \geq k_n$. Рассмотрим точки $q'_1, \ldots, q'_{rn}$, т.ч. $\det \tilde{A}(q'_i) = 0$, $i = 1, \ldots, rn$. Матрица $\tilde{A}(z)$ вырождена в каждой точке $q'_1, \ldots, q'_{rn}$. Заметим, что разность между любыми двумя корнями $\det \tilde{A}(z)$ не может быть целой, т.к. они совпадают с корнями $\det A(z)$, являющимися подмножеством корней $\det P(z)$, где $P(z)$ – периодическая, а $\det P(z)$ не имеет кратных нулей. Т.к. $P(z) = (Y^r(z))^{-1}Y^l(z)$ и $Y^r(z)$ являются голоморфно обратимыми в некоторой правой полуплоскости, то нули матрицы $P(z)$ в этой правой полуплоскости совпадают с нулями $\det Y^l(z)$, но нули $\det Y^l(z)$ конгруэнтны (отличаются на целое) корням $\det A(z)$, т.к.

$$\det Y^l(z+1) = \det A(z) \det Y^l(z),$$

и в некоторой левой полуплоскости $Y^l(z)$ голоморфно обратима. Рассмотрим точку $q = q'_i$ ($\det \tilde{A}(q) = 0$), что означает, что в q существует нетривиальная линейная комбинация строк $\tilde{A}(q)$ с нулевой суммой:

$$\alpha_1 \tilde{a}_{j_1}(q) + \ldots + \alpha_h \tilde{a}_{j_h}(q) = 0, \qquad \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_h \neq 0, \tag{16}$$

где $\tilde{a}_j$ – это j-я строка матрицы $\tilde{A}(z)$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j_1 < \ldots < j_h$.

Применим подготовительное преобразование $\hat{Y}'(z) = \left(\frac{z-q-1}{z}\right)^K \tilde{Y}'(z)$. Теперь системы связаны следующим образом:

$$\hat{Y}'(z) = (z-q-1)^K \tilde{Y}(z).$$

Рассмотрим случай $j_h \geq l$. Применим следующие преобразования:

$$\overline{Y}(z) = (z-q-1)^{D^-_{j_h}} H \tilde{Y}(z), \qquad \overline{Y}'(z) = (z-q-1)^K H (z-q-1)^{-K} \hat{Y}'(z),$$

где H – постоянная матрица вида $H = I + H'$. Все элементы H' – нули, кроме $h'_{j_h j_l} = \alpha_l/\alpha_h, l = 1, \ldots, h-1$. Матрица $D^-_{j_h}$ определяется в Лемме 1. Ясно, что матрица $(z-q-1)^K H (z-q-1)^{-K}$ является полиномом переменной $\frac{1}{z-q-1}$, т.к. H – нижнетреугольная по определению, а диагональные элементы матрицы K убывают. Матрицы коэффициентов изменятся следующим образом:

$$\overline{A}'(z) = (z-q)^K H (z-q)^{-K} \hat{A}'(z) (z-q-1)^K H^{-1} (z-q-1)^{-K}.$$

Таким образом, порядок нуля в бесконечности матрицы $\overline{A}'$ не увеличится и останется r. Вторая матрица коэффициентов:

$$\overline{A}(z) = (z-q)^{D^-_{j_h}} H \tilde{A}(z) H^{-1} (z-q-1)^{D^+_{j_h}}$$

голоморфна в $\mathbb{C}$, т.к. j_h-я строка матрицы $H\tilde{A}(z)$ будет нулевой в $z = q$, и деление на $(z-q)$ не создаст особенности. Теперь для матриц $\overline{Y}(z)$ и $\overline{Y}'(z)$ можно написать:

$$\overline{Y}'(z) = (z-q-1)^{K - D^-_{j_h}} \overline{Y}(z), \ \overline{K} = K - D^-_{j_h}.$$

Осталось применить обратный аналог подготовительного преобразования, чтобы связать системы правильным образом (отметим, что подготовительной преобразование и его обратный аналог голоморфно обратимы в бесконечности):

$$\hat{\overline{Y}}'(z) = \left(\frac{z}{z-q-1}\right)^{\overline{K}} \overline{Y}'(z).$$

Таким образом, мы добавили единицу к одному из отрицательных элементов матрицы K. Т.е. уменьшили ее норму: $\|\overline{K}\|_1 \leq \|K\|_1 - 1$. Осталось вернуть порядок убывания элементам $\overline{K}$, что может быть достигнуто применением матрицы перестановок, являющейся постоянным преобразованием.

Если все элементы матрицы K неотрицательны, то мы можем применить аналогичную процедуру для линейной комбинации столбцов (см. Лемму 4).

Докажем, что есть хотя бы одна линейная комбинация (16) хотя бы в одной точке q'_i, т.ч. $j_h \geqslant l$. Предположим обратное, что линейные комбинации (16) во всех точках $q'_1, \ldots, q'_{rn}$ удовлетворяют $j_h \leqslant l-1$. Рассмотрим минор $\Delta(z)$ матрицы $\tilde{A}(z)$, образованный первыми $l-1$

строками и некоторыми $l-1$ столбцами $\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_{l-1}}$, т.ч. $\Delta(z) \not\equiv 0$. Такой минор существует, т.к. $\det \tilde{A}(z) \not\equiv 0$.

С другой стороны, минор $\Delta(z)$ является полиномом, имеющим rn попарно различных корней $q'_1, ..., q'_{rn}$. С другой стороны (см. (15)):

$$\deg \Delta(z) \leqslant (l-1)r + k_{i_1} + \ldots + k_{i_{l-1}} - k_1 - \ldots - k_{l-1} \leqslant (l-1)r.$$

Получаем противоречие, т.к. полином $\Delta(z) \not\equiv 0$ степени менее $(l-1)r$ имеет nr корней. (Подробнее см. Лемму 4.) $\square$

Используем полученные результаты в доказательстве Теоремы 5. Применяя Лемму 2 конечное число раз, пока $\|K\|_1 > 0$, преобразуем наши системы (13) и (14) к новой паре систем:

$$\bar{\hat{Y}}(z+1) = \bar{\hat{A}}(z)\bar{\hat{Y}}(z), \qquad \bar{\hat{A}}(z) = \bar{\hat{A}}_0 + \ldots + \bar{\hat{A}}_{r-1}z^{r_1-1} + \bar{\hat{A}}_r z^{r_1}, \tag{17}$$

$$\bar{\hat{Y}}'(z+1) = \bar{\hat{A}}'(z)\bar{\hat{Y}}'(z), \qquad \bar{\hat{A}}'(z) = \bar{\hat{A}}'_r z^r + \bar{\hat{A}}'_{r-1}z^{r-1} + \ldots + \bar{\hat{A}}'_0 + \ldots + \bar{\hat{A}}'_{-s}z^{-s} + \ldots \tag{18}$$

для некоторого r_1. Мы сделали $\|K\|_1 = 0$, что означает, что системы (17) и (18) совпадают, то есть мы получили одну новую систему, обладающую правильными свойствами и заданным набором характеристических констант:

$$\bar{\hat{Y}}'(z+1) = \bar{\hat{A}}'(z)\bar{\hat{Y}}'(z), \qquad \bar{\hat{A}}'(z) = \bar{\hat{A}}'_r z^r + \bar{\hat{A}}'_{r-1}z^{r-1} + \ldots + \bar{\hat{A}}'_0. \tag{19}$$

Система (18) имела правильные константы $\{d_i\}$ и порядок полюса r в бесконечности матрицы коэффициентов, система (17) имела полиномиальную матрицу коэффициентов. Кроме того, все примененные преобразования сохраняют матрицу монодромии $P(z)$:

$$\bar{\hat{P}}'(z) = P(z).$$

Это завершает доказательство Теоремы 5, т.к. мы построили систему с заданной монодромией и заданным набором характеристических констант. $\square$

3 Случай q-разностных систем

3.1 Введение в линейные q-разностные системы

Линейная q-разностная система – это система вида:

$$Y(qz) = Q(z)Y(z), \qquad q \in \mathbb{C},\ |q| > 1. \tag{20}$$

Здесь $Q(z)$ – полиномиальная матрица степени μ. Более общий случай рациональной матрицы может быть легко сведен к полиномиальному с помощью следующих преобразований. Рассмотрим систему

$$\hat{Y}(qz) = \hat{Q}(z)\hat{Y}(z) \tag{21}$$

с рациональной матрицей $\hat{Q}(z)$, пусть наименьший общий знаменатель ее элементов имеет вид $(z-a_1)\dots(z-a_l)$. Пусть также $g_i(z)$ – решение следующего одномерного q-разностного уравнения:

$$g(qz) = (z-m)g(z), \tag{22}$$

где $m = a_i$. Рассмотрим теперь замену:

$$Y(z) = g_1(z)\dots g_l(z)\hat{Y}(z)$$

и перепишем систему (21) в виде (20):

$$\hat{Y}(qz) = \frac{Y(qz)}{\prod_i g_i(qz)} = \hat{Q}(z)\frac{Y(z)}{\prod_i g_i(z)} \Rightarrow \frac{Y(qz)}{\prod_i (z-a_i)g_i(z)} = \hat{Q}(z)\frac{Y(z)}{\prod_i g_i(z)} \Rightarrow Y(qz) = Q(z)Y(z),$$

$$Q(z) = \prod_i (z-a_i)\hat{Q}(z)$$

Таким образом, мы получили полиномиальную матрицу коэффициентов. Осталось показать, что решение уравнения (22) существует:

1. При $m = 0$, применяя преобразование $t = \log_q z$ и $g(q^t) = f(t)$, получаем:

   $$g(qz) = zg(z) \Rightarrow f(t+1) = q^t f(t).$$

   Прямой подстановкой убеждаемся, что $f(t) = q^{\frac{1}{2}(t^2-t)}$ – решение. □

2. При $m \neq 0$ рассмотрим другое преобразование:

   $$\begin{cases} z = m\overline{z} \\ y(z) = e^{\pi i \log_q \overline{z}} m^{\log_q \overline{z}} \overline{y}(\overline{z}), \end{cases}$$

   подставим в (22):

   $$e^{\pi i \log_q \overline{z}} m^{\log_q \overline{z}} \overline{y}(\overline{z})(m\overline{z} - m) = e^{\pi i (1+\log_q \overline{z})} m^{(1+\log_q \overline{z})} \overline{y}(q\overline{z}).$$

   Таким образом, мы получаем нормальную форму уравнения (22):

   $$\overline{y}(q\overline{z}) = (1-\overline{z})\overline{y}(\overline{z}). \tag{23}$$

   Снова можно проверить прямой подстановкой, что решениями уравнения (23) будут

   $$\begin{cases} y_0(z) = \left(1-\frac{z}{q}\right)\left(1-\frac{z}{q^2}\right)\dots \\ y_\infty(z) = q^{\frac{1}{2}(t^2-t)} e^{-\pi i t} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \frac{1}{1-\frac{1}{qz}} \dots . \end{cases}$$

   Здесь оба бесконечных произведения сходятся в силу $|q| > 1$. □

Фундаментальные теоремы существования для линейных q-разностных систем ([3], p.561) гарантируют наличие двух матричных решений системы (20) следующего вида:

$$\begin{cases} Y_0(z) = A(z) z^{\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{pmatrix}} \\ Y_\infty(z) = q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)} B(z) z^{\begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sigma_n \end{pmatrix}} \end{cases} \tag{24}$$

Здесь $A(z)$ аналитичен в $z = 0$, $B(z)$ аналитичен в $z = \infty$ и определители старшего коэффициента ряда $A(z)$ в 0 и старшего коэффициента ряда $B(z)$ в ∞ не нули. Кроме того, $\{\rho_i\}$ и $\{\sigma_j\}$ – это некоторые характеристически константы, μ – это степень $Q(z)$, $t = \log_q z$. Из (20), используя q-периодичность решений, можно сделать вывод, что $Y_0(z)$ аналитична при $z \neq 0$ и $z \neq \infty$ (т.к. можем увеличить окрестность аналитичности, умножая на q, т.ч. $|q| > 1$). Аналогично, $Y_\infty(z)$ аналитична везде, кроме $z = 0$, $z = \infty$ и, возможно, полюсов.

Введем теперь понятие *матрицы монодромии* для q-разностного случая. Следуя определению для разностного случая, матрица монодромии - это снова отношение фундаментальных матриц Y_0 и Y_∞:

$$Y_0(z) = Y_\infty(z) P(z). \tag{25}$$

$P(z)$ аналитична для $z \neq 0$ и $z \neq \infty$, мы также можем легко показать q-периодичность:

$$\begin{cases} Y_0(qz) = Q(z) Y_0(z) \\ Y_\infty(qz) = Q(z) Y_\infty(z) \\ Y_0(z) = Y_\infty(z) P(z) \end{cases} \Rightarrow Y_\infty^{-1}(qz) Y_0(qz) = Y_\infty^{-1}(z) Q^{-1}(z) Q(z) Y_0(z) \Rightarrow P(qz) = P(z). \square$$

3.2 Свойства матрицы монодромии $P(z)$

3.2.1 Соотношения на элементы $P(z)$

Будем изучать свойства матрицы $P(z)$. Во-первых, сделаем замену $z = q^t$ и будем рассматривать нашу матрицу $\overline{P}(t) = P(z)$ на t-плоскости. Разделим t-плоскость на параллелограммы, соответсвующие периодам $\omega = 1$ и $\omega' = 2\pi i/\ln q$. Рассмотрим $ABCD$ – один из таких параллелограммов с вершинами

$$A = t_0, B = t_0 + 1, C = t_0 + 1 + 2\pi i/\ln q, D = t_0 + 2\pi i/\ln q.$$

Мы знаем, что $P(z) = P(qz)$, откуда следует, что $\overline{P}(t) = \overline{P}(t+1)$. Таким образом, имеем:

$$\overline{P}(A) = \overline{P}(B), \overline{P}(C) = \overline{P}(D).$$

Следующим шагом найдем соотношения между $\overline{P}(A)$ и $\overline{P}(D)$, а также $\overline{P}(C)$ и $\overline{P}(B)$. Вспомним, что

$$P(z) = Y_\infty^{-1}(z) Y_0(z). \tag{26}$$

Положительный обход на z-плоскости вокруг $z = 0$ приведет к тому, что матрицы Y_0 и Y_∞ умножатся на их монодромию (в обычном смысле ветвления). Из явного вида Y_0, заданного формулой (24), нетрудно видеть, что $Y_0(z)$ станет $Y_0(z)M_0$, где

$$M_0 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\rho_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\rho_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{2\pi i\rho_n} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, $Y_\infty(z)$ изменится следующим образом:

$$(-1)^\mu e^{2\pi i\mu t} e^{-2\pi^2\mu/\ln q} Y_\infty(z) M_\infty,$$

где

$$M_\infty = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-2\pi i\sigma_n} \end{pmatrix}.$$

Если мы теперь подставим оба результата в (26), то найдем, как меняется матрица $P(z)$ при положительном обходе вокруг $z = 0$:

$$(-1)^\mu e^{-2\pi i\mu t} e^{2\pi^2\mu/\ln q} M_\infty^{-1} P(z) M_0.$$

Кроме того, при положительном обходе вокруг нуля $t = \log_q z$ принимает вид $t + 2\pi i/\ln q$. Заметим, что это как раз соответствует проходу вдоль ребра AD параллелограмма $ABCD$. В результате имеем:

$$\overline{P}(D) = (-1)^\mu e^{-2\pi i\mu t} e^{2\pi^2\mu/\ln q} M_\infty^{-1} \overline{P}(A) M_0,$$
$$\overline{P}(C) = (-1)^\mu e^{-2\pi i\mu t} e^{2\pi^2\mu/\ln q} M_\infty^{-1} \overline{P}(B) M_0. \square$$

Можно записать те же соотношения для одного элемента $\overline{p}_{ij}(t)$ матрицы $\overline{P}(t)$:

$$\begin{cases} \overline{p}_{ij}(t + 2\pi i/\ln q) = (-1)^\mu e^{-2\pi i\mu t} e^{2\pi^2\mu/\ln q} e^{2\pi i(\sigma_i+\rho_j)} \overline{p}_{ij}(t) \\ \overline{p}_{ij}(t+1) = \overline{p}_{ij}(t). \end{cases} \tag{27}$$

3.2.2 Явный вид элементов $P(z)$

Мы увидели, что $P(z)$ напоминает двупериодические функции, поэтому естественно попробовать представить матрицу монодромии, используя, например, функции Вейерштрасса. При этом нам нужно убедиться, что в первом соотношении в формуле (27) возникает правильный коэффициент. Следуя рассуждениям Биркгофа, найдем явный вид матрицы монодромии.

Утверждение 1 (Birkhoff [3]). *Элемент $\overline{p}_{ij}(t)$ матрицы $\overline{P}(t)$ имеет вид:*

$$\overline{p}_{ij}(t) = c_{ij} e^{\frac{-\eta\mu}{2}t^2 + \left(\eta(\sigma_i+\rho_j+v) - \eta'(\frac{\mu}{2}+u)\right)t} \sigma(t - a_1^{(i,j)}) \dots \sigma(t - a_\mu^{(i,j)}), \tag{28}$$

где $t = \log_q z$, $\sigma(t)$ – сигма-функция Вейерштрасса, соответствующая периодам $\omega = 1$, $\omega' = \frac{2\pi i}{\ln q}$, μ – степень полиномиальной матрицы коэффициентов $Q(z)$ из (20), $\{\sigma_i\}$ и $\{\rho_j\}$ – характеристические константы из (24), u и v – некоторые целые числа. Кроме того, выполнено следующее условие:

$$\sum_{k=1}^{\mu} {a_k}^{(i,j)} = \sigma_i + \rho_j - \frac{\mu\pi i}{\ln q} + v - \frac{2u\pi i}{\ln q}. \tag{29}$$

Доказательство.

1. Будем искать решение в следующем виде. Предположим для элементов $\overline{P}(t)$, что

$$\overline{p}_{ij}(t) = c e^{at^2+bt} \prod_{k=1}^{\mu} \sigma(t - a_k). \tag{30}$$

Вспомним соотношения для сигма-функции Вейерштрасса:

$$\begin{cases} \sigma(t + \frac{2\pi i}{\ln q}) = -e^{\eta'\left(t+\frac{\pi i}{\ln q}\right)}\sigma(t) \\ \sigma(t+1) = -e^{\eta(t+1/2)}\sigma(t) \\ \eta\frac{2\pi i}{\ln q} - \eta' = 2\pi i \end{cases} \tag{31}$$

Заметим, что требование $\Re(\omega/\omega') > 0$ выполнено. Применим второе соотношение из (27) к (30). Ипользуя (31), легко получаем:

$$a = -\frac{\eta\mu}{2}, b = \eta\sum_{k=1}^{\mu} a_k + \mu\pi i + 2u\pi i, \tag{32}$$

где u – произвольное целое. Возьмем теперь значения a и b из (32), используем в (28), и подставим все в первое соотношение из (27). Получаем:

$$\sum_{k=1}^{\mu} a_k + \frac{\mu\pi i}{\ln q} = \sigma_i + \rho_j + v - \frac{2u\pi i}{\ln q}, \tag{33}$$

где v – произвольное целое. Выражения (32) и (33) эквивалентны (27), записанным для (30). Найдем теперь значение $\sum_{k=1}^{\mu} a_k$ из (33) и подставим в выражение для b в формуле (32). Имеем:

$$b = \eta(\sigma_i + \rho_j + v) - \eta'(\mu/2 + u)$$

В итоге, получаем:

$$\overline{p}_{ij}(t) = c_{ij} e^{\frac{-\eta\mu}{2}t^2 + \left(\eta(\sigma_i+\rho_j+v) - \eta'(\frac{\mu}{2}+u)\right)t} \sigma(t - a_1) \dots \sigma(t - a_\mu)$$

с условием, что

$$\sum_{k=1}^{\mu} a_k = \sigma_i + \rho_j - \frac{\mu\pi i}{\ln q} + v - \frac{2u\pi i}{\ln q}.$$

Здесь множество констант $\{a_k\}$ различно для каждого $\overline{p}_{ij}$, то есть нам нужно добавить индексы $\{a_k^{(i,j)}\}_{k=1}^{\mu}$. Таким образом, первая часть доказательства завершена. Мы получили характеристические константы $\{c_{ij}\}$ и $\{a_k^{(i,j)}\}_{k=1}^{\mu}$ с уловием (29), определенным с точностью до целых v и u. Эти характеристические константы определяют монодромию $P(z)$.

2. Осталось показать, что $\overline{p}_{ij}(t)$ может быть представлен в виде (30). Возьмем произвольную функцию $\psi(t)$, удовлетворяющую условиям (27). Кроме того, рассмотрим $\phi(t)$ – функцию конкретного вида (30). Тогда отношение $\psi(t)/\phi(t)$ будет двупериодической функцией, аналитичной везде, кроме полюсов. Таким образом, эту функцию можно представить, как отношение произведений сигма-фукнций Вейерштрасса:

$$\frac{\psi(t)}{\phi(t)} = C\frac{\sigma(t-\gamma_1)\dots\sigma(t-\gamma_k)}{\sigma(t-\beta_1)\dots(t-\beta_k)}, \sum\gamma_i = \sum\beta_i$$

Теперь, если мы умножим это отношение на $\phi(t)$, выраженную через произведение сигма-функций, мы получим $\psi(t)$ – целую функцию . Это означает, что для любого нуля функции $\sigma(t-\gamma_j)$ в числителе найдется соответсвующий ноль β_j фукнции $\sigma(t-\beta_j)$ в знаменателе. Эти пары нулей могут быть сокращены с точностью до коэффициента e^{ct+d}. Значит, $\psi(t)$ можно также представить в виде (30), что завершает доказательство. $\square$

3.3 Проблема Римана-Гильберта для q-разностного случая

3.3.1 Обобщенная проблема Римана-Гильберта

Назовем константы $\{\rho_i\}, \{\sigma_i\}, \{c_{i,j}\}, \{a_k^{(i,j)}\}_1^\mu$ *характеристическими константами* матрицы монодромии $P(z)$ и q-разностной системы (20). Теперь мы можем сформулировать аналог проблемы Римана-Гильберта для q-разностных систем:

Построить q-разностную систему с заданным множеством характеристических констант (т.е. с заданной матрицей монодромии $P(z)$ и заданными степенными асимптотиками решений) и с полиномиальной матрицей коэффициентов $Q(z)$ степени μ.

Биркгоф предложил следующее решение:

Теорема 6 (Birkhoff [3], p.566). *Существует линейная q-разностная система (20) с матричными решениями $Y_0(z)$ и $Y_\infty(z)$, имеющая заданные характеристические константы $\{\rho_i\}, \{\sigma_i\}, \{c_{i,j}\}, \{a_k^{(i,j)}\}_1^\mu$ или сдвинутые характеристические константы $\{\rho_j\}, \{\sigma_j + l_j\}, \{c_{i,j}\}, \{a_k^{(i,j)}\}_1^\mu$, где $\{l_j\}$ – целые. Для произвольной петли вокруг $z = 0$, пересекающей каждую спираль вида*

$$\theta = c + \frac{\arg(q)}{\ln|q|}\ln r,\ \ r,\theta \text{ - полярные координаты} \tag{34}$$

только один раз и не проходящей через точки z, т.ч. $\det P(z) = 0$, существуют матрицы $Y_0(z)$ и $Y_\infty(z)$, такие что $\det Y_0(z) \neq 0$ внутри или вдоль петли, а элементы $Y_\infty(z)$ аналитичны, и $\det Y_\infty(z)$ не ноль снаружи петли.

3.3.2 Усиленный вариант Теоремы 6

Решение Биркгофа может быть неполным в том случае, когда построенная система оказывается со сдвинутыми константами $\{\sigma_j + l_j\}$. Мы предлагаем усилить Теорему 6 следующим образом:

Теорема 7. *Пусть константы* $\{\rho_i\}, \{\sigma_i\}$ *и* $\{c_{i,j}\}, \{a_k^{(i,j)}\}_1^\mu$ *таковы, что определитель матрицы монодромии* $P(z)$*, заданной этими константами, не имеет кратных нулей. Тогда существует линейная* q*-разностная система (20) с матричными решениями* $Y_0(z), Y_\infty(z)$ *и множеством характеристических констант* $\{\rho_i\}, \{\sigma_i\}$ *и* $\{c_{i,j}\}, \{a_k^{(i,j)}\}_1^\mu$ *в точности.*

Докажем эту теорему в несколько шагов. Сначала рассмотрим следующую лемму.

Лемма 3. *Рассмотрим линейную* q*-разностную систему (20) с полиномиальной матрицей* $Q(z) = Q_\mu z^\mu + \dots + Q_0$ *степени* μ *и характеристическими константами* $\{\rho_j\}, \{\sigma_j + l_j\}, \{c_{i,j}\}, \{a_k^{(i,j)}\}_1^\mu$*, где* $\{l_j\}$ *– целые числа. Тогда существует линейная* q*-разностная система* $Y'(qz) = Q'(z)Y'(z)$ *с характеристическими константами* $\{\rho'_i\}, \{\sigma_i\}, \{c_{i,j}\}, \{a_k^{(i,j)}\}_1^\mu$ *и рациональной матрицей коэффициентов* $Q'(z) = Q'_\mu z^\mu + \ldots + Q'_0 + \ldots Q_{-s}z^{-s}$*, удовлетворяющей следующему соотношению:*

$$Q'(z) = M(qz)Q(z)M^{-1}(z)$$

для некоторой рациональной матрицы $M(z)$*.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что можно считать старший коэффициент ряда в Y_∞ единичным $B_0 = I$, т.к. B_0 – константная матрица и $\det B_0 \neq 0$. Кроме того, можно считать, что коэффициент Q_μ в $Q(z)$ из системы (20) имеет следующий вид: $Q_\mu = q^{\mathrm{diag}(-\sigma_1,\ldots,-\sigma_n)}$. Докажем это.

Пусть у нас есть произвольная система $\hat{Y}(qz) = \hat{Q}(z)\hat{Y}(z)$, удовлетворяющая условиям леммы. Покажем, что мы можем привести ее к системе $Y(qz) = Q(z)Y(z)$ с $Q_\mu = q^{\mathrm{diag}(-\sigma_1,\ldots,-\sigma_n)}$ и $B_0 = I$. Рассмотрим преобразование $Y(z) = \hat{B}_0^{-1}\hat{Y}(z)$ и сразу получим, что $B_0 = I$ в Y_∞. Теперь рассмотрим $Q(z)$ и будем пользоваться явным видом (24) решения Y_∞:

$$Q(z) = Y_\infty(qz)Y_\infty^{-1}(z) = q^{\mu t}B(qz)(qz)^{\mathrm{diag}(-\sigma_1,\ldots,-\sigma_n)}B^{-1}(z)z^{\mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} =$$

$$= z^\mu\left(B_0 + \frac{B_1}{qz} + \ldots\right)(qz)^{\mathrm{diag}(-\sigma_1,\ldots,-\sigma_n)}\left(B_0 + \frac{B_1}{z} + \ldots\right)^{-1}z^{\mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}.$$

Т.к. мы хотим найти коэффициент при старшей степени μ в полиномиальной матрице $Q(z)$, нам достаточно рассмотреть только старшие коэффициенты в рядах. Используя факт, что старший коэффициент ряда $B^{-1}(z)$ – это $B_0^{-1} = B_0 = I$, получаем:

$$Q_\mu = B_0(qz)^{\mathrm{diag}(-\sigma_1,\ldots,-\sigma_n)}B_0^{-1}z^{\mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} = q^{\mathrm{diag}(-\sigma_1,\ldots,-\sigma_n)}.$$

Теперь вернемся к доказательству Леммы 3.

Рассмотрим преобразование, которое заменяет один конкретный сдвиг l_k из $\{l_j\}$ на $l_k \pm 1$. Это позволит завершить доказательство за конечное число шагов.

Рассмотрим следующие преобразования:

1. $Y''(z) = z^{D_k^\pm}Y(z)$, где $D_k^\pm = \mathrm{diag}(\ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots)$, т.ч. k-й элемент равен ± 1,
2. $\tilde{Y}(z) = B_0''^{-1}Y''(z)$,

Выясним, как преобразование 1 повлияет на решения Y_0 и Y_∞. Рассмотрим сначала Y_∞:

$$z^{D_k^\pm} Y_\infty = q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)} z^{D_k^\pm} \left(B_0 + \frac{B_1}{z} + \dots \right) z^{\mathrm{diag}(\sigma_1+l_1,\dots,\sigma_k+l_k,\dots,\sigma_n+l_n)} =$$

$$= q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)} \left(B_0'' + \frac{B_1''}{z} + \dots \right) z^{D_k^\pm} z^{\mathrm{diag}(\sigma_1+l_1,\dots,\sigma_k+l_k,\dots,\sigma_n+l_n)} =$$

$$= q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)} \left(B_0'' + \frac{B_1''}{z} + \dots \right) z^{\mathrm{diag}(\sigma_1+l_1,\dots,\sigma_k+l_k\pm1,\dots,\sigma_n+l_n)}$$

Таким образом, нам нужно пронести $z^{D_k^\pm}$ через ряд $B(z)$, чтобы получить $z^{D_k^\pm}$ справа от $B(z)$. Единственный коэффициент, за которым нужно следить, чтобы не возникло особенностей – это $B_0 = I$. Ясно, что $z^{D_k^\pm} B_0$ – это просто умножение k-й строки матрицы B_0 на $z^{\pm1}$, а $B_0 z^{D_k^\pm}$ – умножение k-го столбца B_0 на $z^{\pm1}$. Таким образом, в силу диагональности B_0, новый ряд не будет иметь отрицательных степеней $\frac{1}{z}$. Заметим, что $B_0'' \neq I$, и $\det B_0'' = 1$ (это следует из явного вида B_0''). Теперь применим второе преобразование, чтобы снова сделать старший коэффициент ряда единичной матрицей. Данные преобразование, возможно, изменят характеристические константы $\{\rho_i\}$ в $Y_0(z)$, но цель этой леммы – исправить соответсвующие характеристические константы в $Y_\infty(z)$.

Один шаг применения преобразований ведет нас к системе $\tilde{Y}(qz) = \tilde{Q}(z)\tilde{Y}(z)$, для которой

$$\tilde{Q}(z) = B_0''^{-1} (qz)^{D_k^\pm} Q(z) (z^{D_k^\pm})^{-1} B_0''.$$

Докажем, что старшая степень рациональной матрицы $\tilde{Q}(z)$ – это μ, то есть, что $\tilde{Q}(z) = \tilde{Q}_\mu z^\mu + \dots + \tilde{Q}_0 + \dots + \tilde{Q}_{-1} z^{-1}$. Ясно, что константа B_0'' на степень не влияет, т.е. достаточно проверить, что $(qz)^{D_k^\pm} Q(z) (z^{D_k^\pm})^{-1}$ сохраняет старшую степень μ, что снова следует из свойств умножения на $z^{D_k^\pm}$ и диагональности Q_μ.

Таким образом, мы поменяли l_k на $l_k \pm 1$. Значит, доказательство можно завершить за конечное число шагов. Кроме того, ясно, что один шаг (композиция преобразований 1 и 2) является рациональным, как композиция рационального и константного преобразования, сохраняющих старшую степень матрицы коэффициентов. Значит, за конечное число шагов мы также построим рациональное преобразование, сохраняющее старшую степень. Назовем эту композицию $M(z)$, заметим, что она будет иметь особенности только в 0 и ∞ по построению. В результате, мы делаем преобразование $Y'(z) = M(z)Y(z)$ и получаем систему $Y'(qz) = Q'(z)Y'(z)$ с характеристическими константами $\{\sigma_i\}$ и такой же монодромией $P(z)$, как и исходная система, а также с рациональной матрицей коэффициентов $Q'(z)$, удовлетворяющей следующему соотношению:

$$Q'(z) = M(qz)Q(z)M^{-1}(z). \ \square$$

Доказательство Теоремы 7.
Пусть нам даны характеристические константы $\{\rho_i\}$, $\{\sigma_i\}$, $\{c_{i,j}\}$, $\{a_k^{(i,j)}\}_1^\mu$. Применим Теорему 6 Биркгофа и построим по ней систему

$$Y(qz) = Q(z)Y(z). \tag{35}$$

Рассматриваем случай, когда система, полученная по Теореме 6, имеет сдвинутые характеристические константы $\{\rho_j\}, \{\sigma_j + l_j\}, \{c_{i,j}\}, \{a_k^{(i,j)}\}_1^\mu$. Матрица $Q(z)$ имеет вид:

$$Q(z) = Q_\mu z^\mu + \cdots + Q_0.$$

Применяем Лемму 3 и получаем систему

$$Y'(qz) = Q'(z)Y'(z), \tag{36}$$

где

$$Q'(z) = M(qz)Q(z)M^{-1}(z), \ Q'(z) = Q'_\mu z^\mu + \cdots + Q'_0 + \dots Q_{-s}z^{-s}.$$

Как мы знаем, матрица $M(z)$ рациональна и голоморфно обратима в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, как и обратная к ней $M^{-1}(z)$. Значит, мы можем применить Лемму Соважа и получить следующее разложение:

$$U(z)M^{-1}(z) = z^{-D}W(z),$$

где $U(z)$ голоморфно обратима в $\mathbb{C}$, $W(z)$ голоморфно обратима в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$ и $D = \mathrm{diag}(d_1 \dots d_n)$, т.ч. $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, где $\{d_i\}$ – целые числа.

Пользуясь данным разложением, будем преобразовывать одновременно обе системы – исходную (35) и с исправленными константами (36). Подчеркнем, что система (36) является "хорошей" в бесконечности (т.к. у нее правильные характеристические константы в Y_∞), а система (35) является "хорошей" в нуле (т.к. у нее сохранены правильные свойства Y_0). Чтобы прояснить обозначения, отметим, что система (36) и все системы со штрихом, которые мы далее будем строить, соответсвуют "хорошему поведению" в бесконечности. С другой стороны, система (35) и все системы далее без штриха являются "хорошими" в нуле. Наконец, рассмотрим новую пару систем:

$$\tilde{Y}(qz) = \tilde{Q}(z)\tilde{Y}(z), \ \tilde{Q}(z) = U(qz)Q(z)U^{-1}(z), \tag{37}$$

где $\tilde{Y}(z) = U(z)Y(z)$ и

$$\tilde{Y}'(qz) = \tilde{Q}'(z)\tilde{Y}'(z), \ \tilde{Q}'(z) = W(qz)Q'(z)W^{-1}(z), \tag{38}$$

где $\tilde{Y}'(z) = W(z)Y'(z)$. Матрицы $U(z)$ и $W(z)$ голоморфно обратимы в $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$ соответственно, тогда

$$\tilde{Q}(z) = \tilde{Q}_{\mu_1}z^{\mu_1} + \cdots + \tilde{Q}_0, \ \tilde{Q}'(z) = \tilde{Q}'_\mu z^\mu + \cdots + \tilde{Q}'_{-s_1}z^{-s_1} \tag{39}$$

для некоторых μ_1 и s_1. Системы (37) и (38) связаны калибровочным преобразованием:

$$\tilde{Y}'(z) = z^D\tilde{Y}(z), \tag{40}$$

откуда следует, что

$$\tilde{Q}'(z) = (qz)^D\tilde{Q}(z)z^{-D}. \tag{41}$$

Из (41) и вида (39) матриц $\tilde{Q}'(z)$ и $\tilde{Q}(z)$ делаем вывод, что элементы $\tilde{q}_{ij}(z)$ матрицы $\tilde{Q}(z)$ являются многочленами степени $\deg \tilde{q}_{ij}(z) \leq \mu + d_j - d_i$.

Приведем пояснение, иллюстрирующее общую картину доказательства. Рассуждения основываются на идее одновременного преобразования систем, соответствующих бесконечности и нулю, и приведения их к двум почти совпадающим системам, связанным через калибровочное преобразование (40). При этом одна из систем имеет "хорошие" свойства в бесконечности, вторая – в нуле. Значит, останется показать, что можно сделать их совпадающими с сохранением всех свойств. Преобразуем системы мы одновременно, используя разложение из Леммы Соважа:

$$0: \begin{cases} Y(qz) = Q(z)Y(z) \\ Q(z) = Q_\mu z^\mu + \cdots + Q_0 \end{cases} \xrightarrow{U} \begin{cases} \tilde{Y}(qz) = \tilde{Q}(z)\tilde{Y}(z) \\ \tilde{Q}(z) = \tilde{Q}_{\mu_1} z^{\mu_1} + \cdots + \tilde{Q}_0 \end{cases}$$

$$\infty: \begin{cases} Y'(qz) = Q'(z)Y'(z) \\ Q'(z) = Q'_\mu z^\mu + \cdots + Q'_{-s} z^{-s} \end{cases} \xrightarrow{W} \begin{cases} \tilde{Y}'(qz) = \tilde{Q}'(z)\tilde{Y}'(z) \\ \tilde{Q}'(z) = \tilde{Q}'_\mu z^\mu + \cdots + \tilde{Q}'_{-s_1} z^{-s_1} \end{cases},$$

Заметим теперь, что новые системы совпадут, если L^1-норма матрицы D из (40) равна нулю. Значит, нам нужно уменьшить $\|D\|_1$ до нуля, чтобы завершить доказательство Теоремы 7, т.е. нам нужно сделать матрицу z^D единичной. Чтобы показать, что это возможно сделать с сохранением всех свойств, докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Для случая, когда $\det P(z)$ не имеет кратных нулей, существуют изомонодромные преобразования систем (37) и (38), сохраняющие вид (39) матрицы коэффициентов (полиномиальный вид матрицы коэффициентов системы (37) и порядок полюса μ матрицы коэффициентов системы (38)), характеристические константы $\{\rho_i\}$ системы (37), характеристические константы $\{\sigma_j\}$ системы (38) и приводящие к новой паре систем с фундаментальными матрицами $\overline{Y}(z)$ и $\overline{Y}'(z)$, связанными следующим калибровочным преобразованием:*

$$\overline{Y}'(z) = z^{\overline{D}}\overline{Y}(z),$$

где $\|\overline{D}\|_1 \leq \|D\|_1 - 1$, что означает, что новые системы ближе, чем исходные.

Доказательство.

1. Сначала заметим, что корни $\det Q(z)$ и $\det \tilde{Q}(z)$ совпадают, это следует из (37). Более того, любые два нуля $\det Q(z)$ не могут отличаться умножением на q, т.к. корни $\det Q(z)$ образуют подмножество корней $\det P(z)$, где $P(z)$ – q-периодичная матрица монодромии, т.ч. $\det P(z)$ не имеет кратных корней. Рассмотрим некоторую точку $\alpha = \alpha_i$, для которой $\det \tilde{Q}(z) = 0$.

   Предположим, что среди $\{d_i\}$ в матрице D есть отрицательные числа, то есть, что $d_1 \geq \ldots \geq 0 > d_k \geq \ldots \geq d_n$. Теперь, т.к. $\det \tilde{Q}(\alpha) = 0$, то существует нетривиальная линейная комбинация строк $\tilde{q}_{i_j}$ матрицы $\tilde{Q}(z)$ (где $j = 1, \ldots, l$) с нулевой суммой и с ненулевыми $\{s_i\}$ для некоторых индексов строк $i_1 < \cdots < i_l$:

   $$s_1\tilde{q}_{i_1}(\alpha) + \ldots + s_l\tilde{q}_{i_l}(\alpha) = 0. \quad (42)$$

   Сначала сделаем подготовительное преобразование $\hat{Y}'(z) = \left(\frac{z-\alpha q}{zq}\right)^D \tilde{Y}'(z)$. Теперь системы связаны следующим образом:

   $$\hat{Y}'(z) = \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^D \tilde{Y}(z).$$

Рассмотрим случай, когда $i_l \geq k$ (т.е. на диагонали D есть отрицательный элемент, соответствующий ненулевому индексу s_l). Тогда применим следующее преобразование и получим новую пару систем:

$$\overline{Y}(z) = \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{D_{i_l}^-} H\tilde{Y}(z),\ \overline{Y}'(z) = \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{D} H \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{-D} \hat{Y}'(z),$$

где H - постоянная матрица вида $H = I + H'$. Все элементы H' – нули, кроме $h'_{i_l i_j} = s_j/s_l, j = 1, \ldots, l-1$. Матрица $D_{i_l}^-$ определена в Лемме 3. Матрица $\left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{D} H \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{-D}$ является полиномом переменной $\frac{q}{z-\alpha q}$, т.к. H – нижнетреугольная по определению, а диагональные элементы D расположены по убыванию. Матрица коэффициентов системы, соответствующей бесконечности, изменится следующим образом:

$$\overline{Q}'(z) = (z-\alpha)^D H (z-\alpha)^{-D} \hat{Q}'(z) \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{D} H^{-1} \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{-D}.$$

Таким образом, порядок полюса в бесконечности у $\overline{Q}'$ не вырастет и останется μ (т.к. $\left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{D} H \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{-D}$ голоморфно обратима в бесконечности). Кроме того, ясно, что матрица коэффициентов "хорошей в нуле" системы

$$\overline{Q}(z) = (z-\alpha)^{D_{i_l}^-} H\tilde{Q}(z) H^{-1} \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{D_{i_l}^+}$$

голоморфна в $\mathbb{C}$, т.к. i_l-я строка в $H\tilde{Q}(z)$ будет нулевой в $z = \alpha$, т.е. деление на $(z-\alpha)$ не создаст особенности. Теперь для матриц $\overline{Y}(z)$ и $\overline{Y}'(z)$ можно написать:

$$\overline{Y}'(z) = \left(\frac{z}{q} - \alpha\right)^{D - D_{i_l}^-} \overline{Y}(z),\ \overline{D} = D - D_{i_l}^-.$$

Осталось применить аналог обратного подготовительного преобразования, чтобы системы были связаны правильно. Кроме того, отметим, что подготовительное преобразование и аналог обратного к нему являются голоморфно обратимыми в бесконечности и применяются только к системе, соответствующей бесконечности:

$$\hat{\overline{Y}}'(z) = \left(\frac{qz}{z - q\alpha}\right)^{\overline{D}} \overline{Y}'(z).$$

В результате мы добавили единицу к одному из отрицательных элементов D. Тогда $\|\overline{D}\|_1 \leq \|D\|_1 - 1$. Осталось только вернуть порядок убывания элементам $\overline{D}$, что может быть достигнуто применением матрицы перестановок, являющейся константным преобразованием.

2. Покажем, что случай, когда для всех $\alpha = \alpha_j, j = 1, \ldots, \mu n$ линейная комбинация (42) удовлетворяет $i_l < k$, невозможен. Докажем от противного. Как мы заметили в прошлом пункте, все $\{\alpha_i\}$ попарно различны. Тогда в каждой точке α_i первые $k-1$ строк матрицы $\tilde{Q}(\alpha_i)$ линейно зависимы. Тогда возьмем нетривиальный минор $\Delta(z)$ матрицы $\tilde{Q}(z)$, образованный первыми $k-1$ строками и некоторыми $k-1$ столбцами с номерами

$i_1, \dots, i_{k-1}$, который, очевидно, существует. Тогда, используя (41) и убывание элементов D, получаем, что степень этого минора удовлетворяет следующему соотношению:

$$\deg(\Delta(z)) \leq \mu(k-1) - (d_1 + \ldots + d_{k-1}) + (d_{i_1} + \ldots + d_{i_{k-1}}) \leq \mu(k-1).$$

С другой стороны, корни $\Delta(z)$ включают все $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu n}$. Таким образом, получаем противоречие, т.к. количество корней многочлена не может превышать его степени.

3. Рассмотрим теперь случай, когда нет отрицательных d_i. Доказательство можно провести аналогично, работая со столбцами, а не строками. В общем случае, используя уже доказанное, мы можем сначала убрать все отрицательные $\{d_i\}$ в матрице D. Если не останется положительных чисел, то все доказано, иначе должны быть некоторые положительные элементы в D, т.е. $d_1 \geq \ldots \geq d_k > 0 = d_{k+1} = \ldots = d_n$. Теперь, т.к. $\det \tilde{Q}(\alpha) = 0$, то существует нетривиальная линейная комбинация с нулевой суммой столбцов $\tilde{q}_{i_j}$ матрицы $\tilde{Q}(z)$, где $j = 1, \dots, l$ с ненулевыми $\{s_i\}$ для некоторых индексов столбцов $i_1 < \cdots < i_l$:

$$s_1 \tilde{q}_{i_1}(\alpha) + \ldots + s_l \tilde{q}_{i_l}(\alpha) = 0.$$

Снова применим подготовительное преобразование $\hat{Y}'(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z}\right)^D \tilde{Y}'(z)$. Тогда:

$$\hat{Y}'(z) = (z-\alpha)^D \tilde{Y}(z).$$

Рассмотрим случай, когда $i_1 \leq k$ (т.е. существует положительный элемент D, соответствующий ненулевому индексу s_1). Теперь применим следующие преобразования и получим новую пару систем:

$$\overline{Y}(z) = (z-\alpha)^{D_{i_1}^+} H^{-1} \tilde{Y}(z),\ \overline{Y}'(z) = (z-\alpha)^D H^{-1} (z-\alpha)^{-D} \hat{Y}'(z),$$

где H – постоянная матрица вида $H = I + H'$, где все элементы H' – нули, кроме $h'_{i_j i_1} = s_j/s_1, j = 2, \dots, l$ (в этом случае мы ставим коэффициенты линейной комбинации (42) в i_1-й столбец матрицы H'). Докажем теперь, что матрица $(z-\alpha)^D H^{-1} (z-\alpha)^{-D}$ является полиномом переменной $\frac{1}{z-\alpha}$. Имеем: $(z-\alpha)^D H^{-1}(z-\alpha)^{-D} = ((z-\alpha)^D H (z-\alpha)^{-D})^{-1}$, где $(z-\alpha)^D H (z-\alpha)^{-D}$ – полином переменной $\frac{1}{z-\alpha}$, что следует из вида H и убывания элементов D. Т.к. $\det (z-\alpha)^D H (z-\alpha)^{-D} = 1$, то по правилу Крамера получаем, что обратная матрица $(z-\alpha)^D H^{-1} (z-\alpha)^{-D}$ также является многочленом переменной $\frac{1}{z-\alpha}$. Кроме того, матрица коэффициентов "хорошей в бесконечности" системы будет меняться следующим образом:

$$\overline{Q}'(z) = (qz-\alpha)^D H^{-1} (qz-\alpha)^{-D} \hat{Q}'(z) (z-\alpha)^D H (z-\alpha)^{-D}.$$

Т.е. порядок полюса в бесконечности матрицы $\overline{Q}'$ не увеличится и останется μ (т.к. $(z-\alpha)^D H^{-1} (z-\alpha)^{-D}$ голоморфно обратима в бесконечности). Кроме того, можно заметить, что матрица коэффициентов "хорошей в нуле" системы

$$\overline{Q}(z) = (qz-\alpha)^{D_{i_1}^+} H^{-1} \tilde{Q}(z) H (z-\alpha)^{D_{i_1}^-}$$

голоморфна в $\mathbb{C}$, т.к. i_1-й столбец матрицы $\tilde{Q}(z)H$ будет нулевым в точке $z = \alpha$, т.о. деление на $(z-\alpha)$ не создаст особенности. Теперь для матриц $\overline{Y}(z)$ и $\overline{Y}'(z)$ мы можем написать:

$$\overline{Y}'(z) = (z-\alpha)^{D - D_{i_1}^+} \overline{Y}(z),\ \overline{D} = D - D_{i_1}^+.$$

Осталось применить аналог обратного к подготовительному преобразованию, чтобы полученные системы были связаны правильно:

$$\hat{\overline{Y}}'(z) = \left(\frac{z}{z-\alpha}\right)^{\overline{D}} \overline{Y}'(z).$$

Таким образом, мы вычли единицу из одного из положительных элементов матрицы D. Тогда $\|\overline{D}\|_1 \le \|D\|_1 - 1$. Остается только вернуть порядок убывания элементам $\overline{D}$, что может быть достигнуто применением постоянной матрицы перестановок. Кроме того, нужно гарантировать, что существует положительный (ненулевой) элемент матрицы D, соответствующий индексу i_1. Доказательство этого факта в точности совпадает с доказательством аналогичного утверждения во втором пункте. $\square$

Вернемся к доказательству Теоремы 7. Применяя Лемму 4 конечное число раз, пока $\|D\|_1 > 0$, мы преобразуем наши системы (37) и (38) к новой паре систем:

$$\hat{\overline{Y}}(qz) = \hat{\overline{Q}}(z)\hat{\overline{Y}}(z),\ \hat{\overline{Q}}(z) = \hat{\overline{Q}}_{\mu_1} z^{\mu_1} + \dots + \hat{\overline{Q}}_0, \tag{43}$$

$$\hat{\overline{Y}}'(qz) = \hat{\overline{Q}}'(z)\hat{\overline{Y}}'(z),\ \hat{\overline{Q}}'(z) = \hat{\overline{Q}}'_{\mu} z^{\mu} + \dots + \hat{\overline{Q}}'_0 + \dots . \tag{44}$$

Но мы сделали $\|D\|_1 = 0$, что означает, что системы (43) и (44) совпадают, то есть в итоге мы получаем одну новую систему, обладающую всеми правильными свойствами и предписанным набором характеристических констант:

$$\hat{\overline{Y}}'(qz) = \hat{\overline{Q}}'(z)\hat{\overline{Y}}'(z),\ \hat{\overline{Q}}'(z) = \hat{\overline{Q}}'_{\mu} z^{\mu} + \dots + \hat{\overline{Q}}'_0. \tag{45}$$

У системы (44) были правильные константы $\{\sigma_i\}$, система (43) имела верное множество констант $\{\rho_j\}$. Кроме того, все сделанные преобразования сохраняют матрицу монодромии $P(z)$, а значит множество констант, задающее матрицу монодромии тоже является правильным у нашей финальной системы. Матрица монодромии финальной системы (45) в точности совпадает с матрицей монодромии исходной системы (35):

$$\hat{\overline{P}}'(z) = P(z).$$

Отметим также, что условие (29) выполнено, т.к. оно определено с точностью до произвольных целых u и v, а мы делали целые сдвиги констант $\{\sigma_i\}$. Таким образом, мы построили q-разностную систему (45) с заданным множеством характеристических констант, заданной монодромией и полиномиальной матрицей коэффициентов степени μ. $\square$

4 Благодарность

Авторы выражают глубокую благодарность Ренату Равилевичу Гонцову за продуктивные обсуждения и замечания. Работа первого автора была поддержана грантами РФФИ 17-01-00515-а, РФФИ-НЦНИ 16-51-150005-нцни-а и грантом фонда Саймонса для преподавателей–исследователей.

Список литературы

[1] D.V. Anosov, A.A. Bolibruch, *Riemann-Hilbert problem* // Aspects of Mathematics, E22, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1994.

[2] G.D. Birkhoff, *General theory of linear difference equations* // Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 12 no. 2, (Apr. 1911), pp. 243-284.

[3] G.D. Birkhoff, *The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations* // Proc. of Amer. Acad. of Arts and Science, Vol. 49 no. 9, (Oct. 1913), pp. 521-568.

[4] А. А. Болибрух, *21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем* // Тр. МИАН, 1994, Т. 206.

Вьюгин И.В.
Институт проблем передачи информации РАН,
НИУ Высшая школа экономики,
vyugin@gmail.com.

Левин Р.И.
НИУ Высшая школа экономики,
romalevi@yandex.ru.