

02

Термодинамические свойства сверхпроводящего квантового цилиндра и их флуктуации

© П.А. Эминов^{1,2}, Ю.И. Сезонов², С.В. Гордеева¹

¹ Московский государственный университет приборостроения и информатики, Москва, Россия

² Московский институт электроники и математики Национального исследовательского института „Высшая школа экономики“, Москва, Россия

E-mail: peminov@mail.ru

(Поступила в Редакцию 8 июля 2013 г.)

Проведено численное и аналитическое исследование термодинамических свойств сверхпроводящего намагниченного квантового цилиндра. Изучена зависимость разности намагниченностей сверхпроводящей и нормальной фаз от параметров нанотрубки, температуры и магнитного поля. Вычислен скачок теплоемкости сверхпроводящего и нормального состояний при критической температуре. Исследован флуктуационный вклад в термодинамические свойства нанотрубки при температуре выше точки перехода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-07-12031-офи-м).

1. Введение

После получения графена и нанотрубок [1–3] значительно возрос интерес к проблеме поверхностной сверхпроводимости [4]. Приложенное магнитное поле создает дополнительные возможности для изучения сверхпроводимости наноструктур. В работах [5–7] построена теория плоского двумерного (2D) сверхпроводника с учетом спин-орбитального взаимодействия, в том числе и в продольном магнитном поле [7]. Критическая температура 2D-сверхпроводника вычислена как функция напряженности магнитного поля и интенсивности спин-орбитального взаимодействия [7].

Сверхпроводимость плоской двумерной электронной системы в перпендикулярном магнитном поле рассматривалась в [8]. В недавней работе [9] на основе эффективного уравнения, имеющего вид уравнения Дирака для безмассовой частицы, исследован фононный механизм сверхпроводящего спаривания электронов в графене.

В графене, а также в графите, который может рассматриваться как система плоских параллельных листов графена, связанных силами Ван-дер-Ваальса, явление сверхпроводимости экспериментально пока не наблюдалось [1–3,10,11].

В то же время явление сверхпроводимости наблюдается в пучках однослойных углеродных нанотрубок, разные типы которых представляют собой свернутый определенным образом лист графена. Например, в работах [12,13] сообщается о наблюдении явления сверхпроводимости с критической температурой $T_c \approx 1$ К в пучках однослойных углеродных нанотрубок радиусом $R = 5$ Å и с критической температурой $T_c = 16$ К в нанотрубках с радиусом 2 Å.

При сворачивании графенового листа в нанотрубку открывается возможность наблюдения эффекта

Ааронова–Бома–Литтла–Паркса в сверхпроводящих состояниях наноструктур [14–16]. Зависимость от параметра Ааронова–Бома должна проявиться и в термодинамических свойствах нанотрубки. Следует отметить, что в работе [17] приведены результаты экспериментального измерения намагниченности пучка однослойных углеродных нанотрубок в сверхпроводящем состоянии, т.е. расчет термодинамических свойств сверхпроводящих нанотрубок в магнитном поле представляет и практический интерес.

Сверхпроводимость нанотрубок теоретически изучалась многими авторами. Зависимость критической температуры от радиуса углеродной нанотрубки и энергии Ферми численно рассматривается в [18,19]. Исследования показывают, что один из возможных способов компенсации слабости электрон-фононного взаимодействия и увеличения критической температуры состоит в увеличении числа нанотрубок в образце [20,21]. Однослойные углеродные нанотрубки могут иметь относительно большую критическую температуру ($T_c \sim 11$ – 30 К) за счет сингулярности Ван-Хофа в энергетической плотности электронных состояний [22]. Однако аналитические результаты, описывающие зависимость критической температуры от параметров нанотрубки, не были получены. Это можно объяснить и относительно сложным видом электронного энергетического спектра в углеродных нанотрубках при учете их хиральности.

Большое внимание уделяется расчету электронных свойств нанотрубок в модели свернутого в цилиндр двумерного электронного газа (см., например, [23–25]).

Целью настоящей работы является исследование термодинамических свойств сверхпроводящего квантового цилиндра в продольном магнитном поле, а также их флуктуаций в окрестности критической температуры. В разделе 2 получены формулы, описываю-

щие зависимости критической температуры и свободной энергии сверхпроводящей нанотрубки от параметра Ааронова–Бома, радиуса трубки и энергии Ферми. В разделе 3 исследованы зависимости от характерных параметров трубки намагниченности сверхпроводящего квантового цилиндра при нулевой температуре, а также скачка теплоемкости и разности намагниченностей сверхпроводящей и нормальной фаз в окрестности критической температуры. В разделе 4 вычислен флуктуационный вклад в термодинамические свойства нанотрубки при температуре выше точки перехода. В разделе 5 проводится обсуждение результатов работы.

2. Критическая температура и термодинамический потенциал

На цилиндрической поверхности стационарное состояние электрона в продольном магнитном поле определяется азимутальным квантовым числом $n \in \mathbb{Z}$, импульсом p_3 продольного движения и проекцией спина на направление магнитного поля ($s = \pm 1$). Энергия и нормированные собственные функции стационарных состояний электрона задаются формулами [23]

$$E(n, p_3, s) = \frac{p_3^2}{2m} + \varepsilon \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + s\mu_B H, \quad (1)$$

$$\Psi(n, p_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi RL}} e^{i\frac{p_3 r}{\hbar} + in\varphi}, \quad (2)$$

где m — эффективная масса электрона; $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2mR^2}$ — энергия размерного конфинмента; μ_B — магнетон Бора; $\Phi = \pi R^2 H$ — поток магнитного поля через сечение цилиндра длиной L и радиусом R ; $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{|e|}$ — одно-электронный квант магнитного потока; \hbar — постоянная Планка; c — скорость света, e — заряд электрона (далее используется система единиц, где $\hbar = 1$, $c = 1$, $k_B = 1$).

Совокупность квантовых чисел, задающих стационарное состояние электрона, будем обозначать символом (p, s) , где $p = (n, p_3)$. В представлении вторичного квантования исходный модельный гамильтониан Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) сверхпроводящего квантового цилиндра, в котором оставлено взаимодействие электронов с противоположными по знаку значениями всех квантовых чисел, представляется в виде [16,26]

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{p,s} T(p) a^+(p, s) a(p, s) - \frac{1}{2\pi RL} \\ & \times \sum_{p,p' \neq p} J(p, p') a^+(-p, \downarrow) a^+(-p, \uparrow) a(p', \downarrow) a(-p', \downarrow), \end{aligned} \quad (3)$$

где $J(p, p')$ — величина, описывающая эффективное взаимодействие электронов куперовской пары [26];

$T(p) = E(n, p_3, s) - \mu$; μ — химический потенциал электронного газа. Здесь принято обозначение

$$\sum_{n,p_3} f(n, p_3) = \frac{L}{2\pi} \sum_n \int dp_3 f(n, p_3). \quad (4)$$

В теории БКШ функция $J(p, p')$ принимает постоянное значение, равное g , в энергетическом слое шириной ω в окрестности энергии Ферми и равна нулю вне этого слоя.

Для гамильтониана (3) в работе [16] на основе вариационного принципа Боголюбова вычислена свободная энергия системы

$$\begin{aligned} F(T, S, N; C(p)) = & \sum_p \bar{\varepsilon}(p) - T \sum_p \ln 2 \\ & \times \left[\text{ch} \frac{E(p)}{T} + \text{ch} \frac{\tilde{E}(p)}{T} \right] - \frac{1}{16S} \sum_{p,p'} J(p, p') \\ & \times \frac{C(p)}{E(p)} \phi(p, T) \frac{C(p')}{E(p')} \phi(p', T) + \frac{1}{2} \sum_p \frac{C^2(p)}{E(p)} \phi(p, T), \end{aligned} \quad (5)$$

где S — площадь поверхности цилиндра, T — температура, функция $\phi(p, T)$ определяется формулой

$$\phi(p, T) = \text{th} \frac{E(p) + \tilde{E}(p)}{2T} + \text{th} \frac{E(p) - \tilde{E}(p)}{2T}. \quad (6)$$

В формулах (5), (6) приняты также обозначения

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} = & \frac{E(n, p_3, s) + E(-n, -p_3, -s)}{2} \\ = & \frac{p_3^2}{2m} + \varepsilon \left[n^2 + \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \right] - \mu, \end{aligned}$$

$$\tilde{E} = \frac{E(n, p_3, s) - E(-n, -p_3, -s)}{2} = 2\varepsilon n \frac{\Phi}{\Phi_0} - \mu_B H,$$

$$E(p) = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2 + C^2(p)}. \quad (7)$$

Необходимое условие минимума функционала (5)

$$\frac{\delta F}{\delta C(p)} = 0 \quad (8)$$

приводит к уравнению для величины Δ энергетической щели [16]

$$1 = \frac{g}{4S} \sum_p \frac{\phi(p, T)}{\sqrt{\bar{\varepsilon}^2 + \Delta^2}}. \quad (9)$$

С учетом (9) свободную энергию сверхпроводящего квантового цилиндра можно представить в виде

$$\begin{aligned} F(T, S, N) = & \sum_p [\bar{\varepsilon}(p) - E(p)] - T \sum_p \ln \left[1 + e^{-\frac{E+\bar{\varepsilon}}{T}} \right] \\ & - T \sum_p \ln \left[1 + e^{-\frac{E-\bar{\varepsilon}}{T}} \right] + \frac{\Delta^2}{g} S. \end{aligned} \quad (10)$$

Как показывает анализ, впервые проделанный в [27], в продольном магнитном поле энергетически выгодно спариваться состояниям с азимутальными числами n_1 и n_2 , обеспечивающими минимум величины $|n_1 + n_2 - 2\Phi/\Phi_0|$, т.е. наибольшая энергия связи будет наблюдаться при $2\Phi/\Phi_0 = N$, где N — целое число. При условии $\left|2\frac{\Phi}{\Phi_0}\right| < \frac{1}{2}$ энергетически выгодно спариваться электронам с противоположными по знаку квантовыми числами [27,28]. В этом случае справедливы приведенные выше зависимости (9) и (10) критической температуры и свободной энергии от параметров нанотрубки, включая и параметр $2\Phi/\Phi_0$. Эти зависимости были получены в работе [16] и подтверждены в [29]. С учетом периодической зависимости ширины щели от магнитного потока достаточно периодически (с периодом, равным единице) продолжить результаты (9) и (10) на весь диапазон значений параметра $2\Phi/\Phi_0$.

В предельном случае, когда

$$\mu \gg \varepsilon, \tag{11}$$

находим, что при нулевой температуре зависимости ширины энергетической щели Δ_0 и критической температуры T_c от параметра Ааронова–Бома, радиуса трубки и энергии Ферми определяются асимптотическими формулами

$$\Delta_0 \left(R, p_F; \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \simeq 2\omega \varepsilon^{-\frac{\alpha}{2}}, \tag{12}$$

$$T_c = \frac{\gamma}{\pi} \Delta_0, \tag{13}$$

где приняты обозначения

$$\alpha = \frac{4\pi}{m} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(2\pi k \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) J_0(2\pi k R p_F) \right]^{-1},$$

$$\gamma = e^C, \tag{14}$$

C — постоянная Эйлера, $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка действительного аргумента.

Полагая, что наряду с (11) выполняется также условие

$$(N_L R)^{-\frac{1}{4}} \ll \frac{mg}{4\hbar^2} \tag{15}$$

(где N_L — линейная концентрация электронов), для ширины щели при нулевой температуре получаем

$$\Delta_0 \simeq 2\hbar\omega \exp \left[-\frac{2\pi\hbar^2}{mg} \right] \left\{ 1 + \frac{4\hbar^2}{mg} (N_L R)^{-\frac{1}{4}} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \left[2\pi k \sqrt{N_L R} - \frac{3\pi}{4} \right]}{\sqrt{k}} \cos \left(2\pi k \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right\}. \tag{16}$$

Здесь следует отметить, что некоторые из существующих в литературе предварительных оценок для параметров углеродных нанотрубок не противоречат условию (15) (см., например, [29]).

В случае конечной температуры для определения зависимости ширины щели от температуры находим интегральное уравнение

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + u^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + u^2 + \chi}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + u^2 - \chi}} \right], \tag{17}$$

где приняты обозначения

$$\chi = \frac{\mu_B H}{T}, \quad u = \frac{\Delta}{T}, \quad \Delta = \Delta \left(p_F, R; \frac{\Phi}{\Phi_0}; T \right). \tag{18}$$

В частности, из формулы (17) в предельном случае, когда $\chi \ll 1$, находим

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + u^2} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + u^2}} + 1} + \frac{1}{4} \chi^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + u^2}} \frac{\text{sh} \left[\frac{\sqrt{x^2 + u^2}}{T} \right]}{\text{ch}^3 \left[\frac{\sqrt{x^2 + u^2}}{T} \right]}, \tag{19}$$

причем слагаемое, пропорциональное χ^2 , связано с собственным магнитным моментом электронов.

В области низких температур из (19) следует

$$\Delta \left(T, \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \approx \Delta_0 \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \left[1 - \frac{2\pi T}{\Delta_0(H)} e^{-\frac{\Delta_0(H)}{T}} \left(1 + \frac{1}{2} \chi^2 \right) \right]. \tag{20}$$

Вблизи критической температуры получаем

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \ln \frac{\pi T}{\gamma \Delta} + \frac{7\xi(3)}{8\pi^2} \frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{1}{4} \chi^2 K, \tag{21}$$

где число K выражается через дзета-функцию Римана

$$K = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{\text{th } t}{\text{ch}^2 t} = \frac{7\xi(3)}{\pi^2}. \tag{22}$$

3. Термодинамические величины сверхпроводящего квантового цилиндра в магнитном поле

Учитывая, что намагниченность электронного газа квантового цилиндра в нормальной фазе детально изучена [23,30,31], для вычисления термодинамических величин сверхпроводящей фазы воспользуемся формулой [32]

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \right)_{T, V, \mu} = \left\langle \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda} \right\rangle, \tag{23}$$

выражающей производную по параметру λ от термодинамического потенциала Ω по отношению к переменным T, μ, V через среднее по статистическому распределению для производной гамильтониана \tilde{H} системы по тому же параметру. Удобно в качестве такого параметра взять

константу связи g . Тогда разность термодинамических потенциалов квантового цилиндра в сверхпроводящей и нормальной фазах представляется в следующем виде [32]:

$$\Delta F \equiv F_S - F_N = -(2\pi RL) \int_0^g \frac{\Delta^2}{g^2} dg. \quad (24)$$

Таким образом, уравнения (6), (7) и (9) описывают зависимости ширины энергетической щели Δ и температуры фазового перехода в нормальное состояние от характерных параметров нанотрубки и параметра Φ/Φ_0 Ааронова–Бома, а формула (24) позволяет вычислить по известной ширине щели разность свободных энергий сверхпроводящей и нормальной фаз.

Из формулы (24) в предельном случае (11), когда ширина щели определяется формулой (12), найдем сначала разности свободных энергий и соответственно намагниченностей при нулевой температуре в расчете на единицу площади поверхности нанотрубки

$$\frac{1}{S} [F_S - F_N] = -\frac{1}{\alpha} \Delta_0^2, \quad (25)$$

$$\frac{1}{S} [M_S^z - M_N^z] = -\frac{1}{g} \Delta_0^2 \frac{\partial}{\partial H} [\ln \alpha]. \quad (26)$$

В том же предельном случае (11) для скачка теплоемкости и соответственно для разности намагниченностей сверхпроводящей и нормальной фаз в окрестности критической температуры находим следующие формулы:

$$\frac{1}{S} [C_S - C_N] = \frac{(4\pi)^2}{7\xi(3)} T_c \alpha^{-1}, \quad (27)$$

$$\frac{1}{S} [M_S - M_N] = -\frac{(2\pi)^2 T_c (T_c - T)}{7\xi(3)g\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial H}, \quad (28)$$

где ξ — дзета-функция.

4. Флуктуационный вклад в теплоемкость и намагниченность нанотрубки выше точки перехода

Флуктуации, играющие существенную роль в системах пониженной размерности, какой является нанотрубка, в литературе, насколько нам известно, не рассматривались. В настоящем разделе исследуется флуктуационный вклад в термодинамические свойства нанотрубки полупроводникового типа в продольном магнитном поле. В трехмерных металлических сверхпроводниках область температур вблизи критической, в пределах которой флуктуации параметра порядка становятся большими, а теория Гинзбурга–Ландау неприменимой, является относительно узкой [32,33]. Флуктуационные поправки к термодинамическим величинам вне этой области малы, но они могут быть существенными для магнитных

свойств нормальной фазы вблизи точки перехода. Например, флуктуационный вклад в магнитную восприимчивость нормального металла вблизи точки перехода, вычисленный в рамках теории Гинзбурга–Ландау, возрастает пропорционально $(T - T_c)^{-\frac{1}{2}}$ и представляет собой основной вклад в диамагнитную восприимчивость металла, находящегося при температуре выше критической [32].

Изменение свободной энергии нанотрубки в теории Гинзбурга–Ландау определяется функционалом [32]

$$\begin{aligned} \Delta F[\psi] &= F - F_N \\ &= \int_S \left[\frac{1}{4m} \left| -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 \right] dS. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь интегрирование проводится по цилиндрической поверхности с радиусом R ; F_N — свободная энергия в нормальном состоянии, величина a зависит от температуры по закону $a = \delta(T - T_c)$, параметр $\delta > 0$, m и e — масса и заряд электрона, \mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля. Благодаря малости флуктуаций в подынтегральной функции далее в (29) будем сохранять только квадратичные по параметру порядка ψ слагаемые. Сравнив формулы для квадрата модуля параметра порядка и для скачка теплоемкости в критической точке в модели Гинзбурга–Ландау [32] с полученными в разделе 3 результатами, найдем значение параметра δ :

$$\delta = \frac{8\pi^2 T_c}{7\xi(3)\alpha N_s},$$

где N_s — поверхностная концентрация электронов, параметр α определяется формулой (14).

Для вычисления флуктуационного вклада ΔF в свободную энергию функционал (29) рассматривается как эффективный гамильтониан, определяющий ΔF согласно формуле [32,34]:

$$\Delta F = -T \ln \left[\int \exp \left(-\frac{\Delta - F[\psi]}{T} \right) D\psi \right], \quad (30)$$

где функциональное интегрирование проводится по всем распределениям $\psi = \psi(\mathbf{r})$. Вычислим интеграл по траекториям (30) с помощью рядов Фурье. Векторный потенциал однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z , совпадающей с осью цилиндра, выберем в виде

$$\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0). \quad (31)$$

Варьирование квадратичной части (29) по переменным ψ и ψ^* , которые рассматриваются как независимые переменные, дает уравнение

$$\frac{\delta F}{\delta \psi^*} = -\frac{\hbar^2}{4m} \left(\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi + a\psi = 0. \quad (32)$$

Таким образом, функцию $\psi = \psi(\mathbf{r})$ можно разложить в ряд по собственным функциям эрмитового оператора

$$\hat{L} = -\frac{\hbar}{4m} \left(\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + a \quad (33)$$

на цилиндрической поверхности.

В цилиндрических координатах собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для оператора \hat{L} на цилиндрической поверхности определяются энергией и волновыми функциями стационарных состояний частицы с массой $M = 2m$ и зарядом $q = 2e$, т.е. формулами (1), (2), в которых следует положить

$$\varepsilon = \frac{1}{2MR^2}, \quad (34)$$

$$\phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{|q|}, \quad (35)$$

где ϕ_0 — половина одноэлектронного кванта магнитного потока.

Разложение функции $\psi = \psi(z, \varphi)$ по собственным функциям оператора (33) представляется в виде двойного ряда Фурье

$$\psi(z, \varphi) = \sum_{n, p_3} c(n, p_3) e^{izp_3 + in\varphi}, \quad (36)$$

где $c(n, p_3) = c'(n, p_3) + ic''(n, p_3)$ — произвольные комплексные коэффициенты.

Подставив (36) в (29) и вычислив гауссовы интегралы по всем dc' и dc'' , для величины ΔF в формуле (30) получаем следующий результат:

$$\Delta F = -T \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \left(\frac{L}{2\pi} \right) \times \ln \left\{ \pi T \left[\frac{p_3^2}{2M} + \frac{(n + \Phi/\phi_0)^2}{2MR^2} + \delta(T - T_c) \right]^{-1} \right\}. \quad (37)$$

При больших энергиях $E = E(n, p_3)$ сумма и интеграл в формуле (37) расходятся. Как и в трехмерном случае, эта расходимость связана с тем, что формула (29) применима только при медленно меняющихся $\psi = \psi(z, \varphi)$: изменение ψ должно быть мало на расстояниях порядка длины когерентности [32].

Ограничим область суммирования по n и область интегрирования по p_3 в формуле (37) с помощью θ -функции Хевисайда, считая допустимыми лишь значения квантовых чисел p_3 и n , удовлетворяющие условию

$$\varepsilon \left(n + \frac{\Phi}{\phi_0} \right)^2 + \frac{p_3^2}{2M} < E = \frac{p_0^2}{2M}. \quad (38)$$

Вспользуемся далее формулой суммирования Пуассона

$$\sum_n f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \exp(2\pi i k x) f(x) dx \quad (39)$$

и перейдем к полярным координатам (p, φ)

$$x = pR \cos \varphi, \quad p_3 = p \sin \varphi. \quad (40)$$

В результате получаем следующее выражение для флуктуационного вклада в изменение свободной энергии:

$$\frac{\Delta F}{S} = - \left(\frac{T}{2\pi} \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{p_0} p dp e^{-2\pi i k \frac{\Phi}{\phi_0}} \times J_0(2\pi |k| R p) \ln \frac{\pi T}{(p^2/2M) + \delta t}, \quad (41)$$

где $t = T - T_c$.

Двукратное дифференцирование (41) по переменной t дает первую флуктуационную поправку к теплоемкости квантового цилиндра в магнитном поле в области применимости теории Гинзбурга–Ландау:

$$\frac{\Delta C}{S} = - \left(\frac{T_c}{2\pi} \right)^2 (2M\delta)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i k \frac{\Phi}{\phi_0}} K_1(\beta b) \frac{\beta}{2b}. \quad (42)$$

Здесь $K_1(x)$ — функция Макдональда, а также введены обозначения

$$\beta = 2\pi |k| R, \quad b = \sqrt{2M\delta t}. \quad (43)$$

Для сравнения приведем результат работы [35] для скачка теплоемкостей сверхпроводящей и нормальной фаз электронного газа квантового цилиндра при критической температуре

$$\frac{\Delta C}{S} = \frac{2\pi}{7\xi(3)} m T_c \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_0(2\pi k R p_F) \cos \left(2\pi k \frac{\Phi}{\phi_0} \right) \right], \quad (44)$$

где $\xi(x)$ — дзета-функция Римана, p_F — импульс Ферми электронного газа нанотрубки.

Для флуктуационного вклада в намагниченность квантового цилиндра выше точки перехода получаем формулу

$$\frac{\Delta M_z}{S} = -\frac{2T}{\phi_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left(2\pi k \frac{\Phi}{\phi_0} \right) \gamma K_1(\tau \gamma), \quad (45)$$

где приняты обозначения

$$\tau = 2\pi k, \quad \gamma = R \sqrt{2M\delta(T - T_c)}. \quad (46)$$

5. Обсуждение результатов

Как следует из результатов (41), (42) и (45), флуктуационные вклады в свободную энергию и соответствующие термодинамические величины испытывают осцилляции Ааронова–Бома.

Формула (42) допускает предельный переход к $2D$ -плоскому случаю, когда поверхностная плотность электронов фиксирована, а радиус цилиндра $R \rightarrow \infty$.

Воспользовавшись асимптотикой функции Макдональда

$$K_1(x)|_{x \ll 1} \approx \frac{1}{x}, \quad (47)$$

из формулы (42) в предельном случае плоской структуры получаем

$$\frac{\Delta C}{S} = \left(\frac{T_c}{2\pi}\right)^2 \frac{M\delta}{T - T_c}. \quad (48)$$

В трехмерном случае флуктуационная поправка к теплоемкости в области применимости теории Ландау была вычислена в работе Леванюка и определяется формулой [33]:

$$\frac{\Delta C}{V} = \frac{T_c^2}{(16\pi)} (2M\delta)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{T - T_c}}. \quad (49)$$

Сравнение показывает, что если в трехмерном случае флуктуационная поправка к теплоемкости при приближении температуры к критической увеличивается пропорционально $(T - T_c)^{-1/2}$, то в двумерном случае она возрастает пропорционально $(T - T_c)^{-1}$, т.е. роль флуктуационных эффектов существенно возрастает с уменьшением размерности системы.

Результат (48) получается также из формулы (1) на стр. 525 работы [33], если при интегрировании учесть изменение фазового объема при переходе от трехмерной к двумерной системе.

Таким образом, в работе получены аналитические формулы, описывающие зависимость от характерных параметров системы флуктуационного вклада в термодинамические свойства намагниченного квантового цилиндра, и показано, что роль флуктуаций становится существенной вблизи точки перехода.

Из формулы (21), полагая $\Delta = 0$, для критической температуры получаем уравнение

$$\ln\left(\frac{\gamma\Delta_0}{\pi T_c}\right) = \frac{7\xi(3)}{4\pi^2} \left(\frac{\mu_B H}{T}\right)^2. \quad (50)$$

Этот результат согласуется с формулой (18) работы [7], где для случая плоской геометрии и параллельного магнитного поля исследована зависимость критической температуры от напряженности магнитного поля с учетом спин-орбитального и зеемановского взаимодействий. Действительно, как уже отмечалось, в формуле (21) пропорциональное χ^2 слагаемое обусловлено спиновой энергией спаривающихся электронов в продольном магнитном поле. Эта энергия не зависит от того, находится электрон на плоскости или на цилиндрической поверхности. Поэтому полученный в пределе слабого спин-орбитального взаимодействия результат (18) работы [7] имеет точно такой же вид, как и наш результат (50). При этом существенное отличие состоит в том, что в формулу (50) магнитное поле входит не только за счет спиновой энергии, как это имеет место в формуле (18) работы [7], но и

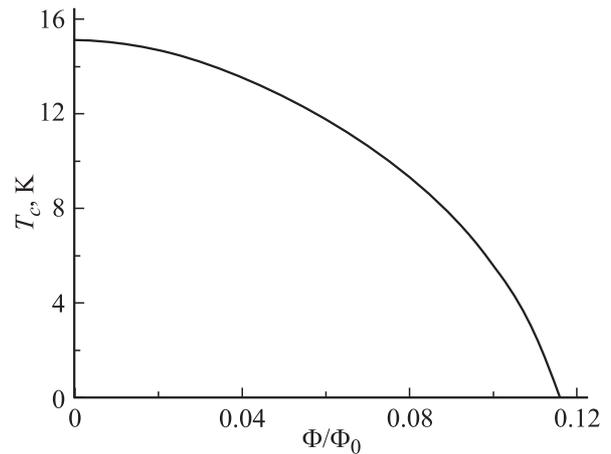


Рис. 1. Зависимость критической температуры от параметра Ааронова–Бома.

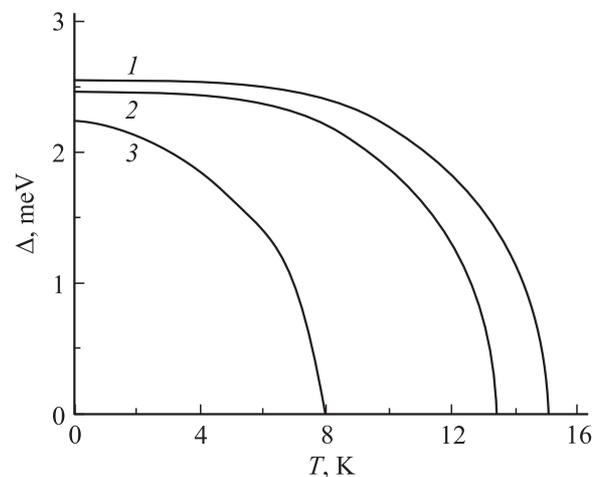


Рис. 2. Зависимость ширины щели от температуры. $\Phi/\Phi_0 = 0$ (1), 0.4 (2), 0.08 (3).

через ширину щели при нулевой температуре благодаря эффекту Ааронова–Бома. Полное совпадение нашего результата (50) с формулой (18) работы [7] имеет место в предельном случае плоской структуры, когда $R \rightarrow \infty$, $N_s = \text{const}$ (N_s — поверхностная концентрация электронов).

Зависимость критической температуры от параметра Ааронова–Бома показана на рис. 1. Расчеты проведены при следующих значениях параметров нанотрубки: $R = 5 \text{ nm}$, линейная концентрация электронов $N_L = 28.1 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 1.514 \text{ meV}$, энергия Ферми $E_F = 0.214 \text{ eV}$ в свободном случае, когда магнитный поток $\Phi = 0$, $\hbar^2/mg = 0.231$. В этом случае условие (11) выполняется, электроны наряду с продольным движением совершают и вращательное движение, а максимальное значение азимутального квантового числа $n = 11$, т.е. электроны заполняют достаточно большое число подзон энергии поперечного движения.

Следует отметить, что при выбранных параметрах нанотрубки численный расчет на основе уравнения (9)

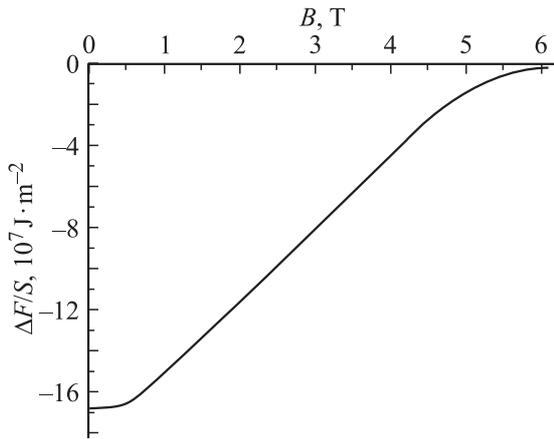


Рис. 3. Зависимость от магнитного поля разности термодинамических потенциалов сверхпроводящей и нормальной фаз.

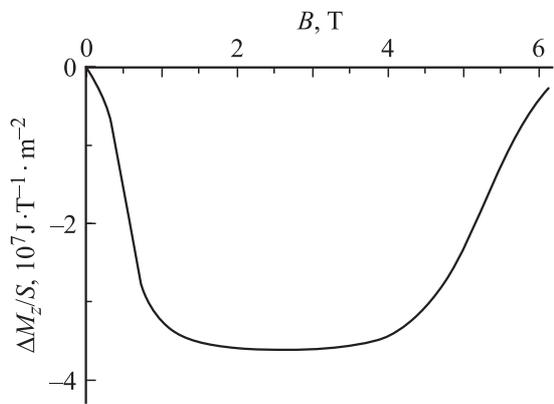


Рис. 4. Зависимость разности намагниченностей сверхпроводящей и нормальной фаз от магнитного поля.

и расчет, проведенный на основе асимптотической формулы (12), дают практически одинаковые результаты. На рис. 2 представлена зависимость ширины энергетической щели от температуры при различных значениях параметра Ааронова–Бома, полученная в результате численного расчета на основе уравнения (9).

На рис. 3 и 4, построенных в единицах СИ, в случае нулевой температуры показаны соответственно зависимости разности термодинамических потенциалов и намагниченностей сверхпроводящей и нормальной фаз от магнитного поля. Численный расчет для указанных величин также находится в удовлетворительном согласии с формулами (25), (26), полученными в квазиклассическом приближении (11).

Обратимся далее к свободному случаю, когда магнитное поле выключено. Используя формулу

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_0(kx) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4\pi^2 n^2}}, \quad (51)$$

где $2\pi m < x < 2\pi(n + 1)$, $x = 2\pi R p_F$, для зависимости критической температуры от радиуса трубки и энергии

Ферми получаем следующую формулу:

$$T_c(R, p_F) = \frac{\gamma}{\pi} \omega \exp \left[- \frac{4\pi}{mg \left[\frac{1}{x} + 2 \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4\pi^2 n^2}} \right]} \right], \quad (52)$$

где n — номер зоны поперечного движения электронов. Если выполнены условия

$$2 \frac{\Phi}{\Phi_0} < 1, \quad \frac{1}{2} \pi N_L R < 1, \quad (53)$$

то электроны находятся в состоянии с нулевым орбитальным моментом импульса и движутся только в продольном направлении. Такая ситуация физически соответствует $1D$ -сверхпроводнику с критической температурой

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega \exp \left[\frac{-4\pi \hbar R p_F}{mg} \right], \quad (54)$$

где $p_F = \frac{\pi N_L}{2}$. Для углеродных нанотроек в работе [18] приведены результаты численного расчета зависимости $T_c = T_c(R)$ при постоянной поверхностной концентрации электронов, которые качественно имеют такой же экспоненциально убывающий характер с увеличением радиуса трубки, как и в формуле (54).

Наряду с осцилляциями Ааронова–Бома–Литтла–Паркса критическая температура при изменении параметра $\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)^{1/2} = p_F R$ испытывает осцилляции типа осцилляций де Гааза–ван Альфена, которые связаны с квантованием энергии поперечного движения электрона и корневыми особенностями плотности энергетических состояний на цилиндрической поверхности [36]. Наконец, формула БКШ для критической температуры плоского $2D$ -сверхпроводника имеет вид [4,36]

$$T_c = \frac{2\omega\gamma}{\pi} \exp \left[- \frac{2\pi \hbar^2}{gm} \right]. \quad (55)$$

Этот результат следует из формулы (52) в предельном случае $R \rightarrow \infty$, $N_s = \text{const}$, если заменить суммирование по параметру интегрированием в пределах от $-\frac{x}{2\pi}$ до $+\frac{x}{2\pi}$.

Список литературы

- [1] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
- [2] T. Ando. *NPG Asia Mater.* **1**, 1, 17 (2009).
- [3] C. Charlier, X. Blasé, S. Roshe. *Rev. Mod. Phys.* **79**, 677 (2007).
- [4] В.Л. Гинзбург. *УФН* **174**, 1040 (2005); В.Л. Гинзбург, Д.А. Киржниц. *ЖЭТФ* **46**, 397 (1964).
- [5] В.М. Эдельштейн. *ЖЭТФ* **95**, 2151 (1989).
- [6] L.P. Gorkov, E.I. Rashba. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 037 004 (2001).
- [7] V. Barzykin, L.P. Gorkov. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 227 002 (2002).
- [8] E.C. Marino, L.H.C.M. Nunes. *Nucl. Phys. B* **741**, 404 (2006).

- [9] Ю.Е. Лозовик, С.Л. Огарков, А.А. Соколик. *ЖЭТФ* **137**, 57 (2010).
- [10] Ю.Е. Лозовик, С.П. Меркулова, А.А. Соколик. *УФН* **178**, 757 (2008).
- [11] А.И. Романенко, А.В. Окотруб, В.Л. Кузнецов, А.С. Кото-сонов, А.Н. Образцов. *УФН* **175**, 1000 (2005).
- [12] M. Kociak, A.Yu. Kasumov, S. Guéron, B. Reulet, I.I. Khodos, Yu.B. Gorbатов, V.T. Volkov, L. Vaccarini, H. Bouchiat. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2416 (2001).
- [13] Z.K. Tang. *Science* **284**, 2462 (2001); I. Takesue. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 570 001 (2006).
- [14] Y. Aharonov, D. Bohm. *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [15] W.A. Little, R.D. Parks. *Phys. Rev. Lett.* **9**, 9 (1962).
- [16] П.А. Эминов, Ю.И. Сезонов. *ЖЭТФ* **134**, 772 (2008).
- [17] M. Ferrier, F. Ladieu, M. Ocio, B. Sacéré, T. Vaugien, V. Pichot, P. Launois, H. Bouchiat. *Phys. Rev. B* **73**, 094 520 (2006).
- [18] L.X. Benedict, V.H. Crespi, S.G. Louie, M.L. Cohen. *Phys. Rev. B* **52**, 14 935 (1995).
- [19] K. Sasaki, J. Jiang, R. Saito. *J. Phys. Soc. Jpn.* **76**, 033 702 (2007).
- [20] J. Gonzalez. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 076 403 (2002).
- [21] B. Bellabi, S. Haddad, S. Charbi-Kaddour. *Phys. Rev. B* **80**, 075 401 (2009).
- [22] J. Zhang, A. Tselev, Y. Yang, K. Hatton, P. Barbara, S. Shafraniuk. *Phys. Rev. B* **74**, 155 414 (2006).
- [23] В.А. Гейлер, В.А. Маргулис, А.В. Шорохов. *ЖЭТФ* **115**, 1450 (1999).
- [24] А.В. Чаплик, Л.И. Магарилл, Р.З. Витлина. *ФНТ* **34**, 1094 (2008); П.А. Эминов. *ЖЭТФ* **135**, 1029 (2009).
- [25] Р.З. Витлина, Л.И. Магарилл, А.В. Чаплик. *ЖЭТФ* **133**, 906 (2008).
- [26] Н.Н. Боголюбов. *Собрание научных трудов. Наука, М.* (2007). Т. VIII. 642 с.
- [27] N. Byers, C.N. Yang. *Phys. Rev. Lett.* **7**, 46 (1961).
- [28] Дж. Шриффер. *Теория сверхпроводимости. Наука, М.* (1970). 312 с.
- [29] А.М. Ермолаев, С.В. Кофанов, Г.И. Рашба. *Вісник ХНУ. Фізика*, **914**, 5 (2010).
- [30] Yu.N. Ovchinnikov, W. Lehle, A. Schmid. *Ann. Phys.* **6**, 489 (1997).
- [31] П.А. Эминов, Ю.И. Сезонов, А.В. Альперн, Н.В. Сальников. *ЖЭТФ* **130**, 724 (2006).
- [32] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Статистическая физика. Ч. 2. Наука, М.* (1987). 448 с.
- [33] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Статистическая физика. Ч. 1. Наука, М.* (1976). 584 с.
- [34] И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов. *Квантовая механика и макроскопические эффекты. МГУ, М.* (1993). 198 с.
- [35] P.A. Eminov, A.A. Yl'din, Ya.I. Sezonov, S.V. Gordeeva. *Rus. J. Math. Phys.* **17**, 2, 154 (2010).
- [36] П.А. Эминов, А.А. Ульдин. *ФНТ* **37**, 4, 356 (2011).