МОНОГРАФИИ ВШЭ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Теория нелинейных волн

А.М. Камчатнов

Издательский дом
Высшей школы экономики
МОСКВА, 2024

УДК 534.182+534.222.2
ББК 22.324+22.312
К18

https://elibrary.ru/lhmeio

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор факультета физики НИУ ВШЭ,
главный научный сотрудник Международной лаборатории физики
конденсированного состояния НИУ ВШЭ
В.И. Юдсон;
доктор физико-математических наук, профессор, начальник отдела
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»
С.В. Сазонов

Камчатнов, А. М.

К18 Теория нелинейных волн [Текст] / А. М. Камчатнов; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2024. — 792 с. — (Монографии ВШЭ: Технические науки). — 500 экз. — ISBN 978-5-7598-2933-1 (в пер.). — ISBN 978-5-7598-4068-8 (e-book).

В монографии излагаются как основы теории нелинейных волн, так и её разделы, находящиеся на переднем крае науки. Особое внимание уделено теории дисперсионных ударных волн, мало отражённой в существующей монографической литературе. В частности, детально изложен подход Гуревича–Питаевского, основанный на модуляционной теории Уизема. Для освоения книги достаточно знания стандартных курсов физики и математики, преподаваемых в технических университетах. Используемый математический аппарат ориентирован на приложения теории к типичным физическим задачам.

Книга предназначена как для специалистов, работающих в области теории нелинейных волн, так и для студентов и аспирантов, изучающих эту область науки.

УДК 534.182+534.222.2
ББК 22.324+22.312

Опубликовано Издательским домом Высшей школы экономики
http://id.hse.ru

doi:10.17323/978-5-7598-2933-1

ISBN 978-5-7598-2933-1 (в пер.)
ISBN 978-5-7598-4068-8 (e-book)

© Камчатнов А.М., 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 13

Глава 1. **Звук** 15
1.1. Распространение звука в газах 15
1.1.1. Приближение сплошной среды 16
1.1.2. Уравнение непрерывности 17
1.1.3. Уравнение Эйлера 18
1.1.4. Уравнение адиабатичности течения и уравнения газовой динамики 19
1.1.5. Волновое уравнение 22
1.1.6. Законы сохранения импульса и энергии в газовой динамике 28
1.1.7. Энергия и импульс звуковых волн 32
1.1.8. Лагранжева формулировка законов сохранения для звуковых волн 35
1.1.9. Лагранжиан уравнений гидродинамики для потенциальных течений 38
1.1.10. Звуковые и энтропийные волны 40
1.1.11. О математике звуковых волн 42
1.1.12. Влияние диссипации на распространение звука 48
1.2. Волны на поверхности воды. 50
1.2.1. Формулировка проблемы 50
1.2.2. Законы сохранения массы, импульса и энергии для волн на воде 53
1.2.3. Теория мелкой воды 57
1.2.4. Двухслойная жидкость 59
1.3. Динамика бозе-эйнштейновского конденсата 65
1.3.1. Однокомпонентный конденсат 65
1.3.2. Лагранжева и гамильтонова формулировка уравнения Гросса–Питаевского 67
1.3.3. Двухкомпонентный конденсат: основные уравнения 71
1.4. Заключение. 74

Глава 2. **Нелинейность** 75
2.1. Уравнение Хопфа 75
2.1.1. «Пылевидная материя» 75
2.1.2. Общее решение уравнения Хопфа и его свойства 76
2.2. Задача об истечении газа в пустоту и волна разрежения 81
2.3. Простая волна. 87
2.4. Задача о поршне 90
2.5. Уравнение Хопфа в теории возмущений. 94
2.6. Инварианты Римана для системы двух уравнений первого порядка 99
2.6.1. Уравнения газовой динамики в диагональной римановой форме . . 99
2.6.2. Общая система двух уравнений первого порядка 102
2.7. Обтекание газом угла: течение Прандтля–Майера 105
2.8. Метод годографа для уравнений газовой динамики 113

2.9. Задача о расширении газового слоя 122
2.10. Расширение газового облака в пустоту 128
2.11. Эволюция импульса плотности в одноатомном газе 134
2.11.1. Монотонное начальное возвышение плотности 135
2.11.2. Локализованные начальные возвышения плотности 137
2.12. Эволюция облака бозе-эйнштейновского конденсата, расширяющегося в вакуум 142
2.13. Метод Римана 148
2.14. Эволюция импульса плотности в бозе-эйнштейновском конденсате 157
2.14.1. Монотонный начальный импульс плотности 157
2.14.2. Локализованный начальный импульс плотности 158
2.15. Релятивистская гидродинамика 163
2.15.1. Основные уравнения 164
2.15.2. Скорость звука, римановы инварианты, простые волны 166
2.15.3. Адиабатическое течение 170
2.15.4. Преобразование годографа и функция Римана в ультрарелятивистской гидродинамике 173
2.15.5. Задача Ландау–Халатникова 176
2.16. Бездисперсионные волны в двухкомпонентном конденсате 186
2.16.1. Простые волны 186
2.16.2. Динамика волн поляризации 189
2.17. Одномерное расширение бозе-конденсата, выпущенного из ловушки 195
2.18. Неавтомодельные решения 198
2.18.1. Неавтомодельное расширение облака конденсата 198
2.18.2. Волновой прибой вблизи наклонного берега 201
2.19. Заключение 204

Глава 3. **Нелинейность и вязкость: ударные волны** 205
3.1. Возможны ли нелинейные волны со стационарным профилем? 205
3.2. Адиабата Рэнкина–Гюгонио 208
3.2.1. Теория Рэнкина 209
3.2.2. Условия на разрыве Гюгонио 212
3.2.3. Теорема Жуге–Цемплена 218
3.2.4. Эволюционность ударной волны 219
3.3. Задача о поршне 223
3.4. Эволюция скачка в распределении плотности и контактные разрывы 228
3.5. Распад начальных разрывов 230
3.5.1. Случай политропных газов 231
3.5.2. Общий случай баротропных газов 234
3.6. Косая ударная волна и течение мимо вогнутого угла 241
3.7. Отражение звука от ударной волны 245
3.8. Устойчивость ударных волн 247
3.9. Эволюция нелинейного импульса в малоамплитудном пределе 255
3.10. Уравнение Бюргерса 260
3.10.1. Вывод уравнения Бюргерса 261
3.10.2. Формирование ударной волны 263

3.10.3. Условие формирования ударной волны в теории Бюргерса 267
3.10.4. Устойчивость ударной волны Бюргерса 268
3.11. Заключение 271

Глава 4. **Дисперсия** 272
4.1. Эффекты дисперсии для волн на воде 273
4.1.1. Закон дисперсии 273
4.1.2. Линейное уравнение КдФ 276
4.2. Модуляция линейных волн 279
4.3. Перенос энергии волнами и групповая скорость 283
4.3.1. Перенос энергии линейными волнами на воде 283
4.3.2. Перенос энергии: вариационный подход 285
4.4. Параболическое уравнение 287
4.5. Метод стационарной фазы 290
4.6. Корабельные волны Кельвина 293
4.7. «Корабельные волны» в бозе-эйнштейновском конденсате 298
4.8. Оптико-механическая аналогия 302
4.9. Движение волновых пакетов вдоль крупномасштабных волн 306
4.9.1. Движение пакета вдоль простой волны 307
4.9.2. Распространение пакета по волне разрежения 309
4.9.3. Движение пакета по локализованному импульсу 312
4.9.4. Движение пакета по волне, описываемой общим решением 314
4.10. Лучевая теория и сохранение энергии 317
4.11. Волновое действие 319
4.11.1. Сохранение волнового действия 319
4.11.2. Волновое действие для линейного уравнения КдФ 320
4.12. Заключение 321

Глава 5. **Нелинейность и дисперсия: солитоны** 322
5.1. Уравнение Кортевега–де Фриза 323
5.1.1. Вывод уравнения Кортевега–де Фриза для волн на мелкой воде . . 324
5.1.2. Кноидальная волна и солитон 329
5.1.3. Устойчивость солитона КдФ 333
5.2. Нелинейное уравнение Шрёдингера 336
5.2.1. Периодическая волна и темный солитон для дефокусирующего НУШ 337
5.2.2. Энергия и импульс темного солитона 340
5.2.3. Мелкие солитоны 343
5.2.4. Фокусирующее нелинейное уравнение Шрёдингера 345
5.3. Солитоны обобщенного НУШ 348
5.3.1. Темные солитоны обобщенного НУШ 348
5.3.2. Светлые солитоны обобщенного НУШ 349
5.3.3. Критерий Вахитова–Колоколова для устойчивости светлых солитонов 351
5.4. «Косые» солитоны 355
5.5. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили 358
5.6. Изгибная неустойчивость солитона КдФ 360

5.7. Изгибная неустойчивость темного солитона НУШ 364
5.7.1. Уравнения для возмущений солитонного решения 364
5.7.2. Интервал волновых чисел неустойчивых мод 366
5.7.3. Инкремент роста неустойчивых мод при $p \ll p_c$ 368
5.7.4. Интерполяционная формула для инкремента неустойчивых мод . . . 370
5.8. Конвективная неустойчивость косых солитонов 371
5.9. Солитон как частица 374
5.9.1. Теорема Эренфеста 375
5.9.2. Движение яркого солитона НУШ под действием потенциала 376
5.9.3. Внутренняя динамика солитона 379
5.10. Темный солитон как квазичастица 382
5.10.1. Темный солитон для уравнения Гросса–Питаевского 382
5.10.2. Динамика темных солитонов на переменном фоне 384
5.11. Уравнение Бенджамена–Оно 392
5.12. Условия для формирования солитона из начального импульса 395
5.13. Заключение 397

Глава 6. **Нелинейные волновые уравнения в физике** 399
6.1. Волны на мелкой воде 399
6.1.1. Решение Рэлея 399
6.1.2. Уравнения Серра 402
6.2. Уравнения для волн в двухкомпонентном конденсате с учетом дисперсии 405
6.2.1. Основные уравнения и линейные волны 406
6.2.2. Волны плотности: уравнение КдФ 408
6.2.3. Волны поляризации: уравнение КдФ 410
6.2.4. Волны поляризации: уравнения мКдФ и Гарднера 410
6.3. Волны поляризации при близких значениях нелинейных постоянных 412
6.3.1. Приближение нелинейного уравнения Шрёдингера 415
6.3.2. Приближение Каупа–Буссинеска 416
6.3.3. Периодические и солитонные решения для волн поляризации 416
6.4. Нелинейное уравнение Шрёдингера 419
6.4.1. Эволюция электромагнитного импульса в нелинейной среде 419
6.4.2. Волны в цепочке связанных маятников 422
6.4.3. Распространение пакета волн на мелкой воде 430
6.4.4. Волны на глубокой воде 433
6.5. Нелинейное уравнение Шрёдингера с производной 436
6.5.1. Бездисперсионный предел, характеристические скорости и римановы инварианты 438
6.5.2. Модуляционная неустойчивость плоских волн 439
6.5.3. Нелинейные волны с малой амплитудой 440
6.6. Заключение 442

Глава 7. **Теория модуляций Уизема** 443
7.1. Общая идея теории Уизема 443
7.2. Модуляция линейной волны в теории линейного уравнения Клейна–Гордона 446
7.3. Модуляция волн в теории нелинейного уравнения Клейна–Гордона 449

7.4. Вариационный подход к теории модуляций 455
7.5. Усреднение лагранжиана для уравнения КдФ 457
7.6. Дисперсионная ударная волна и теория Уизема 460
7.7. Теория модуляций для уравнения Бенджамена–Оно 463
7.7.1. Периодическое решение 463
7.7.2. Модуляции периодических решений уравнения Бенджамена–Оно 465
7.7.3. Задача о «разрушении плотины» в теории уравнения БО 469
7.7.4. Уравнение Бенджамена–Оно–Бюргерса 471
7.8. Заключение 476

Глава 8. **Теория модуляций для уравнения Кортевега–де Фриза** 477
8.1. Модуляционные уравнения Уизема для уравнения Кортевега–де Фриза . . 477
8.2. Подход Гуревича–Питаевского к теории дисперсионных ударных волн . . . 484
8.3. Обобщенный метод годографа 486
8.4. Эволюция начального разрыва 489
8.5. Опрокидывание волны с параболическим начальным профилем 493
8.6. Опрокидывание волны с кубическим начальным профилем 496
8.7. Автомодельное опрокидывание степенных профилей 502
8.7.1. Опрокидывание положительного импульса 504
8.7.2. Опрокидывание отрицательного импульса 508
8.8. Движение краев дисперсионной ударной волны 511
8.8.1. Положительный импульс 512
8.8.2. Число солитонов, образующихся из положительного импульса . . . 515
8.8.3. Отрицательный импульс 516
8.9. Отрицательный импульс: солитонный край 519
8.10. «Квазипростая» дисперсионная ударная волна (отрицательный импульс) 522
8.10.1. Формулировка задачи 522
8.10.2. Решение при $t < t_m$ 526
8.10.3. Решение при $t > t_m$ 528
8.10.4. Движение краев дисперсионной ударной волны 529
8.11. Теория Уизема для уравнения КдФ с возмущением 532
8.12. Стационарные ударные волны в системах с диссипацией 533
8.13. Генерация дисперсионных ударных волн течением мимо препятствия 537
8.13.1. Течение в бездисперсионном (гидравлическом) приближении . . . 537
8.13.2. Транскритическое течение в приближении КдФ 541
8.14. Заключение 546

Глава 9. **Метод конечнозонного интегрирования и теория Уизема** 547
9.1. Полная интегрируемость уравнения КдФ 547
9.1.1. Уравнение Ламе 547
9.1.2. Зонная структура уравнения Ламе 549
9.1.3. Уравнение КдФ как условие совместности двух линейных уравнений 553
9.1.4. Иерархия КдФ и законы сохранения 554
9.1.5. Уравнение КдФ как гамильтонова система 559
9.1.6. Периодическое решение уравнения КдФ 563
9.1.7. Периодические решения иерархии КдФ 566

9.1.8. Другой вывод уравнений Уизема . . . 568
9.2. Схема Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегюра . . . 571
9.2.1. Уравнение Каупа–Буссинеска как условие совместности линейных систем . . . 571
9.2.2. Общая формулировка матричной схемы . . . 571
9.2.3. Нелинейные уравнения в схеме Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегюра 573
9.3. Функция Бейкера–Ахиезера и уравнения Дубровина . . . 577
9.3.1. Скалярная спектральная задача . . . 577
9.3.2. Матричная спектральная задача . . . 580
9.3.3. Связь матричной и скалярной спектральных задач . . . 581
9.4. Уравнения Уизема в схеме АКНС . . . 582
9.4.1. Невозмущенные уравнения . . . 582
9.4.2. Возмущенные уравнения . . . 584
9.5. Асимптотическая формула Карпмана . . . 590
9.6. Заключение . . . 591

Глава 10. **Теория модуляций для нелинейного уравнения Шрёдингера** 593
10.1. Задача Захарова–Шабата . . . 593
10.2. Периодические решения . . . 594
10.3. Уравнения Уизема . . . 600
10.4. Эволюция начальных разрывов . . . 602
10.5. Задача о поршне . . . 608
10.6. Задача о равноускоренном поршне . . . 610
10.7. Квазипростые дисперсионные ударные волны . . . 615
10.8. Асимптотические формулы для числа солитонов . . . 619
10.9. Течение конденсата мимо препятствия . . . 624
10.9.1. Широкое препятствие . . . 624
10.9.2. Узкое препятствие . . . 631
10.9.3. Течение конденсата мимо препятствия при учете диссипации . . . 636
10.10. Заключение . . . 643

Глава 11. **Теория модуляций для уравнения Гарднера** . . . 644
11.1. Периодические решения . . . 645
11.2. Спектральная параметризация периодических решений . . . 650
11.3. Основные структуры . . . 654
11.3.1. Кноидальные боры . . . 654
11.3.2. Волны разрежения . . . 655
11.3.3. Солиборы ($\alpha > 0$) . . . 655
11.3.4. Тригонометрические боры ($\alpha < 0$) . . . 656
11.4. Классификация структур при эволюции разрыва . . . 659
11.4.1. Классификация структур при $\alpha > 0$ . . . 660
11.4.2. Классификация структур при $\alpha < 0$ . . . 662
11.5. Заключение . . . 662

Глава 12. **Теория модуляций для нелинейного уравнения Шрёдингера с производной** . . . 664
12.1. Основные определения . . . 664

12.2. Периодические решения 666
12.3. Уравнения Уизема 671
12.4. Элементарные волновые структуры 673
12.4.1. Волны разрежения 673
12.4.2. Кноидальные дисперсионные ударные волны 676
12.4.3. Тригонометрические дисперсионные ударные волны 679
12.4.4. Составные ударные волны 680
12.5. Классификация волновых структур 682
12.6. Заключение 686

Глава 13. **Теория модуляций для уравнения Ландау–Лифшица** 687
13.1. Основные определения и закон дисперсии линейных волн 687
13.2. Периодические решения 688
13.3. Уравнения Уизема 695
13.4. Элементарные структуры 697
13.4.1. Плато и волны разрежения 698
13.4.2. Кноидальные дисперсионные ударные волны 703
13.4.3. Контактные дисперсионные ударные волны 708
13.5. Классификация волновых структур 715
13.5.1. Сектор НУШ-типа 715
13.5.2. Сектор КБ-типа 717
13.5.3. Волновые структуры, соответствующие переходам между секторами монотонности 718
13.6. Заключение 720

Глава 14. **Общая теория дисперсионных ударных волн** 721
14.1. Квазипростые дисперсионные ударные волны и условие Гуревича–Мещеркина 722
14.2. Движение краев дисперсионной ударной волны 724
14.2.1. Уравнение для малоамплитудного края 724
14.2.2. Движение солитонного края 727
14.3. Эволюция начального разрыва 728
14.3.1. Обобщенное уравнение КдФ 730
14.3.2. Уравнение Серра 731
14.3.3. Обобщенное уравнение Гросса–Питаевского 736
14.4. Распространение краев квазипростой дисперсионной ударной волны 739
14.4.1. Обобщенное уравнение КдФ: положительный импульс 739
14.4.2. Обобщенное уравнение КдФ: отрицательный импульс 741
14.4.3. Уравнения Серра: положительный импульс 743
14.4.4. Уравнения Серра: отрицательный импульс 746
14.4.5. Обобщенное уравнение Гросса–Питаевского: положительный импульс 749
14.4.6. Обобщенное уравнение Гросса–Питаевского: отрицательный импульс 750
14.5. Число солитонов, порождаемых интенсивным импульсом 751
14.5.1. Общая теория 751
14.5.2. Обобщенное уравнение КдФ 753

14.6. Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана и правило квантования Бора–Зоммерфельда 755
14.6.1. Течение в виде простой волны 757
14.6.2. Общее течение гладкой части импульса 760
14.7. Скорость асимптотических солитонов 761
14.8. Распределение солитонов по скоростям: простая волна 763
14.8.1. Обобщенное уравнение КдФ 763
14.8.2. Обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера: простая волна 763
14.9. Распределение солитонов по скоростям: произвольный начальный импульс 764
14.9.1. Нелинейность вида $f(\rho) = \rho$ 764
14.9.2. Не керровская нелинейность 765
14.10. Заключение 768
Приложение А. **Формулы изтеории эллиптических функций** 769
Список литературы 777

Предисловие

Эта книга задумывалась как введение в теорию дисперсионных волн — нового раздела нелинейной физики, получившего значительное развитие в последние годы. Однако при работе над книгой быстро выяснилось, что сколько-нибудь детальное изложение этой теории требует также достаточно подробного рассказа о вязких ударных волнах, не говоря уж об основных эффектах нелинейности и дисперсии, влияющих на распространение волновых импульсов. В результате книга превратилась в общий курс теории нелинейных волн. Тем не менее отбор материала отличает эту книгу от других книг со сходными названиями — в частности, почти половина ее посвящена в основном теории дисперсионных ударных волн, не излагавшейся сколько-нибудь подробно в других монографиях.

В основу книги были положены отчасти лекции разного уровня сложности, прочитанные автором для студентов ВШЭ и МФТИ, в Институте спектроскопии РАН, а также в Парижском университете-XI, Национальном университете Тайваня и других местах. Поэтому в первых главах дается довольно много элементарного материала по теории линейных волн, по методам газовой динамики и по элементарной теории солитонов. Везде используются математические методы, не выходящие за рамки стандартных курсов математики для физических факультетов. Более того, книга написана физиком и для физиков, и поэтому нередко вместо доказательств используются наводящие соображения качественного характера, а их справедливость подтверждается конкретными примерами. После некоторых колебаний я исключил упражнения — книга большая и насыщена математикой, так что читатель достаточно поупражняется, внимательно изучая изложенный материал.

Работая в области теории дисперсионных ударных волн, я общался, естественно, со многими другими физиками и математиками, специализирующимися в нелинейной физике, и это во многом повлияло на содержащийся в книге материал. Прежде всего хотел бы сказать, что мой интерес к этой области науки возник в результате изучения классической статьи А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского (1973 г.), и общение с этими выдающимися учеными было для меня чрезвычайно поучительным, что способствовало прояснению некоторых важных вопросов теории дисперсионных ударных волн. Научное сообщество российских физиков, работающих в области нелинейной науки, во многом сохранило свое единство благодаря огромной организующей роли В.Е. Захарова и Е.А. Кузнецова, которые с примечательной стабильностью проводят ежегодные Научные сессии Совета РАН по нелинейной динамике и регулярные международные конференции «Солитоны, коллапсы и турбулентность», где многие рассматриваемые в книге задачи впервые обсуждались, и очень часто замечания коллег и задаваемые ими вопросы были для

меня полезны. Сотрудничество с многочисленными коллегами, студентами и аспирантами простиралось от простых замечаний до полноценного соавторства; невозможно перечислить всех, кто внес таким образом свой вклад в эту книгу. Но я не могу не выделить двух коллег, Г.А. Эля и Н. Павлоффа (N. Pavloff), совместная работа с которыми длилась долгие годы — без их вклада книга была бы совсем другой. Наконец, я благодарен своей жене Валентине, постоянная поддержка которой этого долголетнего проекта во многом способствовала его завершению.

А.М. Камчатнов
август 2022 г.

Глава 1
ЗВУК

Главная цель этой книги — развить теорию распространения волн в таких средах, в которых скорость распространения волны зависит как от ее амплитуды (нелинейность), так и от длины волны (дисперсия среды). Задача эта очень трудная, так что естественно будет начать с более простых частных случаев, когда хотя бы одним из этих эффектов можно пренебречь. А еще лучше начать с того, чтобы освоиться с простейшим случаем, когда ни нелинейность, ни дисперсия не играют никакой роли в распространении импульса — даже этот простейший случай весьма поучителен, а его тщательное изучение создаст необходимую основу для перехода к более сложным ситуациям. Кроме того, этот случай и практически важен, так как охватывает огромную область *линейной акустики*, т.е. теории распространения звука в воздухе, физические свойства которого для рассматриваемых процессов характеризуются единственным основным параметром — постоянной скоростью звука c_0.

Следует сказать, что хотя изучение таких линейных *волн без дисперсии* началось в акустике, при дальнейшем развитии науки аналогичные ситуации стали довольно часто встречаться и в других областях физики, причем в очень фундаментальных ее областях. Достаточно вспомнить, например, что электромагнитные волны в вакууме описываются линейными уравнениями Максвелла и распространяются с постоянной *скоростью света,* не зависящей от длины волны. При распространении волн разнообразной природы в различных средах также часто бывает, что амплитуда волны недостаточно велика, чтобы проявились нелинейные эффекты, так что в главном приближении ими можно пренебречь. Дисперсионные же эффекты определяются какими-либо характерными размерами (или частотами), присущими рассматриваемой среде, так что если длина волны много больше такого характерного размера (или частота существенно отличается от характерных внутренних частот в среде), то в главном приближении дисперсионными эффектами также можно пренебречь и мы опять приходим к задаче о распространении звука.

Осваивать любую науку лучше всего на разборе конкретных задач. Поэтому мы начнем наш курс с описания нескольких физических систем, в которых понятие звука или его аналога играет фундаментальную роль.

1.1. Распространение звука в газах

О том, что слышимый нами звук представляет собой колебания плотности воздуха, распространяющиеся со скоростью $c_0 \approx 330$ м/с, мы прекрасно знаем из элементарной физики. Впервые скорость звука вычислил еще Ньютон

в 1687 г. Однако он сделал при этом весьма нетривиальную ошибку, на исправление которой ушло более ста лет — лишь Лаплас в 1816 г. понял, в чем была ошибка Ньютона, и дал правильную формулу для скорости звука. Тем не менее исходные физические представления у Ньютона были верные: аналогично грузу на пружине воздух обладает *массой* и *упругостью*, так что движение воздуха можно рассчитать на основе ньютоновской механики. Это кажущееся сейчас таким тривиальным замечание вряд ли было таким же очевидным во времена Ньютона. Мы, однако, не будем вдаваться в эти интересные исторические подробности и обратимся к более современному подходу, сформулированному Эйлером.

1.1.1. Приближение сплошной среды. Метод Эйлера представляет собой образец построения физической теории. Прежде всего, в ней определяются физические параметры, характеризующие систему. Поскольку нас интересует движение газа на масштабах, много больших, чем длина свободного пробега молекул, и на периодах времени, много больших, чем среднее время между их столкновениями, то молекулярным строением газа можно пренебречь. Мы увидим потом, что в теории ударных волн эти предположения не выполняются и теория потребует модификации; но эта модификация будет проведена таким образом, что рассматриваемое нами *приближение сплошной среды* (или *континуальное* приближение) сохранит свое значение как составная часть этой более общей теории.

В континуальном приближении, рассматривающем газ как непрерывную среду, его массовые свойства описываются плотностью ρ, т.е. массой на единицу объема. При этом мы предполагаем здесь, что плотность существенно изменяется лишь на масштабах, много больших, чем длина свободного пробега, т.е. ее можно считать непрерывной функцией координаты $\mathbf{r}$ и времени t: $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$. Этим мы вводим одну из переменных, описывающих непрерывную среду, а именно переменную, характеризующую массовые свойства среды. Переменная $\rho(\mathbf{r}, t)$ является аналогом массы в ньютоновской механике материальных точек.

При распространении звука газ движется, т.е. маленькая частичка газа, находящаяся в точке $\mathbf{r}$ в момент t имеет скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (в компонентах $\mathbf{u} = (u, v, w)$), что определяет еще одну, на этот раз векторную, переменную, описывающую кинематику среды. Очевидно, что переменная $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ является аналогом скорости материальной точки. Для формулировки аналога закона движения Ньютона необходимо еще определить переменную, являющуюся аналогом ускорения материальной точки. Для этого нам надо учесть, что скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ относится к частичке газа, находящейся в момент t в точке $\mathbf{r}$; через малый промежуток времени Δt скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \Delta t)$ будет относиться уже к другой частичке газа, пришедшей в точку $\mathbf{r}$ в момент $t + \Delta t$. Однако в уравнение Ньютона входит ускорение, относящееся к фиксированной частице, и его можно вычислить следующим образом. За время Δt интересующая нас частица перемещается в точку с координатами, равными в первом при-

ближении $\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\cdot\Delta t$. Поэтому изменение ее скорости равно

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\cdot\Delta t, t+\Delta t\right)-\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\approx\left[\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+(\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla)\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right]\Delta t.$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, очевидно является ускорением выбранной нами частицы газа. Обозначается оно как

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}. \tag{1.1}$$

Первое слагаемое в правой части является производной по времени от скорости в точке $\mathbf{r}$, а второе слагаемое учитывает перенос частицы со скоростью $\mathbf{u}$. Выражение (1.1) является результатом применения оператора *полной или субстанциональной производной*

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla) \tag{1.2}$$

к скорости $\mathbf{u}$ и дает скорость изменения скорости, связанной с частицей, т.е. с «субстанцией». Ясно, что наше рассуждение можно применить не только к скорости частицы, но и к любой другой ее характеристике. Например, скорость изменения плотности частицы газа равна

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho, \tag{1.3}$$

и эту формулу можно интерпретировать следующим образом: если распределение плотности описывается функцией $\rho=\rho(\mathbf{r},t)$, то ее производная по времени вдоль траектории жидкой частицы $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{u}=\dot{\mathbf{r}}(t)$, равна (1.3). Точно так же получается скорость изменения температуры T или энтропии s на единицу массы вдоль траекторий жидких частиц.

1.1.2. Уравнение непрерывности. Последняя оговорка насчет энтропии *на единицу массы* подразумевает, что масса выделенной частицы газа при ее движении не меняется, и это накладывает определенное условие на изменение плотности при течении газа, которое называется *уравнением непрерывности*. Хотя масса частицы не меняется, плотность газа в ней может изменяться вследствие изменения объема. Это отличает механику непрерывной среды от механики материальных точек: в последней масса материальных точек обычно считается фиксированной, тогда как плотность (массовая характеристика непрерывной среды) может изменяться, а условие сохранения массы выделенной частички среды при ее движении должно учитываться отдельным уравнением.

Изменение плотности легко подсчитать следующим образом. Пусть выделенная частица газа ограничена деформирующейся со временем (вследствие течения газа) поверхностью S. Выберем на этой поверхности элемент dS и введем вектор $\mathbf{dS}$, равный по величине площади dS и направленный по внешней нормали $\mathbf{n}$ к поверхности: $\mathbf{dS}=\mathbf{n}dS$. Тогда скалярное произведение $\mathbf{u}\cdot\mathbf{dS}$ скорости жидкости $\mathbf{u}$ в области dS на вектор $\mathbf{dS}$ дает объем, «заметаемый» элементом dS за единицу времени, а интеграл от $\mathbf{u}\cdot\mathbf{dS}$ по всей поверхности S даст нам как раз скорость изменения объема V, заключенного

внутри поверхности S. С помощью теоремы Гаусса для малого объема V получим

$$\frac{dV}{dt} = \int\limits_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{dS} = \int\limits_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV \approx V(\nabla \cdot \mathbf{u}). \tag{1.4}$$

Обозначим через m сохраняющуюся массу выделенной частицы, так что $\rho = m/V$. Тогда плотность газа в выделенной частице изменяется со скоростью

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m}{V} = -\frac{m}{V^2}\frac{dV}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}). \tag{1.5}$$

Объединяя уравнения (1.3) и (1.5), получаем с использованием элементарных формул векторного анализа уравнение непрерывности в привычном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{1.6}$$

Это уравнение допускает также и непосредственную наглядную интерпретацию. Для ее пояснения выделим объем V, теперь не связанный с жидкой частицей, а фиксированный в пространстве, так что жидкость может втекать в него и вытекать из него через граничную поверхность S. Скорость изменения содержащейся в V массы равна, с одной стороны,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV,$$

с другой стороны, она может быть подсчитана как интеграл от потока массы $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ сквозь поверхность S:

$$-\int\limits_S \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{dS} = -\int\limits_V \nabla(\rho\mathbf{u}) dV$$

(здесь знак *минус* отражает то, что вектор $\mathbf{dS}$ направлен по *внешней* нормали к S). Поскольку объем V неподвижен, то имеем равенство

$$\int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int\limits_V \nabla(\rho\mathbf{u}) dV,$$

и вследствие произвольности выбора объема V мы сразу приходим к уравнению непрерывности (1.6). Это уравнение следует из определения величин ρ и $\mathbf{u}$, а также из предположения, что они являются непрерывными функциями координаты $\mathbf{r}$, причем в системе нет источников или стоков газа.

1.1.3. Уравнение Эйлера. Перейдем теперь к выводу следствия из уравнения динамики Ньютона. Здесь нам будет удобно иметь дело с частицей непрерывной среды в виде маленького кубика, имеющего в данный момент времени t ребра единичной длины, параллельные осям координат. Соответственно кубик имеет единичный объем и его масса равна ρ, так что произведение массы на ускорение, см. (1.1), равно

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right). \tag{1.7}$$

Эта величина должна равняться силе, действующей в момент t на кубик.

Если газ находится в поле внешних сил, то на него действует сила $\rho\mathbf{f}$, где $\mathbf{f}$ есть сила, приходящаяся на единицу массы среды. Кроме того, частица подвергается действию соседних частиц среды. В случае жидкости или газа часть этой силы характеризуется давлением p, т.е. нормальной силой, действующей на единицу поверхности. Согласно закону Торричелли эта сила не зависит от ориентации площадки, на которую она действует, т.е. давление является скалярной функцией координаты и времени: $p = p(\mathbf{r}, t)$. Сила, действующая на наш кубик, возникает из-за того, что давления на противоположные грани кубика слегка различны, так что их разности не равны нулю. Поэтому в направлении оси x на кубик, левая грань которого находится в точке x, действует сила $-[p(x+1) - p(x)] \approx -\dfrac{\partial p}{\partial x}$, так как мы считаем, что единичная длина ребра маленького кубика много меньше тех расстояний, на которых существенно меняются характеристики газа; в частности, изменение давления можно учесть лишь в виде первого члена разложения в ряд Тейлора. Обобщение на трехмерный случай очевидно: сила, действующая на единичный объем и обусловленная давлением, равна $\mathbf{f}_{\text{давление}} = -\nabla p$. Приравнивая (1.7) сумме объемной силы и силы, обусловленной градиентом давления, мы приходим к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{1.8}$$

Как мы видим, при его формулировке мы ввели еще одну характеристику непрерывной среды — давление $p(\mathbf{r}, t)$, описывающую *упругость* среды.

Ясно, что такое описание сил годится лишь до тех пор, пока справедлив закон Торричелли, найденный на эксперименте в статическом случае покоящихся сред. Если же в среде есть течение, то, как мы знаем из опыта, на его характер большое влияние может оказывать *вязкость* среды. Поэтому необходимо сформулировать условия, при которых вязкостью можно пренебречь и использовать для описания динамики среды уравнение (1.8). Вязкость среды обычно характеризуется *коэффициентом вязкости* η, определяемым из эксперимента. Тогда можно показать, что если параметры течения такие, что безразмерное *число Рейнольдса*

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u d}{\eta}, \tag{1.9}$$

где u — характерная скорость течения и d — характерный размер, на котором существенно изменяется u, много больше единицы, $\mathrm{Re} \gg 1$, то вязкими силами можно пренебречь.

1.1.4. Уравнение адиабатичности течения и уравнения газовой динамики. В уравнениях (1.6) и (1.8) неизвестными являются плотность ρ, давление p и три компоненты скорости $\mathbf{u}$, т.е. пять функций, а уравнений, если записать (1.8) в покомпонентном виде, имеется всего четыре. Очевидно, что для описания течения газа нам не хватает одного уравнения, и причина этого тоже ясна: пока что не учтено, что при сжатии газа в процессе течения

давление тоже изменяется, а в уравнениях (1.6) и (1.8) эта зависимость никак не отражается.

Однако следует учесть, что при сжатии газа изменяется и его температура, вследствие чего тепло может перетекать из более нагретых областей в менее нагретые благодаря теплопроводности газа. Если теплопроводность мала, то этим относительно медленным процессом можно пренебречь и соответствующее условие можно записать в виде, аналогичном условию $\mathrm{Re} \gg 1$, т.е.

$$\mathrm{Pe} = \frac{ud}{\chi} \gg 1, \tag{1.10}$$

где χ — коэффициент температуропроводности, а безразмерный параметр Pe называется *числом Пекле*. Таким образом, когда числа Рейнольдса и Пекле много больше единицы, можно одновременно пренебречь как вязкостью, так и теплопроводностью.

Раз диссипативные процессы пренебрежимо малы, то энтропия каждой жидкой частицы сохраняется и это условие можно записать как закон сохранения энтропии s на единицу массы. С учетом смысла субстанциональной производной (1.2) мы записываем это уравнение в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) s = 0. \tag{1.11}$$

Уравнение непрерывности (1.6), уравнение Эйлера (1.8) и уравнение адиабатичности (1.11) составляют полную систему уравнений газовой динамики в пренебрежении диссипативными процессами, причем предполагается, что нам известно термодинамическое соотношение, связывающее энтропию с давлением и плотностью: $s = s(p, \rho)$.

Обратимся к самому простому случаю, когда газ можно рассматривать как идеальный не только в механическом и кинетическом смысле (отсутствие вязкости и теплопроводности), но и в термодинамическом, т.е. в нем отсутствует взаимодействие между молекулами, а внутренняя энергия газа сводится к средней кинетической энергии молекул. Как известно из элементарной физики, в этом случае давление связано с температурой и объемом одного моля вещества *уравнением состояния* $pV = RT$, где R — газовая постоянная (если температура измеряется в градусах, то $R = N_A k_B$, где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ — число Авогадро, представляющее собой число молекул в одном моле, k_B — постоянная Больцмана, переводящая энергетические единицы в градусы; в дальнейшем мы обычно будем измерять температуру в энергетических единицах, и постоянная Больцмана будет опускаться). С учетом этого уравнения состояния выражение для энтропии получается из элементарной термодинамики, и его вывод можно найти в любом учебнике общей физики, так что энтропия одного грамма газа равна

$$s = c_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right), \tag{1.12}$$

где $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкости c_p одного грамма газа при постоянном давлении к теплоемкости c_v одного грамма при постоянном объеме,

причем обе теплоемкости являются постоянными (такой газ называется *политропным*). Тогда давление равно

$$p = e^{s/c_v} \cdot \rho^{\gamma}, \tag{1.13}$$

и эта формула позволяет выразить s в уравнении адиабатичности через p и ρ, так что система уравнений газовой динамики для адиабатического течения политропного газа приобретает вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right) = 0. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Наконец, если ввести переменную c^2 согласно определению

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}, \tag{1.15}$$

то подстановка $p = c^2\rho/\gamma$ преобразует систему (1.14) для адиабатического течения ($dp = c^2 d\rho$) в уравнения

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{c^2}{\rho}\nabla \rho = \mathbf{f}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}}\right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}}\right) = 0 \end{gathered} \tag{1.16}$$

для переменных $\rho, \mathbf{u}, c^2$, и эта форма оказывается иногда более удобной.

Мы написали уравнения в общем виде, не предполагая, что течение обладает какой-либо симметрией. Но в аналитических исследованиях конкретных задач имеют дело, как правило, с частными случаями течений, обладающих большой симметрией, что очень упрощает исследование. Например, в случае *плоских волн* все переменные зависят только от одной пространственной координаты, в качестве которой можно выбрать ось x, скорость $\mathbf{u}$ становится скаляром u; не составляет труда выписать уравнения для переменных в такой волне. Для течений, обладающих цилиндрической или сферической симметрией, вектор $\mathbf{u}$ направлен в радиальном направлении и очевидно, что $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \equiv u\partial/\partial r$. Несколько большего внимания требует дивергентный член в уравнении непрерывности. Здесь удобно исходить из физического смысла дивергенции как зависящего от координат изменения потока массы, приходящегося на единицу площади в двумерном или единицу объема в трехмерном случае. Беря в качестве элемента площади кольцо, а в качестве элемента объема сферический слой с радиусом r, получаем соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(2\pi r \cdot \rho u)}{2\pi r \Delta r} &\to \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho u)}{\partial r} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{\rho u}{r}, \\ \frac{\Delta(4\pi r^2 \cdot \rho u)}{4\pi r^2 \Delta r} &\to \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\rho u)}{\partial r} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r}. \end{aligned}$$

Если обозначить через ν размерность пространства, уравнения динамики (1.14) для соответствующих симметричных течений примут вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{(\nu-1)\rho u}{r} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = f(r), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0; \tag{1.17}$$

аналогичным образом можно преобразовать систему (1.16).

Если мы имеем дело с такой задачей, что все частицы газа начинают движение из состояния с одинаковыми давлением p_0 и плотностью ρ_0, то выражение (1.13) для давления можно представить в виде

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \tag{1.18}$$

где одинаковый для всех частиц энтропийный множитель $\exp(s_0/c_v)$ выражен через эти фиксированные значения p_0 и ρ_0. В этом случае уравнение адиабатичности для постоянной для всех частиц энтропии $s = s_0$ можно опустить, и уравнения газовой динамики сводятся к системам из только двух уравнений для плотности и скорости течения, а давление исключено с помощью формулы (1.18).

Ясно, что предположение об адиабатичности течения должно быть справедливым для достаточно малых периодов звуковых волн, когда теплопроводность не успевает «включиться». Если же мы рассматриваем очень медленные процессы, когда температура в интересующих нас объемах газа успевает выровняться вследствие теплопроводности, то зависимость давления от плотности сразу следует из уравнения состояния $pV = RT$; если учесть, что масса одного моля газа равна $N_A m$ и $\rho = N_A m/V$, то

$$p = \frac{\rho}{m}T, \tag{1.19}$$

где температура T считается постоянным параметром. Уравнения (1.18) и (1.19) дают нам два характерных простых примера зависимости давления от плотности, которыми мы пока и ограничимся.

Покажем, что полученные уравнения газовой динамики описывают распространение звука. Это позволит нам выяснить заодно и физический смысл переменной c в выражении (1.15).

1.1.5. Волновое уравнение. Обратимся теперь к основной теме этой главы — распространению звука. При написании уравнений газовой динамики в форме (1.16) мы уже ввели обозначение (1.15) для переменной c, которая, как мы вскоре убедимся, равна скорости звука при данных значениях давления и плотности. Выясним, при каких условиях можно пренебречь внешней силой $\mathbf{f}$ в уравнении Эйлера.

Если газ неподвижен, то второе уравнение (1.16) сводится к статическому $c^2\nabla\rho = \rho\mathbf{f}$. Например, если $\mathbf{f}$ является силой тяжести, то вблизи поверхности Земли в системе координат с осью z, направленной вверх и обозначающей,

следовательно, высоту, получим уравнение для изменения плотности воздуха с высотой: $\frac{d\rho}{dz} = -\frac{g}{c^2}\rho$, где g — ускорение свободного падения. В статическом случае естественно предполагать, что температура принимает равновесное значение во всем интересующем нас объеме газа, и использовать изотермическую формулу (1.19), $c^2 = T/m$, откуда следует барометрическая формула $\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{mg}{T}z}$. Если мы рассматриваем распространение звука в объемах с высотами $z \ll \frac{T}{mg}$, то этим изменением плотности в обычных условиях спокойно можно пренебречь, поскольку $T/m \sim c_0^2 \sim 330^2 \text{м}^2/\text{с}^2$ и характерная высота, на которой существенно изменяется атмосферное давление, имеет порядок величины 10 км. Поэтому для большинства приложений силой тяжести можно пренебречь. Опустив силу $\mathbf{f}$, сводим систему уравнений для движения газа к виду

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{c^2}{\rho}\nabla\rho = 0, \tag{1.20}$$

где мы предполагаем, что до прибытия звуковой волны газ с постоянными значениями плотности и давления находится в равновесии, так что мы можем пользоваться уравнением адиабаты Пуассона в форме (1.18) и считать $c = c(\rho)$ известной функцией плотности.

Для полного решения задачи эту систему требуется еще дополнить начальными и граничными условиями, так что возникающая проблема может оказаться чрезвычайно сложной хотя бы из-за нелинейности выведенных уравнений. В дальнейшем мы выясним основные эффекты появления нелинейности в течении газа. Сейчас, однако, будем исходить из того, что система имеет тривиальное стационарное решение $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $\mathbf{u} = 0$, т.е. во всем рассматриваемом объеме покоящийся газ имеет постоянную плотность. Но в этом случае интересно посмотреть на эволюцию малых отклонений от этого равновесного состояния. Пусть $\rho = \rho_0 + \rho'(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$; тогда подстановка в (1.20) дает в первом приближении по малым отклонениям плотности и скорости от равновесных значений линейные уравнения

$$\rho'_t + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u}_t + (c_0^2/\rho_0)\nabla\rho' = 0, \tag{1.21}$$

где $c_0^2 = dp/d\rho|_{\rho_0}$ вычисляется здесь при равновесном значении плотности и является постоянной величиной. Для идеального газа она равна

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \tag{1.22}$$

где, заглядывая немного вперед, мы укажем, что c_0 окажется скоростью звука. При этом мы пренебрегли нелинейными членами типа $\mathbf{u}\nabla \cdot \rho'$ или $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. Если мы рассматриваем волновые импульсы с размерами порядка L и длительностью порядка T, то, как легко убедиться, эти члены малы по сравнению с оставленными при условии $u \ll L/T \sim c_0$. Таким образом, наше

линейное приближение справедливо при дозвуковых скоростях течения газа. Исключая ρ' из уравнений (1.21), получим

$$\mathbf{u}_{tt} - c_0^2 \Delta \mathbf{u} = 0, \tag{1.23}$$

где $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа. Аналогично, исключая $\mathbf{u}$, находим

$$\rho'_{tt} - c_0^2 \Delta \rho' = 0. \tag{1.24}$$

Мы пришли к волновому уравнению — одному из основных уравнений классической математической физики. Рассмотрим простейшее решение волнового уравнения, необходимое для дальнейшего.

Заметим прежде всего, что из уравнений (1.21) следует, что скорость течения газа в волне направлена против градиента плотности, т.е. звуковые волны являются продольными. Это свойство физически совершенно очевидно: газ течет из областей сжатия в области разрежения. Рассмотрим решение в виде плоской волны, когда параметры волны ρ' и $\mathbf{u}$ зависят только от одной пространственной координаты x и не зависят от остальных координат y, z. В этом одномерном случае скорость будет направлена тоже по оси x: $\rho' = \rho'(x,t)$, $u = u(x,t)$, $(\mathbf{u} = (u,0,0))$. Уравнение

$$\rho'_{tt} - c_0^2 \rho'_{xx} = 0 \tag{1.25}$$

легко решается после преобразования к переменным $\xi = x - c_0 t$, $\eta = x + c_0 t$, в которых оно приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{1.26}$$

с очевидным решением $\rho' = F(\xi) + G(\eta)$ или

$$\rho' = F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t), \tag{1.27}$$

где F и G — произвольные функции. Как мы видим, это решение описывает две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях со скоростью c_0, что оправдывает название для этого параметра как *скорости звука*. При этом, если эти волны не накладываются друг на друга, то каждый импульс распространяется без изменения формы.

Рассмотрим возмущение плотности, распространяющееся вправо:

$$\rho' = F(x - c_0 t). \tag{1.28}$$

Тогда из (1.21) находим соответствующее распределение скорости течения жидкости

$$u = \frac{c_0}{\rho_0} F(x - c_0 t) = \frac{c_0}{\rho_0} \rho', \tag{1.29}$$

и связь $p = p(\rho)$ дает соответствующее распределение давления в волне: $p' = c_0^2 \rho'$. Из (1.29) видно, что в областях повышенной плотности скорость

течения выше. Если бы возмущение распространялось влево, то в правой части (1.29) стоял бы противоположный знак:

$$u = -\frac{c_0}{\rho_0} G(x + c_0 t) = -\frac{c_0}{\rho_0} \rho', \tag{1.30}$$

т.е. скорость течения газа направлена в сторону распространения волны в тех местах, где газ сжат, и в противоположную сторону, где он разрежен. При этом изменение плотности по-прежнему дается формулой $p' = c_0^2 \rho'$.

Функции F и G определяются начальными и граничными условиями задачи. Пусть, например, импульс создается возмущением плотности $\rho_0'(x)$ и скорости течения $u_0(x)$ в начальный момент времени $t = 0$:

$$\rho'\big|_{t=0} = \rho_0'(x), \qquad u|_{t=0} = u_0(x). \tag{1.31}$$

Следовательно, в силу (1.27) функции F и G должны удовлетворять условию

$$\rho_0'(x) = F(x) + G(x) \tag{1.32}$$

и в силу (1.21) (т.е. $\rho_t' = -\rho_0 u_x$ или $-\rho_0 u_{0,x} = -c_0 F_x(x) + c_0 G_x(x)$) — условию

$$-\frac{\rho_0}{c_0} u_0(x) = -F(x) + G(x), \tag{1.33}$$

где мы предполагаем, что начальный импульс локализован в пространстве, т.е. $u_0(x) \to 0$ и $\rho_0'(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, так что постоянная интегрирования обращается в нуль. Из (1.32), (1.33) легко находим

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\rho_0'(x) + \frac{\rho_0}{c_0} u_0(x)\right], \quad G(x) = \frac{1}{2}\left[\rho_0'(x) - \frac{\rho_0}{c_0} u_0(x)\right]. \tag{1.34}$$

Таким образом, решение нашей задачи дается формулой

$$\rho'(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\left[\rho_0'(x - c_0 t) + \frac{\rho_0}{c_0} u_0(x - c_0 t)\right] + \left[\rho_0'(x + c_0 t) - \frac{\rho_0}{c_0} u_0(x + c_0 t)\right]\right\}. \tag{1.35}$$

Соответствующее распределение скорости течения газа может быть найдено с помощью формулы (1.21). Если в начальный момент имеется только возмущение плотности ($\rho_0'(x) \neq 0, u_0(x) = 0$), то оно распадается на два возмущения такой же формы, но вдвое меньшей амплитуды, которые движутся в противоположных направлениях (см. рис. 1.1). Если же в начальный момент возмущена только скорость течения газа ($\rho_0'(x) = 0$, $u_0(x) \neq 0$), то это

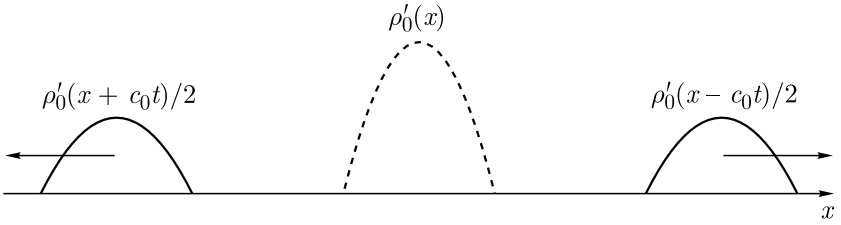

Рис. 1.1. Распад начального возмущения плотности $\rho_0'(x)$. Начальное распределение указано штриховой линией

возмущение распадается на импульсы плотности противоположной полярности (рис. 1.2). В общем случае бегущие в противоположных направлениях импульсы имеют отличающиеся друг от друга формы, которые могут быть найдены с помощью выражения (1.35).

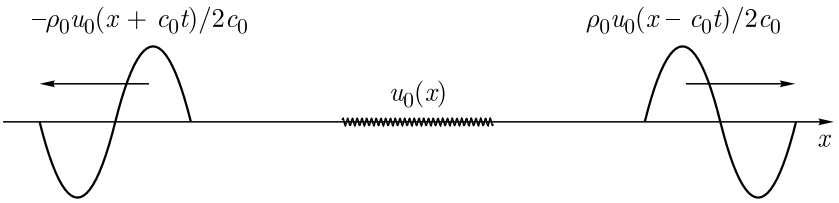

Рис. 1.2. Образование волн плотности из начального возмущения скорости $u_0(x)$, указанного символически волнистой линией

Стоит отметить, что в силу уравнений движения (1.21) начальное распределение скорости течения $u_0(x)$ связано с начальным распределением производной плотности по времени $\rho'_{t,0}(x)$ соотношением

$$\frac{du_0(x)}{dx} = -\frac{1}{\rho_0}\rho'_{t,0}(x), \quad \text{т.е.} \quad u_0(x) = -\frac{1}{\rho_0}\int^{x} \rho'_{t,0}(x')dx'.$$

Поэтому общее решение (1.35) можно переписать в виде

$$\rho'(x,t) = \frac{1}{2}[\rho'_0(x - c_0 t) + \rho'_0(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0}\int\limits_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} \rho'_{t,0}(x')dx'. \tag{1.36}$$

По традиции эта формула называется формулой Даламбера для общего решения волнового уравнения (1.25), хотя на самом деле ее вывел Эйлер, а Даламбер считал ее незаконной. В этом представлении исчезла какая-либо отсылка к «скорости течения газа», так что ρ' может представлять любую величину, движение которой подчиняются волновому уравнению, а начальные данные задаются распределениями самой этой величины и ее производной по времени.

В качестве конкретного примера, который в дальнейшем получит существенное развитие, рассмотрим задачу об эволюции разрыва в начальных условиях. Пусть первоначально газ находится в бесконечной трубе, разделенной при $x = 0$ перегородкой, и плотность газа в левой половине трубы несколько больше плотности в правой ее половине (см. рис. 1.3, *а*):

$$\rho'(x,0) = \rho'_0(x) = \Delta\rho \cdot \theta(-x), \quad \text{т.е.} \quad \rho(x,0) = \begin{cases} \rho_0 + \Delta\rho, & x < 0, \\ \rho_0, & x > 0, \end{cases} \tag{1.37}$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда ($\theta(x) = 0$ при $x < 0$, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$). Мы предполагаем, что разность плотностей $\Delta\rho$ достаточно мала по сравнению с характерной плотностью газа ρ_0, по которой распространяется возмущение.

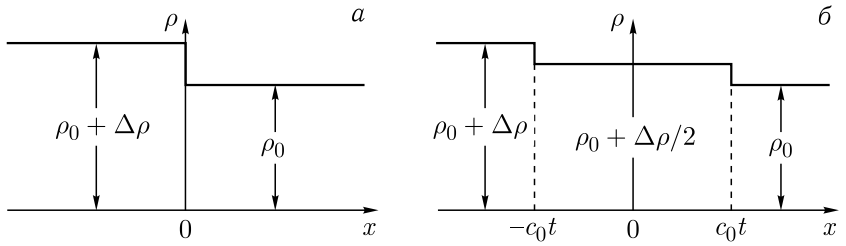

Рис. 1.3. Эволюция начального разрыва плотности (*а*). На рисунке (*б*) показано, что через время t образуется волна плотности, бегущая вправо со скоростью звука c_0, и волна разрежения, бегущая влево с той же скоростью. Между ними находится плато с промежуточной плотностью

Эволюция возмущения после устранения в момент времени $t = 0$ перегородки описывается согласно решению (1.35) выражением

$$\rho'(x,t) = \frac{\Delta\rho}{2}\theta(-x + c_0 t) + \frac{\Delta\rho}{2}\theta(-x - c_0 t), \tag{1.38}$$

где c_0 — скорость звука в газе с плотностью ρ_0. Распределение плотности в возникшей волне показано на рис. 1.3, *б*. Первоначальный разрыв расщепился на два разрыва, один из которых представляет собой «волну плотности», распространяющуюся вправо со скоростью звука c_0, а другой — «волну разрежения», распространяющуюся влево с такой же по абсолютной величине скоростью c_0. Между этими двумя разрывами располагается «плато» со средней плотностью $\rho_0 + \Delta\rho/2$. Такая простая картина справедлива до тех пор, пока в игру не вступают другие эффекты (вязкость, нелинейность), которыми мы пренебрегли в нашей теории.

Обсудим формулу (1.22) для скорости звука в воздухе. Впервые ее вывел, по существу Ньютон, в своих «Математических началах натуральной философии». Для вычисления же значения скорости звука в атмосферном воздухе он использовал изотермическое соотношение (см. (1.19)) $p = \text{const} \times \frac{1}{V} = \text{const} \cdot \rho$, незадолго до того найденное экспериментально Бойлем. В результате Ньютон получил $c_{\text{Ньютон}} = \sqrt{\dfrac{p_0}{\rho_0}}$, где p_0 — атмосферное давление и ρ_0 — равновесная плотность воздуха. Подстановка измеренных опытным путем значений давления и плотности дала величину $c_{\text{Ньютон}} = 280$ м/с. Однако непосредственные измерения скорости звука дали значение 330 м/с, что существенно отличается от величины, предсказанной Ньютоном. На протяжении более ста лет ученые пытались объяснить это расхождение, но удалось это сделать Лапласу лишь в 1816 г. Лаплас заметил, что слышимый нами звук образуется быстро колеблющимися телами, так что период между соседними импульсами плотности равен $T \sim 10^{-2}$–10^{-4} с, тогда как опыты Бойля проводились при гораздо более медленном сжатии воздуха, настолько медленном, что его температура поддерживалась постоянной и равной температуре окружающей среды. Однако при быстром сжатии воздуха образующееся тепло не успевает перераспределиться вследствие теплопроводности в объ-

еме воздуха с размерами порядка длины волны $L \sim c_0 T \sim 3 \cdot 10{-}3 \cdot 10^3$ см. Это означает, что при распространении звука теплообменом между сжатыми и разреженными областями в волне можно пренебречь, т.е. процесс является адиабатическим с сохранением энтропии. Считая воздух идеальным газом, заключаем, что давление связано с плотностью соотношением (1.18). Именно это предположение сделал Лаплас и получил формулу для скорости звука

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}\,.$$

Поскольку воздух состоит в основном из двухатомных молекул, то для него с хорошей точностью $\gamma = 7/5 = 1,4$ и значение Лапласа $c_0 = 330$ м/с прекрасно согласуется с экспериментальным значением.

1.1.6. Законы сохранения импульса и энергии в газовой динамике. В классической механике Ньютона важную роль играют законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Хотя их можно вывести непосредственно из уравнений Ньютона при некоторых дополнительных предположениях относительно сил, действующих между частицами системы, при более внимательном рассмотрении можно заметить, что указанные дополнительные предположения эквивалентны утверждениям об инвариантности системы относительно преобразований, выражающих фундаментальные свойства пространства и времени: в пространстве не существует выделенной точки («центра мира»), и это свойство выражает однородность пространства; в пространстве нет выделенного направления (различия между «верхом» и «низом»), что выражает изотропию пространства; наконец, не существует выделенного начала отсчета времени (момента «сотворения мира»), что выражает свойство однородности времени. Отсюда можно заключить, что в любой физической теории, основанной на этих предположениях относительно пространства и времени, должны выполняться фундаментальные законы сохранения импульса, углового момента и энергии, так что в каждой такой теории встает вопрос о математическом выражении законов сохранения. Здесь мы рассмотрим этот вопрос применительно к уравнениям Эйлера для газовой динамики. Сразу заметим, что внешняя объемная сила $\mathbf{f}$ в (1.14) определяет некоторое выделенное направление, так что проекция импульса на это направление не сохраняется. Чтобы не усложнять изложение подобного рода оговорками, мы опустим этот член в (1.14) и запишем уравнения газовой динамики в виде

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \tag{1.39}$$

опуская несущественное здесь для нас уравнение адиабатичности.

Прежде всего мы должны установить общую математическую структуру уравнений, выражающих законы сохранения, и здесь для нас образцом может послужить уравнение непрерывности. Его физический смысл заключается в сохранении массы при течении жидкости: масса жидкости в фиксированном

объеме V изменяется только вследствие потока жидкости через границу S этого объема:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV + \int\limits_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{dS} = 0. \tag{1.40}$$

Используя теорему Гаусса $\int_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{dS} = \int_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})dV$, а также учитывая, что объем V не зависит от времени и может выбран произвольно, приходим к закону сохранения массы в дифференциальной форме (первое уравнение (1.39); см. детали в разд. 1.1.2).

Мы предполагаем, что такого же рода конструкция существует и для других законов сохранения, т.е. для каждой сохраняющейся величины можно определить ее плотность $\mathcal{P}$ и плотность потока $\mathbf{Q}$, так что закон сохранения будет выражаться в форме

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \mathcal{P}dV + \int\limits_S \mathbf{Q}\cdot\mathbf{dS} = 0. \tag{1.41}$$

Здесь, правда, следует сделать замечание: импульс, например, является векторной величиной, поэтому закон сохранения надо писать для каждой компоненты, так что $\mathbf{Q}$ приобретает дополнительный индекс и становится тензором. В результате закон сохранения импульса удобнее представить в тензорной форме

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \mathcal{P}_i dV + \int\limits_S \Pi_{ij} dS_j = 0, \tag{1.42}$$

где Π_{ij} является тензором плотности потока импульса, а dS_j обозначает j-ю компоненту вектора $\mathbf{dS} = (dS_1, dS_2, dS_3)$, равного по величине элементу поверхности dS и направленного вдоль внешней нормали. При этом здесь подразумевается стандартное в тензорном исчислении правило суммирования по повторяющимся индексам, а радиус-вектор точки в пространстве обозначается как $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Совершая обычным образом переход от интеграла по поверхности к интегралу по объему и учитывая произвольность объема V, переходим от (1.41) и (1.42) к законам сохранения в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{Q} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{P}_i}{\partial t} + \frac{\partial\Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0. \tag{1.43}$$

Наша задача сейчас — найти выражения для плотностей и потоков, соответствующих законам сохранения уравнений газовой динамики (1.39).

Начнем с закона сохранения импульса. Плотность импульса естественно определить как произведение массы ρ, содержащейся в единице объема, на скорость течения $\mathbf{u}$, причем обе величины берутся в некоторой точке $\mathbf{r}$ течения. Тогда плотность i-й компоненты импульса равна

$$\mathcal{P}_i = \rho u_i, \tag{1.44}$$

и нам необходимо преобразовать с помощью уравнений газовой динамики ее производную по времени к виду (1.43). Для этого запишем уравнения (1.39)

в тензорном виде,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{1.45}$$

и подставим их в производную от (1.44) по времени:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i = -\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k}.$$

Чтобы превратить правую часть в дивергенцию плотности потока импульса, запишем градиент давления в виде $\dfrac{\partial p}{\partial x_i} = \dfrac{\partial p}{\partial x_k}\delta_{ik}$. В результате получаем закон сохранения импульса в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{1.46}$$

где тензор плотности потока импульса имеет вид

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho u_i u_k. \tag{1.47}$$

Физический смысл обоих слагаемых в правой части ясен. Второе слагаемое означает, что компонента импульса ρu_i переносится вдоль оси x_k со скоростью u_k вдоль это оси; это слагаемое соответствует чисто конвективному переносу импульса. Первое же слагаемое в правой части (1.47) соответствует изменению импульса вследствие действия сил давления на поверхность выделенного объема. Особенно ясно это видно из интегральной формы уравнения (1.46)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho u_i dV + \int\limits_S (p\delta_{ik} + \rho u_i u_k) dS_k = 0. \tag{1.48}$$

Здесь интеграл $-\int_S p d\mathbf{S}$ от давления по всей поверхности S равен суммарной силе, действующей на жидкость, содержащуюся внутри этой поверхности, что очевидно равно соответствующему вкладу в скорость изменения ее импульса. В целом же, $\Pi_{ik} dS_k$ есть i-я компонента импульса, протекающего в единицу времени через элемент поверхности $d\mathbf{S}$ из объема V, заключенного внутри S. Ориентируя вектор $d\mathbf{S}$ вдоль осей координат, находим, что Π_{ik} есть i-я компонента импульса, протекающего в единицу времени через единичную поверхность, перпендикулярную оси x_k. Если определить в данной точке систему координат с осью $x_1 = x$, направленной вдоль скорости течения в этой точке, то в такой системе тензор (1.47) примет диагональный вид:

$$\Pi_{ik} = \begin{pmatrix} p + \rho u^2 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{1.49}$$

Вдоль скорости $\mathbf{u}$ переносится импульс с плотностью потока $p + \rho u^2$, и соответствующий закон сохранения

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0, \tag{1.50}$$

является, как и должно быть, следствием уравнений одномерного течения

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \qquad u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0.$$

В поперечном к скорости направлении переносится компонента $\mathcal{P}_\perp$ с плотностью потока импульса p; для нее уравнение (1.46) сводится (с учетом $\mathbf{u}_\perp = 0$) к уравнению Ньютона

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial t} = -\nabla_\perp p$$

для поперечного движения элемента жидкости.

Теперь обратимся к закону сохранения энергии. Из физических соображений ясно, что энергия единицы объема жидкости складывается из ее кинетической энергии $\rho u^2/2$ и тепловой внутренней энергии ρe, где e — внутренняя энергия на единицу массы. Таким образом, мы предполагаем, что плотность энергии текущей жидкости равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e. \tag{1.51}$$

Если мы представим, используя уравнения (1.39), ее производную по времени $\partial\mathcal{E}/\partial t$ в виде дивергенции от некоторой величины, то мы найдем тем самым выражение для потока энергии $\mathbf{Q}$. Это преобразование можно сделать следующим образом. Заменяем в $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\rho u^2}{2} = \dfrac{u^2}{2}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\mathbf{u}\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ производные ρ_t, $\mathbf{u}_t$ их выражениями, следующими из (1.39): $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\rho u^2}{2} = -\dfrac{u^2}{2}\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) - {}$ $-\mathbf{u}\nabla p - \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$. Умножая известное векторное тождество $\dfrac{1}{2}\nabla u^2 = \mathbf{u}\times(\nabla\times{}$ $\times\,\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$ скалярно на $\mathbf{u}$, получаем выражение $\mathbf{u}(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = \dfrac{1}{2}\mathbf{u}\nabla u^2$. Для преобразования же градиента давления к градиенту энергетических величин используем термодинамическое соотношение $de = Tds - pdV = Tds + {}$ $+ (p/\rho^2)d\rho$, где s и V — энтропия и объем единицы массы жидкости $(V = 1/\rho)$. Вводя тепловую функцию единицы массы $w = e + pV = e + p/\rho$, находим тождество $dw = Tds + dp/\rho$, так что градиент давления можно представить в виде $\nabla p = \rho\nabla w - \rho T\nabla s$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho u^2}{2} = -\frac{u^2}{2}\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) - \rho(\mathbf{u}\nabla)\left(w + \frac{u^2}{2}\right) + \rho T\mathbf{u}\nabla s.$$

Аналогичным образом преобразуем $\partial(\rho e)/\partial t$: имеем $d(\rho e) = ed\rho + \rho de = ed\rho + {}$ $+\,\rho\left(Tds + (p/\rho^2)d\rho\right) = wd\rho + \rho Tds$, так что

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = w\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -w\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) - \rho T\mathbf{u}\cdot\nabla s,$$

где мы использовали также условие (1.11) адиабатичности течения. Складывая полученные выражения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho e\right) = -\left(w + \frac{u^2}{2}\right)\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) - \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\left(w + \frac{u^2}{2}\right) = -\nabla\left\{\rho\mathbf{u}\left(w + \frac{u^2}{2}\right)\right\}.$$

Итак, мы представили закон сохранения энергии в виде

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \tag{1.52}$$

где плотность энергии $\mathcal{E}$ определена формулой (1.51), а плотность потока энергии равна

$$\mathbf{Q} = \rho \mathbf{u} \left(w + \frac{u^2}{2} \right). \tag{1.53}$$

Учитывая, что $\rho\mathbf{u}$ является плотностью потока массы, мы приходим к выводу, что единица массы жидкости переносит при своем движении энергию $w + u^2/2$. Отличие этого выражения от плотности энергии $e + u^2/2$ связано с тем, что жидкость при течении совершает работу, обусловленную силами давления. В самом деле, полный поток энергии через замкнутую поверхность S можно представить в виде

$$\int\limits_S \mathbf{Q} d\mathbf{S} = \int\limits_S \rho \mathbf{u} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) d\mathbf{S} + \int\limits_S p\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}.$$

Здесь первый член есть энергия, переносимая проходящей через поверхность жидкостью, а второй член представляет собой работу, производимую жидкостью, находящейся внутри поверхности, над жидкостью вне ее. Это замечание позволяет легко интерпретировать различные члены в интегральной форме закона сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \left(\rho e + \frac{\rho u^2}{2} \right) dV + \int\limits_S \left(p + \rho e + \frac{\rho u^2}{2} \right) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{1.54}$$

Отметим, что интегральные законы сохранения массы (1.40), импульса (1.42) и энергии (1.54) имеют одинаковую структуру: производная по времени от интеграла некой плотности по объему в сумме с интегралом от потока соответствующей величины через поверхность, заключающей рассматриваемый объем, дает нуль.

Без учета вязкости течение жидкости является адиабатическим с постоянным значением энтропии, что также можно выразить в виде закона сохранения

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) = 0, \tag{1.55}$$

который легко проверить с помощью (1.11) и (1.6). Однако если мы учтем вязкость, то энтропия больше не будет сохраняться.

1.1.7. Энергия и импульс звуковых волн. До сих пор мы рассматривали общие выражения для законов сохранения в газовой динамике. Представляет интерес вопрос, можно ли найти выражения для плотности энергии и плотности потока энергии в случае звуковой волны, являющейся решением линеаризованных уравнений движения. На первый взгляд это кажется невозможным, поскольку кинетическая энергия движения жидкости квадратична по скорости, так что поправку к потенциальной энергии необ-

ходимо вычислять с точностью до членов второго порядка малости; поэтому линеаризованными уравнениями обойтись нельзя. Оказывается, однако, что нежелательные поправки легко исключаются, и в результате плотность энергии и плотность ее потока выражаются лишь через величины первого порядка малости, известные из линейного приближения для звуковой волны. Продемонстрируем это.

Мы рассматриваем волну, распространяющуюся по покоящейся однородной жидкости. Поскольку теперь выкладки производятся с учетом членов второго порядка малости по амплитуде волны, мы усовершенствуем наши обозначения и представим переменные в виде разложений

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho^{(1)} + \varepsilon^2\rho^{(2)} + \dots, \qquad \mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{u}^{(2)} + \dots, \tag{1.56}$$

где ε — малый параметр, характеризующий амплитуду волны. Аналогичные разложения можно написать для давления, плотности энергии и других переменных. Подстановка этих разложений в уравнение непрерывности дает с точностью $\sim \varepsilon^2$ уравнения

$$\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial t} + \nabla(\rho_0\mathbf{u}^{(1)}) = 0, \quad \frac{\partial\rho^{(2)}}{\partial t} + \nabla\left(\rho^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + \rho_0\mathbf{u}^{(2)}\right) = 0. \tag{1.57}$$

Как мы видим, во втором порядке появились нелинейные члены. Однако нам нет необходимости решать эти уравнения; вместо этого мы можем использовать их для исключения нежелательных членов из приближенных законов сохранения.

С той же точностью плотность энергии представляется разложением

$$\mathcal{E} = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 = \rho_0 e_0 + \varepsilon\frac{d(\rho e)}{d\rho_0}\rho^{(1)} + \varepsilon^2\left\{\frac{d(\rho e)}{d\rho_0}\rho^{(2)} + \frac{1}{2}\frac{d^2(\rho e)}{d\rho_0^2}(\rho^{(1)})^2 + \frac{\rho_0}{2}(\mathbf{u}^{(1)})^2\right\}.$$

Учитывая термодинамические тождества $\rho e = \rho w - p$, $dp = \rho dw - \rho T ds$, легко находим $\left.\frac{d(\rho e)}{d\rho_0}\right|_s = w_0$, $\left.\frac{d^2(\rho e)}{d\rho_0^2}\right|_s = \frac{c_0^2}{\rho_0}$. Следовательно, разложение для плотности энергии можно переписать как

$$\mathcal{E} \cong \rho_0 e_0 + \varepsilon w_0\rho^{(1)} + \varepsilon^2\left\{w_0\rho^{(2)} + \frac{c_0^2}{2\rho_0}(\rho^{(1)})^2 + \frac{\rho_0}{2}(\mathbf{u}^{(1)})^2\right\}. \tag{1.58}$$

Аналогичным образом для плотности потока энергии получаем разложение

$$\mathbf{Q} \cong \varepsilon\rho_0 w_0\mathbf{u}^{(1)} + \varepsilon^2\left\{\rho_0 w^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + w_0\rho^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + \rho_0 w_0\mathbf{u}^{(2)}\right\}. \tag{1.59}$$

Таким образом, закон сохранения энергии (1.52) дает в двух первых приближениях по степеням амплитуды волны

$$w_0\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial t} + w_0\rho_0\nabla\cdot\mathbf{u}^{(1)} = 0, \tag{1.60}$$

$$w_0\frac{\partial\rho^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\rho_0(\mathbf{u}^{(1)})^2}{2}+\frac{c_0^2(\rho^{(1)})^2}{2\rho_0}\right\}+$$
$$+w_0\nabla\cdot\left\{\rho_0\mathbf{u}^{(2)}+\rho^{(1)}\mathbf{u}^{(1)}\right\}+\nabla\cdot(\rho_0 w^{(1)}\mathbf{u}^{(1)})=0. \quad (1.61)$$

Уравнение (1.60) выполняется в силу первого уравнения (1.57), а вычитание второго уравнения (1.57), умноженного на w_0, из (1.61) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\rho_0(\mathbf{u}^{(1)})^2}{2}+\frac{c_0^2(\rho^{(1)})^2}{2\rho_0}\right\}+\nabla\cdot(\rho_0 w^{(1)}\mathbf{u}^{(1)})=0.$$

Здесь $w^{(1)}=(dw/d\rho)_s\rho^{(1)}=(c_0^2/\rho_0)\rho^{(1)}$. Переходя к переменным линейной теории $\rho'=\varepsilon\rho^{(1)}$, $\mathbf{u}=\varepsilon\mathbf{u}^{(1)}$, записываем получившийся закон сохранения в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_0\mathbf{u}^2}{2}+\frac{c_0^2\rho'^2}{2\rho_0}\right)+\nabla\cdot(c_0^2\rho'\mathbf{u})=0. \quad (1.62)$$

Возникшие здесь члены легко интерпретируется: выражение

$$\mathcal{E}'=\frac{\rho_0\mathbf{u}^2}{2}+\frac{c_0^2\rho'^2}{2\rho_0} \quad (1.63)$$

является плотностью энергии в волне (суммой кинетической энергии течения и потенциальной энергии упругости газа), а

$$\mathbf{Q}'=c_0^2\rho'\mathbf{u}=p'\mathbf{u} \quad (1.64)$$

— плотностью потока звуковой энергии, равной мощности на единицу площади, производимой «избыточным» давлением $p'=p-p_0$ в волне.

Подстановка (1.29) в (1.63) и (1.64) дает выражения для плотностей энергии и потока энергии в плоской волне

$$\mathcal{E}'=\frac{c_0^2}{\rho_0}\rho'^2=\rho_0u^2,\qquad Q'=\frac{c_0^3}{\rho_0}\rho'^2=c_0\rho_0u^2, \quad (1.65)$$

откуда

$$Q'=c_0\mathcal{E}, \quad (1.66)$$

т.е. энергия $\mathcal{E}'$ переносится волной со скоростью звука c_0.

В нашем выводе мы исходили из точных выражений для плотности энергии и ее потока, поэтому нет сомнений, что (1.63) и (1.64) являются приближенными формулами для соответствующих физических величин. Однако мы могли бы исходить из приближенных линеаризованных уравнений, из которых тоже следуют некие законы сохранения. Например, напишем уравнение движения (1.21) в виде $\frac{\partial(\rho_0\mathbf{u})}{\partial t}+\nabla(c_0^2\rho')=0$ и, умножая его на $\mathbf{u}$, получим $\mathbf{u}\cdot\frac{\partial(\rho_0\mathbf{u})}{\partial t}+c_0^2\mathbf{u}\cdot\nabla\rho'=0$. Следовательно, $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_0\mathbf{u}^2}{2}\right)+\nabla(c_0^2\rho'\mathbf{u})-c_0^2\rho'(\nabla\times\times\mathbf{u})=0$, откуда $(\nabla\cdot\mathbf{u})$ можно исключить с помощью уравнения (1.21). В результате получаем закон сохранения энергии в форме (1.62). В этом выводе не возникло необходимости рассматривать поправки второго поряд-

ка малости, и вообще мы не обращались к каким-либо выражениям для «физической» плотности энергии и ее потока. Поэтому вывод дает некое математическое следствие линейных уравнений, но никоим образом не гарантирует, что полученный «закон сохранения» соответствует реальным физическим величинам — плотности энергии и ее потоку. В данном простом случае закон сохранения, полученный как следствие линейных уравнений, совпал с приближением закона сохранения для истинной физической энергии, но, строго говоря, так бывает не всегда. Тем не менее законы сохранения, следующие из приближенных уравнений, могут быть очень полезными при решении разнообразных задач, и мы будем ими часто пользоваться. Следует лишь помнить при этом, что они не всегда соответствуют приближениям истинных (т.е. физических) законов сохранения.

1.1.8. Лагранжева формулировка законов сохранения для звуковых волн. К вопросу о законах сохранения можно подойти с несколько другой стороны. Как известно из механики и уже упоминалось выше, имеется глубокая связь между законами сохранения и симметриями рассматриваемой физической системы. Обычно наиболее фундаментальные свойства симметрии, связанные с однородностью и изотропией пространства и однородностью времени, легче всего усматриваются из лагранжевой формулировки уравнений движения. Поэтому представляет интерес найти такую формулировку для уравнений гидродинамики. Однако в общем случае теория оказывается весьма сложной, и мы ограничимся здесь простым случаем потенциального течения жидкости. Начнем же с совсем простой линейной теории, когда течение описывается линейными уравнениями (1.21). Их можно свести к одному уравнению, если ввести потенциал скорости

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi, \tag{1.67}$$

что означает, что течение жидкости в звуковой волне является потенциальным. Тогда из второго уравнения (1.21) следует, что

$$\rho' = -\frac{\rho_0}{c_0^2}\varphi_t, \tag{1.68}$$

и подстановка выражений (1.67), (1.68) в (1.21) приводит к волновому уравнению для φ,

$$\varphi_{tt} - c_0^2\nabla^2\varphi = 0, \tag{1.69}$$

эквивалентному уравнениям (1.23) и (1.24). Плотность энергии (1.63) выражается через потенциал φ формулой

$$\mathcal{E}' = \frac{\rho_0}{2c_0^2}(\varphi_t)^2 + \frac{\rho_0}{2}(\nabla\varphi)^2, \tag{1.70}$$

где первое слагаемое можно интерпретировать как кинетическую энергию течения, а второе — как потенциальную энергию волны. Тогда в качестве плотности лагранжиана естественно взять разность этих двух членов:

$$\mathcal{L}(\varphi_t, \nabla\varphi) = \frac{\rho_0}{2c_0^2}(\varphi_t)^2 - \frac{\rho_0}{2}(\nabla\varphi)^2. \tag{1.71}$$

Отталкиваясь от этого примера, будем предполагать, что уравнения движения допускают лагранжеву формулировку, если записать лагранжиан через потенциал скорости как единственную переменную, характеризующую течение. Проведем вычисления в общем виде.

Принцип наименьшего действия гласит, что реальные движения соответствуют экстремумам действия

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi_t, \nabla\varphi, \varphi) d^3x dt. \tag{1.72}$$

(Для несколько большей общности, что нам пригодится в будущем, мы предполагаем здесь, что $\mathcal{L}$ зависит не только от φ_t, $\nabla\varphi$, но и от самой функции φ.) Следовательно, вариация S должна равняться нулю:

$$\delta \int \mathcal{L}(\varphi_t, \nabla\varphi, \varphi) d^3x dt = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} \delta\varphi_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\varphi} \delta\nabla\varphi \right) d^3x dt = 0. \tag{1.73}$$

Как обычно, мы интегрируем по частям последние два члена, считая, что $\delta\varphi$ обращается в нуль на границах области интегрирования:

$$\int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\varphi} \right) \delta\varphi d^3x dt = 0.$$

Ввиду произвольности $\delta\varphi$ заключаем, что выражение в скобках, называемое вариационной производной действия (1.72),

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\varphi}, \tag{1.74}$$

должно равняться нулю, что дает уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \tag{1.75}$$

которое в случае плотности лагранжиана (1.71) мгновенно приводит к волновому уравнению (1.69).

Такая формулировка уравнений движения позволяет написать законы сохранения энергии и импульса в общем виде. Однородность системы во времени означает, что $\mathcal{L}$ не зависит явным образом от времени, поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \varphi_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} \varphi_{tt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\varphi} \nabla\varphi_t.$$

Исключение $\partial\mathcal{L}/\partial\varphi$ с помощью (1.75) дает закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} \varphi_t - \mathcal{L} \right) + \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\varphi} \varphi_t \right) = 0. \tag{1.76}$$

Если же система однородна в пространстве, т.е. $\mathcal{L}$ не зависит явным образом от координат, то аналогичное вычисление приводит к закону сохранения трех компонент импульса ($\nabla = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3)$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} \nabla_i \varphi \right) + \nabla_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_k \varphi} \nabla_i \varphi - \delta_{ik} \mathcal{L} \right) = 0. \tag{1.77}$$

Согласно приведенному выше выводу законы сохранения являются непосредственным следствием уравнений движения в форме Лагранжа, а симметрия использовалась лишь в виде простого условия, что лагранжиан не зависит от времени и координаты явным образом. Однако это условие трудно обобщить на другие, менее элементарные симметрии лагранжиана. Поэтому приведем другую формулировку этих же элементарных примеров, пользуясь общим определением симметрии: под преобразованием симметрии мы понимаем такое преобразование полевых переменных, которое не меняет действия, причем для доказательства этого не используются уравнения движения. Например, рассмотрим бесконечно малое преобразование сдвига во времени, зависящее от координат и времени, когда $\varphi(\mathbf{r},t)$ изменяется на величину $\delta\varphi = \varphi(t+\tau(\mathbf{r},t)) - \varphi(t) \approx \varphi_t \cdot \tau(\mathbf{r},t)$. При этом мы предполагаем, что на границах области интегрирования по $\mathbf{r}$ и t в (1.73) функция $\tau(\mathbf{r},t)$ обращается в нуль. Тогда для вариации действия после очевидных интегрирований по частям членов, включающих производные от $\tau(\mathbf{r},t)$, и с учетом

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\varphi_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_t}\varphi_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\varphi}(\nabla\varphi)_t$$

получим, что

$$\delta S = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\tau\varphi_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_t}[\tau_t\varphi_t + \tau\varphi_{tt}] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\varphi}[\nabla\tau\varphi_t + \tau\nabla\varphi_t]\right\}d\mathbf{r}dt =$$
$$= \int\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_t}\varphi_t\right) - \nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\varphi}\varphi_t\right)\right\}\tau(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}dt.$$

Ввиду произвольности $\tau(\mathbf{r},t)$ требование, чтобы вариация действия при этом преобразовании симметрии обращалась в нуль, приводит к заключению, что выражение в фигурных скобках равно нулю, т.е. к закону сохранения энергии (1.76). Аналогичное преобразование с локальным сдвигом пространственных координат, когда $\delta\varphi = \varphi(x_i + \xi_i(\mathbf{r},t)) - \varphi(x_i) \approx \nabla_i\varphi\cdot\xi_i(\mathbf{r},t)$, дает вариацию действия

$$\delta S = \int\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_t}\nabla_i\varphi_t\right) + \nabla_k\left(\delta_{ik}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_k\varphi}\nabla_i\varphi\right)\right\}\xi_i(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}dt,$$

откуда следует закон сохранения импульса (1.77). Точно так же закон сохранения углового момента может быть выведен из инвариантности действия относительно поворотов системы координат, однако в дальнейшем нам этот закон не понадобится, поэтому не будем на этом останавливаться. Таким образом, требование инвариантности действия относительно *локальных* симметрий приводит к законам сохранения. Это утверждение известно как *теорема Нетер*.

Применим формулы (1.76) и (1.77) к звуковым волнам, когда плотность лагранжиана равна (1.71). Закон сохранения энергии (1.76) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_0}{2c_0^2}\varphi_t^2 + \frac{\rho_0}{2}(\nabla\varphi)^2\right) + \nabla(-\rho_0\varphi_t\nabla\varphi) = 0,$$

что совпадает с выведенным ранее законом сохранения энергии для звуковых волн. Для «закона сохранения импульса», следующего из линеаризованных уравнений, мы получаем выражение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho' u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\mathcal{E}'\delta_{ik} + \rho_0 u^2\left(\frac{u_i u_k}{u^2} - \delta_{ik}\right)\right\} = 0, \tag{1.78}$$

где $\mathcal{E}'$ дается формулой (1.63).

В бегущей плоской волне плотность энергии равна $\mathcal{E}' = \rho_0 u^2$ (см. (1.65)). Поэтому плотность импульса и тензор его потока в этом случае даются с учетом (1.29) простыми выражениями

$$\mathcal{P}_i = \rho'\mathbf{u} = \frac{\mathcal{E}'}{c_0}\frac{u_i}{u}, \quad \Pi_{ik} = \mathcal{E}'\frac{u_i u_k}{u^2}. \tag{1.79}$$

Если волна распространяется вдоль оси x, то $\mathcal{P}_x = \mathcal{E}'/c_0$, $\Pi_{xx} = \mathcal{E}'$. Эти соотношения напоминают формулы для импульса и тензора натяжений плоской электромагнитной волны (см. § 47 в [78]). Поэтому по аналогии со световым давлением возникает предположение, что звуковая волна при нормальном падении на стенку оказывает на нее дополнительное давление, равное плотности энергии. Ситуация, однако, оказывается более сложной из-за того, что звуковые волны распространяются в среде, а не в вакууме, и свойства среды могут меняться в зависимости от физических условий задачи. Наше рассмотрение, основанное на линейном приближении, предполагает, что при наличии волны как средняя плотность, относительно которой распространяется звуковое возмущение, так и среднее давление постоянны и связаны равновесным уравнением состояния $p_0 = p(\rho_0)$. В первом порядке малости по амплитуде волны это безусловно так, но в следующих порядках изменения средней плотности и среднего давления не обращаются одновременно в нуль. Если мы рассматриваем звуковой пучок с ограниченным сечением, то жидкость может течь в поперечном направлении, выравнивая среднее давление поперек пучка. Но тогда в этой физически естественной постановке задачи мы не может утверждать, что с требуемой точностью плотность остается постоянной. Можно показать, что ее изменение пропорционально квадрату амплитуды и должно поэтому учитываться при расчете потока импульса. Формулы (1.78), (1.79) соответствуют равенству давления внутри звукового пучка и вне его и различающимся плотностям (см. § 65 в [81]). Но изменение плотности приводит к изменению скорости звука в среде, и эта нелинейная поправка должна учитываться при расчете радиационного звукового давления. Таким образом, аналогия между распространением света в вакууме и распространением звука в среде оказывается весьма ограниченной.

1.1.9. Лагранжиан уравнений гидродинамики для потенциальных течений. Как мы видели выше, наиболее удобным образом лагранжиан для линейных звуковых волн формулируется с помощью потенциала скорости. Возникает естественный вопрос, возможно ли обобщение этого подхода на более общие течения жидкости. Ответ на этот вопрос довольно прост в случае

потенциальных течений, но при этом потенциал вводится в теорию несколько неожиданным образом.

Отправной точкой будет «обычный» механический лагранжиан, равный разности между плотностью локальной кинетической энергии и плотностью локальной внутренней энергии, представляющей в гидродинамическом контексте потенциальную энергию среды (напомним, что мы здесь не учитываем вклад в потенциальную энергию внешних сил):

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\rho u^2 - \rho e. \tag{1.80}$$

Для упрощения обозначений мы ограничимся здесь одномерными течениями вдоль оси x, так что u есть скорость течения вдоль этой оси. В отличие от механики множитель ρ в кинетической энергии не постоянен, а подчиняется отдельному уравнению непрерывности

$$\rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0. \tag{1.81}$$

Поэтому при варьировании действия с плотностью лагранжиана (1.80) необходимо учесть уравнение непрерывности в качестве дополнительного условия с помощью стандартного метода множителей Лагранжа, переходя от (1.80) к

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho u^2 - \rho e + \varphi(\rho_t + \rho u_x + u\rho_x), \tag{1.82}$$

где φ — множитель, являющийся пока новой переменной. Условие сохранения энтропии не учитываем, предполагая течение адиабатическим $s = s_0 = \text{const}$. Варьирование по u после очевидных упрощений дает соотношение

$$u = \varphi_x, \tag{1.83}$$

показывающее, что множитель Лагранжа играет здесь роль потенциала скорости. Варьирование по ρ приводит после подстановки (1.83) к уравнению Бернулли

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + \frac{d(\rho e)}{d\rho} = 0. \tag{1.84}$$

В адиабатическом течении $p = \rho^2 de/d\rho = \rho d(e\rho)/d\rho - e\rho$, так что $dp/d\rho = \rho d^2(e\rho)/d\rho^2$, а дифференцирование (1.84) по x дает уравнение Эйлера

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\rho_x = 0. \tag{1.85}$$

Если мы подставим (1.83) в (1.82), опустим члены, образующие полную производную по времени и не влияющие на уравнения движения, а также изменим для удобства общий знак, то получим в результате лагранжиан, выраженный через ρ и φ:

$$\mathcal{L} = \rho\varphi_t + \frac{1}{2}\rho\varphi_x^2 + \rho e. \tag{1.86}$$

Легко убедиться, что соответствующие уравнения Лагранжа суть уравнение непрерывности (1.81) и уравнение Бернулли (1.84). Таким образом, мы получили весьма простую форму лагранжиана для потенциальных течений жидкости [167].

1.1.10. Звуковые и энтропийные волны. До сих пор мы рассматривали лишь звуковые волны, связанные с колебаниями плотности газа. Однако, как мы знаем, полная система уравнений газовой динамики даже для адиабатического течения состоит из трех уравнений (см. (1.14)), так что должна еще существовать мода, связанная с колебаниями энтропии. Как мы убедимся позже, источником таких волн могут служить, например, колебания поверхности ударной волны; однако здесь, в главе, посвященной линейным колебаниям среды, уместно рассмотреть для общности все моды таких колебаний.

Итак, если в газе есть источник энтропии, то эта энтропия переносится течением газа согласно уравнению (см. (1.11))

$$s_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)s = 0. \tag{1.87}$$

Значит, как это следует из термодинамики, возмущения плотности в волне могут происходить не только из-за колебаний давления, но и вследствие колебаний энтропии, переносимой течением. Поэтому в уравнения движения, записанные в переменных $\rho, \mathbf{u}$, строго говоря, должна войти и переменная s, что означает, что в этих переменных звуковые и энтропийные волны не разделяются — изложенная выше теория справедлива лишь до тех пор, пока в течении нет колебаний энтропии: $s' = 0$. Это условие выполняется, когда энтропия всех жидких частиц одинакова и уравнение адиабаты Пуассона можно записать в виде (1.18). Однако если это ограничение снять, то мы встаем перед вопросом, какие собственные моды колебаний могут распространяться в среде в общем случае, когда малые колебания плотности выражаются через возмущения давления p' и энтропии s' соотношением

$$\rho' = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s p' + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p s' = \frac{1}{c_0^2}p' + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p s'. \tag{1.88}$$

Формально говоря, здесь c_0^2 является лишь сокращенным обозначением для производной $(\partial p/\partial\rho)_s$, но, как мы увидим ниже, c_0 по-прежнему будет играть роль скорости распространения одной из мод.

Пусть волна распространяется в газе с однородным распределением плотности ρ_0 и скорости течения $\mathbf{u}_0$. Тогда линеаризованное уравнение Эйлера имеет вид

$$\mathbf{u}'_t + (\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}' + \frac{1}{\rho_0}\nabla p' = 0. \tag{1.89}$$

В линеаризованное уравнение непрерывности мы вместо ρ' подставляем (1.88) и получаем

$$\frac{1}{c_0^2}p'_t + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p [s'_t + (\mathbf{u}_0\cdot\nabla)s'] + \frac{1}{c_0^2}(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)p' + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{u}' = 0.$$

Линеаризованное уравнение (1.87) очевидно дает

$$s'_t + (\mathbf{u}_0\cdot\nabla)s' = 0, \tag{1.90}$$

и благодаря ему члены с s' в предыдущем уравнении исчезают, так что оно сводится к уравнению

$$p'_t + (\mathbf{u}_0\cdot\nabla)p' + \rho_0 c_0^2 \operatorname{div}\mathbf{u}' = 0. \tag{1.91}$$

Итак, распространение линейных волн в газе описывается системой уравнений (1.89)–(1.91), причем уравнение (1.90) для энтропийных волн отщепляется от уравнений (1.89) и (1.91) для звуковых волн, если последние писать в переменных $p', \mathbf{u}'$.

Будем считать, что волна является гармонической и возмущения всех переменных имеют вид $\propto \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, где (ввиду нестационарности возмущения) мы ввели помимо волнового числа $\mathbf{k}$ еще и частоту волны ω. Ясно, что волна распространяется в направлении $\mathbf{k}$ со скоростью, равной по абсолютной величине

$$c = \frac{\omega}{k}, \qquad k = |\mathbf{k}|. \tag{1.92}$$

Подстановка указанной зависимости в (1.89)–(1.91) дает алгебраическую систему для амплитуд возмущений:

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega)s' = 0, \tag{1.93a}$$

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega)\mathbf{u}' + \frac{1}{\rho_0}\mathbf{k}\,p' = 0, \tag{1.93b}$$

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega)p' + \rho_0 c_0^2\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}' = 0. \tag{1.93c}$$

Как известно, эта система имеет решение, если ее определитель равен нулю. Однако очевидно, что матрица коэффициентов имеет блочную структуру, так как первое уравнение отщепилось от остальных. Поэтому в газе могут существовать два типа волн. В первом типе, описываемом уравнением (1.93a), имеем *закон дисперсии* энтропийных волн

$$\omega = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k}, \qquad s' \neq 0, \tag{1.94}$$

причем амплитуды остальных переменных должны быть такими, чтобы обратить в нуль левые части остальных уравнений при учете (1.94):

$$p' = 0, \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}' = 0. \tag{1.95}$$

Во втором типе волн уравнения, записанные в матричном виде для «вектора» амплитуд $(u'_x, u'_y, u'_z, p')^\top$, принимают вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega & 0 & 0 & k_x/\rho_0 \\ 0 & \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega & 0 & k_y/\rho_0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega & k_z/\rho_0 \\ \rho_0 c_0^2 k_x & \rho_0 c_0^2 k_y & \rho_0 c_0^2 k_z & \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \\ p' \end{pmatrix} = 0.$$

Определитель матрицы этой системы равен нулю при условии $(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega)^2 \times$ $\times[(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega)^2 - c_0^2 k^2] = 0$, где обращение в нуль первого множителя возвращает нас к решению (1.95), а обращение в нуль второго дает *закон дисперсии* звуковых волн

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} - \omega)^2 - c_0^2 k^2 = 0 \tag{1.96}$$

с частотой $c_0 k$, сдвинутой вследствие эффекта Доплера на величину $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k}$. В этой волне $\mathbf{u}' \| \mathbf{k}$, $s' = 0$ и амплитуды остальных переменных связаны с $u' = |\mathbf{u}'|$ соотношениями

$$p' = \pm \rho_0 c_0 u', \qquad \rho' = \pm \frac{\rho_0}{c_0} u', \tag{1.97}$$

совпадающими с (1.29)–(1.30). Если ввести угол θ между направлением течения $\mathbf{u}_0$ и направлением распространения волны $\mathbf{k}$, то скорость волны можно представить в виде

$$c = \frac{\omega}{k} = \pm c_0 + u_0 \cos\theta, \tag{1.98}$$

т.е. распространяющаяся со скоростью c_0 волна дополнительно сносится компонентой скорости течения на направление распространения волны.

1.1.11. О математике звуковых волн. Мы рассмотрели выше простейшую физическую систему, в которой могут распространяться звуковые волны. Для математического описания таких волн нами была выведена система уравнений (1.21), обладающая некоторыми общими свойствами, позволяющими отнести ее к определенному классу, допускающему единообразную математическую трактовку. Во-первых, мы рассмотрели волны с бесконечно малой амплитудой, распространяющиеся по однородному фону, что позволило нам линеаризовать исходную систему газодинамических уравнений и получить линейную систему с постоянными коэффициентами. Во-вторых, в нашей простой задаче (1.21) появились лишь производные первого порядка. В результате мы пришли к *системе линейных уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами*. Аналогичного типа система (1.89)–(1.91) была получена в предыдущем разделе. Можно предположить, и в этом мы многократно убедимся в дальнейшем, что такого рода системы будут появляться в соответствующих приближениях в самых разнообразных физических ситуациях; поэтому имеет смысл сформулировать их некоторые общие математические свойства, чем мы займемся в этом разделе. На этом пути мы введем в наше изложение несколько важных новых понятий, обобщение которых на более сложные ситуации будет играть существенную роль в последующем развитии теории.

Пусть наша физическая система описывается n переменными u_i, $i = 1, \ldots, n$, подчиняющимися дифференциальным уравнениям первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &u_{1,t} + a_{11} u_{1,x} + a_{12} u_{2,x} + \ldots + a_{1n} u_{n,x} = 0, \\ &u_{2,t} + a_{21} u_{1,x} + a_{22} u_{2,x} + \ldots + a_{nn} u_{n,x} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_{n,t} + a_{n1} u_{1,x} + a_{n2} u_{2,x} + \ldots + a_{nn} u_{n,x} = 0, \end{aligned} \tag{1.99}$$

которые можно написать в матричном виде

$$\mathbf{u}_t + \mathbb{A}\mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.100}$$

Рассмотренный ранее пример звуковых волн подсказывает, что движения среды могут быть представлены в виде суммы мод, соответствующих волнам, распространяющимся со скоростями c_k,

$$u_i^{(k)} = F_i^{(k)}(x - c_k t), \tag{1.101}$$

где k — номер моды. Но это означает, что вектор $\mathbf{u}^{(k)}$ k-й моды удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{u}_t^{(k)} + c_k \mathbf{u}_x^{(k)} = 0, \tag{1.102}$$

которое должно быть следствием нашей исходной системы (1.100), т.е. его компоненты должны быть связаны друг с другом определенными соотношениями. Будем искать k-ю моду в виде линейной комбинации компонент u_i, в которых записана наша исходная система. Ввиду линейности (1.99) и (1.102) можно подобрать такую линейную комбинацию уравнений (1.99), что в результате на все переменные u_i будет действовать один и тот же дифференциальный оператор $\partial/\partial t + c_k \partial/\partial x$, входящий в уравнение (1.102). Для нахождения такой линейной комбинации умножим первое уравнение (1.99) на l_1, второе на l_2 и т.д. и сложим их, приравняв результат аналогичной сумме действий оператора $\partial/\partial t + c\partial/\partial x$:

$$l_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + a_{1n}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \dots + l_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + a_{n1}\frac{\partial u_n}{\partial x} + \dots + a_{nn}\frac{\partial u_n}{\partial x}\right) =$$

$$= l_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + c\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \dots + l_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + c\frac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \tag{1.103}$$

где как скорость c, так и коэффициенты l_i нам предстоит найти, выразив их через элементы матрицы $\mathbb{A}$. В выражениях (1.103) коэффициенты при пространственных производных должны совпадать, что дает уравнения

$$\begin{gathered} l_1 a_{11} + l_2 a_{21} + \dots + l_n a_{n1} = c\, l_1, \\ l_1 a_{12} + l_2 a_{22} + \dots + l_n a_{n2} = c\, l_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_1 a_{1n} + l_2 a_{2n} + \dots + l_n a_{nn} = c\, l_n, \end{gathered} \tag{1.104}$$

т.е. вектор $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ должен быть левым собственным вектором матрицы $\mathbb{A}$:

$$\mathbf{l}\mathbb{A} = c\mathbf{l}. \tag{1.105}$$

Система (1.104) имеет нетривиальное решение, лишь если

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-c & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-c & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-c \end{pmatrix} = |\mathbb{A}-c\,\mathbb{I}| = 0, \tag{1.106}$$

т.е. скорость c является одним из собственных значений матрицы $\mathbb{A}$. Мы ограничимся здесь случаем, когда уравнение (1.106) имеет n различных *действительных* корней $c_1, c_2, \dots, c_n$, каждому из которых отвечает левый собственный вектор $\mathbf{l}^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда с учетом постоянства $\mathbf{l}^{(k)}$ линейные комбинации (1.103) сводятся к уравнениям

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + c_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{1.107}$$

где

$$r_k = l_1^{(k)} u_1 + \dots + l_n^{(k)} u_n = \mathbf{l}^{(k)}\mathbf{u}. \tag{1.108}$$

Уравнения (1.107) имеют очевидные решения

$$r_k = r_k(x - c_k t), \tag{1.109}$$

где r_k — произвольная функция. Как мы видим, переменные r_k, связанные с u_i соотношениями (1.108), играют роль нормальных мод нашей линейной системы. Мы будем называть их также *римановыми инвариантами* системы, поскольку они являются частными случаями имеющих такое же название более общих переменных, примененных здесь к линейным уравнениям. Их обобщение на нелинейные системы будет играть важную роль в дальнейшем.

Исходные переменные u_i можно выразить через римановы инварианты, если ввести также правые собственные векторы $\mathbf{p}^{(k)}$ матрицы $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}\mathbf{p}^{(k)} = c_k \mathbf{p}^{(k)}. \tag{1.110}$$

Умножая это равенство слева на левый собственный вектор $\mathbf{l}^{(m)}$, отвечающий другому собственному значению c_m, и используя равенство $\mathbf{l}^{(m)}\mathbb{A} = c_m \mathbf{l}^{(m)}$, получаем уравнение $(c_m - c_k)(\mathbf{l}^{(m)}\mathbf{p}^{(k)}) = 0$, откуда с учетом $c_m \neq c_k$ следует, что левый и правый собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны друг другу: $\mathbf{l}^{(m)}\mathbf{p}^{(k)} = 0$ при $m \neq k$. Нормируем $\mathbf{p}^{(k)}$ так, чтобы при $m = k$ было $\mathbf{l}^{(k)}\mathbf{p}^{(k)} = 1$, тогда получим

$$\mathbf{l}^{(m)}\mathbf{p}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} l_i^{(m)} p_i^{(k)} = \delta_{mk}. \tag{1.111}$$

Если движение происходит только в k-й моде, то $r_k = \sum_i l_i^{(k)} u_i$ и при $m \neq k$ имеем $0 = \sum_i l_i^{(m)} u_i$. Эта система уравнений относительно u_i имеет очевидное решение $u_i^{(k)} = p_i^{(k)} r_k$, в чем легко убедиться, умножив его слева скалярно на $l_i^{(m)}$. Тогда общее движение можно разложить по собственным движениям, в которых римановы инварианты r_k играют роль нормальных координат:

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} p_i^{(k)} r_k(x - c_k t) \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}^{(k)} r_k(x - c_k t), \tag{1.112}$$

что воспроизводит форму (1.101). Итак, мы представили общее волновое движение в виде суммы собственных мод системы. Эта конструкция обобщает решение вида (1.27) на общие системы уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Остановимся на геометрической интерпретации полученных результатов. Формула (1.112) означает, что начальное возмущение $\mathbf{u}(x,0)$ расщепляется на сумму волн r_k, каждая из которых распространяется со своей характеристической скоростью c_k. Другими словами: график $r_k(x)$ через время t переместится на расстояние $c_k t$ и график результирующей волны $\mathbf{u}(x,t)$ превратится в сумму смещенных графиков мод; начальное возмущение, соответствующее моде r_k, переносится с постоянной скоростью c_k. Такой перенос можно изобразить графически на плоскости (x,t) прямыми линиями с наклонами c_k относительно оси t. В данном случае удобно в качестве оси абсцисс взять ось x, а оси ординат — ось времени t. Тогда из каждой точки на оси x будет исходить n прямых линий, соответствующих наклонам c_k. Эти линии называются *характеристиками* нашей исходной системы (1.99). Очевидным образом они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = c_k, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{1.113}$$

Таким образом, мы связали с системой (1.99) из n уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. На этом языке решение системы (1.99) можно представить следующим образом. Сначала мы находим характеристические скорости c_k из уравнения (1.106). Им соответствуют n семейств характеристик $x = \overline{x} + c_k t$, являющихся решениями уравнений (1.113), где $\overline{x}$ — исходная точка на оси x, из которой исходит характеристика. Тогда производная переменной $u_i(x,t)$ вдоль характеристики равна

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + c_k \frac{\partial u_i}{\partial x}.$$

Умножение каждого такого выражения на компоненту $l_i^{(k)}$ k-го левого собственного вектора матрицы $\mathbb{A}$ и сложение всех получающихся выражений приводит к уравнению (1.107) для риманова инварианта (1.108), который, следовательно, постоянен вдоль своей характеристики. Зная значения всех римановых инвариантов (1.109), мы находим значения исходных переменных с помощью формул (1.112).

Простейшим приложением этой теории может служить уравнение

$$u_t + c_0 u_x = 0. \tag{1.114}$$

Уравнение (1.106) дает единственную характеристическую скорость $c_1 = c_0$, и уравнение для характеристик

$$\frac{dx}{dt} = c_0 \tag{1.115}$$

приводит к единственному семейству параллельных характеристик $x = \overline{x} + c_0 t$. Функция $u(x,t)$ постоянна вдоль характеристик в силу (1.114), т.е. са-

ма является римановым инвариантом, так что ее значение переносится вдоль характеристик: $u = u_0(\overline{x}) = u_0(x - c_0 t)$, где $u_0(x)$ — начальное распределение значений u вдоль оси x при $t = 0$: $u(x, 0) = u_0(x)$.

В качестве менее тривиального примера рассмотрим систему уравнений (1.21) для плоских звуковых волн в воздухе, распространяющихся вдоль оси x. Матрица $\mathbb{A}$ в этом случае равна

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_0^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.116}$$

Характеристическое уравнение (1.106)

$$\begin{vmatrix} -c & \rho_0 \\ c_0^2/\rho_0 & -c \end{vmatrix} = c^2 - c_0^2 = 0 \tag{1.117}$$

дает две характеристические скорости, которые мы обозначим в данном случае как $c_+ = c_0$, $c_- = -c_0$. Им соответствуют левые собственные векторы

$$\mathbf{l}^{(+)} = (c_0/\rho_0, 1), \qquad \mathbf{l}^{(-)} = (-c_0/\rho_0, 1) \tag{1.118}$$

и должным образом нормированные правые собственные векторы

$$\mathbf{p}^{(+)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \rho_0/c_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}^{(-)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\rho_0/c_0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.119}$$

Римановы инварианты равны

$$r_+(x,t) = u(x,t) + \frac{c_0}{\rho_0}\rho'(x,t), \quad r_-(x,t) = u(x,t) - \frac{c_0}{\rho_0}\rho'(x,t), \tag{1.120}$$

и решение (1.112) с учетом начальных условий $\rho'(x, 0) = \rho_0'(x)$, $u(x, 0) = u_0(x)$ записывается в виде

$$\begin{aligned}
\rho'(x,t) &= \frac{\rho_0}{2c_0}\left(r_+(x,t) - r_-(x,t)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\rho_0'(x - c_0 t) + \frac{\rho_0}{c_0}u_0(x - c_0 t)\right] + \left[\rho_0'(x + c_0 t) - \frac{\rho_0}{c_0}u_0(x + c_0 t)\right]\right\}, \\
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(r_+(x,t) + r_-(x,t)\right) = \\
&= \frac{c_0}{2\rho_0}\left\{\left[\rho_0'(x - c_0 t) + \frac{\rho_0}{c_0}u_0(x - c_0 t)\right] - \left[\rho_0'(x + c_0 t) - \frac{\rho_0}{c_0}u_0(x + c_0 t)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{1.121}$$

Мы воспроизвели решение (1.35) на этом математически несколько более изощренном языке.

Геометрически решение (1.121) означает перенос начальных значений римановых инвариантов вдоль соответствующих характеристик, являющихся двумя наборами параллельных линий с наклонами $\pm c_0$ (см. рис. 1.4). Обозначим через C_+ класс характеристик, соответствующий скоростям $+c_0$, и через C_- — класс характеристик, соответствующий скоростям $-c_0$. Если начальное возмущение при $t = 0$ сосредоточено на отрезке $A \leqslant x \leqslant B$, то в результате эволюции оно будет расширяться, занимая пространство между

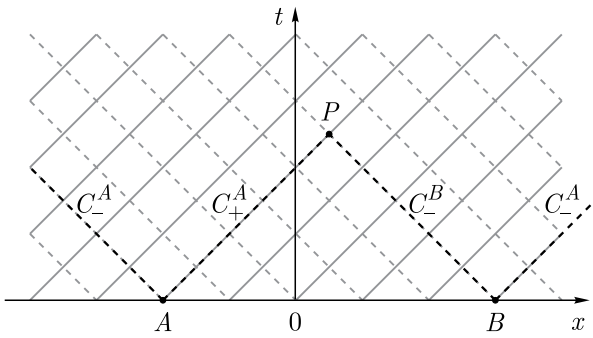

Рис. 1.4. Характеристики системы (1.21): характеристики вида $x = \overline{x} + c_0 t$ из класса C_+ изображены сплошными линиями, характеристики вида $x = \overline{x} - c_0 t$ из класса C_- — штриховыми

характеристиками, $C_-^A \leqslant x \leqslant C_+^B$. Область на плоскости (x, t), ограниченная характеристиками C_-^A, C_+^B и отрезком AB на оси $t = 0$, называется *областью распространения*. Если отрезок, на котором задано начальное значение, стягивается в точку, то область распространения ограничена самой «быстрой» и самой «медленной» характеристиками, исходящими из этой точки. В частности, область распространения для точки A ограничена характеристиками C_-^A и C_+^A, а область распространения точки B ограничена характеристиками C_-^B и C_+^B: локальные значения начальных данных влияют на решения в своих областях распространения. Если же нас интересует вопрос, от каких начальных значений зависит решение в точке P, то легко видеть, что значения римановых инвариантов из начальных данных вне отрезка AB не достигают точки P. Поэтому отрезок AB называется *областью зависимости* для точки P: значения решения в точке P зависят только от начальных значений при $A \leqslant x \leqslant B$. Такой способ изложения теории звука окажется удобным как для обобщения на нелинейные волны, когда скорость волны становится зависящей от ее амплитуды, так и на задачи о распространении волн на неоднородном и нестационарном фоне.

Изложенный подход был основан на предположении, что характеристическое уравнение (1.106) имеет n различных действительных корней, где n — порядок системы, равный числу полевых переменных задачи. Этому отвечает физическая картина n различных волновых мод, распространяющихся каждая со своей скоростью «звука» c_l, $l = 1, \ldots, n$. Говорят, что в этом случае мы находимся в *области гиперболичности* исходной системы уравнений (1.100). Однако возможны случаи, когда часть корней характеристического уравнения имеет комплексные значения. С формальной точки зрения мы по-прежнему имеем дело с решениями исходной системы, но теперь их физическая интерпретация не так очевидна: комплексная амплитуда r_l, являющаяся решением уравнения (1.107) с комплексным значением c_l не имеет непосредственного физического смысла амплитуды собственной волновой моды, распространяющейся со скоростью c_l. Для разъяснения этого вопроса обратимся к часто используемому приему исследования линейных систем: будем при выполне-

нии всех линейных операций считать формально переменные u_i в линейной системе (1.100) комплексными функциями, а в конце расчета возьмем в качестве физического результата действительную часть формального решения. Поскольку при линейных операциях действительные и мнимые части не перепутываются, мы приходим к имеющему физический смысл решению задачи. Теперь ограничимся рассмотрением лишь периодических решений вида $u_i = p_i \cos(kx - \omega t)$ нашей системы (1.100) и представим их в виде комплексных переменных $u_i = p_i \exp[i(kx - \omega t)]$. Комплексные амплитуды $p_i^{(l)}$ по-прежнему составят правый собственный вектор $\mathbf{p}^{(l)}$, отвечающий собственному значению $c_l = \omega_l/k$. Если c_l — действительное число, то мы возвращаемся к прежней теории, но только теперь для частного случая периодической волны, распространяющейся со скоростью c_l. Если же c_l оказалось комплексным собственным значением, $c_l = c_l' + ic_l''$, то частота ω, соответствующая волновому числу k, становится комплексной: $\omega = k(c_l' + ic_l'') = \omega' + i\omega''$. Поэтому при выделении действительной части мы получаем в решении множитель $\mathrm{Re}[\exp[i(kx - \omega' t) + \omega'' t] = \exp(\omega'' t)\cos(kx - \omega' t)$, т.е. амплитуда волны экспоненциально зависит от времени. При этом, если $\omega'' > 0$, то эта амплитуда растет со временем, что означает *неустойчивость* нашей системы. Поскольку в системе (1.100) все члены содержат производные первого порядка, коэффициенты при которых действительны, то характеристическое уравнение также имеет действительные коэффициенты и его комплексные решения образуют комплексно сопряженные пары. Следовательно, среди комплексных собственных значений хотя бы одно имеет положительную действительную часть. Итак, мы приходим к выводу, что наличие комплексных собственных значений свидетельствует о неустойчивости нашей системы: малое начальное периодическое возмущение начинает расти экспоненциально со временем и мы выходим за рамки линейного приближения, не учитывающего к тому же диссипативных эффектов. Для выяснение дальнейшей судьбы такого возмущения становится необходимым использовать более точное описание системы, учитывающее физические эффекты, остающиеся пока за рамками нашей линейной теории.

1.1.12. Влияние диссипации на распространение звука. Использованный в п. 1.1.11 аргумент, что если характеристическое уравнение имеет один комплексный корень, то в силу действительности коэффициентов в нем оно имеет также и другой комплексно сопряженный корень, теряет силу в системах с диссипацией, так как для них коэффициенты в характеристическом уравнении оказываются комплексными. В качестве простого примера мы рассмотрим плоскую линейную звуковую волну, распространяющуюся в вязкой среде вдоль оси x. Здесь вязкость создает дополнительную силу, действующую на жидкую частицу, так что уравнение Эйлера должно быть модифицировано. Соответствующая модификация называется уравнением Навье–Стокса, за его выводом мы отсылаем читателя к стандартным учебникам (см., например [81, 118]). В одномерном случае для продольных звуковых

колебаний, предполагая газ политропным ($p = A\rho^\gamma$), мы можем записать это уравнение в виде

$$u_t + uu_x + (c^2/\rho)\rho_x - (\eta/\rho)u_{xx} = 0, \quad c^2 = dp/d\rho, \tag{1.122}$$

где η — коэффициент вязкости. Вместе с уравнением непрерывности

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \tag{1.123}$$

оно описывает одномерное течение газа с учетом малой вязкости.

Посмотрим, как введение вязкости влияет на распространение линейных звуковых волн. Для этого линеаризуем уравнения относительно состояния покоящегося неподвижного газа с плотностью ρ_0, т.е. будем считать, что $\rho = \rho + \rho'$, $u = u'$, где ρ', u' суть малые величины. Тогда для них получим систему $u'_t + (c_0^2/\rho_0)\rho'_x - (\eta/\rho_0)u'_{xx} = 0$, $\rho'_t + \rho_0 u'_x = 0$. Если искать ее решение в виде гармонических волн (ρ', $u' \propto \exp[i(kx - \omega t)]$), то выписанные уравнения имеют решения в случае, когда частота и волновое число связаны *законом дисперсии*

$$\omega^2 + (i\eta k^2/\rho_0)\omega - c_0^2 k^2 = 0, \tag{1.124}$$

который совпадает с характеристическим уравнением для скорости волны ω/k. Предполагая, что вязкость мала ($\eta^2 k^2 \ll \rho_0 c_0^2$), что всегда выполняется для достаточно длинных волн, мы легко находим:

$$\omega = c_0 k - i\eta k^2/2\rho_0, \qquad \eta^2 k^2/\rho_0 c_0^2 \ll 1. \tag{1.125}$$

Действительная часть этого соотношения совпадает с законом дисперсии звуковых волн, тогда как его мнимая часть имеет определенный знак, ведущий к экспоненциальному затуханию амплитуды гармонической волны по закону

$$\exp(-i\omega t) = \exp\left(-(\eta k^2/2\rho)t\right)\exp(-ic_0 kt).$$

Именно такого влияния вязкости и следовало ожидать. В длинноволновом пределе затухание волны может быть пренебрежимо малым.

Пусть теперь в начальный момент времени у нас есть звуковой импульс, имеющий гауссову форму распределения возмущения плотности (ввиду линейности задачи амплитуду возмущения можно считать единичной):

$$\rho'(x, 0) = e^{-x^2}.$$

Чтобы определить его эволюцию со временем, разложим его на гармоники:

$$\rho'(x,0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}\frac{dk}{2\pi}, \quad A(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-ikx}dx = \sqrt{\pi}\, e^{-k^2/4}.$$

Через время t этот импульс перейдет в

$$\rho'(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi}\, e^{-k^2/4}\cdot e^{i[c_0 k - (\eta k^2/2\rho_0)]t - ikx}\frac{dk}{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\eta t/\rho_0}}\exp\left[-\frac{(x - c_0 t)^2}{1 + 2\eta t/\rho_0}\right]. \tag{1.126}$$

Как мы видим, импульс движется со скоростью звука c_0, сохраняя гауссову форму, но при этом ширина его увеличивается, а амплитуда падает вследствие вязкости газа. При больших временах эта ширина δ растет по закону

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta t}{\rho_0}}. \tag{1.127}$$

Итак, в линейной теории вязкость приводит к вполне предсказуемым эффектам уменьшения амплитуды волны и расплывания импульса.

На этом мы закончим изучение звуковых волн в газе и обратимся к аналогичным волнам в других физических системах.

1.2. Волны на поверхности воды

Обратимся теперь к другому общеизвестному типу волн — волнам на воде. Эта область науки внесла огромный вклад в развитие физики нелинейных волн, и мы не раз будем обращаться к ней. Сейчас, однако, мы ограничимся решением скромной задачи — получим уравнения, описывающие динамику волн на воде, и найдем скорость распространения линейных волн в пределе, когда глубина воды много меньше длины волны. Эту задачу впервые решил Лагранж в конце своей «Аналитической механики», так что одна из наших целей — получить формулу Лагранжа для скорости волны. При этом, имея в виду будущее развитие этой темы, мы выведем основные уравнения распространения волн на воде с учетом главных нелинейных эффектов. Удивительным образом окажется, что их форма совпадает с формой уравнений газовой динамики, рассмотренных выше.

1.2.1. Формулировка проблемы. Итак, пусть вода налита в горизонтальный бассейн и, если ее поверхность спокойна, то она совпадает с плоскостью x, y (см. рис. 1.5). Ось z направлена вверх:, если глубина воды равна h, то дно бассейна расположено вдоль плоскости $z = -h$. При волнении поверхность воды отклоняется от горизонтальной; будем поэтому описывать поверхность воды уравнением $z = \zeta(x, y, t)$. Фактически нам нужно найти закон движения этой поверхности. Как и воздух в звуковых волнах, воду можно рассматривать как непрерывную среду, так что уравнения ее движе-

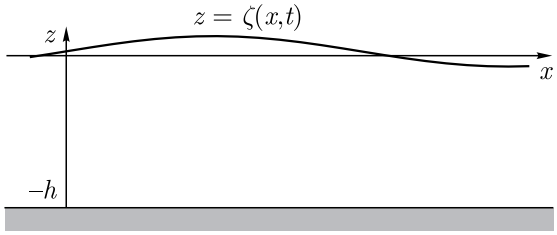

Рис. 1.5. Схематическое изображение волны на поверхности воды в бассейне глубиной h. Отклонение поверхности воды от горизонтали обозначается как $z = \zeta(x, t)$

ния совпадают с (1.6), (1.8) (как и раньше, компоненты вектора скорости обозначаем по традиции как $\mathbf{u} = (u, v, w)$):

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}. \tag{1.128}$$

Однако свойства воды сильно отличаются от свойств воздуха, отчего в этих уравнениях естественно использовать другие приближения. Прежде всего заметим, что при обычных давлениях вода практически несжимаема, плотность ρ можно считать постоянным параметром $\rho = \rho_0$. Тогда уравнение непрерывности сводится к уравнению только для скорости течения:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{1.129}$$

Далее, при рассмотрении звука мы пренебрегли силой тяжести: ранее упругость воздуха была обусловлена изменением давления при его сжатии. Теперь же возвращающей силой является сила тяжести: выведенная из равновесия вода стремится перетечь из участков с положительным возвышением ζ в участки с отрицательным ζ, что и вызывает волновое движение. Поэтому на единицу объема жидкости действует сила $\rho_0 \mathbf{g}$, где $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, g — ускорение свободного падения, а уравнение Эйлера имеет вид

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \mathbf{g}. \tag{1.130}$$

Вода расположена между поверхностями $z = -h$ и $z = \zeta(x, y, t)$ (боковые стенки считаем находящимися очень далеко и их влиянием пренебрегаем). Поэтому наши уравнения следует дополнить соответствующими граничными условиями. Но прежде оказывается удобным несколько преобразовать наши уравнения, ограничив себя классом безвихревых течений жидкости, ротор скорости которых равен нулю:

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0. \tag{1.131}$$

Здесь важно отметить, что если завихренность была равна нулю в начальный момент времени, то течение среды, согласно уравнениям идеальной гидродинамики, не учитывающим вязкость, не создает ее. Чтобы убедиться в этом, перепишем уравнение Эйлера (1.130) с помощью известной формулы векторного анализа в виде

$$\mathbf{u}_t - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{u^2}{2}\right) + \mathbf{g}, \tag{1.132}$$

где учтено также, что жидкость несжимаемая. Взяв ротор от этого уравнения, получим $(\nabla \times \mathbf{u})_t = \nabla \times (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}))$. Отсюда видно, что если повсюду $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, то и производная ротора скорости по времени повсюду равна нулю, причем сама она линейна по ротору, так что самопроизвольно вихревое движение зарождаться не может (уравнение $\dot{z} = z$ с начальным условием $z(0) = 0$ имеет лишь тривиальное решение $z = 0$).

Приняв условие (1.131), мы ограничиваемся *потенциальными* течениями, в которых вектор скорости является градиентом потенциала,

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z). \tag{1.133}$$

Подставляя эту формулу в (1.129), мы приходим к замечательному результату: потенциал скорости φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1.134}$$

Поскольку уравнение Лапласа является стандартным реквизитом теории потенциала, то кажется несколько неожиданными видеть его в теории движения жидкости. Но это означает, что вся динамическая специфика задачи должна содержаться в граничных условиях, к которым мы и переходим.

На неподвижном горизонтальном дне условие очень простое: вода не течет сквозь дно, вертикальная компонента скорости на нем равна нулю:

$$w = \varphi_z = 0 \quad \text{при} \quad z = -h. \tag{1.135}$$

На свободной поверхности жидкости $z = \zeta(x, y, t)$ ситуация гораздо сложнее. Рассмотрим частицу жидкости, находящуюся на поверхности. При движении жидкости она там и остается, не отрываясь от поверхности и не уходя вглубь жидкости. Это означает, что уравнение $z - \zeta(x, y, t) = 0$ является сохраняющимся для частиц на поверхности жидкости, т.е. субстанциональная производная (1.2) от него обращается в нуль: $-\zeta_t - u\zeta_x - v\zeta_y + w = 0$ при $z = \zeta(x, y, t)$. Поскольку (u, v, w) являются здесь компонентами скорости в данной точке, которые мы выразили через потенциал, то это условие можно переписать в виде

$$\zeta_t = \varphi_z - \zeta_x\varphi_x - \zeta_y\varphi_y \quad \text{при} \quad z = \zeta(x, y, t). \tag{1.136}$$

При его выводе никакие силы, действующие на поверхность, не учитывались: мы лишь выразили математически то, что поверхность всегда движется вместе с находящимися на ней частицами. Поэтому это условие называется *кинематическим*.

Из физических соображений ясно, что на свободной поверхности должно выполняться еще одно условие, а именно: давление при переходе через границу жидкости меняется непрерывно, без скачка. Давлением у нас управляет уравнение Эйлера, так что обратимся к нему. Подстановка (1.131) в (1.132) дает

$$\mathbf{u}_t + \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + gz\right) = 0. \tag{1.137}$$

Поскольку $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, то это уравнение можно проинтегрировать по пространственным координатам и получить

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz = 0 \quad \text{при} \quad z \leqslant \zeta(x, y, t), \tag{1.138}$$

где постоянная интегрирования, являющаяся функцией времени, включена в определение φ (это не меняет величины скорости, являющейся гра-

диентом φ). Этот аналог *уравнения Бернулли* справедлив во всей толще жидкости, включая и ее поверхность, на которой давление имеет постоянное значение, так что постоянное слагаемое p_0/ρ опять можно устранить переопределением φ. Другими словами, можно считать, что на свободной поверхности давление равно нулю: $p(x, \zeta(x, y, t), t) = 0$. Поэтому, применяя полученное соотношение к свободной границе, получаем *динамическое* граничное условие

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + gz = 0 \quad \text{при} \quad z = \zeta(x, y, t). \tag{1.139}$$

Следует отметить, что мы с самого начала предположили, что силой, выравнивающей поверхность воды, является сила тяжести. Поэтому в условие (1.139) вошло ускорение свободного падения g; такие волны на поверхности воды называются *гравитационными*. Однако для очень коротких волн выравнивающей силой может быть также поверхностное натяжение, которым мы пренебрегли при выводе (1.139). У нас еще будет повод обсудить роль поверхностного натяжения в этой проблеме и найти условие, когда им можно пренебречь.

Таким образом, мы свели задачу к определению двух функций φ и ζ, одна из которых удовлетворяет уравнению Лапласа; помимо того, эти функции связаны тремя граничными условиями. Ограничившись случаем одномерных волн, когда зависимость всех величин от y пропадает, мы приходим к системе уравнений

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \qquad \text{при} \quad -h \leqslant z \leqslant \zeta(x, t), \tag{1.140a}$$

$$\varphi_z = 0 \qquad \text{при} \quad z = -h, \tag{1.140b}$$

$$\zeta_t - \varphi_z + \zeta_x\varphi_x = 0 \qquad \text{при} \quad z = \zeta(x, t), \tag{1.140c}$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + gz = 0 \qquad \text{при} \quad z = \zeta(x, t). \tag{1.140d}$$

В такой формулировке задача представляется слишком сложной для аналитической трактовки. Поэтому по ходу нашего изложения мы будем обращаться к различным предельным случаям, когда эта система может быть существенно упрощена. Однако, прежде чем перейти к одной из таких ситуаций, обратимся к законам сохранения, которые следуют из нашей системы.

1.2.2. Законы сохранения массы, импульса и энергии для волн на воде. Нас интересует здесь перенос массы, импульса и энергии вдоль горизонтальной поверхности воды, т.е. в направлении оси x (зависимость от направления y опять опускаем, так что скорость течения имеет компоненты $\mathbf{u} = (u, 0, w)$). Хотя плотность ρ_0 несжимаемой жидкости является постоянным параметром, от которого можно было бы избавиться, выбрав соответствующим образом единицу плотности, и который к тому же выпадает из уравнений теории *гравитационных* волн на поверхности жидкости, тем не менее мы будем оставлять его в уравнениях законов сохранения из соображений размерности, а также для удобства обобщений на более

сложные ситуации. Кроме того, как мы знаем из обсуждавшейся в п. 1.1.8 связи между законами сохранения и симметрией системы, горизонтальная проекция импульса сохраняется лишь если дно горизонтальное и на верхнюю поверхность жидкости не действуют никакие силы, имеющие горизонтальную проекцию. Аналогичным образом энергия волнового движения жидкости сохраняется только в стационарных системах, в которых ни граничные условия, ни объемные силы не зависят от времени. Тем не менее представляет большой интерес записать законы сохранения с учетом изменения импульса и энергии жидкости вследствие неровности дна и зависимости обеих границ от времени. Это позволит нам в дальнейшем легко написать законы сохранения для двухслойных систем, действующих друг на друга через поверхность раздела, а также рассматривать различные эффекты, вызванные течением жидкости вдоль неровного дна. Поэтому мы по-прежнему верхнюю поверхность жидкости будем задавать функцией $z = \zeta(x,t)$, а для описания положения нижней поверхности введем функцию $z = -h(x,t)$. Таким образом, мы считаем, что жидкость расположена в пространстве $-h(x,t) \leqslant z \leqslant \zeta(x,t)$ между двумя поверхностями. Будем также предполагать, что на верхнюю поверхность действует давление $p(\zeta(x,t))$, а на нижнюю поверхность — давление $p(-h(x,t))$.

Вывод закона сохранения массы очень прост. Очевидно, что на единицу длины вдоль оси x в слое жидкости с координатой x приходится масса

$$\mathcal{P}_m = \int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)} \rho_0 dz = \rho_0[\zeta(x,t) + h(x,t)], \tag{1.141}$$

и на высоте z единичный объем массой ρ_0 переносится вдоль оси x со скоростью $u(x,z,t)$, так что поток массы равен

$$\mathcal{Q}_m = \int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)} \rho_0 u(x,z,t) dz. \tag{1.142}$$

Следовательно, закон сохранения массы можно записать как

$$\frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{Q}_m}{\partial x} = 0. \tag{1.143}$$

Поскольку мы не предполагаем наличия источников и стоков жидкости, то этот закон описывает лишь изменение количества жидкости в слое $(x, x+dx)$ вследствие ее переноса вдоль оси x. Естественно, что в случае несжимаемой жидкости ее количество в нашей задаче определяется лишь толщиной слоя $h_1(x,t) = \zeta(x,t) + h(x,t)$ в формуле (1.141).

Чтобы установить закон сохранения импульса, потребуется небольшое вычисление. Скорость изменения плотности горизонтальной компоненты им-

пульса в точке x равна

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}\rho_0 u(x,z,t)dz=\rho_0 u(x,\zeta,t)\zeta_t+\rho_0 u(x,-h,t)h_t+\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}\rho_0 u_t dz.$$

Здесь в первом члене исключаем производную по времени ζ_t с помощью (1.140c), во втором члене исключаем h_t с помощью аналогичной формулы $h_t=-w(x,-h,t)+u(x,-h,t)h_x$, а в последнем члене исключаем u_t с помощью уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}\rho_0 u(x,z,t)dz=\rho_0 u(x,\zeta,t)[w(x,\zeta,t)-\zeta_x u(x,\zeta,t)]+$$

$$+\rho_0 u(x,-h,t)[-w(x,-h,t)-h_x u(x,-h,t)]-\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}\rho_0(uu_x+wu_z+p_x/\rho_0)dz.$$

После интегрирования по частям,

$$\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x.t)}wu_z dz=w(x,\zeta,t)u(x,\zeta,t)-w(x,-h,t)u(x,-h,t)+\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}uu_x dz,$$

где мы учли, что $w_z=-u_x$ в силу уравнения непрерывности (1.140a) для несжимаемой жидкости, преобразуем наше выражение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}\rho_0 u(x,z,t)dz=-\rho_0[u^2(x,\zeta,t)\zeta_x+u^2(x,-h,t)h_x]-\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho_0 u^2)dz,$$

что можно переписать в виде закона сохранения импульса

$$\frac{\partial\mathcal{P}_p}{\partial t}+\frac{\partial\mathcal{Q}_p}{\partial x}=p(x,\zeta,t)\zeta_x+p(x,-h,t)h_x, \tag{1.144}$$

где

$$\mathcal{P}_p=\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}\rho_0 u dz,\qquad \mathcal{Q}_p=\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}(p+\rho_0 u^2)dz \tag{1.145}$$

суть выражения для плотности горизонтальной компоненты импульса и плотности ее потока соответственно, а правая часть в (1.144) представляет собой плотность силы, действующей на элемент жидкости $(x,x+dx)$ из-за изменения границ жидкости. Если дно горизонтальное, а на верхней границе давление приведено к нулевому значению, то правая часть обращается в нуль и импульс сохраняется.

При выводе закона сохранения энергии мы должны учесть, что в волне на поверхности несжимаемой жидкости нет перехода механической энергии

в тепловую: внутренняя энергия жидкости остается постоянной, ее можно исключить из рассмотрения. Вместо этого мы должны учесть изменение потенциальной энергии жидкости при колебаниях локальной высоты слоя. Будем отсчитывать потенциальную энергию от горизонтальной поверхности, $z = 0$. Поскольку вклад в кинетическую энергию жидкости дают обе компоненты скорости, то на промежуточных стадиях расчета удобно использовать векторные обозначения, так что $\mathbf{u}^2 = u^2 + w^2$. Тогда плотность энергии вдоль оси x записывается как

$$\mathcal{P}_e = \int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{u}^2 + \rho_0 g z\right) dz. \tag{1.146}$$

Уравнение движения для потенциального течения несжимаемой жидкости берем в форме (1.137). Если его умножить скалярно на $\mathbf{u}$, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz\right) = 0.$$

Учитывая, что $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, а z является независимой переменной, переписываем это выражение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + gz\right) + \nabla\left\{\mathbf{u}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz\right)\right\} = 0. \tag{1.147}$$

Поэтому производная от (1.146) по времени равна

$$\frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial t} = \left(\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2 + \rho_0 g\zeta\right)\zeta_t + \left(\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2 - \rho_0 g h\right)h_t - \\ - \int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)} \nabla\left\{\mathbf{u}\left(\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2 + p + \rho_0 g z\right)\right\} dz.$$

Здесь, как и раньше, $\zeta_t = w - u\zeta_x$, $h_t = -w - uh_x$ и z-компоненту дивергенции под знаком интеграла можно проинтегрировать:

$$\int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)} \frac{\partial}{\partial z}\left\{w\left(\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2 + p + \rho_0 g z\right)\right\} dz = w\left(\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2 + p + \rho_0 g z\right)\Big|_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)}.$$

В результате получаем

$$\frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial t} = -u\left(\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2 + p + \rho_0 g\zeta\right)\zeta_x - u\left(\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2 + p - \rho_0 g h\right)h_x + \\ + [u(\zeta)\zeta_x - w(\zeta)]p(\zeta) + [u(-h)h_x + w(-h)]p(-h) - \\ - \int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)} \frac{\partial}{\partial x}\left\{u\left(\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2 + p + \rho_0 g z\right)\right\} dz,$$

что представляет собой закон сохранения энергии

$$\frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{Q}_e}{\partial x} = -p(\zeta)\zeta_t - p(-h)h_t, \tag{1.148}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e &= \int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)} \left(\frac{1}{2}\rho_0(u^2+w^2) + \rho_0 g z\right) dz, \\ \mathcal{Q}_e &= \int\limits_{-h(x,t)}^{\zeta(x,t)} u\left(\frac{1}{2}\rho_0(u^2+w^2) + p + \rho_0 g z\right) dz. \end{aligned} \tag{1.149}$$

В этих законах сохранения $u(x,z,t)$, $w(x,z,t)$ выражаются через потенциал $\varphi(x,z,t)$, а эта переменная, как и $\zeta(x,t)$, является решением системы (1.140). Наконец, давление $p(x,z,t)$ связано с $\varphi(x,z,t)$ соотношением (1.138). Следовательно, найдя $\varphi(x,z,t)$ и $\zeta(x,t)$, мы можем вычислить как плотности импульса и энергии, так и их потоки, подчиняющиеся полученным законам сохранения. Правая часть формулы (1.148) представляет собой работу, совершаемую над жидкостью внешними границами. Если дно не зависит от времени, а давление на свободной границе, как обычно, приведено к нулевому значению, то правая часть обращается в нуль и энергия сохраняется.

Выяснив основные свойства уравнений, описывающих волны на воде, обратимся к важному предельному случаю, когда волновая динамика сводится к уравнениям, совпадающим, по существу, с уравнениями газовой динамики.

1.2.3. Теория мелкой воды. Здесь мы остановимся на упрощении, к которому приводит предположение о *мелкой воде*, т.е. условие, что длина L волн, распространяющихся в воде и на ее поверхности, много больше глубины воды,

$$L \gg h, \tag{1.150}$$

причем глубину h считаем в этом разделе постоянной. Условие (1.150) вносит в задачу малый параметр h/L, по которому может быть произведено разложение. При этом мы не будем предполагать, что амплитуда волны бесконечно мала, что не слишком усложнит анализ, но приведет к важным выводам. (Фактически это означает, что некий параметр, характеризующий влияние конечной амплитуды волны на ее эволюцию, много больше малого параметра h/L; в дальнейшем мы сформулируем более четко соответствующий критерий.) Для простоты обозначений мы, как и прежде, ограничимся рассмотрением плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, так что зависимость всех переменных от координаты y опять будет опущена. Условие (1.150) говорит нам, что все переменные изменяются вдоль оси x гораздо медленнее, чем вдоль оси z, так что разложение φ естественно производить по членам с разным числом производных по x. Замечаем, что если мы ищем

решение для φ в виде разложения

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi_n(x,t)(z+h)^n, \tag{1.151}$$

то подстановка в (1.140a) дает рекуррентное соотношение $\varphi_n = -\varphi_{n-2,xx}$, т.е. в последовательных членах разложения (1.151) число дифференцирований по x увеличивается на два, так что мы получили разложение требуемого вида. Из граничного условия (1.140b) находим, что $\varphi_1 = 0$, т.е. все коэффициенты разложения с нечетным номером равны нулю, тогда функция φ приобретает вид ($\varphi_0 = \Phi$)

$$\varphi = \Phi - \frac{1}{2}\Phi_{xx}(z+h)^2 + \ldots \tag{1.152}$$

Ясно, что Φ является первым приближением для потенциала горизонтальной скорости течения: $u \cong \Phi_x$. Мы должны подставить это решение в граничные условия (1.140c) и (1.140d); поскольку в уравнения движения должны войти производные скорости, то удерживаем члены с двумя производными от Φ по x:

$$\zeta_t + \Phi_{xx}(\zeta + h) + \zeta_x \Phi_x = 0, \qquad \Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + g\zeta = 0. \tag{1.153}$$

В этом приближении учитывается лишь горизонтальная компонента скорости течения: $u = \Phi_x$. Поэтому первое уравнение (1.153) можно записать в форме уравнения непрерывности для эффективной «плотности», роль которой играет полная локальная толщина $h_1(x,t) = h + \zeta(x,t)$ слоя жидкости в точке x, т.е.

$$h_{1,t} + (h_1 u)_x = 0. \tag{1.154}$$

Второе же уравнение (1.153) после дифференцирования по x принимает вид уравнения Эйлера

$$u_t + u u_x + g h_{1,x} = 0. \tag{1.155}$$

Замечательно, что в этом приближении уравнения движения волн на мелкой воде совпали с уравнениями газовой динамики [297], только в роли плотности газа теперь выступает высота уровня жидкости над дном. Скорость же фиктивного «газа» совпадает с горизонтальной скоростью течения. Уравнения наши нелинейны, поскольку мы не предполагали малости амплитуды волны и удерживали квадратичные члены в граничных условиях (1.140c) и (1.140d). Фиктивное «давление газа», которое не следует путать с давлением внутри жидкости, равно

$$\widetilde{p} = \frac{1}{2} g h_1^2, \tag{1.156}$$

т.е. соответствует «показателю адиабаты» $\gamma = 2$. Конечно, здесь эта постоянная не отвечает отношению каких-либо теплоемкостей.

Теперь можно было бы найти решение в виде линейных волн, считая ζ и u малыми. Но проще сразу воспользоваться результатами разд. 1.1.5 и написать волновое уравнение для отклонения ζ от равновесной горизонтальной поверхности воды,

$$\zeta_{tt} - c_0^2 \zeta_{xx} = 0, \tag{1.157}$$

где

$$c_0^2 = \left.\frac{dp}{dh_1}\right|_{\zeta=0} = gh_1|_{\zeta=0} = gh. \tag{1.158}$$

Таким образом, длинные волны распространяются по поверхности мелкой воды со скоростью

$$c_0 = \sqrt{gh}\,. \tag{1.159}$$

Это знаменитая формула Лагранжа, приведенная им в «Аналитической механике».

Отметим различия в приближениях, сделанных в разделе, трактующем звуковые волны в воздухе, и в этом разделе: в акустическом приближении мы лишь предполагали малость амплитуды волны и длина волны никак не входила в условия применимости теории. Поэтому акустическая скорость звука $c_0 = \sqrt{\gamma\dfrac{p_0}{\rho_0}}$ относилась ко всем длинам волн. При выводе же уравнений мелкой воды (1.154), (1.155) мы предполагали, что длина волны настолько велика, что параметр h/L много меньше любых других параметров, характеризующих эволюцию волны. Поэтому формула (1.159) справедлива лишь для предельно больших длин волн. При уменьшении длины волны требуется учесть зависимость скорости распространения от длины волны. Это приводит нас к огромной и важной области проявлений эффектов дисперсии. Эту сторону волновых процессов мы рассмотрим позднее (см. гл. 4), а пока ограничимся длинноволновым *бездисперсионным пределом,* описываемом уравнениями (1.154), (1.155).

1.2.4. Двухслойная жидкость. Обобщим предыдущее рассмотрение на случай двухслойной жидкости, состоящей из двух не смешивающихся компонент, одна из которых налита поверх другой (см. рис. 1.6). Обе компоненты считаем несжимаемыми; плотность нижней компоненты, скорость ее течения и давление в ней обозначаем, соответственно, как ρ_1, u_1, p_1, а аналогичные переменные, описывающие верхнюю компоненту — как ρ_2, u_2, p_2. Свободная поверхность верхнего слоя расположена на высоте $z = \zeta_2(x,t)$, а поверхность раздела между двумя компонентами — на высоте $z = \zeta_1(x,t)$. Дно считаем горизонтальным и находящимся на глубине $z = -h$. На свободной поверхности

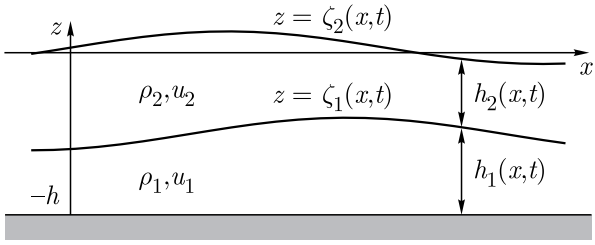

Рис. 1.6. Схематическое изображение волны на поверхности двухслойной жидкости в бассейне глубиной h. Отклонение свободной поверхности воды от горизонтали обозначается как $z = \zeta_2(x,t)$, а поверхность раздела между двумя слоями находится на высоте $z = \zeta_1(x,t)$. Плотность жидкости ρ_2 в верхнем слое меньше плотности жидкости ρ_1 в нижнем слое

давление считаем равным нулю: $p_2(\zeta_2) = 0$. Нас интересуют волны в приближении «мелкой воды», когда длина волны много больше толщин обоих слоев. В этом приближении, как мы видели выше, вертикальной компонентой скорости можно пренебречь и горизонтальные компоненты u_1, u_2 не зависят от z. Давление в слоях жидкости гидростатическое, на поверхности раздела оно равно $p_2(\zeta_1) = p_1(\zeta_1) = \rho_2 g(\zeta_2 - \zeta_1)$, а внутри слоев зависит от высоты как

$$p_2(z) = \rho_2 g(\zeta_2 - z), \quad p_1(z) = \rho_2 g(\zeta_2 - \zeta_1) + \rho_1 g(\zeta_1 - z), \tag{1.160}$$

где z принимает значения внутри соответствующего слоя.

Интегралы (1.141), (1.142) в законах сохранения массы каждой компоненты в нашем приближении мгновенно вычисляются и дают два уравнения

$$(\zeta_1 + h)_t + [(\zeta_1 + h)u_1]_x = 0, \qquad (\zeta_2 - \zeta_1)_t + [(\zeta_2 - \zeta_1)u_2]_x = 0.$$

Чуть более сложное вычисление интегралов (1.145) в законе сохранения импульса (1.144) для каждой компоненты приводит к

$$\begin{aligned}
[\rho_1 u_1(\zeta_1 + h)]_t + \Big[&\rho_2 g(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta_1 + h) + \\
&+ \frac{1}{2}\rho_1 g(\zeta_1 + h)^2 + \rho_1 u_1^2(\zeta_1 + h)\Big]_x = \rho_2 g(\zeta_2 - \zeta_1)\zeta_{1,x}, \\
[\rho_2 u_2(\zeta_2 - \zeta_1)]_t + \Big[&\frac{1}{2}\rho_2 g(\zeta_2 - \zeta_1)^2 + \\
&+ \rho_2 u_2^2(\zeta_2 - \zeta_1)\Big]_x = -\rho_2 g(\zeta_2 - \zeta_1)\zeta_{1,x},
\end{aligned}$$

где учтены значения давления на всех поверхностях и горизонтальность дна. Полученные уравнения можно упростить введением новых переменных,

$$h_1 = \zeta_1 + h, \qquad h_2 = \zeta_1 - \zeta_2, \tag{1.161}$$

равных локальной толщине слоя каждой компоненты, а также исключением $h_{1,t}$, $h_{2,t}$ из второй пары уравнений с помощью первой пары. Кроме того, в дальнейшем для упрощения записи формул мы перейдем к системе единиц, в которой ускорение свободного падения равно единице ($g = 1$). В результате приходим к двум «уравнениям непрерывности»,

$$h_{1,t} + (h_1 u_1)_x = 0, \qquad h_{2,t} + (h_2 u_2)_x = 0, \tag{1.162}$$

и двум «уравнениям Эйлера»,

$$\begin{aligned}
u_{1,t} + u_1 u_{1,x} + h_{1,x} + \mu h_{2,x} = 0, \\
u_{2,t} + u_2 u_{2,x} + h_{1,x} + h_{2,x} = 0,
\end{aligned} \tag{1.163}$$

где $\mu = \rho_2/\rho_1$. При $\mu = 0$, когда давление верхней жидкости на нижнюю пренебрежимо мало, движение нижней жидкости описывается уравнениями однослойной мелкой воды, а уравнения движения верхней жидкости также сводятся к однослойному случаю, но с «внешней силой», определяемой известным решением $h_1(x, t)$ для нижнего слоя. Закон сохранения «массы»

выполняется для каждой компоненты по отдельности. Но когда жидкость в слоях течет, слои обмениваются друг с другом импульсом, поэтому сохраняется лишь суммарный импульс. Его закон сохранения, как это следует из наших выкладок, можно записать в форме

$$\frac{\partial \mathcal{P}_p}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{Q}_p}{\partial x} = 0, \tag{1.164}$$

где

$$\mathcal{P}_p = h_1 u_1 + \mu h_2 u_2, \quad \mathcal{Q}_p = h_1 u_1^2 + \mu h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{2}\mu h_2^2 + \mu h_1 h_2. \tag{1.165}$$

Аналогичные вычисления дают закон сохранения энергии

$$\frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{Q}_e}{\partial x} = 0, \tag{1.166}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e &= \frac{1}{2} h_1 u_1^2 + \frac{1}{2}\mu h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{2}\mu h_2^2 + \mu h_1 h_2, \\ \mathcal{Q}_e &= \frac{1}{2} h_1 u_1^3 + \frac{1}{2}\mu h_2 u_2^3 + h_1^2 u_1 + \mu h_2^2 u_2 + \mu h_1 h_2 (u_1 + u_2). \end{aligned} \tag{1.167}$$

В справедливости этого закона сохранения можно убедиться прямой проверкой с помощью уравнений динамики жидкостей (1.162), (1.163).

Теперь запишем полученную систему (1.162), (1.163) в матричном виде:

$$\mathbf{u}_t + \mathbb{A}\mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & h_1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & h_2 \\ 1 & \mu & u_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & u_2 \end{pmatrix}, \tag{1.168}$$

и рассмотрим линейные волны, распространяющиеся по однородному фону; причем для простоты будем сначала считать, что в невозмущенном состоянии обе компоненты покоятся: $u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = 0$. Согласно (1.106) скорости c линейных волн являются решениями уравнения $\det(\mathbb{A} - c\mathbb{I}) = 0$, и простое вычисление дает значения для квадратов скоростей:

$$c^2 = \frac{1}{2}\left(h_1 + h_2 \pm \sqrt{(h_1 + h_2)^2 - 4(1-\mu)h_1 h_2}\right). \tag{1.169}$$

Здесь h_1, h_2 обозначают равновесные толщины слоев жидкостей. Легко видеть, что оба квадрата скоростей положительны лишь если $\mu < 1$, т.е. $\rho_2 < \rho_1$ — более легкая жидкость находится сверху. Мы получили физически очевидный результат: поверхность раздела между жидкостями неустойчива, если сверху находится более тяжелая жидкость. Этот тип неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей называется *неустойчивостью Рэлея–Тейлора*. Процесс эволюции такой неустойчивой поверхности также представляет большой интерес, но мы ограничимся случаем устойчивых поверхностей, по которым могут распространяться линейные волны с действительными значениями скоростей звука, т.е. случаем *гиперболичности* уравнений (1.168).

Для выяснения физического смысла волн, распространяющихся со скоростями (1.169), рассмотрим предел очень малой разности плотностей, когда

$1-\mu \ll 1$ может служить малым параметром теории. В этом пределе получаем в главных приближениях выражения для скоростей

$$c_{1,2} = \pm\sqrt{h_1+h_2}\,, \qquad c_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{(1-\mu)h_1h_2}{h_1+h_2}}\,. \tag{1.170}$$

Ясно, что первая формула совпадает (после восстановления g) с формулой (1.159) для скорости волн на свободной поверхности «мелкой воды» с суммарной глубиной h_1+h_2 и в пренебрежении малой разностью плотностей слоев. Естественно предположить, что вторая формула (1.170) дает скорости волн вдоль поверхности раздела между слоями. В этом можно убедиться, вычислив собственные векторы $\mathbf{p}$ матрицы $\mathbb{A}$, соответствующие этим собственным значениям. Обозначим для простоты отклонения от равновесных значений в волне теми же символами, что и в равновесии, но снабдив их штрихами: $\mathbf{p} = (h_1', h_2', u_1', u_2')^\top$. При нулевых фоновых скоростях течения компонент произведение последней строки $\mathbb{A}$ на собственный вектор $\mathbf{p}$, соответствующий собственным значениям $c_{3,4}$, дает $h_1' + h_2' = c_{3,4}u_2' \to 0$ при $\mu \to 1$, т.е. суммарная толщина слоев в этом пределе постоянна и $h_2' = -h_1'$. В то же время произведения первых двух строк $\mathbb{A}$ на $\mathbf{p}$ дают выражения для малых скоростей течения компонент в линейной волне,

$$u_1' \approx \frac{c_{3,4}}{h_1}h_1', \qquad u_2' \approx \frac{c_{3,4}}{h_2}h_2' = -\frac{c_{3,4}}{h_2}h_1',$$

т.е. они направлены в противоположные стороны — компоненты колеблются в этой моде навстречу друг другу, сохраняя суммарную толщину слоев неизменной. При этом, если обозначить амплитуду колебаний скорости $u_2' = a$, то амплитуда колебаний суммарной высоты будет малой величиной, $h_1' + h_2' \propto \sqrt{1-\mu}\,a$, тогда как амплитуда колебаний поверхности раздела в этом пределе относительно велика: $h_i \propto a/\sqrt{1-\mu}$. Такие волны называются *внутренними*. Если μ не близко к единице, то моды включают в себя колебания обеих поверхностей, но при $\mu \to 1$ они вырождаются в колебания одной из них; удобно сохранить за ними названия «поверхностной» и «внутренней» волны.

Существенно, что скорость распространения внутренних волн мала при малой разности плотностей. Это заставляет предположить, что закон (1.170) справедлив лишь при экстремально больших длинах волн, а в реальных условиях необходимо учитывать дисперсию, т.е. зависимость скорости волны от ее длины, когда дисперсионная поправка к скорости становится сравнимой с малой величиной скорости волны в приближении (1.170). В дальнейшем мы еще обратимся к этому вопросу. Здесь же отметим, что малость скорости внутренних волн влечет за собой любопытное следствие: медленно движущееся по поверхности двухслойной воды судно легко возбуждает внутренние волны, распространяющиеся с той же скоростью, что вызывает большие потери энергии, проявляющиеся в виде волнового сопротивления движению судна. Процитируем подстрочное примечание к «Гидродинамике» Ламба (§ 231 в [75]): «Вблизи устья некоторых норвежских фиордов на-

ходится слой пресной воды над соленой водой. Вследствие сравнительно небольшой потенциальной энергии, которая обусловлена данной деформацией поверхности раздела, на этой пограничной поверхности легко развиваются волны значительной высоты. Этой причиной объясняют ненормальное сопротивление, которое иногда испытывают суда в этих водах». В частности, судно «Фрам» норвежского исследователя Арктики Ф. Нансена попало в область мертвой воды вблизи полуострова Таймыр в 1893 г. при попытке достичь Северного полюса. Как описал это явление Нансен, казалось, что судно было захвачено «таинственной силой», не позволявшей ему двигаться вперед с обычной скоростью. Нансен попросил норвежского физика Бьеркнеса объяснить явление, и тот указал, что почти вся энергия двигателя тратилась на возбуждение внутренних волн на поверхности раздела между пресной и соленой водой [318]. По-видимому, это было побочным следствием мелкой посадки судна, специально сконструированного для долгого дрейфа в арктических льдах, так что киль судна не достигал нижнего слоя соленой воды.

Если линейные волны распространяются по двухслойной жидкости с ненулевой относительной скоростью $u_1 - u_2$ фонового течения, то анализ усложняется и в задаче появляются новые существенные черты [91]. В этом случае характеристические скорости определяются уравнением

$$|\mathbb{A} - c\mathbb{I}| = [h_1 - (u_1 - c)^2]\,[h_2 - (u_2 - c)^2] - \mu h_1 h_2 = 0. \tag{1.171}$$

Характер решений этого алгебраического уравнения 4-й степени относительно скорости c легче всего определить с помощью следующего геометрического построения. Вводим новые переменные v_1, v_2 согласно соотношениям $u_1 - c = v_1\sqrt{h_1}$, $u_2 - c = v_2\sqrt{h_2}$. В этих переменных характеристическое уравнение принимает простую форму

$$(1 - v_1^2)(1 - v_2^2) = \mu \tag{1.172}$$

и определяет на плоскости (v_1, v_2) кривую 4-го порядка. Легко видеть, что когда одна из переменных стремится к $\pm\infty$, другая переменная стремится к ± 1, т.е. кривая имеет четыре асимптоты, $v_1 = \pm 1$, $v_2 = \pm 1$. Далее, если μ близко к единице, то одна из ветвей этой кривой близка к окружности малого радиуса $\sqrt{1-\mu}$. При изменении μ эта ветвь деформируется, приближаясь к квадрату, образованному пересекающимися асимптотами, но топологически остается замкнутой кривой, находящейся внутри квадрата. Типичный график кривой (1.172) показан на рис. 1.7.

Если u_1, u_2 заданы, то точка с координатами (v_1, v_2) находится также на прямой

$$v_1\sqrt{h_1} - v_2\sqrt{h_2} = u_1 - u_2, \tag{1.173}$$

которая очевидно может пересечь кривую (1.172) либо в двух, либо в четырех точках в зависимости от величины относительной скорости $u_1 - u_2$ фоновых течений. Каждой точке пересечения отвечает характеристический корень уравнения (1.171). Критические значения $u_{\text{кр}}$ величины $u_1 - u_2$, при которых происходит переход от четырех корней к двум и обратно, соответствуют точкам касания прямой (1.173) с кривой (1.172). Дифференцируя (1.172) по v_1

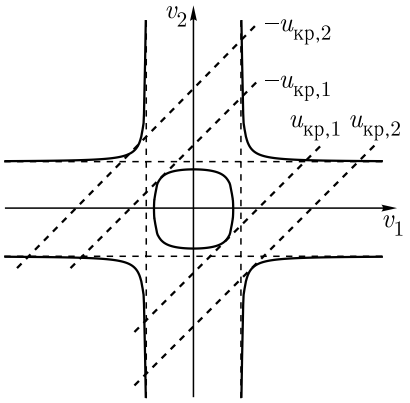

Рис. 1.7. График кривой (1.172) для $\mu = 0{,}3$. Касательные (1.173) изображены для равных равновесных толщин слоев $h_1 = h_2$. Если толщины не равны, то наклон всех касательных изменяется и точки касания перемещаются по ветвям кривых; при этом качественная картина остается прежней. Для секущих, расположенных между касательными с одинаковым знаком $u_{\text{кр}}$, существуют только две точки пересечения с кривой, которые соответствуют двум действительным характеристическим скоростям. Все остальные секущие имеют четыре точки пересечения с кривой; при таких параметрах задачи все четыре характеристических скорости действительны

и приравнивая dv_2/dv_1 наклону $\sqrt{h_1/h_2}$ прямой (1.173), получаем уравнение

$$\sqrt{h_2}\; v_1(1 - v_2^2) + \sqrt{h_1}\; v_2(1 - v_1^2) = 0, \tag{1.174}$$

которое совместно с (1.172) определяет точки касания. Мы ограничимся случаем равных равновесных высот $h_1 = h_2 = h$, когда последнее уравнение имеет решение $v_2 = -v_1$ (легко убедиться, что другая возможность с $v_1 v_2 = 1$ не отвечает точкам пересечения, так как при подстановке $v_2 v_2 = 1$ в (1.172) получаем уравнение $v_1^2 + v_2^2 = -\mu$, противоречащее условию положительности параметра μ, определенного как отношение плотностей жидкостей). Поэтому сразу находим $v_1 = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{\mu}}$, и в этом случае критические значения равны

$$\pm u_{\text{кр},1} = \pm 2\sqrt{(1 - \sqrt{\mu})h}\,, \quad \pm u_{\text{кр},2} = \pm 2\sqrt{(1 + \sqrt{\mu})h}\,. \tag{1.175}$$

Если $h_1 \neq h_2$, то критические значения относительной скорости легко найти численным решением системы уравнений (1.172), (1.174). В результате мы находим, что при достаточно малых по абсолютной величине относительных скоростях,

$$|u_1 - u_2| < u_{\text{кр},1}, \tag{1.176}$$

все характеристические скорости действительны. На границах этого интервала две скорости сливаются и при

$$u_{\text{кр},1} < |u_1 - u_2| < u_{\text{кр},2} \tag{1.177}$$

имеются лишь две действительных характеристических скорости, т.е. задача перестает быть гиперболической. Наконец, при

$$|u_1 - u_2| > u_{\text{кр},2} \tag{1.178}$$

снова все четыре характеристические скорости действительны и мы находимся в области гиперболичности. Существование области параметров (1.177) с двумя действительными и двумя комплексными характеристическими скоростями означает неустойчивость однородных состояний с постоянными плотностями компонент и их скоростями течения: периодическое возмущение такого состояния имеет экспоненциально растущие амплитуды, что можно интерпретировать как неустойчивость *тангенциальных разрывов*, на которых скорость жидкости, направленная по касательной к поверхности, испытывает скачок. Эта неустойчивость называется *неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца*.

1.3. Динамика бозе-эйнштейновского конденсата

1.3.1. Однокомпонентный конденсат. В последнее время большое внимание привлекает к себе динамика нового состояния материи — бозе-эйнштейновского конденсата. Поскольку нелинейные волны, включая дисперсионные ударные волны, в них также обнаружены, при этом описываются уравнениями, имеющими приложения и в других областях физики, то мы будем использовать волны в бозе-эйнштейновском конденсате (наряду с волнами в воздухе и на воде) в качестве типичного примера. Введение в физику бозе-эйнштейновского конденсата читатель может найти, например, в обзоре [99]. Здесь отметим лишь, что если газ бозонов настолько холодный, что длина волны де Бройля $\lambda \sim \hbar/\sqrt{mT}$, обусловленная тепловым движением частиц, много больше среднего расстояния между частицами, то ввиду неразличимости частиц состояние газа описывается «общей» волновой функцией $\psi(\mathbf{r}, t)$, фаза которой мало меняется на длинах, много бóльших, чем среднее межатомное расстояние. Динамика конденсата характеризуется зависимостью волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ от координат и времени. Как показали Гросс [198] и Питаевский [98], если газ достаточно близок к идеальному, то эффекты межатомного взаимодействия можно свести к среднему потенциалу, действующему на атомы конденсата, и тогда динамика конденсата описывается уравнением Гросса–Питаевского

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(\mathbf{r})\psi + g|\psi|^2\psi, \tag{1.179}$$

где последний член как раз возникает благодаря взаимодействию. Параметр g характеризует силу взаимодействия и может быть выражен через атомные параметры. При $g < 0$ взаимодействие является притягивающим, а при $g > 0$ — отталкивающим.

Волновая функция ψ состояния конденсата связана с его более наглядными физическими характеристиками. В квантовой механике обычно $|\psi|^2$ представляет собой плотность вероятности найти частицу в окрестности данной точки пространства. Если переопределить нормировку ψ так, что интеграл от квадрата ее модуля дает полное число частиц в конденсате,

$$\int |\psi|^2 dV = N, \tag{1.180}$$

то переменная

$$\rho = |\psi|^2 \tag{1.181}$$

будет равна привычной нам плотности числа частиц (после умножения на массу атома она переходит в обычную массовую плотность). Кроме того, из квантовой механики известно, что градиент фазы волновой функции пропорционален скорости частицы. Когда ψ является волновой функцией не отдельной частицы, а всего конденсата, то

$$\mathbf{u} = \frac{\hbar}{m}\nabla\varphi \tag{1.182}$$

представляет собой скорость течения конденсата в данной точке.

Если фаза φ является однозначной функцией координат, что означает физически, что в конденсате нет вихрей, то волновую функцию конденсата можно представить в виде (такую замену впервые использовал Маделунг [270] для представления квантово-механического уравнения Шрёдингера в гидродинамической форме)

$$\psi = \sqrt{\rho(\mathbf{r},t)}\,\exp\left(\frac{im}{\hbar}\int^{\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}' - i\frac{\mu}{\hbar}t\right), \tag{1.183}$$

где μ — так называемый *химический потенциал*, являющийся постоянным параметром; в стационарных состояниях его значение подбирается так, чтобы выполнялось условие (1.180). Подстановка (1.183) в (1.179), разделение вещественной и мнимой частей и дифференцирование одного из уравнений по $\mathbf{r}$ приводят уравнение Гросса–Питаевского к так называемой «гидродинамической форме»:

$$\rho_t + \nabla(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{1.184}$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \frac{g}{m}\nabla\rho + \frac{\hbar^2}{m^2}\nabla\left[\frac{(\nabla\rho)^2}{8\rho^2} - \frac{\Delta\rho}{4\rho}\right] = -\frac{1}{m}\nabla U. \tag{1.185}$$

Уравнение (1.184) очевидным образом отвечает сохранению числа частиц в конденсате. Если бы в уравнении (1.185) не было члена, пропорционального $\hbar^2$, то это уравнение соответствовало бы обычной эйлеровой гидродинамике с давлением

$$p = \frac{g\rho^2}{2m}. \tag{1.186}$$

Но дополнительный член вносит новые свойства, если характеристики конденсата изменяются достаточно быстро. Оценим расстояние ξ, на котором давление и квантовые члены вносят одинаковый вклад: $g\rho \sim \hbar^2/(m\xi^2)$, отсюда $\xi \sim \hbar/\sqrt{mg\rho}$. Таким образом, конденсат обладает внутренним характерным размером, который называется корреляционной длиной, и мы определим ее формулой

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{mg\rho}}. \tag{1.187}$$

Если плотность ρ и скорость течения $\mathbf{u}$ конденсата слабо меняются на расстояниях $\sim \xi$, то квантовым членом можно пренебречь и прийти к системе

$$\rho_t + \nabla(\rho\mathbf{u}) = 0, \qquad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \frac{g}{m}\nabla\rho = -\frac{1}{m}\nabla U, \tag{1.188}$$

совпадающей с уравнениями для мелкой воды (лишь с добавлением градиента внешнего потенциала $-\nabla U$, который естественным образом появляется в задаче о конденсате). Взаимодействие между атомами конденсата приводит к давлению (1.186). Поэтому в области с достаточно однородной плотностью конденсата могут распространяться звуковые волны со скоростью

$$c_0 = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{g\rho}{m}}. \tag{1.189}$$

Эта скорость отвечает предельно большим длинам волн, $L \gg \xi$, распространяющихся в конденсате. Если длина волны уменьшается, то следует учитывать квантовую дисперсию скорости волны, обусловленную последним членом в уравнении (1.185). Полезно заметить, что корреляционная длина (1.187) равна длине волны де Бройля для частиц, движущихся со скоростью звука (1.189).

При скоростях течения, много меньших скорости звука ($\mathbf{u} \ll c_0$), бозе-эйнштейновский конденсат можно считать несжимаемой жидкостью ($\rho = \mathrm{const}$), для течения которой мимо препятствий известен так называемый *парадокс Даламбера* — отсутствие силы, действующей со стороны текущей жидкости на препятствие. В случае конденсата это означает, что при достаточно малых скоростях течения он обладает свойством *сверхтекучести*: жидкость не оказывает сопротивления движущемуся сквозь нее телу. Фактически звуковые волны любой длины не возбуждаются течением конденсата мимо препятствия при всех дозвуковых скоростях $u < c_0$, но сверхтекучесть может исчезать при таких скоростях из-за возбуждения вихрей [183].

Чрезвычайно важно отметить, что скорость звука (1.189) принимает физически осмысленные действительные значения лишь при $g > 0$, что соответствует отталкиванию атомов друг от друга. При $g < 0$ скорость звука становится мнимой, что указывает на неустойчивость однородного состояния конденсата: его сжимаемость в этом случае отрицательна, т.е. давление уменьшается при увеличении плотности, в результате чего флуктуации с повышением плотности нарастают, так как газ стремится затечь в возникшие области пониженного давления. Это приводит к модуляционной неустойчивости и так называемому «коллапсу» конденсата в трехмерном случае. Мы здесь будем предполагать, что выполнено условие модуляционной устойчивости.

1.3.2. Лагранжева и гамильтонова формулировка уравнения Гросса–Питаевского. Если вывод лагранжевой формулировки уравнений газовой динамики даже для безвихревого течения был не совсем тривиальным и потребовал введения потенциала скорости, то лагранжиан уравнения Гросса–Питаевского легко может быть написан непосредственно через волновую функцию. Для удобства обозначений перейдем здесь к безразмерным

переменным, введя характерную плотность частиц ρ_0 и считая, что единицей длины является определенная с помощью ρ_0 корреляционная длина (1.187), единицей времени — интервал, за который звук проходит расстояние ξ со скоростью (1.189), наконец, что волновая функция поделена на корень из характерной плотности ρ_0. Сохраняя прежние обозначения, приходим после этих преобразований к уравнению Гросса–Питаевского в виде (внешний потенциал для простоты опускаем)

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\Delta\psi - |\psi|^2\psi = 0. \tag{1.190}$$

Нетрудно увидеть, что это уравнение можно написать как уравнения Лагранжа, если в качестве плотности лагранжиана взять выражение [1]

$$\mathcal{L} = -i\psi\psi_t^* - \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4. \tag{1.191}$$

В нашей формулировке ψ^* является динамической переменной, и варьирование по ней действия

$$S = \int \mathcal{L} d\mathbf{r} dt \tag{1.192}$$

сразу же превращает уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t^*} + \nabla\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\psi^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0 \tag{1.193}$$

в уравнение Гросса–Питаевского (1.190). Роль импульса в этой теории играет

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t^*} = -i\psi, \tag{1.194}$$

так что преобразование Лежандра дает плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = p\cdot\psi_t^* - \mathcal{L} = \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4, \qquad H = \int \mathcal{H} d\mathbf{r}, \tag{1.195}$$

и уравнение Гамильтона

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \psi^*} \tag{1.196}$$

снова совпадает с (1.190) (здесь $\delta H/\delta\psi$ обозначает вариационную производную гамильтониана, вычисляемую аналогично вариационной производной лагранжиана при выводе уравнений Лагранжа из принципа наименьшего действия; см. (1.74)).

Как мы знаем, законы сохранения уравнений движения связаны с симметриями лагранжиана. В связи с этим возникает любопытный вопрос: какая симметрия лагранжиана соответствует закону сохранения числа частиц, т.е. уравнению непрерывности (1.184)? Ведь в случае уравнений газовой динамики это уравнение формулировалось отдельно от уравнения движения Эйлера, а теперь оно является следствием уравнения Гросса–Питаевского. Оказыва-

[1] Мы выбрали комплексную форму лагранжиана, чтобы обойти сложности работы с вырожденными лагранжианами (см., например, [36, 179]).

ется, что это дополнительное преобразование, оставляющее инвариантным действие (1.192), нетрудно найти. В самом деле, лагранжиан (1.191) очевидным образом инвариантен относительно преобразования умножения волновой функции на фазовый множитель: $\psi \mapsto \psi \cdot e^{i\chi}$ с постоянным χ. Обобщение этого преобразования на локальный случай, когда χ является функцией координат и времени, приводит (в соответствии с теоремой Нетер) к закону сохранения числа частиц. В самом деле, потребуем, чтобы *калибровочное преобразование*

$$\psi \mapsto \psi \cdot e^{i\chi(\mathbf{r},t)}, \qquad \psi^* \mapsto \psi^* \cdot e^{-i\chi(\mathbf{r},t)} \tag{1.197}$$

оставляло действие инвариантным. Вычислим изменение действия при бесконечно малом преобразовании, когда $\delta\psi = i\psi\chi(\mathbf{r},t)$, $\delta\psi^* = -i\psi^*\chi(\mathbf{r},t)$. Подстановка этих формул в (1.192) дает

$$\delta S = \int \left\{ -(\psi\psi^*)\chi_t - \frac{i}{2}\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right)\nabla\chi \right\} d\mathbf{r}dt.$$

Интегрируем здесь по частям (первое слагаемое в подынтегральном выражении — по времени, а второе — по пространству), считая, что на границе области интегрирования вариация обращается в нуль; в результате получаем

$$\delta S = \int \left\{ (\psi\psi^*)_t + \nabla\left[\frac{i}{2}\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right)\right] \right\} \chi(\mathbf{r},t) d\mathbf{r}dt. \tag{1.198}$$

Если потребовать, чтобы эта вариация обращалась в нуль при произвольном $\chi(\mathbf{r},t)$, то получим закон сохранения в виде

$$\rho_t + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0, \tag{1.199}$$

где

$$\rho = \psi\psi^*, \qquad \mathbf{j} = \frac{i}{2}\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right). \tag{1.200}$$

Если представить волновую функцию в виде $\psi = \sqrt{\rho}\, e^{i\varphi}$, то поток частиц равен $\mathbf{j} = \rho\nabla\varphi$. Вводя скорость течения $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, воспроизводим закон сохранения (1.184). Таким образом, в теории Гросса–Питаевского для динамики бозе-конденсата уравнение непрерывности включено в общие представления о связи законов сохранения с симметриями лагранжиана.

Перейдем в лагранжиане (1.191) к переменным ρ и φ с помощью подстановки $\psi = \sqrt{\rho}\, e^{i\varphi}, \psi^* = \sqrt{\rho}\, e^{-i\varphi}$, так что получим

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\rho^2 + \rho\varphi_t + \frac{\rho_x^2}{8\rho}. \tag{1.201}$$

(Мы опустили член с производной ρ_t, не дающий вклада в уравнения Лагранжа, и поменяли для удобства общий знак.) Уравнения Лагранжа для переменных ρ и φ имеют вид

$$\rho_t + (\rho\varphi_x)_x = 0, \qquad \varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + \rho + \frac{\rho_x^2}{8\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{4\rho} = 0. \tag{1.202}$$

Вспоминая, что φ является потенциалом скорости, $u = \varphi_x$, видим, что первое уравнение (1.202) совпадает с одномерным уравнением непрерывности (1.184), а производная по x от второго уравнения дает одномерное уравнение (1.185). Следовательно, второе уравнение (1.202) является интегралом от аналога уравнения Эйлера для потенциального течения и может поэтому рассматриваться как аналог уравнения Бернулли, где к обычным первым трем слагаемым добавлены еще два «дисперсионных» слагаемых, зависящих от производных плотности по пространственной координате.

Закон сохранения массы уже включен в уравнения (1.202). Обсудим вывод уравнений сохранения импульса и энергии. Мы показали в п. 1.1.8, что эти законы могут быть выражены через лагранжиан как следствия из его симметрии относительно сдвигов начала координат и момента начала отсчета времени в пространственно однородных и не зависящих от времени системах. Конкретные формулы (1.76) и (1.77) были выведены для случая, когда система зависит от одной полевой переменной и ее производных первого порядка по пространственным координатам и времени. Лагранжиан (1.201) зависит от двух полевых переменных ρ, φ и их производных первого порядка; для этого случая аналогичное вычисление дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t}\varphi_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_t}\rho_x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_x}\varphi_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_x}\rho_x - \mathcal{L}\right) = 0 \tag{1.203}$$

для закона сохранения импульса и

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t}\varphi_t - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_t}\rho_t\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_x}\varphi_t - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_x}\rho_t\right) = 0, \tag{1.204}$$

где мы ограничились одномерными системами с единственной пространственной координатой x и изменили для дальнейшего удобства общий знак членов в уравнении сохранения энергии. Если подставить сюда лагранжиан (1.201) и исключить ρ_t и φ_t с помощью уравнений (1.202), то закон сохранения импульса приобретает форму

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho_x^2}{4\rho} - \frac{1}{4}\rho_{xx}\right) = 0, \tag{1.205}$$

а закон сохранения энергии — форму

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{\rho_x^2}{8\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{u\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho^2 + \frac{\rho_x^2}{8\rho} - \frac{1}{4}\rho_{xx}\right) + \frac{\rho_x}{4\rho}(\rho u)_x\right\} = 0. \tag{1.206}$$

Поучительно сравнить эти законы сохранения с соответствующими законами сохранения для обычного (не квантового) газа (см. (1.50) и (1.52) или (1.54)), когда существенна тепловая энергия, а дисперсия роли не играет, и с законами сохранения для волн на поверхности жидкости (см. (1.144) и (1.148)), когда вместо тепловой энергии фигурирует потенциальная энергия жидкости в поле тяжести, а дисперсионные эффекты скрыты в интегральной форме плотностей сохраняющихся величин и их потоков.

Если опустить в (1.201) последний член, отвечающий дисперсии, то уравнения Лагранжа для лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\rho^2 + \rho\varphi_t \tag{1.207}$$

с учетом $u = \varphi_x$ мгновенно приводят к уравнениям мелкой воды

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \rho_x = 0, \tag{1.208}$$

описывающим динамику одномерного течения конденсата в так называемом «длинноволновом приближении», когда характерные расстояния, на которых изменяются переменные, много больше корреляционной длины ξ.

Заметим, что лагранжиан в виде (1.207), выраженный через плотность и потенциал скорости, воспроизводит формулировку принципа наименьшего действия (1.86) для уравнений газовой динамики, если заменить $\rho^2/2$ на более общее выражение для плотности внутренней энергии ρe. Замечательно, что при этом потенциал скорости, возникший ранее несколько искусственным образом как множитель Лагранжа, учитывающий закон сохранения массы, в теории Гросса–Питаевского появляется совершенно естественным образом как фаза волновой функции благодаря тому, что в этой теории сохранение числа частиц является следствием уравнений динамики и его не требуется учитывать дополнительно, как это делается в эйлеровой гидродинамике.

1.3.3. Двухкомпонентный конденсат: основные уравнения. Мы предполагали выше, что основное состояние атомов конденсата с энергией E_0 отделено от первого возбужденного E_1 достаточно большим интервалом, так что при температурах много меньше критической имеем также $T \ll E_1$ и, следовательно, атомы конденсируются в единственное состояние E_0. Однако если энергии E_0 и E_1 очень близки (что может реализоваться, например, при сверхтонком расщеплении уровня энергии основного состояния), так что $E_1 - E_0 \ll T \ll T_c$, то атомы, имеющие разные энергии, являются различимыми и конденсируются поэтому в разные конденсаты. Говорят, что в этом случае мы имеем двухкомпонентный конденсат, который описывается двухкомпонентной волновой функцией (ψ_1, ψ_2). Атомы обоих сортов взаимодействуют как между собой, так и друг с другом. Поэтому динамика двухкомпонентного конденсата описывается системой уравнений, являющихся естественным обобщение уравнения (1.179). Если ввести подходящие безразмерные переменные, то эту систему можно написать в виде, аналогичном (1.190):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi_1 - (g_{11}|\psi_1|^2 + g_{12}|\psi_2|^2)\psi_1 = 0, \\ i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi_2 - (g_{12}|\psi_1|^2 + g_{22}|\psi_2|^2)\psi_2 = 0, \end{aligned} \tag{1.209}$$

где предполагается, что массы обоих сортов атомов одинаковы и внешние потенциалы сил, действующих на атомы, для простоты опущены.

Как и в однокомпонентном случае, удобно перейти к более наглядным переменным — плотностям компонент $\rho_{1,2}$ и их скоростям течения $\mathbf{u}_{1,2}$ — с помощью замен Маделунга,

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sqrt{\rho_1(\mathbf{r},t)}\,\exp\left(i\int^{\mathbf{r}}\mathbf{u}_1(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}' - i\mu_1 t\right),\\ \psi_2 &= \sqrt{\rho_2(\mathbf{r},t)}\,\exp\left(i\int^{\mathbf{r}}\mathbf{u}_2(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}' - i\mu_2 t\right),\end{aligned} \tag{1.210}$$

предполагающих потенциальность течения ($\mathbf{u}_{1,2} = \nabla\varphi_{1,2}$), что справедливо для интересующих нас здесь звуковых волн. В результате простых выкладок получаем уравнения, аналогичные (1.184), (1.185):

$$\rho_{1,t} + \nabla(\rho_1\mathbf{u}_1) = 0, \quad \rho_{2,t} + \nabla(\rho_2\mathbf{u}_2) = 0, \tag{1.211}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{1,t} + (\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_1 + g_{11}\nabla\rho_1 + g_{12}\nabla\rho_2 + \nabla\left(\frac{(\nabla\rho_1)^2}{8\rho_1^2} - \frac{\Delta\rho_1}{4\rho_1}\right) = 0,\\ \mathbf{u}_{2,t} + (\mathbf{u}_2\nabla)\mathbf{u}_2 + g_{12}\nabla\rho_1 + g_{22}\nabla\rho_2 + \nabla\left(\frac{(\nabla\rho_2)^2}{8\rho_2^2} - \frac{\Delta\rho_2}{4\rho_2}\right) = 0.\end{aligned} \tag{1.212}$$

Эти уравнения описывают общий случай волновых движений в двухкомпонентном конденсате.

Теперь сделаем обычные для этой главы приближения. Будем считать, что все изменения переменных вдоль пространственных координат очень медленные: если L — характерное расстояние, на котором изменяются плотности и скорости течения (т.е. длина волны), то мы предполагаем, что L много больше длин корреляции (1.187) в обеих компонентах; при $g_{ij} \sim 1$ это предположение можно написать в наших безразмерных переменных в виде условия

$$L \gg 1. \tag{1.213}$$

Тогда каждое дифференцирование по пространственным координатам эквивалентно по порядку величины умножению на малый параметр $\sim 1/L$, и поэтому в главном приближении членами с высшими производными в (1.212) можно пренебречь. Если (кроме того) течение одномерное, т.е. все переменные зависят лишь от одной пространственной координаты x, то мы приходим к системе гидродинамических уравнений

$$\begin{aligned}&\rho_{1,t} + (\rho_1 u_1)_x = 0, \quad \rho_{2,t} + (\rho_2 u_2)_x = 0,\\ &u_{1,t} + u_1 u_{1,x} + g_{11}\rho_{1,x} + g_{12}\rho_{2,x} = 0,\\ &u_{2,t} + u_2 u_{2,x} + g_{12}\rho_{1,x} + g_{22}\rho_{2,x} = 0,\end{aligned} \tag{1.214}$$

совпадающих по существу с уравнениями (1.162), (1.163), описывающими динамику двухслойной мелкой воды. Вводя вектор переменных $\mathbf{u} =$

$= (\rho_1, \rho_2, u_1, u_2)^\top$, записываем систему (1.214) в матричном виде

$$\mathbf{u}_t + \mathbb{A}\mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \rho_2 \\ g_{11} & g_{12} & u_1 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 & u_2 \end{pmatrix}. \tag{1.215}$$

Предположим, что в невозмущенном состоянии конденсат покоится. Тогда вычисление характеристических скоростей, согласно уравнению $\det(\mathbb{A} - c\mathbb{I}) = 0$, дает выражение

$$c^2 = \frac{1}{2}\left\{ g_{11}\rho_1 + g_{22}\rho_2 \pm \sqrt{(g_{11}\rho_1 - g_{22}\rho_2)^2 + 4g_{12}^2\rho_1\rho_2} \right\}, \tag{1.216}$$

где опять под ρ_1, ρ_2 понимаются равновесные значения плотностей. В полной аналогии с теорий волн в двухслойной воде в двухкомпонентном конденсате могут распространяться волны двух типов с разными по величине скоростями, которые к тому же могут распространяться в противоположных направлениях. Снова для выяснения физического смысла разных типов волн вычислим отношение скоростей течения компонент в каждой моде:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{2g_{12}\rho_2}{-(g_{11}\rho_1 - g_{22}\rho_2) \pm \sqrt{(g_{11}\rho_1 - g_{22}\rho_2)^2 + 4g_{12}^2\rho_1\rho_2}},$$

При выборе верхнего знака в (1.216) это выражение положительно, т.е. компоненты движутся в одном направлении и колебания синфазные; при выборе же нижнего знака в (1.216) знаки скоростей компонент противоположные и компоненты движутся в противофазе. В первом случае волны называются звуковыми, поскольку качественно они соответствуют колебаниям плотности в звуковой волне в однокомпонентном конденсате. Во втором случае противофазных колебаний волна называется *волной поляризации*; в ней колебания плотностей компонент в некоторой степени компенсируют друг друга, приводя к уменьшению амплитуды колебаний суммарной плотности. Эта мода аналогична внутренним волнам в двухслойной воде.

Легко убедиться, что скорость волн поляризации действительна, т.е. выражение (1.216) с выбором нижнего знака положительно, если выполняется условие

$$g_{11}g_{22} > g_{12}^2. \tag{1.217}$$

Если знак этого неравенства противоположный, то конденсат неустойчив относительно нарастания амплитуды волны поляризации, что соответствует разделению конденсата на участки, содержащие компоненты лишь одного из сортов конденсата: это уже встречавшаяся нам в теории двухслойной жидкости неустойчивость Рэлея–Тейлора. Говорят, что при условии (1.217) компоненты конденсата *смешиваются*, а в случае противоположного неравенства они *не смешиваются*. Ясно, что рассмотренные здесь волны существуют лишь в конденсате со смешивающимися компонентами. Если в смешивающемся двухкомпонентном конденсате имеется относительное движение

компонент, то характеристические скорости могут быть найдены точно так же, как в теории двухслойной воды (см. уравнение (1.171)), и мы не будем останавливаться на деталях.

1.4. Заключение

В этой главе мы рассмотрели несколько физических систем, в которых возможно распространение звука. Задачи эти обсуждались в основном в таких приближениях, что соответствующие динамические уравнения совпали с обычными уравнениями газовой динамики. Полученные уравнения нелинейны, но обладают важным свойством: малые отклонения от равновесия распространяются с некоторой характерной скоростью, называемой скоростью звука. Наличие нескольких *характеристических* скоростей в системе приводит к естественному физическому следствию: начальное возмущение распадается с течением времени на несколько волн, каждая из которых распространяется со своей скоростью, что выражается наиболее наглядным образом формулой (1.112). Такие собственные *моды* волнового движения описываются соответствующими *нормальными координатами*, которые в этом случае называются *римановыми инвариантами*. Можно сказать, что если уравнения газовой динамики наиболее естественно формулировать в физических переменных плотности газа и скорости его течения, то для описания волнового движения более естественными переменными являются римановы инварианты. С дальнейшими аспектами теории распространения звуковых волн можно познакомиться по книгам [73, 81, 114].

В рассмотренных нами случаях постоянной скорости звука импульсы распространяются без искажения формы (в одномерном случае). На практике же пренебрегавшиеся пока эффекты нелинейности и дисперсии приводят к их искажению по мере распространения. Начнем мы изучение таких новых эффектов в следующей главе с обсуждения нелинейности.