2026 г. март — апрель *т. 81, вып. 2 (488)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.93

Классификация неособых потоков на ориентируемых 4-многообразиях

В. Д. Галкин, О. В. Починка

Настоящая работа посвящена изучению динамики регулярных четырехмерных потоков, их топологической классификации и взаимосвязи с топологией несущего многообразия. Регулярные потоки являются топологическими аналогами потоков Морса–Смейла. Их появление мотивировано двумя фактами: 1) существованием топологических многообразий размерности 4 и выше, не имеющих гладкой структуры; 2) развитием методов топологической классификации гладких систем, использующих чисто топологические свойства этих систем и поэтому позволяющих охватить и системы, не обладающие гладкостью. Описанные в работе топологические инварианты регулярных потоков с четырехмерным несущим многообразием существенным образом опираются на результаты трехмерной топологии, в частности теорию узлов. Благодаря этому для рассматриваемых классов систем удается получить законченные и просто формулируемые классификационные результаты.

Библиография: 61 название.

Ключевые слова: регулярные потоки, неособые потоки, топологическая классификация, топология несущего многообразия.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm10317

Содержание

1. Предварительные сведения о регулярных потоках 72
1.1. Определение 72
1.2. Энергетическая функция регулярных потоков 77
1.3. Неособые потоки 80
1.4. Обзор полученных в работе результатов 82
2. Вспомогательные топологические утверждения 83
2.1. Топологические конструкции 83
2.2. Узлы и поверхности в 3-многообразии 85
3. Динамика неособых 4-потоков 91
3.1. Локальная динамика 91
3.2. Глобальная динамика 97
3.3. Перестройка характеристической секущей 99

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

© В. Д. Галкин, О. В. Починка, 2026

4. Неособые 4-потоки с не более чем одной седловой орбитой 103
4.1. Потоки без седловых орбит 103
4.2. Потоки со скрученной седловой орбитой 106
4.3. Потоки с нескрученной седловой орбитой 109
4.3.1. Число отталкивающих орбит потока 114
4.3.2. Необходимые и достаточные условия эквивалентности потоков 116
4.3.3. Реализация потоков по абстрактной схеме 120
4.3.4. Топология несущего многообразия потоков 126
5. Классификация неособых 4-потоков без гетероклинических пересечений 128
5.1. Необходимые и достаточные условия эквивалентности потоков . 132
5.2. Реализация потоков по абстрактной схеме 134
6. Топология 4-многообразия, допускающего неособые потоки с седлами одинакового индекса Морса 135
6.1. Динамически упорядоченная фильтрация потока f^t 135
6.2. Перестройка 3-многообразия вдоль 2-тора 136
6.3. Топология многообразий фильтрации 138
6.4. Топология несущего многообразия 139
Список литературы 141

1. Предварительные сведения о регулярных потоках

1.1. Определение. Пусть M^n, $n \geqslant 2$, – связное замкнутое n-многообразие с метрикой d. Напомним, что *потоком* на многообразии M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство гомеоморфизмов $f^t\colon M^n \to M^n$ с групповыми свойствами:

1) $f^0(x) = x$ для любой точки $x \in M^n$;
2) $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

Траекторией или *орбитой* точки $x \in M^n$ относительно потока f^t называется множество $\mathcal{O}_x = \{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$, при этом орбита $\mathcal{O}_x$ называется

- *неподвижной точкой*, если $\mathcal{O}_x = \{x\}$;
- *периодической орбитой*, если существуют $0 < t_1 < t_2$ такие, что $f^{t_1}(x) \neq x$ и $f^{t_2}(x) = x$;
- *регулярной орбитой*, если $f^t(x) \neq x$ для любого $t \neq 0$.

Все траектории потока, отличные от неподвижной точки, считаются ориентированными в соответствии с возрастанием параметра t.

Потоки $f^t\colon M^n \to M^n$ и $f'^t\colon M'^n \to M'^n$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M'^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации.

Для определения гиперболичности неподвижных точек и периодических орбит топологического потока введем несколько стандартных обозначений.

Для $q \in \mathbb{N}$ положим

- $\mathbb{B}^q = \{(x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q\colon x_1^2 + \cdots + x_q^2 \leqslant 1\}$ – q-шар (диск);
- $\mathbb{S}^{q-1} = \partial\mathbb{B}^q$ – $(q-1)$-сфера;

- $\mathbb{B}^q \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ – косое произведение q-шара на окружность, т. е. многообразие, полученное из $\mathbb{B}^q \times [0,1]$ отождествлением шаров $\mathbb{B}^q \times \{0\}$ и $\mathbb{B}^q \times \{1\}$ в силу меняющего ориентацию гомеоморфизма;
- $\mathbb{S}^{q-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1 = \partial(\mathbb{B}^q \tilde{\times} \mathbb{S}^1)$ – косое произведение $(q-1)$-сферы на окружность.

Рассмотрим линейный поток $a_i^t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, заданный формулой

$$a_i^t(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (2^t x_1, \ldots, 2^t x_i, 2^{-t} x_{i+1}, \ldots, 2^{-t} x_n).$$

По построению начало координат $O(0, \ldots, 0)$ – неподвижная точка потока a_i^t. Положим

$$V_i = \{(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \cdots + x_i^2 \leqslant 1,\ x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\},$$
$$\Sigma_i^{\mathrm{u}} = \{(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \cdots + x_i^2 = 1,\ x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\},$$
$$\Sigma_i^{\mathrm{s}} = \{(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \cdots + x_i^2 \leqslant 1,\ x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Тогда окрестность V_i точки O является *n-мерной i-ручкой*

$$V_i \cong \mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{n-i}$$

с краем

$$\Sigma_i = \Sigma_i^{\mathrm{u}} \cup \Sigma_i^{\mathrm{s}} \cong \mathbb{S}^{n-1},$$

часть Σ_i^{u} которого называется *основанием ручки* V_i.

Неподвижная точка p топологического потока f^t называется *гиперболической*, если существуют ее окрестность $V_p \subset M^n$, число $i_p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и гомеоморфизм $H_p \colon V_{i_p} \to V_p$, осуществляющий эквивалентность потока $a_{i_p}^t\big|_{V_{i_p}}$ с потоком $f^t\big|_{V_p}$. Окрестность V_p называется *канонической*, ее граница Σ_p состоит из *основания* $\Sigma_p^{\mathrm{u}} = H_p(\Sigma_{i_p}^{\mathrm{u}})$ и множества $\Sigma_p^{\mathrm{s}} = H_p(\Sigma_{i_p}^{\mathrm{s}})$. Число i_p называется *индексом Морса* гиперболической точки p. Неподвижные точки индексов n и 0 называются *источниковыми* и *стоковыми* соответственно, индексов $0 < i_p < n$ – *седловыми* (см. рис. 1).

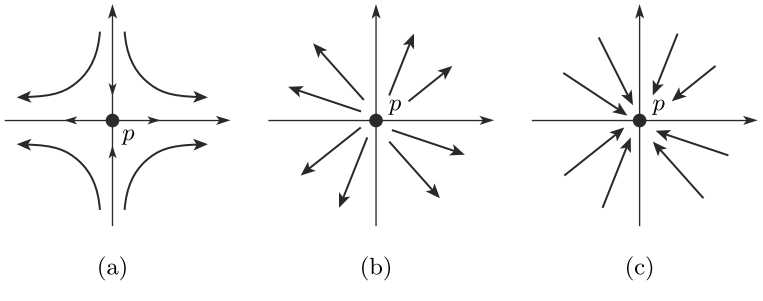

Рис. 1. Динамика в окрестности гиперболической неподвижной точки: (a) седловая точка; (b) источниковая точка; (c) стоковая точка.

Для определения гиперболичности периодической орбиты напомним определение надстройки. Пусть $a \colon M \to M$ – гомеоморфизм топологического многообразия M. Определим гомеоморфизм $g_a \colon M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ формулой

$$g_a(x, r) = (a(x), r - 1).$$

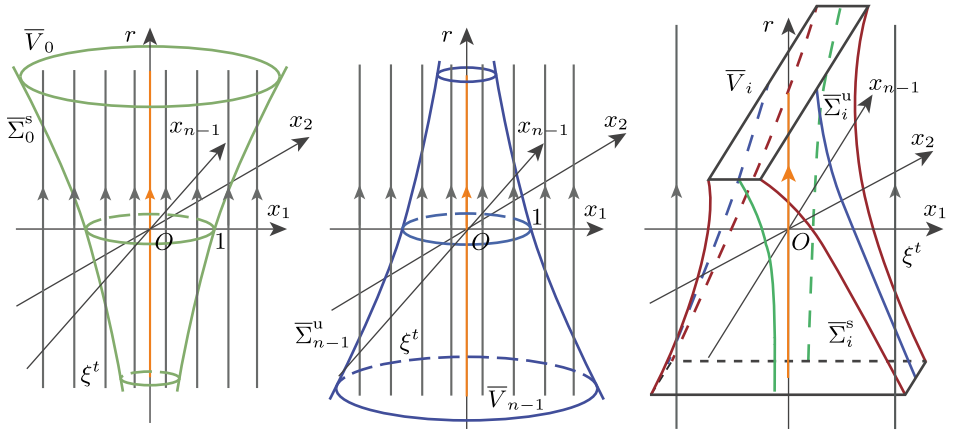

Рис. 2. Множества $\overline{V}_0$, $\overline{V}_{n-1}$ и $\overline{V}_i$, $0 < i < n-1$.

Тогда группа гомеоморфизмов $\{g_a^k\} \cong \mathbb{Z}$ действует свободно и разрывно[1] на $M \times \mathbb{R}$, в силу чего (см., например, [30]) пространство орбит $M_a = (M \times \mathbb{R})/g_a$ является топологическим многообразием, а естественная проекция

$$v_a \colon M \times \mathbb{R} \to M_a$$

– накрытием. При этом поток $\xi^t \colon M \times \mathbb{R} \to M^{n-1} \times \mathbb{R}$, заданный формулой

$$\xi^t(x, r) = (x, r + t),$$

индуцирует поток

$$[a]^t = v_a \xi^t v_a^{-1} \colon M_\varphi \to M_\varphi,$$

называемый *надстройкой над диффеоморфизмом* φ.

Для $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $\rho, \nu \in \{-1, +1\}$ определим диффеоморфизм $a_{i,\rho,\nu} \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ формулой

$$a_{i,\rho,\nu}(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n-1}) = \left(2\rho x_1, 2x_2, \dots, 2x_i, \frac{\nu x_{i+1}}{2}, \frac{x_{i+2}}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{2}\right). \tag{1}$$

Положим (см. рис. 2)

$$\overline{V}_i = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, r) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \colon x_1^2 + \dots + x_i^2 \leqslant 4^{-r},\ x_{i+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leqslant 4^r\}, \tag{2}$$

$$\overline{\Sigma}^{\mathrm{u}}_i = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, r) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \colon x_1^2 + \dots + x_i^2 = 4^{-r},\ x_{i+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leqslant 4^r\},$$

$$\overline{\Sigma}^{\mathrm{s}}_i = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, r) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \colon x_1^2 + \dots + x_i^2 \leqslant 4^{-r},\ x_{i+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 4^r\}$$

и

$$V_{i,\rho,\nu} = v_{a_{i,\rho,\nu}}(\overline{V}_i), \qquad \Sigma^{\mathrm{u}}_{i,\rho,\nu} = v_{a_{i,\rho,\nu}}(\overline{\Sigma}^{\mathrm{u}}_i), \qquad \Sigma^{\mathrm{s}}_{i,\rho,\nu} = v_{a_{i,\rho,\nu}}(\overline{\Sigma}^{\mathrm{s}}_i). \tag{3}$$

[1]Группа гомеоморфизмов G топологического пространства X *действует свободно* на X, если $g(x) \neq x$ для любых $x \in X$ и любого $g \in G$, $g \neq \mathrm{id}$. Группа G *действует разрывно* на X, если для любого компакта $K \subset X$ множество тех $g \in G$, для которых $g(K) \cap K \neq \varnothing$, конечно.

Тогда $\mathbb{O}_{i,\rho,\nu} = v_{a_{i,\rho,\nu}}(Or)$ – периодическая орбита потока $[a_{i,\rho,\nu}]^t$. Ее окрестность $V_{i,\rho,\nu}$ является *n-мерной круговой i-ручкой*

$$V_{i,\rho,\nu} \cong \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$$

с краем

$$\Sigma_{i,\rho,\nu} = \Sigma^{\mathrm{u}}_{i,\rho,\nu} \cup \Sigma^{\mathrm{s}}_{i,\rho,\nu} \cong \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1,$$

часть $\Sigma^{\mathrm{u}}_{i,\rho,\nu}$ которого называется *основанием круговой ручки* $V_{i,\rho,\nu}$. Если $\rho = 1$ (или $\rho = -1$), то круговая ручка $V_{i,\rho,\nu}$ называется *нескрученной* (соответственно *скрученной*). Обозначим через

$$\eta_{i,\rho,\nu} \colon \pi_1(V_{i,\rho,\nu}) \to \mathbb{Z} \tag{4}$$

эпиморфизм, ставящий в соответствие петле $c \subset V_{i,\rho,\nu}$ число ее оборотов вокруг ориентированной орбиты $\mathbb{O}$.

Периодическая орбита $\mathcal{O}$ топологического потока $f^t \colon M^n \to M^n$ называется *гиперболической*, если существуют ее окрестность $V_{\mathcal{O}} \subset M^n$, числа $i_{\mathcal{O}} \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\rho_{\mathcal{O}}, \nu_{\mathcal{O}} \in \{-1, +1\}$ и гомеоморфизм $H_{\mathcal{O}} \colon V_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}} \to V_{\mathcal{O}}$, осуществляющий эквивалентность потока $[a_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}}]^t$ с потоком $f^t\big|_{V_{\mathcal{O}}}$.

Окрестность $V_{\mathcal{O}}$ называется *канонической*, ее граница $\Sigma_{\mathcal{O}}$ состоит из *основания* $\Sigma^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}} = H_{\mathcal{O}}(\Sigma^{\mathrm{u}}_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}})$ и множества $\Sigma^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}} = H_{\mathcal{O}}(\Sigma^{\mathrm{s}}_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}})$. Число $i_{\mathcal{O}}$ называется *индексом Морса* гиперболической периодической орбиты $\mathcal{O}$. Периодические орбиты индексов Морса $n-1$ и 0 называются *отталкивающими* и *притягивающими* соответственно, периодические орбиты остальных индексов называются *седловыми*. Периодическая орбита называется *нескрученной* (*скрученной*), если ее каноническая окрестность гомеоморфна нескрученной (скрученной) круговой ручке. В канонической окрестности $V_{\mathcal{O}}$ периодической орбиты $\mathcal{O}$ определен эпиморфизм $\xi_{\mathcal{O}} \colon \pi_1(V_{\mathcal{O}}) \to \mathbb{Z}$ формулой

$$\xi_{\mathcal{O}} = \xi_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}} H^{-1}_{\mathcal{O}^*}.$$

Неподвижные точки и точки, принадлежащие периодическим орбитам потока f^t, составляют (но не исчерпывают в общем случае) цепно рекуррентное множество потока, определение которого приводится ниже.

ε-цепью длины T, соединяющей точку x с точкой y, для потока f^t называется последовательность точек $x = x_0, \ldots, x_n = y$, для которых существует последовательность времен $t_1, \ldots, t_n$ такая, что

$$d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon, \quad t_i \geqslant 1 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{и} \quad t_1 + \cdots + t_n = T$$

(см. рис. 3). Точка $x \in M^n$ называется *цепно рекуррентной* для потока f^t, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $T > 0$, зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε-цепь длины T, соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек называется *цепно рекуррентным множеством* и обозначается Ω_{f^t}, его компоненты связности называются *цепными компонентами*.

Топологический поток f^t называется *регулярным*, если его цепно рекуррентное множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа компонент связности – *цепных компонент*, каждая из которых является гиперболической неподвижной точкой

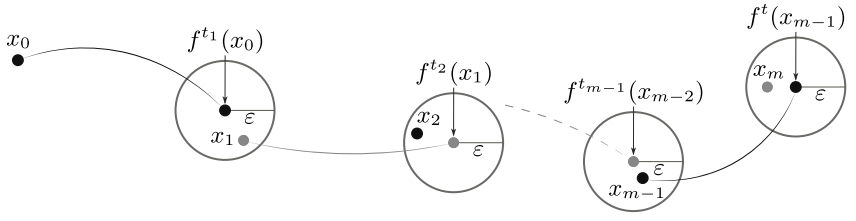

Рис. 3. ε-цепь длины T.

или гиперболической периодической орбитой. *Устойчивым* и *неустойчивым* многообразиями цепной компоненты C называются множества

$$W^{\mathrm{s}}_C = \Big\{ x \in M^n \colon \lim_{t\to+\infty} \min_{y\in C} d(y, f^t(x)) = 0 \Big\}$$

и

$$W^{\mathrm{u}}_C = \Big\{ x \in M^n \colon \lim_{t\to-\infty} \min_{y\in C} d(y, f^t(x)) = 0 \Big\}$$

соответственно. Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными*.

Гетероклиническим пересечением называется пересечение инвариантных многообразий различных седловых цепных компонент.

Динамика регулярных потоков близка по своим свойствам к динамике потоков Морса–Смейла. Их появление (см., например, [38], [21], [53], [54]) мотивировано двумя фактами:

1) существованием топологических многообразий размерности 4 и выше, не имеющих гладкой структуры;

2) развитием методов топологической классификации гладких систем, использующих чисто топологические свойства этих систем и поэтому позволяющих охватить и системы, не обладающие гладкостью. Аналогично потокам Морса–Смейла, на множестве $\{C_j\}$ цепных компонент регулярного потока $f^t\colon M^n \to M^n$ можно ввести отношение Смейла условием

$$C_j \prec C_{j'} \quad \Longleftrightarrow \quad W^{\mathrm{s}}_{C_j} \cap W^{\mathrm{u}}_{C_{j'}} \neq \varnothing \tag{5}$$

и доказать отсутствие *циклов* (см., например, [54; лемма 2]) – наборов попарно различных орбит $C_1, C_2, \ldots, C_m$, удовлетворяющих условию

$$C_1 \prec C_2 \prec \cdots \prec C_m \prec C_1.$$

Согласно теореме Шпильрайна [59] отношение (5) по транзитивности продолжается до отношения линейного порядка.

Утверждение 1 [54; теорема 1]. *Пусть $f^t\colon M^n \to M^n$ – регулярный поток с упорядоченным множеством цепно рекуррентных орбит $C_1 \prec \cdots \prec C_k$. Тогда*

1) *имеют место представления*

$$M^n = \bigcup_{j=1}^{k} W^{\mathrm{u}}_{C_j} = \bigcup_{j=1}^{k} W^{\mathrm{s}}_{C_j}; \tag{6}$$

2) *неустойчивое* W^{u}_p (*устойчивое* W^{s}_p) *многообразие неподвижной точки* $C_j = p$ *является топологическим подмногообразием многообразия* M^n *таким, что*

$$W^{\mathrm{u}}_p \cong \mathbb{R}^{i_p} \quad (W^{\mathrm{s}}_p \cong \mathbb{R}^{n-i_p}); \tag{7}$$

3) *неустойчивое* $W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}}$ (*устойчивое* $W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}}$) *многообразие периодической орбиты* $C_j = \mathcal{O}$ *является топологическим подмногообразием многообразия* M^n *таким, что*

$$\begin{aligned} &W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}} \cong \mathbb{R}^{i_{\mathcal{O}}} \times \mathbb{S}^1 \quad (W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}} \cong \mathbb{R}^{n-i_{\mathcal{O}}-1} \times \mathbb{S}^1), && \rho_{\mathcal{O}} = +1 \quad (\nu_{\mathcal{O}} = +1),\\ &W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}} \cong \mathbb{R}^{i_{\mathcal{O}}} \,\tilde{\times}\, \mathbb{S}^1 \quad (W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}} \cong \mathbb{R}^{n-i_{\mathcal{O}}-1} \,\tilde{\times}\, \mathbb{S}^1), && \rho_{\mathcal{O}} = -1 \quad (\nu_{\mathcal{O}} = -1); \end{aligned} \tag{8}$$

4) *справедливы соотношения*

$$\mathrm{cl}(W^{\mathrm{u}}_{C_j}) \setminus W^{\mathrm{u}}_{C_j} \subset \bigcup_{l=1}^{j-1} W^{\mathrm{u}}_{C_l}, \qquad \mathrm{cl}(W^{\mathrm{s}}_{C_j}) \setminus W^{\mathrm{s}}_{C_j} \subset \bigcup_{l=j+1}^{k} W^{\mathrm{s}}_{C_l}. \tag{9}$$

1.2. Энергетическая функция регулярных потоков. *Функцией Ляпунова* для потока называется непрерывная функция, которая убывает вдоль орбит вне цепно рекуррентного множества и является константой на каждой цепной компоненте. В силу результатов Ч. Конли [12] такая функция существует для любой (в частности, непрерывной) динамической системы, а сам факт существования носит название “фундаментальная теорема динамических систем” (см., например, [55; гл. IX, теорема 1.1]). Из конструкции Конли следует, что любая функция Ляпунова $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$ для регулярного потока f^t имеет критические точки на цепно рекуррентном множестве в смысле следующего определения.

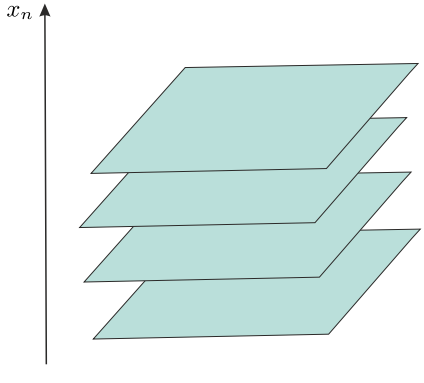

Рис. 4. Линии уровня функции φ в окрестности регулярной точки.

Пусть $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Точка $p \in M^n$ называется *регулярной точкой* функции φ (см. рис. 4), если в точке p существует локальная карта (V_p, ϕ_p) такая, что

$$\varphi\phi_p^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(p) + x_n.$$

В противном случае p называется *критической точкой*. Обозначим через Cr_φ множество критических точек функции φ.

Естественно ожидать, что свойство строгого убывания функции Ляпунова вне цепно рекуррентного множества приводит к отсутствию там критических точек. Однако это не верно для произвольных динамических систем. Поэтому функцию Ляпунова, чье множество критических точек совпадает с цепно рекуррентным множеством динамической системы, называют *энергетической функцией*.

Неподвижные точки регулярных потоков являются невырожденными критическими точками их функции Ляпунова. А именно, точка $p \in \mathrm{Cr}_\varphi$ называется *невырожденной критической точкой индекса* $i_p \in \{0, 1, \dots, n\}$ (см. рис. 5), если в точке p существует локальная карта (V_p, ϕ_p) такая, что

$$\varphi\phi_p^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \varphi(p) - \sum_{j=1}^{i_p} x_j^2 + \sum_{j=i_p+1}^{n} x_j^2.$$

Функция φ называется *непрерывной функцией Морса*, если множество Cr_φ состоит из невырожденных критических точек.

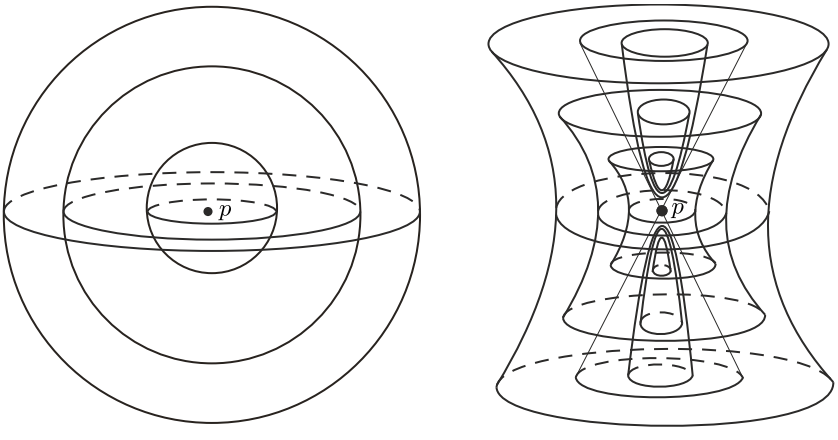

Рис. 5. Линии уровня функции φ в окрестности невырожденной критической точки p.

Связное топологическое подмногообразие $C \subset \mathrm{Cr}_\varphi$, $\dim C = k \in \{1, \dots, n-1\}$, многообразия M^n называется *невырожденным критическим k-многообразием* (см. рис. 6) *индекса* $i_C \in \{0, 1, \dots, n-k\}$ (см., например, [24]), если в любой точке $p \in C$ существует локальная карта (V_p, ϕ_p) такая, что

$$\phi_p(V_p \cap C) \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 = \dots = x_{n-k} = 0\}$$

и

$$\varphi\phi_p^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \varphi(p) - \sum_{j=1}^{i_C} x_j^2 + \sum_{j=i_C+1}^{n-k} x_j^2.$$

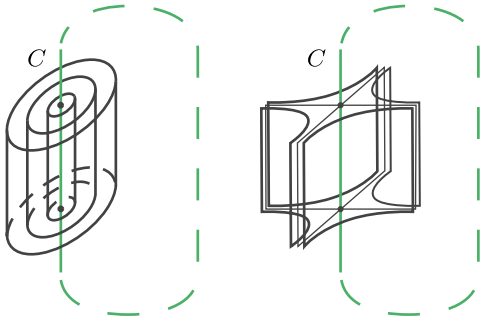

Рис. 6. Линии уровня функции φ в окрестности невырожденного критического 1-многообразия.

Функция φ называется *непрерывной функцией Морса–Ботта*, если любая компонента связности множества Cr_φ либо является невырожденной критической точкой, либо принадлежит невырожденному критическому многообразию.

Утверждение 2 [54; теорема 2]. *Любой регулярный поток $f^t\colon M^n \to M^n$ обладает непрерывной энергетической функцией Морса–Ботта $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$, критические точки которой либо невырождены и имеют тот же индекс, что и соответствующая неподвижная точка, либо образуют невырожденные одномерные многообразия и имеют тот же индекс, что и соответствующая периодическая орбита. Более того, для любого фиксированного порядка $C_1 \prec \cdots \prec C_k$ цепных компонент потока f^t функцию φ можно построить так, чтобы выполнялись равенства $\varphi(C_j) = j$.*

Пусть $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$ – энергетическая функция Морса–Ботта регулярного потока $f^t\colon M^n \to M^n$ такая, что $\varphi(\mathcal{O}_j) = j$ для упорядоченных периодических орбит $\mathcal{O}_1 \prec \cdots \prec \mathcal{O}_k$. Для $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ положим

$$M_j = \varphi^{-1}\left(\left(1, j + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Из свойств функции Морса–Ботта [9], [2] следует, что фильтрация

$$\varnothing = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{k-1} \subset M_k = M^n \tag{10}$$

является разложением многообразия M^n на ручки таким, что

$$M_j \cong M_{j-1} \cup_{\psi_j} V_{C_j}, \tag{11}$$

где $\psi_j\colon \Sigma^{\mathrm{u}}_{C_j} \to \partial M_{j-1}$ – некоторое вложение.

Следствие 1. *Пусть f^t – регулярный поток на замкнутом четырехмерном многообразии M^4. Тогда M^4 допускает гладкую структуру.*

Доказательство. Пусть $C_1, \ldots, C_k$ – компоненты связности цепно рекуррентного множества регулярного потока $f^t\colon M^4 \to M^4$. В силу утверждения 2

поток f^t обладает такой энергетической функцией Морса–Ботта $\varphi\colon M^4 \to \mathbb{R}$, что $\varphi(C_j) = j$. Для $j \in \{1, \dots, k-1\}$ положим

$$M_j = \varphi^{-1}\left(1, j + \frac{1}{2}\right).$$

Из определения непрерывной функции Морса–Ботта следует, что

$$\varnothing = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{k-1} \subset M_k = M^4$$

и граница каждого множества M_j является трехмерным подмногообразием многообразия M^4. Кроме того, замыкание множества $M_{j+1} \setminus M_j$ гомеоморфно канонической окрестности V_{C_j}, а значит, гомеоморфно одному из многообразий $\mathbb{B}^4$, $\mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$. Поскольку перечисленные многообразия являются сглаживаемыми, то многообразие M^4 получено склейкой гладких компактных многообразий

$$M^4 = M_1 \cup \operatorname{cl}(M_2 \setminus M_1) \cup \cdots \cup \operatorname{cl}(M_k \setminus M_{k-1})$$

по некоторым гомеоморфизмам на их трехмерных границах. В силу [42] любой гомеоморфизм трехмерного многообразия может быть аппроксимирован диффеоморфизмом, который ему изотопен. Поскольку склейка двух многообразий по изотопным гомеоморфизмам дает гомеоморфные многообразия, то, заменяя приклеивающие гомеоморфизмы на изотопные им диффеоморфизмы, мы получим гладкую копию многообразия M^4. Следствие доказано.

1.3. Неособые потоки. Регулярный поток $f^t\colon M^n \to M^n$ называется *неособым*, если его цепно рекуррентное множество не содержит неподвижных точек. Неблуждающее множество такого потока состоит из конечного числа периодических гиперболических орбит. В силу теоремы Лефшеца–Хопфа [57] эйлерова характеристика $\chi(M^n)$ многообразия M^n, допускающего неособый поток, равна нулю. Таким образом, из двумерных поверхностей лишь тор и бутылка Клейна допускают неособые потоки.

Гладкими аналогами неособых потоков являются так называемые *НМС-потоки* – потоки Морса–Смейла без неподвижных точек (см., например, обзор [22]). Для неособых потоков Морса–Смейла это условие является также достаточным во всех размерностях, кроме 3 [2]. Дж. Морган [41] доказал, что

(i) простое 3-многообразие допускает НМС-поток тогда и только тогда, когда оно является граф-многообразием (многообразием, полученным склейкой многообразий Зейферта по граничным торам);

(ii) любое 3-многообразие допускает НМС-поток после взятия связной суммы его и конечного числа копий многообразия $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$;

(iii) связная сумма $M_1 \# \cdots \# M_k$ неприводимых 3-многообразий допускает НМС-поток тогда и только тогда, когда его допускает каждая компонента M_i.

Непосредственно отсюда, например, следует, что никакое гиперболическое замкнутое 3-многообразие не допускает неособых потоков.

В 1978 г. Дж. Френкс [14], используя неравенства Морса–Ботта (см., например, [58]), получил для некоторых классов неособых потоков следующие неравенства в форме необходимых и достаточных условий их существования, с предписанным набором периодических траекторий.

Утверждение 3 [14; теорема A]. *Пусть k_i – число нескрученных круговых i-ручек в разложении* (10) *и $\beta_i = \dim H_i(M^n, \mathbb{Q})$. Тогда*

(a) $k_0 \geqslant \beta_0$, $k_i \geqslant \beta_i - \beta_{i-1} + \cdots \pm \beta_0$, $i \geqslant 1$;

(b) $k_1 \geqslant k_0 - 1$, $k_{n-2} \geqslant k_{n-1} - 1$;

(c) *если $k_{i-1} = k_{i+1} = 0$ и $\beta_i - \beta_{i-1} + \cdots \pm \beta_0 \leqslant 0$, то $k_i = 0$.*

Утверждение 4 [14]. *Пусть M^n, $n \geqslant 6$, – односвязное многообразие, имеющее нулевую эйлерову характеристику и группы $H_*(M^n, \mathbb{Z})$ без кручений. Тогда для любого набора неотрицательных чисел $\{k_i\}$, удовлетворяющих условиям* (a)–(c) *утверждения* 3, *на M^n существует неособый поток без скрученных периодических траекторий и с k_i нескрученными периодическими траекториями для любого $i \geqslant 0$.*

В работе [14] получены также необходимые и достаточные условия существования неособого потока на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ с предписанным набором периодических траекторий.

Утверждение 5 [14]. *На трехмерной сфере существует неособый поток с предписанным набором (k_0, k_1, k_2) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

$$k_0 \geqslant 1, \quad k_2 \geqslant 1, \quad k_1 \geqslant k_0 - 1, \quad k_1 \geqslant k_2 - 1.$$

При этом число скрученных периодических траекторий индекса Морса 1 *может быть произвольным.*

Классификация двумерных НМС-потоков следует, например, из результатов работ М. Пейшото, А. А. Ошемкова, В. В. Шарко, Д. С. Малышева, В. Е. Круглова, О. В. Починки [47], [46], [32]. Необходимые и достаточные условия эквивалентности трехмерных НМС-потоков, хотя бы одно инвариантное многообразие каждой седловой орбиты которых не участвует в гетероклиническом пересечении, следуют из работы Я. Л. Уманского [60]. Однако полученные в [60] результаты не позволяют судить о допустимости того или иного потока на данном многообразии. В случае малого числа периодических орбит исчерпывающая классификация трехмерных НМС-потоков следует из работ Б. Ю, О. В. Починки, Д. Д. Шубина [61], [50]–[52]. В частности, из результатов этих работ вытекает, что несущее 3-многообразие неособого потока с не более чем одной седловой орбитой гомеоморфно либо линзовому пространству, либо связной сумме линзовых пространств, либо малому многообразию Зейферта.

В работе О. В. Починки, Д. Д. Шубина [50] получена полная топологическая классификация n-мерных ($n > 3$) НМС-потоков в точности с двумя периодическими орбитами. Установлено, что несущее многообразие таких потоков

гомеоморфно косому или прямому произведению сфер $\mathbb{S}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ или $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и каждое такое многообразие допускает в точности два класса эквивалентности рассматриваемых потоков.

1.4. Обзор полученных в работе результатов. В настоящей работе рассмотрен класс неособых потоков на замкнутых связных ориентируемых четырехмерных многообразиях.

- Доказано, что любой неособый 4-поток имеет динамику "аттрактор–репеллер", где топологическая размерность каждого не превышает 2, а траектории в их общем бассейне имеют глобальную секущую, являющуюся замкнутым 3-многообразием (теорема 1).

Установлено, что в случае отсутствия гетероклинических пересечений инвариантные многообразия седловых орбит пересекают глобальную секущую вдоль двумерных торов и бутылок Клейна, составляющих схему потока.

- Доказано, что класс эквивалентности схемы является полным инвариантом неособого 4-потока без гетероклинических пересечений (теорема 7).
- Выделено множество абстрактных схем, по каждой из которых построен стандартный представитель в классе топологической эквивалентности рассматриваемых потоков (теорема 8).

Для неособых 4-потоков, имеющих не более чем одну седловую орбиту, удалось найти полный инвариант топологической эквивалентности в виде узла, вложенного в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и индуцированного вложением двумерного многообразия седловой орбиты в несущее пространство. Этот факт позволил установить число классов топологической эквивалентности таких потоков и описать топологию их несущих многообразий.

- Доказано, что ориентируемое несущее многообразие любого неособого 4-потока не более чем с одной седловой орбитой гомеоморфно $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. При этом существует в точности два класса эквивалентности потоков без седловых орбит, восемь классов эквивалентности – с одной скрученной орбитой и бесконечно много – с одной нескрученной орбитой (теоремы 2–4 и 6).
- По любому узлу в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ реализован неособый 4-поток, инвариантное многообразие седловой орбиты является дико вложенным в случае нетривиального узла (теорема 5).

Частным случаем рассматриваемых в работе потоков являются надстройки над сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами Морса–Смейла, определенными на 3-многообразии и имеющими седла с одинаковым индексом Морса. Согласно теореме 3 из [45] такие диффеоморфизмы существуют только на 3-сфере. Как и можно было ожидать, настройки над такими диффеоморфизмами являются потоками, заданными на многообразии $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. Однако не каждый неособый поток является надстройкой над диффеоморфизмом. Удивительным результатом настоящей работы является доказательство следующего факта.

- Установлено, что любое ориентируемое многообразие, которое допускает неособый 4-поток с седловыми орбитами одинакового индекса Морса, гомеоморфно $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ (теорема 9).

2. Вспомогательные топологические утверждения

2.1. Топологические конструкции. Для любого непрерывного отображения $h\colon X \to Y$ из топологического пространства X в топологическое пространство Y будем обозначать через[2] $h_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ *индуцированный им гомоморфизм*.

C^r*-вложением* ($r \geqslant 0$) многообразия X в многообразие Y называется отображение $e\colon X \to Y$ такое, что $e(X)$ есть C^r-подмногообразие в Y и $e\colon X \to e(X)$ есть C^r-диффеоморфизм. C^0-вложение называют также *топологическим вложением*.

Топологическое вложение $e\colon X \to Y$ k-многообразия X в n-многообразие Y ($k \leqslant n$) называется *локально плоским в точке* $e(x)$, $x \in X$, если точка $e(x)$ принадлежит такой карте (U, ψ) многообразия Y, что

$$\psi(U \cap e(X)) = \mathbb{R}^k,$$

где $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ – множество точек, у которых последние $n-k$ координат равны 0, или

$$\psi(U \cap e(X)) = \mathbb{R}^k_+,$$

где $\mathbb{R}^k_+ \subset \mathbb{R}^k$ – множество точек, у которых последняя координата неотрицательна. Вложение $e\colon X \to Y$ называется *локально плоским*, а многообразие $e(X)$ – *локально плоско вложенным в* Y (k-*подмногообразием*), если e является локально плоским в каждой точке $e(x)$, $x \in X$. В противном случае вложение e называется *диким*, а многообразие $e(X)$ – *дико вложенным*. Любая точка $e(x)$, в которой отображение e не является локально плоским, называется *точкой дикости*.

Вложения e, e' называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $E\colon X \times [0,1] \to Y$ такое, что

$$E(x,0) = e(x) \quad \text{и} \quad e(x,1) = e'(x) \quad \text{для любого } x \in X.$$

Если при этом $E\big|_{X\times\{t\}}$ – вложение для любого $t \in [0,1]$, то вложения называются *изотопными*.

Трубчатой окрестностью компактного k-подмногообразия Z в n-многообразии Y называется компактное подмногообразие $N(Z) \subset Y$, содержащее Z и оснащенное непрерывным отображением $j\colon N(Z) \to Z$ таким, что для любой точки $z \in Z$ существуют окрестность $U \ni z$ и гомеоморфизм $\phi_U\colon U \times \mathbb{B}^{n-k} \to j^{-1}(U)$ такие, что

$$j(\phi_U(u,d)) = u$$

(см. рис. 7).

Пусть X и Y – топологические пространства, $A \subset X$, $B \subset Y$ и $g\colon A \to B$ – гомеоморфизм. Пусть $\sim$ обозначает минимальное отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, для которого $a \sim g(a)$ при всех $a \in A$. Факторпространство по этому отношению эквивалентности обозначается

$$X \cup_g Y$$

[2]Поскольку рассматриваемые в рамках статьи фундаментальные группы являются коммутативными, мы не пишем отмеченную точку.

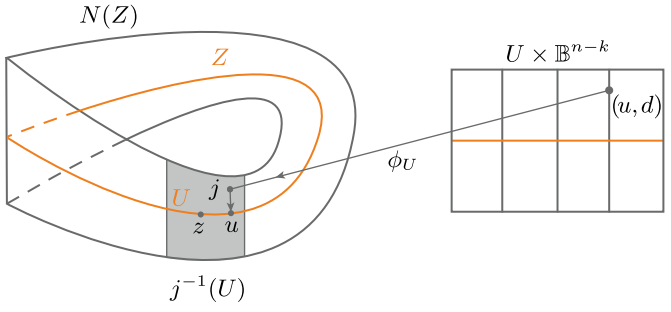

Рис. 7. Трубчатая окрестность подмногообразия Z.

и называется топологическим пространством, полученным *склеиванием* многообразий X, Y в силу гомеоморфизма g.

Утверждение 6 [18; лемма 4]. *Пусть выполнены следующие условия*:

- X – *компактное* $(n+1)$*-многообразие с непустым краем* ∂X;
- $Y \subset \partial X$ – *компактное* n*-многообразие*;
- $g\colon Y \to Y \times \{0\}$ – *гомеоморфизм*;
- $W = X \cup_g (Y \times [0,1])$.

Тогда многообразие W *гомеоморфно многообразию* X.

Пусть X, Y – ориентированные n-многообразия, $e_1\colon \mathbb{B}^n \to X$ и $e_2\colon \mathbb{B}^n \to Y$ – локально плоские вложения n-шара $\mathbb{B}^n$ такие, что

$$B_1 = e_1(\mathbb{B}^n) \subset \operatorname{int} X \quad \text{и} \quad B_2 = e_2(\mathbb{B}^n) \subset \operatorname{int} Y$$

(для многообразия X под $\operatorname{int} X$ мы понимаем внутренние точки многообразия X). Пусть $g\colon \partial B_1 \to \partial B_2$ – гомеоморфизм такой, что отображение

$$e_2^{-1} g e_1\big|_{\partial \mathbb{B}^n} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$$

меняет ориентацию. Многообразие

$$X \# Y = (X \setminus \operatorname{int} B_1) \cup_g (Y \setminus \operatorname{int} B_2)$$

называется *связной суммой* многообразий X, Y (см. рис. 8).

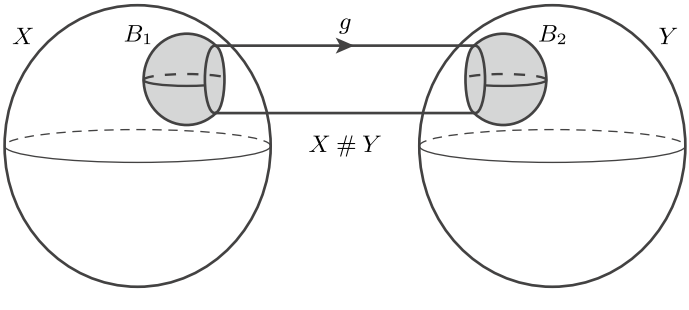

Рис. 8. Связная сумма многообразий.

Утверждение 7 [11]. *Пусть* Λ *– сфера размерности* $n-1$, *локально плоско вложенная во внутренность* n*-многообразия. Тогда*

$$N(\Lambda) \cong \mathbb{S}^{n-1} \times [-1,1] \quad \textit{при} \quad n \geqslant 3.$$

Утверждение 8 [10]. *Пусть* Λ *– сфера размерности* $n-1$, *локально плоско вложенная в* $\mathbb{S}^n$. *Тогда многообразие* $\mathbb{S}^n \setminus \operatorname{int} N(\Lambda)$ *состоит из двух* n*-шаров при* $n \geqslant 2$.

Утверждение 9 [26; теорема 1.5], [37]. *Пусть* Λ *есть* $(n-1)$*-сфера, локально плоско вложенная во внутренность ориентированного связного* n*-многообразия* X, $\overline{X} = X \setminus \operatorname{int} N(\Lambda)$ *и*

$$\widetilde{X} = (\mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^0) \cup_g \overline{X}$$

для некоторого гомеоморфизма $g\colon \partial\mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^0 \to \partial N(\Lambda)$. *Тогда*

1) *если* $\overline{X}$ *связно, то* $\widetilde{X}$ *связно и* $X \cong \widetilde{X} \# (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ *(см. рис.* 9*);*
2) *если* $\overline{X}$ *не связно, то многообразие* $\widetilde{X}$ *состоит из двух компонент связности* $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ *и* $X \cong \widetilde{X}_1 \# \widetilde{X}_2$.

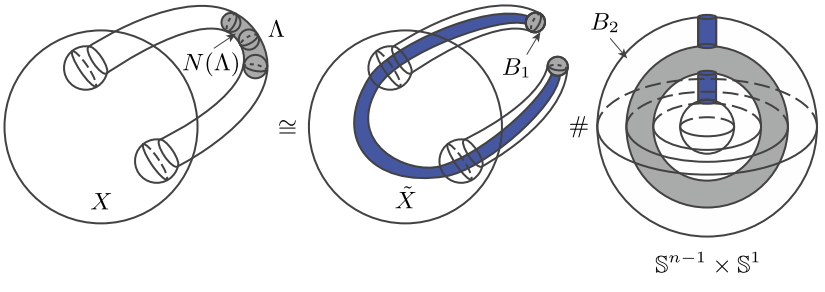

Рис. 9. Иллюстрация к пункту 1) утверждения 9 (одинаковыми цветами закрашены гомеоморфные части многообразий).

Утверждение 10 [13; теоремы 15, 16]. *Гомеоморфизмы* $\psi_0, \psi_1\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *изотопны тогда и только тогда, когда они оба сохраняют (или оба меняют) ориентацию сферы.*

Следствие 2. *Пусть* $\psi_0, \psi_1\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *– любые сохраняющие (меняющие) ориентацию гомеоморфизмы. Тогда существует гомеоморфизм* $\Psi\colon \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n \times [0,1]$ *такой, что*

$$\Psi(s,i) = (\psi_i(s), i), \qquad i = 0,1, \quad s \in \mathbb{S}^n.$$

2.2. Узлы и поверхности в 3-многообразии. Напомним, что *узлом* в многообразии M^3 называется вложение $e\colon \mathbb{S}^1 \to M^3$ или его образ $L = e(\mathbb{S}^1)$. Всюду ниже рассматриваются локально плоские узлы.

Следуя [31], [56], будем называть узлы $L, L' \subset M^3$ *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M^3 \to M^3$ такой, что $h(L) = L'$.

Узел $L \subset \mathbb{S}^3$ называется *тривиальным*, если он эквивалентен узлу $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$. Узел, не являющийся тривиальным, называется *нетривиальным*.

Утверждение 11 [39; теорема 6.1]; [4; теоремы 7, 8]; [33; теорема 7.3]. *Любой локально плоский узел $L \subset M^3$ эквивалентен гладкому узлу.*

Следствие 3. *У любого узла L, локально плоско вложенного в ориентируемое многообразие M^3, существует трубчатая окрестность $N(L) \subset M^3$, гомеоморфная полноторию $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

Положим $\mathbb{V} = \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ и напомним, что *меридианом* полнотория (заполненного тора) $\mathbb{V}$ называется узел, гомотопный на $\partial\mathbb{V}$ узлу $\partial\mathbb{B}^2 \times \{s\}$, $s \in \mathbb{S}^1$. Границей полнотория $\mathbb{V}$ является двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Утверждение 12 [56]. *Гомеоморфизм $g\colon \partial\mathbb{V} \to \partial\mathbb{V}$ продолжается до гомеоморфизма $g\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда h переводит некоторый меридиан заполненного тора $\mathbb{V}$ в меридиан того же заполненного тора $\mathbb{V}$.*

Утверждение 13 [5]. *Пусть $g\colon \partial\mathbb{V} \to \partial\mathbb{V}$ – гомеоморфизм. Тогда*

$$\mathbb{V} \cup_g \mathbb{V} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$$

в том и только том случае, когда g переводит некоторый меридиан заполненного тора $\mathbb{V}$ в меридиан заполненного тора $\mathbb{V}$.

Многомерный вариант утверждения 13 имеет следующий вид.

Утверждение 14 [35]. *Любой гомеоморфизм $g\colon \partial\mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^1 \to \partial\mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^1$, $n > 2$, продолжается до гомеоморфизма $g\colon \mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^1$ и*

$$(\mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^1) \cup_g (\mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1.$$

Пусть $L \subset \mathbb{S}^3$ – узел, $N(L)$ – его трубчатая окрестность и $g\colon \partial\mathbb{V} \to \partial N(L)$ – гомеоморфизм. Говорят, что многообразие

$$\mathbb{S}^3_{L,g} = (\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} N(L)) \cup_g \mathbb{V}$$

получено *хирургией Дэна* вдоль зацепления L. Хирургия Дэна, при которой меридиан полнотория $\mathbb{V}$ приклеивается к меридиану трубчатой окрестности узла L, называется *тривиальной*, поскольку в этом случае $\mathbb{S}^3_{L,g} \cong \mathbb{S}^3$ в силу утверждения 12. В противном случае хирургия Дэна называется *нетривиальной*.

Утверждение 15 [20; теоремы 2, 3]; [15; замечание, следствие 8.3]. *Пусть $\mathbb{S}^3_{L,g}$ – многообразие, полученное нетривиальной хирургией Дэна вдоль нетривиального узла L. Тогда $\mathbb{S}^3_{L,g}$ не гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^3$ и не гомеоморфно многообразию вида $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \# M^3$.*

Утверждение 16 [6; лемма 3.1]. *Пусть Λ – двумерная сфера, локально плоско вложенная в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда для сферы Λ реализуются ровно две возможности*:

1) *множество $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N(\Lambda)$ состоит из двух компонент связности, в точности одна из которых гомеоморфна трехмерному шару*;
2) $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N(\Lambda) \cong \mathbb{S}^2 \times [0,1]$.

В случае 2) двумерная сфера $\Lambda \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ называется *несжимаемой*.

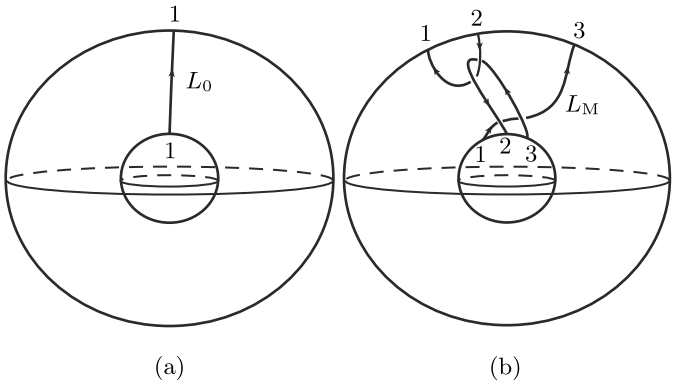

Рис. 10. Пример нетривиального узла Хопфа.

Узел $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, гомотопный стандартному узлу $L_0 = \{x\} \times \mathbb{S}^1$, называется *узлом Хопфа*. Узел Хопфа, изотопный узлу L_0, называется *тривиальным*. На рис. 10 изображен узел Мазура, являющийся нетривиальным хопфовским узлом [36]. Из результатов работы [1] следует, что узел Хопфа тривиален тогда и только тогда, когда он эквивалентен стандартному узлу.

Утверждение 17 [1; лемма 1], [23; лемма 4.3]. *Узел $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ является тривиальным тогда и только тогда, когда существует несжимаемая 2-сфера $\Lambda \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, пересекающая узел L в единственной точке.*

Утверждение 18 [40]. *Пусть T – двумерный тор, локально плоско вложенный в ориентируемое 3-многообразие. Тогда*

$$N(T) \cong \mathbb{T}^2 \times [-1, 1].$$

Утверждение 19 [43]. *Пусть T – двумерный тор, локально плоско вложенный в многообразие $\mathbb{S}^3$. Тогда множество $\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} N(T)$ состоит из двух компонент связности, хотя бы одна из которых гомеоморфна заполненному тору $\mathbb{V}$.*

Будем говорить, что локально плоский двумерный тор T *гомотопически тривиально* (*нетривиально*) вложен в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, если

$$\iota_{T*}(\pi_1(T)) = 0 \quad (\iota_{T*}(\pi_1(T)) \neq 0)$$

для отображения включения $\iota_T \colon T \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Утверждение 20 [6; теорема 4]. *Пусть T – двумерный тор, гомотопически нетривиально вложенный в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда множество $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N(T)$ состоит из двух компонент связности, хотя бы одна из которых гомеоморфна заполненному тору $\mathbb{V}$.*

Лемма 1. *Пусть гомотопически тривиально вложенный в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ двумерный тор T не ограничивает заполненный тор. Тогда существует несжимаемая 2-сфера $\Lambda \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, не пересекающаяся с тором T.*

Доказательство. Поскольку $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$, а $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, то отображение $\iota_{T*}\colon \pi_1(T) \to \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ не инъективно. Тогда согласно лемме 6.1 из [27] существуют нестягиваемый узел $c \subset T$ и локально плоско вложенный 2-диск $D \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такие, что $D \cap T = \partial D = c$. По построению граница множества $N(T) \cup N(D)$ состоит из 2-сферы Λ_0 и 2-тора T_0 (см. рис. 11, 12), при этом $\Lambda_0 \cap T = \varnothing$.

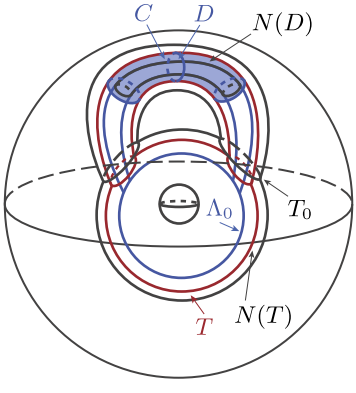

Рис. 11. Несжимаемая 2-сфера Λ_0.

Если сфера Λ_0 несжимаема в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см. рис. 11), то лемма доказана. В противном случае в силу утверждения 16 сфера Λ_0 ограничивает 3-шар B_0. Поскольку тор T не ограничивает заполненный тор, то $T \subset B_0$ и Λ – любая несжимаемая 2-сфера, не пересекающаяся с B_0 (см. рис. 12). Лемма доказана.

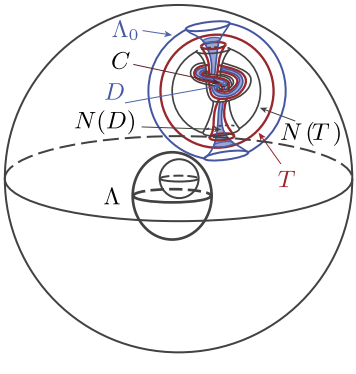

Рис. 12. Сжимаемая 2-сфера Λ_0.

Лемма 2. *Пусть T – гомотопически тривиально вложенный в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ двумерный тор. Тогда для тора T реализуется в точности одна из следующих возможностей*:

1) *множество $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N(T)$ состоит из двух компонент связности, в точности одна из которых гомеоморфна заполненному тору $\mathbb{V}$;*
2) *множество $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N(T)$ связно и гомеоморфно многообразию $(\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} N(L)) \# \mathbb{V}$, где $L \subset \mathbb{S}^3$ – некоторый узел*;

3) *множество* $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N(T)$ *состоит из двух компонент связности, одна из которых гомеоморфна многообразию* $\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} N(L)$, *где* $L \subset \mathbb{S}^3$ – *нетривиальный узел, а другая – многообразию* $\mathbb{V} \# (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$.

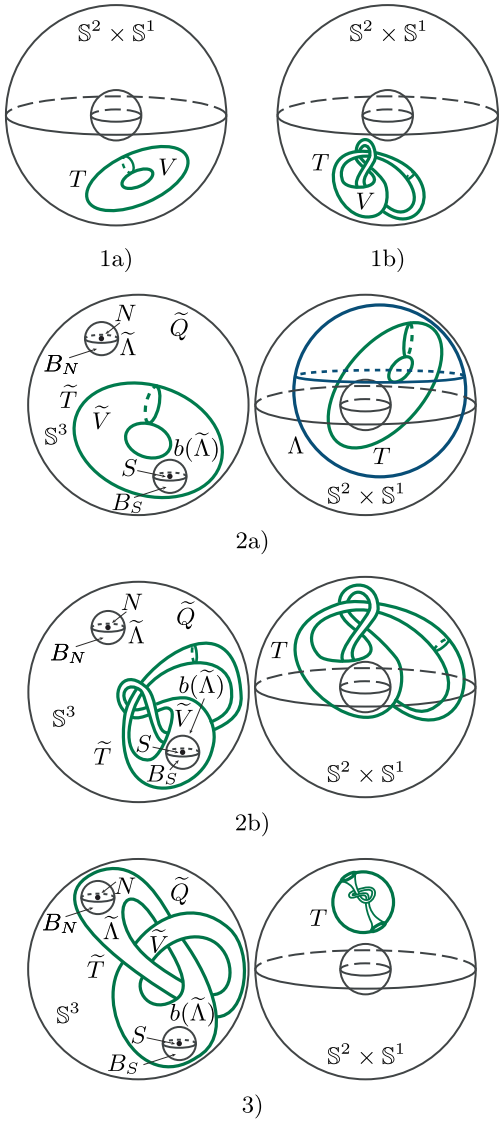

Рис. 13. Вложения гомотопически тривиального 2-тора в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Доказательство. Если тор T ограничивает заполненный тор, то для него реализуется ситуация 1) – см. 1a), 1b) на рис. 13. В противном случае в силу леммы 1 существует несжимаемая 2-сфера $\Lambda \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, не пересекающаяся с тором T. Представим $\mathbb{S}^3$ как компактификацию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ северным N и южным S

полюсами. Определим проекцию $p\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ формулой

$$p(s, r) = (s, r \,(\mathrm{mod}\, 1)). \tag{12}$$

Тогда многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ является пространством орбит действия на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ группы диффеоморфизмов $\{b^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, где диффеоморфизм $b\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ задается формулой

$$b(s, r) = (s, r - 1).$$

Обозначим через $\widetilde{\Lambda} \subset \mathbb{S}^3$ компоненту связности множества $p^{-1}(\Lambda)$ и через $\widetilde{Q} \subset \mathbb{S}^3$ трехмерное кольцо, ограниченное 2-сферами $\widetilde{\Lambda}$, $b(\widetilde{\Lambda})$. В силу утверждения 8 сфера $\widetilde{\Lambda}$ ($b(\widetilde{\Lambda})$) ограничивает в $\mathbb{S}^3$ трехмерный шар B_N (B_S), содержащий полюс N (S) (см. рис. 13). Обозначим через $\widetilde{T} \subset \widetilde{Q}$ компоненту связности множества $p^{-1}(T)$, которая является локально плоско вложенным в $\mathbb{S}^3$ двумерным тором.

Согласно утверждению 19 тор $\widetilde{T}$ ограничивает заполненный тор $\widetilde{V} \subset \mathbb{S}^3$. Поскольку тор T не ограничивает заполненный тор в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то возможны следующие ситуации: 2) в точности один из 3-шаров B_N, B_S лежит в заполненном торе $\widetilde{V}$ (см. рис. 13, случаи 2a), 2b)); 3) оба 3-шара B_N, B_S лежат в заполненном торе $\widetilde{V}$ (см. рис. 13, случай 3)).

В обоих случаях многообразие $\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} N(\widetilde{T})$ состоит из двух компонент связности: трубчатой окрестности узла L и дополнения до его трубчатой окрестности $N(L) \supset \widetilde{V}$. В случае 2) при проекции p этих компонент с удаленными шарами B_N, B_S мы получим связное многообразие $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N(T)$. Тогда согласно утверждению 9 оно гомеоморфно многообразию $(\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} N(L)) \# \mathbb{V}$, где $L \subset \mathbb{S}^3$ – некоторый узел. При аналогичной проекции в случае 3) мы получим, что множество $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N(T)$ состоит из двух компонент связности, одна из которых гомеоморфна многообразию $\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} N(L)$, где $L \subset \mathbb{S}^3$ – нетривиальный узел, а другая – многообразию $\mathbb{V} \# (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$. Лемма 2 доказана.

Опишем свойства вложения бутылки Клейна в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Напомним, что бутылка Клейна $\mathbb{K}$ – это квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ со склеенными в силу отношения

$$(x, 0) \sim (x, 1), \quad (0, y) \sim (1, 1 - y)$$

сторонами. Пусть $v\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{K}$ – естественная проекция, тогда кривые

$$\lambda = v\left([0, 1] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right), \qquad \mu = v(\{0\} \times [0, 1])$$

являются образующими фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{K})$ с соотношением

$$[\lambda * \mu] = [\mu^{-1} * \lambda],$$

при этом кривая λ называется *параллелью*, а кривая μ – *меридианом*.

Хорошо известно, что бутылка Клейна не вкладывается в $\mathbb{R}^3$, однако ее можно вложить в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, например определив вложение $\widetilde{e}_0\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ формулой

$$\widetilde{e}_0(x, y) = \big(\sin(\pi x)\cos(2\pi y),\ \cos(\pi x)\cos(2\pi y),\ \sin(2\pi y), e^{2\pi i x}\big)$$

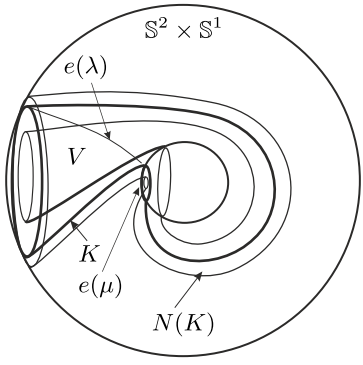

Рис. 14. Бутылка Клейна в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

и заметив, что

$$\widetilde{e}_0(x,y) = \widetilde{e}_0(x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \sim (x',y').$$

Тогда (см., например, [30; гл. 5])

$$e_0 = \widetilde{e}_0 v^{-1} \colon \mathbb{K} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$$

– искомое вложение бутылки Клейна в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Положим

$$K_0 = e_0(\mathbb{K}).$$

Утверждение 21 [7; предложение 1.4]. *Пусть* $e\colon \mathbb{K} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ *– локально плоское вложение бутылки Клейна* $\mathbb{K}$, $K = e(\mathbb{K})$, $N(K) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ *– трубчатая окрестность* K *и* $V = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \operatorname{int} N(K)$ *(см. рис. 14). Тогда*

1) *кривая* $e(\lambda)$ *является образующей фундаментальной группы* $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$;
2) *множество* V *является полноторием, меридиан которого гомотопен кривой* $e(\mu)$;
3) *существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм* $h\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ *такой, что* $h(K) = K_0$.

3. Динамика неособых 4-потоков

В настоящем разделе рассматриваются неособые потоки f^t без гетероклинических пересечений, заданные на замкнутых ориентируемых 4-многообразиях M^4. Исследована локальная динамика потока f^t в окрестности периодических орбит, а также глобальное асимптотическое поведение его траекторий. Данный раздел является адаптированным изложением результатов из [16; разд. 2].

3.1. Локальная динамика. Пусть $f^t\colon M^n \to M^n$ – регулярный поток. Напомним, что диффеоморфизм $a_{i,\rho,\nu}\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ задан формулой (1), $[a_{i,\rho,\nu}]^t$ – надстройка над диффеоморфизмом $a_{i,\rho,\nu}$, множество $V_{i,\rho,\nu}$ определено формулами (2), (3) и $\eta_{i,\rho,\nu}\colon \pi_1(V_{i,\rho,\nu}) \to \mathbb{Z}$ – эпиморфизм, заданный формулой (4). Формализуем понятие гиперболичности периодической орбиты $\mathcal{O}$ потока f^t следующим утверждением.

Утверждение 22 [29]. *Любая периодическая орбита $\mathcal{O}$ регулярного потока $f^t\colon M^n \to M^n$ обладает трубчатой окрестностью $V_{\mathcal{O}}$ и гомеоморфизмом*

$$H_{\mathcal{O}}\colon V_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}} \to V_{\mathcal{O}},$$

осуществляющим эквивалентность потоков $[a_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}}]^t\big|_{V_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}}}$ *и* $f^t\big|_{V_{\mathcal{O}}}$.

Окрестность

$$V_{\mathcal{O}} = H_{\mathcal{O}}(V_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}}),$$

описанную в утверждении 22, назовем *канонической окрестностью* периодической орбиты $\mathcal{O}$. Положим

$$\eta_{\mathcal{O}} = \eta_{i_{\mathcal{O}},\rho_{\mathcal{O}},\nu_{\mathcal{O}}} H^{-1}_{\mathcal{O}*}\colon \pi_1(V_{\mathcal{O}}) \to \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad \Sigma_{\mathcal{O}} = \partial V_{\mathcal{O}}.$$

Следующий факт говорит о том, что каноническая окрестность гиперболической орбиты не единственна и ее можно выбрать сколь угодно малой.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{O}$ – периодическая орбита регулярного потока $f^t\colon M^n \to M^n$. Тогда в любой окрестности $U_{\mathcal{O}}$ этой орбиты существует каноническая окрестность $V_{\mathcal{O}}$.*

Доказательство. Из определения гиперболичности периодической орбиты $\mathcal{O}$ следует, что для доказательства леммы достаточно построить сколь угодно малую окрестность орбиты $\mathbb{O}_{i,\rho,\nu}$, в которой поток $[a_{i,\rho,\nu}]^t$ эквивалентен потоку $[a_{i,\rho,\nu}]^t\big|_{V_{i,\rho,\nu}}$.

Для $\tau \in (0,1)$ определим диффеоморфизм $\psi_\tau\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ формулой

$$\psi_\tau(x_1,\dots,x_{n-1}) = (\tau x_1,\dots,\tau x_{n-1}).$$

Непосредственно проверяется, что

$$a_{i,\rho,\nu}\psi_\tau = \psi_\tau a_{i,\rho,\nu}.$$

Тогда диффеоморфизм $\overline{\Psi}_\tau\colon \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$, определенный формулой

$$\overline{\Psi}_\tau(x_1,\dots,x_{n-1},r) = (\psi_\tau(x_1,\dots,x_{n-1}),r),$$

осуществляет эквивалентность потока ξ^t с самим собой и, более того, $\xi^t\overline{\Psi}_\tau = \overline{\Psi}_\tau\xi^t$ для любого $t\in\mathbb{R}$. Кроме того, диффеоморфизм $\overline{\Psi}_\tau$ коммутирует с диффеоморфизмом $g_{a_{i,\rho,\nu}}\colon \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$, заданным формулой

$$g_{a_{i,\rho,\nu}}(x_1,\dots,x_{n-1},r) = (a_{i,\rho,\nu}(x_1,\dots,x_{n-1}),r-1).$$

Поэтому диффеоморфизм Ψ_τ, определенный формулой

$$\Psi_\tau v_{a_{i,\rho,\nu}} = v_{a_{i,\rho,\nu}}\overline{\Psi}_\tau,$$

осуществляет эквивалентность потока $[a_{i,\rho,\nu}]^t$ с самим собой. Тогда $V^\tau_{i,\rho,\nu} = \Psi_\tau(V_{i,\rho,\nu}) \subset V_{i,\rho,\nu}$ – искомая окрестность, которую можно выбрать сколь угодно малой за счет выбора τ. Лемма доказана.

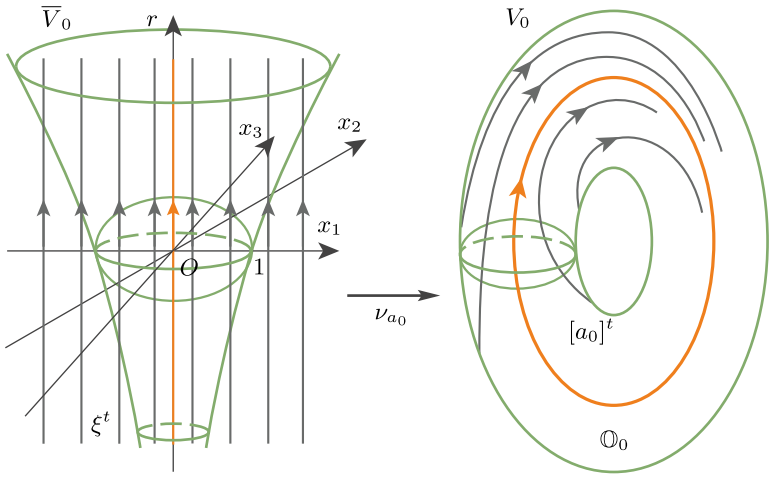

Рис. 15. Окрестность V_0 периодической орбиты $\mathbb{O}_0$.

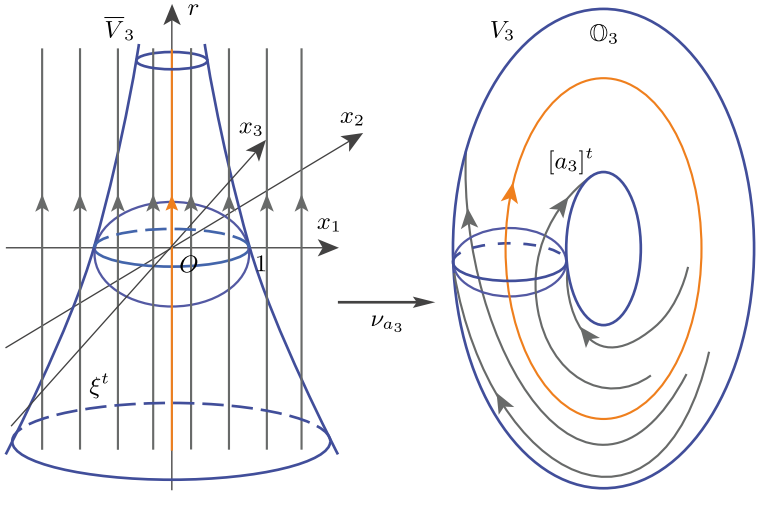

Рис. 16. Окрестность V_3 периодической орбиты $\mathbb{O}_3$.

Утверждение 23 [50; теорема 4]. *Гомеоморфизм* $h\colon \partial V_{i,\rho,\nu} \to \partial V_{i,\rho,\nu}$ *для* $n > 3$, $i \in \{0, n-1\}$ *и* $\rho, \nu \in \{-1, +1\}$ *продолжается до гомеоморфизма* $H\colon V_{i,\rho,\nu} \to V_{i,\rho,\nu}$, *реализующего эквивалентность потока* $[a_{i,\rho,\nu}]^t$ *с самим собой, тогда и только тогда, когда* $h_* = \mathrm{id}$.

Далее ограничимся рассмотрением потоков, заданных на ориентируемых 4-многообразиях M^4 которые исследуются в рамках данной работы.

В силу ориентируемости несущего многообразия M^4 все канонические окрестности периодических орбит потока f^t гомеоморфны многообразию $\mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$. Таким образом, $\rho_{\mathcal{O}}\nu_{\mathcal{O}} = 1$ для любой орбиты $\mathcal{O} \in \Omega_{f^t}$ и, следовательно, набор $(i_{\mathcal{O}}, \rho_{\mathcal{O}}, \nu_{\mathcal{O}})$ может иметь следующий вид:

$(0, +1, +1)$; $(1, +1, +1)$; $(1, -1, -1)$; $(2, +1, +1)$; $(2, -1, -1)$; $(3, +1, +1)$.

Для краткости далее будем заменять перечисленные тройки одной цифрой

$$0; \quad +1; \quad -1; \quad +2; \quad -2; \quad 3$$

соответственно.

По построению окрестность V_0 (V_3) притягивающей (отталкивающей) периодической орбиты $\mathbb{O}_0$ ($\mathbb{O}_3$) является проекцией в силу отображения v_{a_0} (v_{a_3}) окрестности

$$\overline{V}_0 = \{(x_1, x_2, x_3, r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4^r\}$$
$$(\overline{V}_3 = \{(x_1, x_2, x_3, r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4^{-r}\}).$$

Отсюда следует, что все траектории потока $[a_0]^t$ ($[a_3]^t$), кроме самой периодической орбиты, пересекают ее границу и направлены внутрь (наружу) окрестности (см. рис. 15, 16).

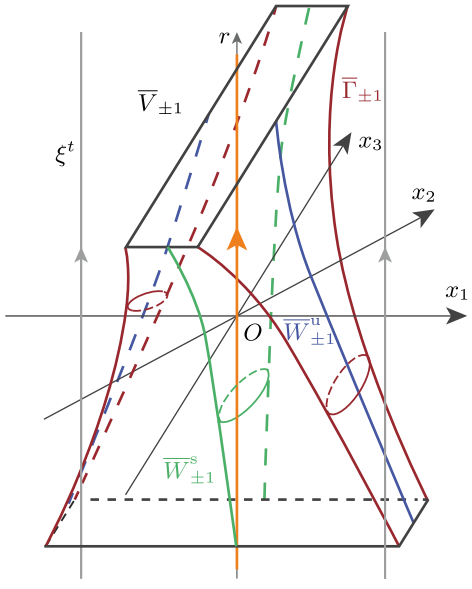

Рис. 17. Множество $\overline{V}_{\pm1}$.

Рассмотрим более подробно динамику потока $[a_{\pm1}]^t$ в окрестности $V_{\pm1}$ (в окрестности $V_{\pm2}$ поведение траекторий аналогично с точностью до обращения направления движения по ним). Напомним, что

$$\overline{V}_{\pm1} = \{(x_1, x_2, x_3, r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \colon x_1^2 \leqslant 4^{-r},\ x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4^r\}.$$

Положим (см. рис. 17)

- $\overline{\Sigma}_{\pm1} = \partial\overline{V}_{\pm1}$;
- $\overline{\Gamma}_{\pm1} = \{(x_1, x_2, x_3, r) \in \overline{\Sigma}_{\pm1} :\ x_1^2 = 4^{-r},\ x_2^2 + x_3^2 = 4^r\}$;
- $\overline{W}^{\mathrm{s}}_{\pm1} = Ox_2x_3r \cap \overline{\Sigma}_{\pm1}$;
- $\overline{W}^{\mathrm{u}}_{\pm1} = Ox_1r \cap \overline{\Sigma}_{\pm1}$.

Лемма 4. *Для потока ξ^t на $\overline{V}_{\pm1}$ имеют место следующие утверждения*:
1) $\overline{\Sigma}_{\pm1} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$;
2) $\overline{\Gamma}_{\pm1} \cong \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$;
3) $\overline{W}^{\mathrm{s}}_{\pm1} \cong \{0\} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$;
4) $\overline{W}^{\mathrm{u}}_{\pm1} \cong \mathbb{S}^0 \times \{0\} \times \mathbb{R}$.

При этом цилиндр $\overline{\Gamma}_{\pm1}$ делит многообразие $\overline{\Sigma}_{\pm1}$ на три компоненты связности. Замыкание одной из них,

$$N(\overline{W}^{\mathrm{s}}_{\pm1}) = \{(x_1, x_2, x_3, r) \in \overline{\Sigma}_{\pm1} \colon x_1^2 \leqslant 4^{-r},\ x_2^2 + x_3^2 = 4^r\}, \tag{13}$$

гомеоморфно $[-1,1] \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ и содержит $\overline{W}^{\mathrm{s}}_{\pm1}$. Объединение замыканий двух оставшихся компонент,

$$N(\overline{W}^{\mathrm{u}}_{\pm1}) = \{(x_1, x_2, x_3, r) \in \overline{\Sigma}_{\pm1} \colon x_1^2 = 4^{-r},\ x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4^r\}, \tag{14}$$

гомеоморфно $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{B}^2 \times \mathbb{R}$ и содержит $\overline{W}^{\mathrm{u}}_{\pm1}$. Каждая траектория потока ξ^t, кроме той, что проходит через начало координат, пересекает многообразие $\overline{\Sigma}_{\pm1}$ либо в одной точке, лежащей на $\overline{\Gamma}_{\pm1}$ (точка касания траектории), либо в двух точках, одна из которых лежит на $\operatorname{int} N(\overline{W}^{\mathrm{s}}_{\pm1})$ (точка входа траектории), другая – на $\operatorname{int} N(\overline{W}^{\mathrm{u}}_{\pm1})$ (точка выхода траектории).

Доказательство. Пусть $p \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ – точка с координатами

$$(p_1, p_2, p_3, 0), \quad \text{где} \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0.$$

Найдем точки пересечения траектории $\xi^t(p)$ с многообразием $\overline{\Sigma}_{\pm1}$. Для этого положим

$$p_1^2 = 4^{-r_{\mathrm{u}}}, \quad p_2^2 + p_3^2 = 4^{r_{\mathrm{s}}} \tag{15}$$

и подставим координаты (p_1, p_2, p_3, t) точки $\xi^t(p)$ в уравнение множества $\overline{\Sigma}_{\pm1}$, которое состоит из двух подмножеств $N(\overline{W}^{\mathrm{s}}_{\pm1})$ и $N(\overline{W}^{\mathrm{u}}_{\pm1})$ с общей границей $\overline{\Gamma}_{\pm1}$:

$$\overline{\Sigma}_{\pm1} = N(\overline{W}^{\mathrm{s}}_{\pm1}) \cup N(\overline{W}^{\mathrm{u}}_{\pm1}).$$

При подстановке (15) в (13) получим

$$t = r_{\mathrm{s}}, \quad r_{\mathrm{u}} \geqslant r_{\mathrm{s}}.$$

При подстановке (15) в (14) получим

$$t = r_{\mathrm{u}}, \quad r_{\mathrm{s}} \leqslant r_{\mathrm{u}}.$$

Таким образом, траектория $\xi^t(p)$ пересекает множество $\overline{\Sigma}_{\pm1}$ в точках $\xi^{r_{\mathrm{s}}}(p) \in N(\overline{W}^{\mathrm{s}}_{\pm1})$ и $\xi^{r_{\mathrm{u}}}(p) \in N(\overline{W}^{\mathrm{u}}_{\pm1})$, при этом отрезок траектории $\xi^t(p)$, $t \in [r_{\mathrm{s}}, r_{\mathrm{u}}]$, принадлежит множеству $\overline{V}_{\pm1}$. Кроме того, $r_{\mathrm{s}} = r_{\mathrm{u}}$ тогда и только тогда, когда точка $\xi^{r_{\mathrm{s}}}(p) = \xi^{r_{\mathrm{u}}}(p)$ принадлежит множеству $\overline{\Gamma}_{\pm1}$. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 4 получаем, что (см. рис. 18, 19)

- $\Sigma_{+1} = v_{+1}(\overline{\Sigma}_{+1}) = \partial V_{+1} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$;
- $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{+1} = v_{+1}(\overline{W}^{\mathrm{u}}_{+1}) \cong \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1$ – пара узлов, на каждом из которых отображение η_{+1} принимает значение 1;
- $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{+1}) = v_{+1}(N(\overline{W}^{\mathrm{u}}_{+1})) \cong \mathbb{S}^0 \times \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ – заполненные торы, являющиеся трубчатыми окрестностями узлов $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{+1}$;

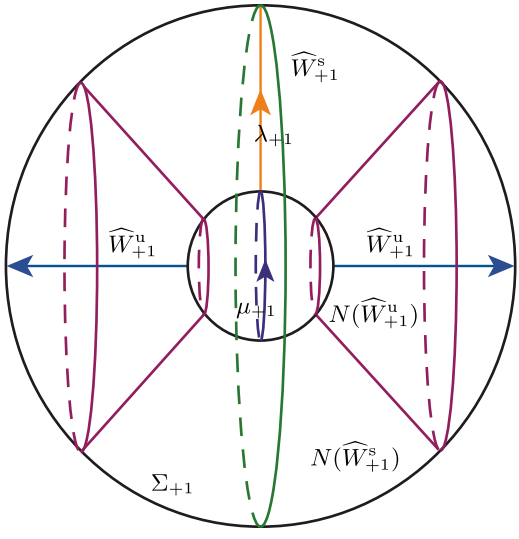

Рис. 18. Граница Σ_{+1} окрестности V_{+1} нескрученной седловой орбиты $\mathbb{O}_{+1}$.

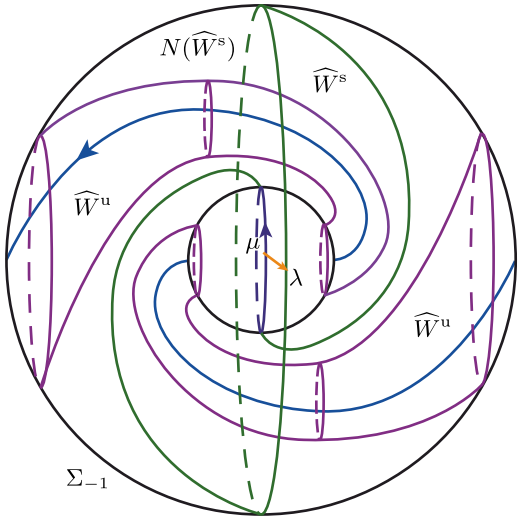

Рис. 19. Граница Σ_{-1} окрестности V_{-1} скрученной седловой орбиты $\mathbb{O}_{-1}$.

- $\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{+1} = v_{+1}(\overline{W}^{\mathrm{s}}_{+1}) \cong \mathbb{T}^2$ – двумерный тор с образующими λ_{+1}, μ_{+1}, где $\eta_{+1}([\lambda_{+1}]) = 1$, $\eta_{+1}([\mu_{+1}]) = 0$;
- $N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{+1}) = v_{+1}(N(\overline{W}^{\mathrm{s}}_{+1})) \cong \mathbb{T}^2 \times [-1, +1]$ – трубчатая окрестность тора $\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{+1}$;
- $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{-1} = v_{-1}(\overline{W}^{\mathrm{u}}_{-1}) \cong \mathbb{S}^1$ – узел такой, что $\eta_{-1}([\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{-1}]) = 2$;
- $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{-1}) = v_{-1}(N(\overline{W}^{\mathrm{u}}_{-1})) \cong \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ – заполненный тор, являющийся трубчатой окрестностью узла $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{-1}$;

- $\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{-1} = v_{-1}(\overline{W}^{\mathrm{s}}_{-1}) \cong \mathbb{S}^1 \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ – бутылка Клейна с образующими λ_{-1}, μ_{-1}, где $\eta_{-1}([\lambda_{-1}]) = 1$, $\eta_{-1}([\mu_{-1}]) = 0$;
- $N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{-1}) = v_{-1}(N(\overline{W}^{\mathrm{s}}_{-1})) \cong [-1,1] \times \mathbb{S}^1 \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ – трубчатая окрестность бутылки Клейна $\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{-1}$.

Для нескрученной и скрученной седловых орбит S потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ с индексом Морса 1 и канонической окрестностью V_S положим

$$\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S = H_S(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{+1}), \quad \widehat{W}^{\mathrm{s}}_S = H_S(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{+1}), \quad \lambda_S = H_S(\lambda_{+1}), \quad \mu_S = H_S(\mu_{+1})$$

и

$$\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S = H_S(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{-1}), \quad \widehat{W}^{\mathrm{s}}_S = H_S(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{-1}), \quad \lambda_S = H_S(\lambda_{-1}), \quad \mu_S = H_S(\mu_{-1})$$

соответственно. Аналогичные обозначения введем для нескрученной и скрученной седловых орбит S с индексом Морса 2 и положим

$$\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S = H_S(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{+2}), \quad \widehat{W}^{\mathrm{s}}_S = H_S(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{+2}), \quad \lambda_S = H_S(\lambda_{+2}), \quad \mu_S = H_S(\mu_{+2})$$

и

$$\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S = H_S(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{-2}), \quad \widehat{W}^{\mathrm{s}}_S = H_S(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{-2}), \quad \lambda_S = H_S(\lambda_{-2}), \quad \mu_S = H_S(\mu_{-2})$$

соответственно.

3.2. Глобальная динамика. Пусть $f^t\colon M^4 \to M^4$ – неособый поток. Тогда из соотношения (6) следует, что его объемлющее многообразие M^4 является объединением устойчивых многообразий его периодических траекторий и одновременно является объединением неустойчивых многообразий этих траекторий. Непосредственно отсюда следует, что среди периодических траекторий потока f^t существует хотя бы одна притягивающая и хотя бы одна отталкивающая.

Для $q \in \{0,1,2,3\}$ обозначим через $\Omega^q_{f^t}$ множество периодических орбит потока f^t с индексом Морса q. Заметим, что неустойчивое (устойчивое) многообразие седловой периодической орбиты с индексом Морса 1 (2) имеет размерность 2, а замыкание объединения всех таких многообразий имеет следующий вид:

$$A_{f^t} = \Omega^0_{f^t} \cup \bigcup_{S \in \Omega^1_{f^t}} W^{\mathrm{u}}_S, \qquad R_{f^t} = \Omega^3_{f^t} \cup \bigcup_{S \in \Omega^2_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_S.$$

Положим

$$V_{f^t} = M^4 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t}).$$

Напомним, что компактное f^t-инвариантное множество $A \subset M^4$ называется *аттрактором* потока f^t, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что

$$f^t(U_A) \subset \operatorname{int} U_A \quad \text{для любого } t > 0 \quad \text{и} \quad A = \bigcap_{t \geqslant 0} f^t(U_A).$$

Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для потока f^{-t}.

Теорема 1. *Пусть $f^t\colon M^4 \to M^4$ – неособый поток. Тогда*

1) *множество A_{f^t} (R_{f^t}) является связным аттрактором (репеллером);*
2) *множество V_{f^t} связно и состоит из траекторий, асимптотически стремящихся к аттрактору A_{f^t} (репеллеру R_{f^t}) в прямом (обратном) времени:*

$$V_{f^t} = \Bigg(\bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega^0_{f^t} \cup \Omega^1_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}} \Bigg) \setminus A_{f^t} = \Bigg(\bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega^2_{f^t} \cup \Omega^3_{f^t}} W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}} \Bigg) \setminus R_{f^t}; \qquad (16)$$

3) *существует секущая Σ_{f^t} к траекториям множества V_{f_t}, являющаяся связным замкнутым ориентируемым 3-многообразием.*

Доказательство. Поскольку все периодические орбиты потока f^t принадлежат аттрактору A_{f^t} и репеллеру R_{f^t}, то из соотношения (6) вытекают следующие равенства:

$$M^4 = A_{f^t} \cup \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega^2_{f^t} \cup \Omega^3_{f^t}} W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}} = R_{f^t} \cup \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega^0_{f^t} \cup \Omega^1_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}}.$$

Поскольку $V_{f^t} = M^4 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$, из этих равенств следуют соотношения (16).

Как уже упоминалось в п. 1.1, периодические орбиты потока f^t можно пронумеровать согласованно с порядком С. Смейла:

$$\mathcal{O}_{j_1} \prec \mathcal{O}_{j_2} \iff W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}_{j_1}} \cap W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}_{j_2}} \neq \varnothing.$$

Поскольку седловые инвариантные многообразия потока не пересекаются, то периодические орбиты можно пронумеровать *динамически*, т. е.

$$\text{если} \quad i_{\mathcal{O}_{j_1}} < i_{\mathcal{O}_{j_2}}, \quad \text{то} \quad \mathcal{O}_{j_1} \prec \mathcal{O}_{j_2}.$$

Тогда из утверждения 2 следует существование динамически упорядоченной энергетической функции Морса–Ботта $\varphi\colon M^n \to [1, k]$, где k – число периодических орбит потока f^t, такой, что

$$\varphi(A_{f^t}) < c < \varphi(R_{f^t}) \quad \text{для некоторого } c \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$\Sigma_{f^t} = \varphi^{-1}(c), \quad U_{A_{f^t}} = \varphi^{-1}([1, c]), \quad U_{R_{f^t}} = \varphi^{-1}([c, k]).$$

Тогда Σ_{f^t} – замкнутое ориентируемое 3-многообразие, $\Sigma_{f^t} \subset V_{f^t}$ и Σ_{f^t} пересекает все траектории множества V_{f_t}. Кроме того,

$$A_{f^t} = \bigcap_{t \geqslant 0} f^t(U_{A_{f^t}}), \qquad R_{f^t} = \bigcap_{t \leqslant 0} f^t(U_{R_{f^t}}).$$

Таким образом, A_{f^t} является аттрактором и R_{f^t} является репеллером потока f^t.

Покажем, что множества A_{f^t}, R_{f^t}, V_{f^t} являются связными.

В силу (8) топологическая размерность репеллера R_{f^t} не превышает 2. Отсюда, согласно [28; гл. 4, разд. 5, следствие 1] следует связность многообразия $M^4 \setminus R_{f^t}$. Так как

$$M^4 \setminus R_{f^t} = \bigcup_{t \geqslant 0} f^{-t}(U_{A_{f^t}}),$$

то многообразие $U_{A_{f^t}}$ также связно. Тогда аттрактор

$$A_{f^t} = \bigcap_{t \geqslant 0} f^t(U_{A_{f^t}})$$

связен, как пересечение компактных связных вложенных множеств.

Аналогичным образом доказывается связность репеллера R_{f^t} и его захватывающей окрестности $U_{R_{f^t}}$. Связность многообразия $V_{f^t} = M^4 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$ также следует из теории размерности. Кроме того, из вышесказанного вытекает, что $V_{f^t} \cong \Sigma_{f^t} \times \mathbb{R}$, а значит, многообразие Σ_{f^t} также является связным. Теорема доказана.

Секущую Σ_{f^t}, удовлетворяющую условиям теоремы 1, назовем *характеристической секущей* потока $f^t\colon M^4 \to M^4$. Очевидно, что характеристическая секущая не является единственной, поскольку всеми свойствами, перечисленными в лемме, обладает любой сдвиг глобальной секущей вдоль траекторий потока. В следующем пункте для потока без гетероклинических пересечений мы построим характеристическую секущую, обладающую некоторыми дополнительными свойствами.

3.3. Перестройка характеристической секущей. Пусть $f^t\colon M^4 \to M^4$ есть неособый поток без гетероклинических пересечений. Из соотношений (9) следует, что в этом случае характеристическая секущая Σ_{f^t} пересекает все траектории потока f^t за исключением траекторий, принадлежащих аттрактору A_{f^t} и репеллеру R_{f^t}. Таким образом, секущая Σ_{f^t} пересекает все траектории множества $W^{\mathrm{u}}_S \setminus S$ для любой седловой орбиты $S \in \Omega^2_{f^t}$. Также секущей для всех траекторий этого множества является граница Σ_S канонической окрестности V_S орбиты S, при этом

$$W^{\mathrm{u}}_S \cap \Sigma_S = \widehat{W}^{\mathrm{u}}_S.$$

Аналогично, секущая Σ_{f^t} пересекает все траектории множества $W^{\mathrm{s}}_S \setminus S$ для любой седловой орбиты $S \in \Omega^1_{f^t}$ и

$$\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S = W^{\mathrm{s}}_S \cap \Sigma_S.$$

Лемма 5. *Пусть $f^t\colon M^4 \to M^4$ – неособый поток без гетероклинических пересечений. Тогда существуют канонические окрестности V_S седловых орбит S и характеристическая секущая Σ_{f^t} такие, что*

$$\Sigma_{f^t} \cap V_S = N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S), \qquad S \in \Omega^1_{f^t}, \tag{17}$$

$$\Sigma_{f^t} \cap V_S = N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S), \qquad S \in \Omega^2_{f^t}. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Sigma}_{f^t}$ – некоторая характеристическая секущая, существование которой установлено в теореме 1. Тогда многообразие $\widetilde{\Sigma}_{f^t}$ делит несущее многообразие M^4 на две компоненты связности $\widetilde{U}_{A_{f^t}}$ и $\widetilde{U}_{R_{f^t}}$, являющиеся захватывающими окрестностями аттрактора A_{f^t} и репеллера R_{f^t} соответственно. Поскольку $\Omega^1_{f^t} \subset A_{f^t}$ и $\Omega^2_{f^t} \subset R_{f^t}$, то в силу отсутствия гетероклинических пересечений и на основании леммы 3 можно считать, что

- $V_S \subset \widetilde{U}_{A_{f^t}}$ для любой седловой орбиты $S \in \Omega^1_{f^t}$;
- $V_S \subset \widetilde{U}_{R_{f^t}}$ для любой седловой орбиты $S \in \Omega^2_{f^t}$;
- множества

$$N^{\mathrm{s}} = \bigsqcup_{S\in\Omega^1_{f^t}} \Bigg(\bigcup_{x\in N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S),\, t\leqslant 0} f^t(x) \Bigg),$$

$$N^{\mathrm{u}} = \bigsqcup_{S\in\Omega^2_{f^t}} \Bigg(\bigcup_{x\in N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S),\, t\geqslant 0} f^t(x) \Bigg)$$

не пересекаются.

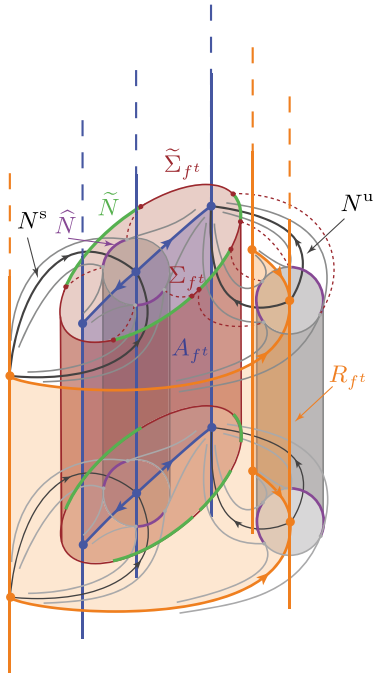

Рис. 20. Модификация характеристической секущей.

Положим (см. рис. 20)

$$\widehat{N} = \bigsqcup_{S\in\Omega^1_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S) \sqcup \bigsqcup_{S\in\Omega^2_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S), \qquad \widetilde{N} = (N^{\mathrm{s}} \sqcup N^{\mathrm{u}}) \cap \widetilde{\Sigma}_{f^t}.$$

Определим непрерывную функцию $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{\Sigma}_{f^t} \to \mathbb{R}$ так, что $f^{\widetilde{\psi}(r)}(r) \in \widehat{N}$ для $r \in \widetilde{N}$. Тогда $\Sigma_{f^t} = \bigcup\limits_{r\in\widetilde{\Sigma}_{f^t}} f^{\widetilde{\psi}(r)}(r)$ – искомая характеристическая секущая. Лемма доказана.

Везде далее мы предполагаем, что для характеристической секущей Σ_{f^t} потока $f^t \in G$ выполнены условия (17), (18).

Лемма 6. *Пусть $f^t\colon M^4 \to M^4$ – неособый поток без гетероклинических пересечений и $\Sigma_{f^t} = \partial U_{A_{f^t}} = \partial U_{R_{f^t}}$ – его характеристическая секущая, удовлетворяющая условиям (17), (18). Тогда для каждого $A \in \Omega^0_{f^t}$ и $R \in \Omega^3_{f^t}$ существуют канонические окрестности V_A и V_R такие, что*

$$\operatorname{cl}\left(U_{A_{f^t}} \setminus \bigsqcup_{S\in\Omega^1_{f^t}} V_S\right) = \bigsqcup_{A\in\Omega^0_{f^t}} V_A,$$

$$\operatorname{cl}\left(U_{R_{f^t}} \setminus \bigsqcup_{S\in\Omega^2_{f^t}} V_S\right) = \bigsqcup_{R\in\Omega^3_{f^t}} V_R.$$

Доказательство. Согласно формуле (16)

$$V_{f^t} = \left(\bigcup_{\mathcal{O}\in\Omega^0_{f^t}\cup\Omega^1_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}}\right) \setminus A_{f^t},$$

и многообразие Σ_{f^t} пересекает каждую траекторию множества V_{f^t} в точности в одной точке. Из свойства (17) секущей Σ_{f^t} следует, что

$$\Sigma_{f^t} \cap V_S = N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S), \qquad S \in \Omega^1_{f^t}.$$

При этом согласно лемме 4 поведение траекторий потока f^t в окрестности V_S таково, что любая траектория, пересекающая множество $N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S) \setminus \widehat{W}^{\mathrm{s}}_S$, также пересекает множество $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) \setminus \widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$ в единственной точке. Таким образом, многообразие

$$\Sigma^{\mathrm{s}}_{f^t} = \left(\Sigma_{f^t} \setminus \bigsqcup_{S\in\Omega^1_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)\right) \cup \bigsqcup_{S\in\Omega^1_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$$

является секущей для всех траекторий множества $W^{\mathrm{s}}_{\Omega^0_{f^t}} \setminus \Omega^0_{f^t}$ и одновременно является границей многообразия $\operatorname{cl}\left(U_{A_{f^t}} \setminus \bigsqcup_{S\in\Omega^1_{f^t}} V_S\right)$. Отсюда следует, что каждая компонента связности V_A этого многообразия является захватывающей окрестностью некоторой притягивающей орбиты $A \in \Omega^0_{f^t}$, а ее граница Σ_A является секущей для траекторий потока множества $W^{\mathrm{s}}_A \setminus A$ и компонентой связности многообразия $\Sigma^{\mathrm{s}}_{f^t}$ (см. рис. 21).

Покажем, что V_A – каноническая окрестность орбиты A.

В силу леммы 3 существует некоторая каноническая окрестность $\widetilde{V}_A \subset \operatorname{int} V_A$ орбиты A. Положим $\widetilde{\Sigma}_A = \partial\widetilde{V}_A$. Тогда согласно определению канонической окрестности достаточно построить гомеоморфизм $h\colon \widetilde{V}_A \to V_A$, осуществляющий эквивалентность потоков $f^t\big|_{\widetilde{V}_A}$, $f^t\big|_{V_A}$. Для этого определим непрерывную функцию $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{\Sigma}_A \to \mathbb{R}$ так, что $f^{\widetilde{\psi}(r)}(r) \in \Sigma_A$ для $r \in \widetilde{\Sigma}_A$. Определим функцию $\phi_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой

$$\phi_r(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant 1; \\ \widetilde{\psi}(r)(1-t), & 0 \leqslant t < 1. \end{cases}$$

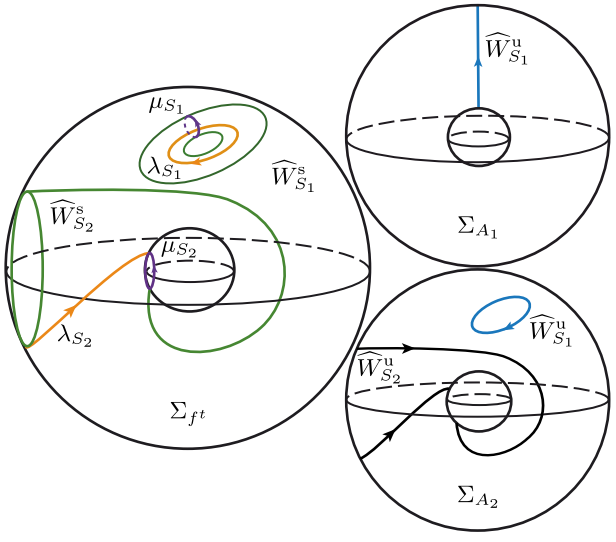

Рис. 21. Секущие $\Sigma_{f^t} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и $\Sigma^{\mathrm{s}}_{f^t} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2$ (здесь S_1, S_2 – седловые орбиты и A_1, A_2 – притягивающие орбиты потока f^t).

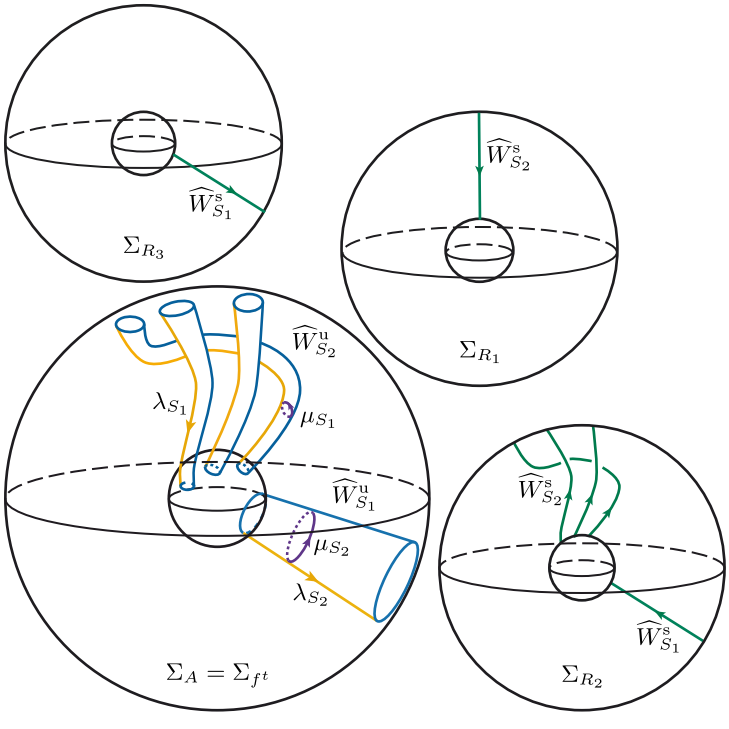

Рис. 22. Секущие $\Sigma_{f^t} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и $\Sigma^{\mathrm{u}}_{f^t} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_3$.

Тогда искомый гомеоморфизм определяется формулой

$$h(f^t(r)) = f^{t+\phi_r(t)}(r), \qquad r \in \widetilde{\Sigma}_A, \quad t \geqslant 0.$$

Аналогичным образом, с помощью секущей

$$\Sigma^{\mathrm{u}}_{f^t} = \Sigma_{f^t} \setminus \bigsqcup_{S \in \Omega^2_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) \cup \bigsqcup_{S \in \Omega^2_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S),$$

устанавливается второе равенство (см. рис. 22). Лемма доказана.

4. Неособые 4-потоки с не более чем одной седловой орбитой

В настоящем разделе рассматриваются неособые потоки $f^t\colon M^4 \to M^4$, имеющие не более одной седловой периодической орбиты. Доказывается, что для всех таких потоков несущее многообразие M^4 гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. Устанавливается, что множество потоков без седловых орбит распадается на два класса топологической эквивалентности, с одной скрученной седловой орбитой – на восемь. В случае нескрученной седловой орбиты классов топологической эквивалентности бесконечно много и полным топологическим инвариантом для таких потоков является узел, вложенный в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, индуцированный вложением двумерного многообразия седловой орбиты в несущее пространство. Кроме того, среди таких потоков есть бесконечно много попарно не эквивалентных потоков с дико вложенными инвариантными седловыми многообразиями. Данный раздел является адаптированным изложением результатов работ [18], [19].

4.1. Потоки без седловых орбит.

Теорема 2. *Пусть $f^t\colon M^4 \to M^4$ – неособый поток без седловых периодических орбит. Тогда*

1) *Ω_{f^t} состоит в точности из двух орбит: притягивающей A и отталкивающей R, при этом существуют канонические окрестности V_A и V_R орбит A и R соответственно такие, что*

$$\Sigma_{f^t} = \partial V_A = \partial V_R;$$

2) *$M^4 \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$;*
3) *существуют в точности два класса топологической эквивалентности таких потоков, один из которых совпадает с надстройками над гомеоморфизмами источник–сток на 3-сфере.*

Доказательство. Докажем последовательно каждый пункт теоремы.

1) Согласно теореме 1 любой неособый поток $f^t\colon M^4 \to M^4$ имеет связный аттрактор A_{f^t} и репеллер R_{f^t}, которые в случае отсутствия седловых периодических орбит совпадают с объединением притягивающих и отталкивающих орбит соответственно. Непосредственно отсюда следует, что аттрактор A_{f^t} и репеллер R_{f^t} состоят из одной орбиты:

$$A_{f^t} = A, \quad R_{f^t} = R,$$

притягивающей и отталкивающей соответственно. Из соотношения (16) имеем

$$V_f = M^4 \setminus (A \cup R) = W^{\mathrm{s}}_A \setminus A = W^{\mathrm{u}}_R \setminus R.$$

Кроме того, теорема 1 гарантирует существование характеристической секущей Σ_{f^t}, пересекающей все траектории множества V_{f^t}, причем каждую в одной точке.

Таким образом, секущая Σ_{f^t} делит несущее многообразие M^4 на две части, являющиеся подмножествами множеств W^{s}_A, W^{u}_R соответственно. Методами, примененными в доказательстве леммы 6, можно установить, что замыкания V_A, V_R этих частей являются каноническими окрестностями орбит A, R соответственно и, следовательно, $\Sigma_{f^t} = \Sigma_A = \Sigma_R$.

2) Из пункта 1) следует, что $M^4 = V_A \cup V_R$ и $V_A \cap V_R = \partial V_A = \partial V_R$. Поскольку $V_A \cong V_R \cong \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$, то $M^4 \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ в силу утверждения 14.

3) Обозначим через $\iota_A \colon \Sigma_{f^t} \to V_A$ и $\iota_R \colon \Sigma_{f^t} \to V_R$ отображения включения. Поскольку $\pi_1(\mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, то отображения

$$\iota_{A*} \colon \pi_1(\Sigma_{f^t}) \to \pi_1(V_A), \qquad \iota_{R*} \colon \pi_1(\Sigma_{f^t}) \to \pi_1(V_R)$$

являются изоморфизмами. Следовательно, корректно определен изоморфизм

$$\iota_{f^t} = \iota_{R*}\iota_{A*}^{-1} \colon \pi_1(V_A) \to \pi_1(V_R).$$

При этом для потока f^t выполняется либо условие $\eta_R(\iota_{f^t}([A])) = 1$, либо условие $\eta_R(\iota_{f^t}([A])) = -1$.

Введем аналогичные обозначения со штрихом для неособого потока $f'^t \colon M'^4 \to M'^4$ без седловых периодических орбит. В силу утверждения 23 гомеоморфизм $h \colon V_A \to V_{A'}$ ($h \colon V_R \to V_{R'}$) осуществляет эквивалентность потоков $f^t\big|_{V_A}$ и $f'^t\big|_{V_{A'}}$ ($f^t\big|_{V_R}$ и $f'^t\big|_{V_{R'}}$) тогда и только тогда, когда

$$h_*([A]) = [A'] \quad (h_*([R]) = [R']).$$

Таким образом, неособые потоки $f^t \colon M^4 \to M^4$, $f'^t \colon M'^4 \to M'^4$ без периодических орбит топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\eta_R(\iota_{f^t}([A])) = \eta_{R'}(\iota_{f'^t}([A'])).$$

Непосредственно отсюда следует существование в точности двух классов топологической эквивалентности таких потоков (см. рис. 23).

Для доказательства, что классы непусты, построим такие неособые потоки f^t, f'^t, что

$$\eta_R(\iota_{f^t}([A])) = 1, \qquad \eta_{R'}(\iota_{f'^t}([A'])) = -1.$$

Построение потока f^t. Определим на n-сфере стереографическую проекцию $\vartheta_n \colon \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$\vartheta_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right) \tag{19}$$

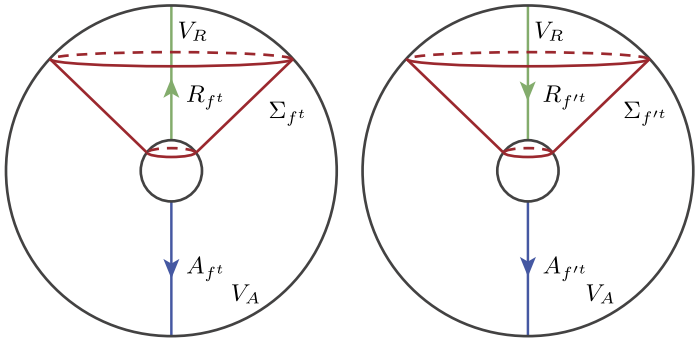

Рис. 23. Неэквивалентные неособые потоки без седловых периодических орбит.

(см. рис. 24). Определим диффеоморфизм $\Phi_{n\pm}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$\Phi_{n\pm}(x_1,\dots,x_n) = \left(\pm\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{2}\right) \tag{20}$$

и диффеоморфизм $\phi_{n\pm}\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ формулой

$$\phi_{n\pm}(s) = \begin{cases} \vartheta_n \Phi_{n\pm} \vartheta_n^{-1}(s), & s \neq (0,\dots,0,1); \\ s, & s = (0,\dots,0,1). \end{cases} \tag{21}$$

Непосредственно проверяется, что цепно рекуррентное множество диффеоморфизма $\phi_\pm$ состоит в точности из двух точек: источника $(0,\dots,0,1)$ и стока $(0,\dots,0,-1)$.

Тогда $f^t = [\phi_{3+}]^t\colon \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ – искомый неособый поток, цепно рекуррентное множество которого состоит из отталкивающей орбиты $R = \{(0,0,0,1)\} \times \mathbb{S}^1$ и притягивающей орбиты $A = \{(0,0,0,-1)\} \times \mathbb{S}^1$. При этом $\eta_R(\iota_{f^t}([A])) = 1$.

Построение потока f'^t. Пусть $V_A \cong \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$ – каноническая окрестность притягивающей орбиты A потока f^t, построенного в предыдущем абзаце. Определим инволюцию $\iota\colon V_A \to V_A$ формулой

$$\iota(d, e^{i2\pi\theta}) = (d, e^{-i2\pi\theta}). \tag{22}$$

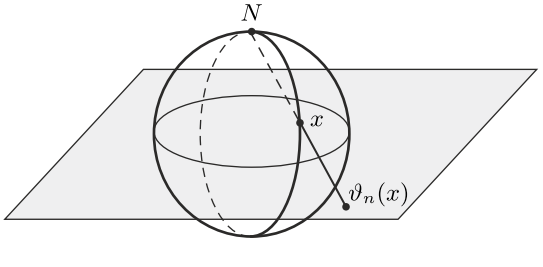

Рис. 24. Стереографическая проекция ϑ_n.

Положим

$$\widetilde{f}^t = \iota f^t \iota^{-1} \colon V_A \to V_A, \qquad t \geqslant 0.$$

Определим поток $f'^t \colon \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ формулой

$$f'^t(x) = \begin{cases} \widetilde{f}^t(x), & x \in V_A,\ t \geqslant 0; \\ f^t(x), & x \in (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1) \setminus V_A,\ t \leqslant 0. \end{cases}$$

Теорема 2 доказана.

4.2. Потоки со скрученной седловой орбитой.

Теорема 3. *Пусть $f^t \colon M^4 \to M^4$ – неособый поток с единственной седловой периодической орбитой, которая является скрученной. Тогда*

1) *Ω_{f^t} состоит в точности из трех орбит: притягивающей A, седловой S и отталкивающей R;*
2) *существуют в точности восемь классов топологической эквивалентности таких потоков;*
3) $M^4 \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Доказательство. Для седловой орбиты S потока f^t возможны два варианта:

$$\text{(a)}\ \ S \in \Omega^2_{f^t}; \qquad \text{(b)}\ \ S \in \Omega^1_{f^t}.$$

Очевидно, что в силу различия в размерностях неустойчивых седловых многообразий никакой поток вида (a) не эквивалентен никакому потоку вида (b). Кроме того, для любого потока f^t типа (a) поток f^{-t} имеет тип (b), и наоборот. Кроме того, потоки f^t, f'^t типа (a) эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны потоки f^{-t}, f'^{-t} типа (b). Непосредственно отсюда следует, что классификационную проблему достаточно решить для потоков типа (a). Таким образом, везде далее мы полагаем, что $S \in \Omega^2_{f^t}$.

Докажем последовательно каждый пункт теоремы.

1) Согласно теореме 1 любой неособый поток $f^t \colon M^4 \to M^4$ имеет связный аттрактор A_{f^t} и репеллер R_{f^t}, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$A_{f^t} = \Omega^0_{f^t}, \qquad R_{f^t} = \Omega^3_{f^t} \cup W^{\mathrm{s}}_S.$$

Непосредственно отсюда следует, что аттрактор A_{f^t} состоит из одной притягивающей орбиты A.

В силу пункта 2) теоремы 1 характеристическая секущая Σ_{f^t} является секущей для траекторий множества $W^{\mathrm{s}}_A \setminus A$. Методами, примененными при доказательстве леммы 6, можно установить, что Σ_{f^t} является границей канонической окрестности V_A, т. е.

$$\Sigma_{f^t} = \Sigma_A \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1.$$

Поскольку седловая орбита S является скрученной и $S \in \Omega^2_{f^t}$, то многообразие $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S = W^{\mathrm{u}}_S \cap \Sigma_{f^t}$ гомеоморфно бутылке Клейна и $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) \subset \Sigma_{f^t}$ – ее трубчатая окрестность (см. п. 3.1). Из свойств вложения бутылки Клейна в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см. утверждение 21) следует, что многообразие $\Sigma_{f^t} \setminus \operatorname{int} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$

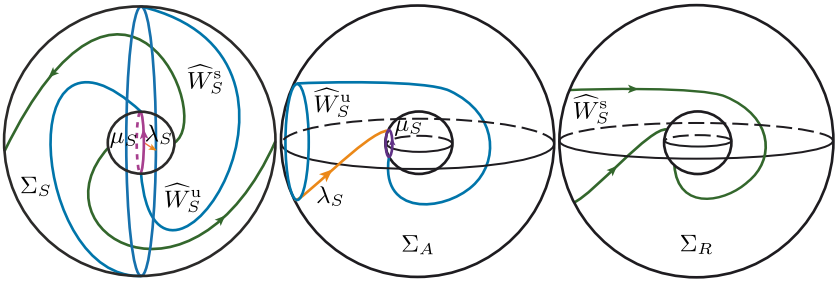

Рис. 25. Секущие $\Sigma_S \cong \Sigma_A \cong \Sigma_R \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ с бутылкой Клейна $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$ и узлом $\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S$.

гомеоморфно заполненному тору. С другой стороны, из свойств характеристической секущей Σ_{f^t} следует, что $\Sigma_{f^t} \cap V_S = N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$, а в силу леммы 6

$$\big(\Sigma_{f^t} \setminus \operatorname{int} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)\big) \cup N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S) = \bigsqcup_{R \in \Omega^3_{f^t}} \partial V_R. \tag{23}$$

Поскольку $N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)$ – заполненный тор (см. п. 3.1), то многообразие $\bigsqcup\limits_{R \in \Omega^3_{f^t}} \partial V_R$ является склейкой по границе двух заполненных торов, а следовательно, оно связно. Непосредственно отсюда следует, что множество $\Omega^3_{f^t}$ состоит из одной отталкивающей орбиты R.

2) Из установленной в пункте 1) структуры цепно рекуррентного множества и из формулы (23) следует, что

$$\big(\Sigma_A \setminus \operatorname{int} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)\big) \cup N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S) = \Sigma_R. \tag{24}$$

Из локальной динамики в окрестности седловой орбиты S следует, что

$$\partial N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) = \partial N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S) \cong \mathbb{T}^2.$$

При этом тор $\mathbb{T}^2$ допускает образующие λ, μ (узлы, представляющие базис фундаментальной группы тора $\mathbb{T}^2$) такие, что

$$\eta_S([\lambda]) = 2, \quad \eta_S([\mu]) = 0. \tag{25}$$

Поскольку $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) \subset V_A$ и $N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S) \subset V_R$, то корректно определены числа

$$\sigma_A = \eta_A([\lambda]), \quad \sigma_R = \eta_R([\lambda]).$$

Согласно утверждению 21

$$\sigma_A \in \{-2, 2\}. \tag{26}$$

Из соотношения (24) следует, что Σ_R является объединением двух заполненных торов $\Sigma_A \setminus \operatorname{int} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$ и $N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)$ (см. рис. 25). Поскольку $\Sigma_R \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то в силу утверждений 13 и 17 получаем, что

$$\sigma_R \in \{-1, 1\}. \tag{27}$$

В нижеследующей лемме устанавливается, что пара чисел σ_A, σ_R является полным инвариантом топологической эквивалентности потока f^t.

Лемма 7. *Неособые потоки* $f^t\colon M^4 \to M^4$ *и* $f'^t\colon M'^4 \to M'^4$ *с единственной седловой периодической орбитой, которая является скрученной и имеет индекс Морса* 2, *топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$\sigma_A = \sigma_{A'}, \quad \sigma_R = \sigma_{R'}. \tag{28}$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть потоки f^t и f'^t топологически эквивалентны посредством гомеоморфизма $H\colon M^4 \to M'^4$. Тогда необходимость выполнения условия (28) следует из соотношений (25)–(27) и равенств

$$\left(H\big|_{V_S}\right)_*([\lambda]) = [\lambda'], \qquad \left(H\big|_{V_A}\right)_*([\lambda]) = [\lambda'], \qquad \left(H\big|_{V_R}\right)_*([\lambda]) = [\lambda'],$$

имеющих место в силу утверждения 23.

($\Leftarrow$) Пусть для потоков f^t и f'^t выполнены равенства (28). Покажем, что потоки f^t и f'^t топологически эквивалентны.

Из утверждения 22 следует, что гомеоморфизм

$$h = H_{S'} H_S^{-1}\colon V_S \to V_{S'}$$

осуществляет эквивалентность потоков $f^t\big|_{V_S}$ и $f'^t\big|_{V_{S'}}$. При этом в силу утверждения 23

$$h_*([\lambda]) = [\lambda'], \quad h_*([\mu]) = \pm[\mu'].$$

Поскольку

$$M^4 = V_S \cup V_A \cup V_R,$$

то остается продолжить этот гомеоморфизм на V_A и V_R. Для этого заметим, что $V_A \cap V_S = N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$ – трубчатая окрестность бутылки Клейна $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$ и $V_R \cap V_S = N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)$ – трубчатая окрестность узла $\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S$. В силу пункта 2) утверждения 21 множество

$$W = \Sigma_A \setminus \operatorname{int} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) = \Sigma_R \setminus \operatorname{int} N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)$$

является полноторием с меридианом μ. Аналогичные замечания верны для потока f'^t, при этом

$$h(N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)) = N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{S'}) \quad \text{и} \quad h(N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)) = N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{S'}).$$

Таким образом, гомеоморфизм $h\big|_{\partial W}\colon \partial W \to \partial W'$ переводит меридиан заполненного тора W в меридиан заполненного тора W'. Тогда по утверждению 12 гомеоморфизм h продолжается на заполненный тор W, а следовательно, и на многообразия Σ_A, Σ_R. Поэтому из равенств (28) и утверждения 23 следует, что гомеоморфизм h продолжается на окрестности V_A, V_R гомеоморфизмом, осуществляющим эквивалентность потоков f^t и f'^t. Лемма доказана.

3) Доказательство настоящего пункта будет состоять в построении четырех неособых потоков $f^t_i\colon \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$, $i = 1, 2, 3, 4$, с единственной седловой периодической орбитой, которая является скрученной и имеет индекс Морса 2, при этом пара (σ_A, σ_R) для потоков f^t_1, f^t_2, f^t_3, f^t_4 принимает значения

$$(2, 1); \quad (2, -1); \quad (-2, 1); \quad (-2, -1)$$

соответственно. Отсюда в силу леммы 7 будет следовать, что $M^4 \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ для любого неособого потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой периодической орбитой, которая является скрученной.

Построение потока f_1^t. Построим поток f_1^t как надстройку над диффеоморфизмом сферы $f\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ с тремя периодическими орбитами. Для этого опишем построение диффеоморфизма f.

Пусть

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

и $\zeta\colon \mathbb{R}^3 \setminus O \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ – диффеоморфизм, заданный формулой

$$\zeta(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \log_2 \|\mathbf{x}\| \right). \tag{29}$$

Воспользовавшись формулами (20), (21), определим диффеоморфизм

$$\Phi = \phi_{2-} \times \Phi_{1-}\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}.$$

Положим

$$\phi = \zeta^{-1} \Phi \zeta\colon \mathbb{R}^3 \setminus O \to \mathbb{R}^3 \setminus O.$$

Тогда искомый диффеоморфизм $f\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, с использованием стереографической проекции (19), определяется формулой

$$f(s) = \begin{cases} \vartheta_3^{-1} \phi \vartheta_3(s), & s \neq (0,0,0,\pm 1); \\ (0,0,0,\mp 1), & s = (0,0,0,\pm 1). \end{cases}$$

Построение потоков f_i^t, $i = 2, 3, 4$. Потоки f_2^t, f_3^t, f_4^t получаются из потока f_1^t с помощью инволюции (22), примененной к каноническим окрестностям V_R, V_A, V_R и V_A соответственно. Теорема 3 доказана.

4.3. Потоки с нескрученной седловой орбитой. В настоящем пункте рассмотрен класс неособых потоков f^t, имеющих единственную седловую орбиту S, которая является нескрученной. Как и в случае со скрученной седловой орбитой, мы ограничимся рассмотрением потоков f^t, для которых

$$S \in \Omega^2_{f^t};$$

потоки, для которых $S \in \Omega^1_{f^t}$, получаются из них обращением времени. Установлено, что полным инвариантом для них является класс эквивалентности узла, вложенного в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и индуцированного вложением устойчивого многообразия седловой орбиты в несущее пространство. По любому узлу в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ построен стандартный представитель в классе рассматриваемых потоков. Также доказано, что несущим многообразием всех таких потоков является многообразие $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Перейдем к детальной формулировке результатов.

Согласно теореме 1 любой неособый поток $f^t\colon M^4 \to M^4$ имеет связный аттрактор A_{f^t} и репеллер R_{f^t}, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$A_{f^t} = \Omega^0_{f^t}, \quad R_{f^t} = \Omega^3_{f^t} \cup W^{\mathrm{s}}_S.$$

Непосредственно отсюда следует, что аттрактор A_{f^t} состоит из одной притягивающей орбиты A. В силу пункта 2) теоремы 1 характеристическая секущая Σ_{f^t} является секущей для траекторий множества $W^{\mathrm{s}}_A \setminus A$. Методами, примененными для доказательства леммы 6, можно установить, что Σ_{f^t} является границей канонической окрестности V_A, т. е. $\Sigma_{f^t} = \Sigma_A \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

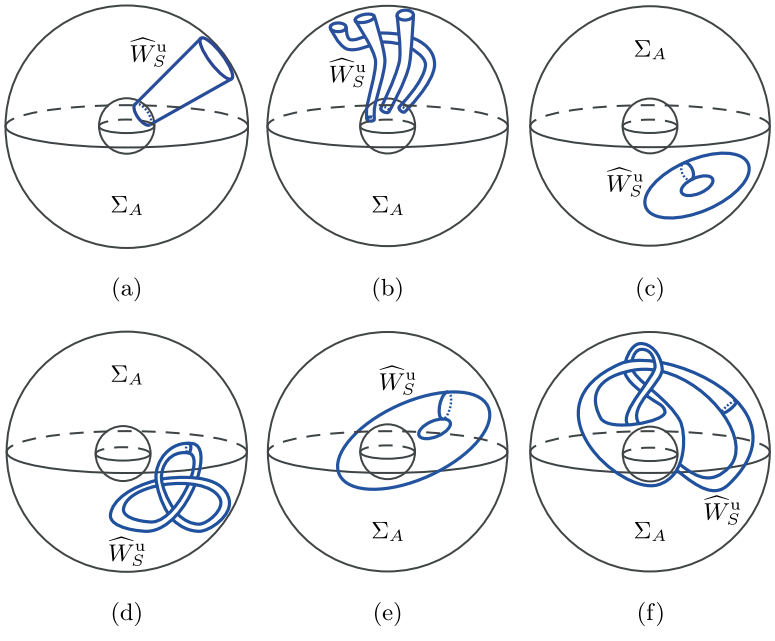

Рис. 26. Возможные вложения тора $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$ в многообразие Σ_A.

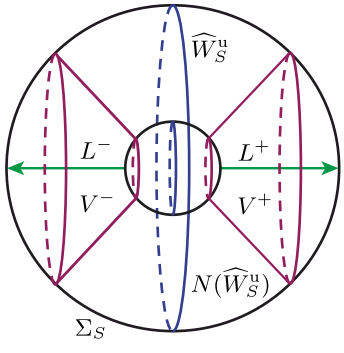

Рис. 27. Тор $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$ и узлы L^-, L^+ в многообразии Σ_S.

Поскольку седловая орбита S является нескрученной и $S \in \Omega^2_{f^t}$, то многообразие $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S = W^{\mathrm{u}}_S \cap \Sigma_{f^t}$ гомеоморфно двумерному тору (см. рис. 26) и $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) \subset \Sigma_{f^t}$ – его трубчатая окрестность, гомеоморфная $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$.

Из свойств вложения тора $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$ в многообразие $\Sigma_S \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ следует, что многообразие $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) = \Sigma_S \setminus \operatorname{int} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$ гомеоморфно паре заполненных торов V^-, V^+, являющихся трубчатыми окрестностями узлов L^-, L^+ таких, что (см. рис. 27)

$$L^- \sqcup L^+ = W^{\mathrm{s}}_S \cap \Sigma_S, \qquad \eta_S([L^\pm]) = 1.$$

В п. 4.3.1 мы установим следующий факт о числе отталкивающих орбит и расположении узлов L^-, L^+ на секущих в их бассейнах.

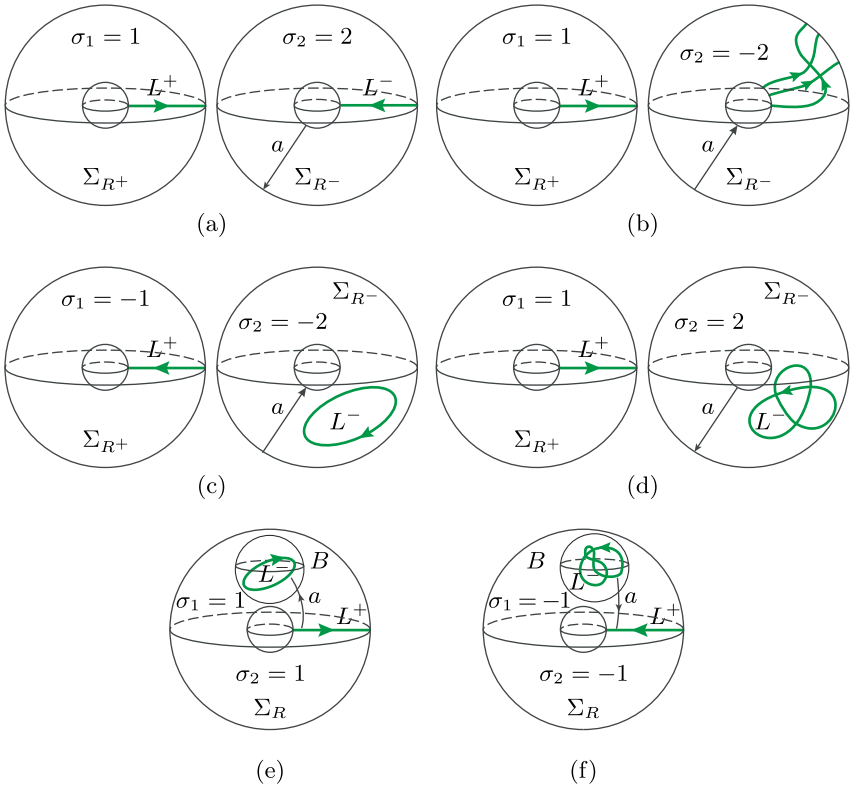

Рис. 28. Возможные вложения узлов L^-, L^+ в секущие бассейнов отталкивающих орбит.

Лемма 8. *Для неособого потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой S, которая нескручена, реализуются в точности две возможности*:

1) *множество $\Omega^3_{f^t}$ состоит из двух орбит R^-, R^+ и хотя бы один из узлов $L^- \subset \Sigma_{R^-}$, $L^+ \subset \Sigma_{R^+}$ является тривиальным (см. рис. 28 (a)–(d))*;
2) *множество $\Omega^3_{f^t}$ состоит из одной орбиты R, один из узлов L^-, L^+ лежит в 3-шаре $B \subset \Sigma_R$ таком, что 2-сфера $\Lambda = \partial B$ не делит многообразие Σ_A, другой является тривиальным и лежит в дополнении к этому шару (см. рис. 28 (e), (f))*.

Не уменьшая общности, будем полагать, что тривиальным является узел L^+. Пусть $a \subset \Sigma_A$ – узел, гомотопный в V_A узлу A, принадлежащий множеству $\Sigma_{R^-} \setminus L^-$ в случае 1) и пересекающий сферу ∂B в одной точке (см. утверждение 16) в случае 2). Каждому потоку f^t поставим в соответствие пару чисел σ_1, σ_2 по следующему правилу (см. рис. 28):

- если поток f^t имеет две отталкивающие орбиты, то

$$\sigma_1 = \eta_{R^+}([L^+]), \qquad \sigma_2 = 2\eta_{R^-}([a]);$$

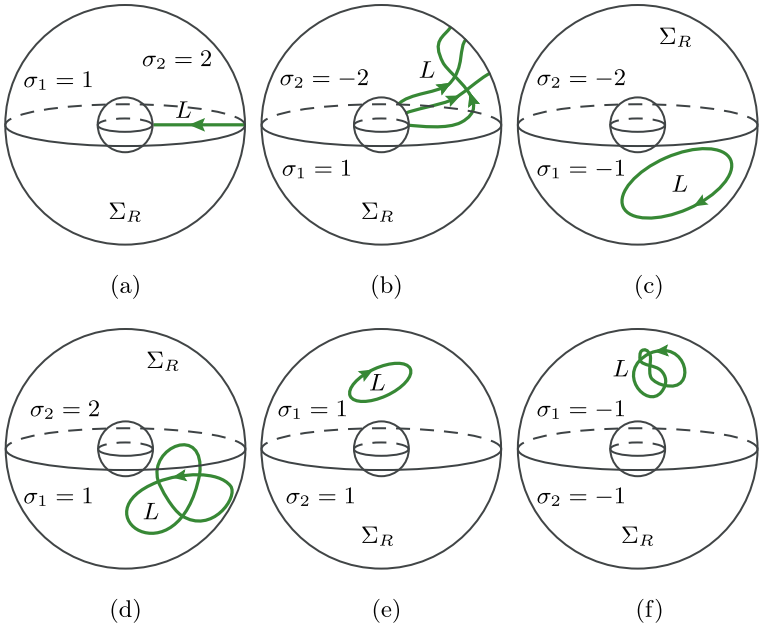

Рис. 29. Возможные схемы потоков f^t.

- если поток f^t имеет одну отталкивающую орбиту, то

$$\sigma_1 = \eta_R([L^+]), \qquad \sigma_2 = 1 \ \ (\text{или } -1)$$

в случае, когда дуга $a \cap \Sigma_R$ направлена внутрь (соответственно наружу) шара B.

Положим $L = L^-$ и, в случае двух отталкивающих орбит, пусть $R = R^-$.

Набор

$$\mathcal{S}_{f^t} = (\Sigma_R, \eta_R, L, \sigma_1, \sigma_2)$$

назовем *схемой потока* f^t (см. рис. 29).

Схемы

$$\mathcal{S}_{f^t} = (\Sigma_R, \eta_R, L, \sigma_1, \sigma_2), \qquad \mathcal{S}_{f'^t} = (\Sigma_{R'}, \eta_{R'}, L', \sigma'_1, \sigma'_2)$$

потоков f^t, f'^t назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$ такой, что

- $\eta_{R'}\varphi_* = \eta_R$;
- $\varphi(L) = L'$;
- $\sigma_1 = \sigma'_1$, $\sigma_2 = \sigma'_2$.

Теорема 4. *Неособые потоки $f^t\colon M^4 \to M^4$ и $f'^t\colon M'^4 \to M'^4$ с единственной седловой орбитой, которая нескручена, являются топологически эквивалентными тогда и только тогда, когда их схемы $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ эквивалентны.*

Для решения проблемы реализации потоков рассматриваемого класса опишем абстрактную схему.

Набор

$$\mathcal{S} = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta, L, \sigma_1, \sigma_2)$$

назовем *абстрактной схемой*, если:

- $\eta\colon \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}$ – изоморфизм;
- $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – локально плоский узел;
- $\sigma_1 \in \{-1, 1\}$;
- $\sigma_2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, и $|\sigma_2| = 2$, если узел L не гомотопен нулю в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Определение эквивалентности схемы потока некоторой абстрактной схеме дословно повторяет определение эквивалентности схем потоков. Классификацию потоков рассматриваемого класса завершает следующая теорема, конструктивно доказанная в п. 5.2.

Теорема 5. *Схема любого неособого потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой, которая нескручена, эквивалентна некоторой абстрактной схеме. Для любой абстрактной схемы $\mathcal{S}$ существует поток рассматриваемого класса, схема которого ей эквивалентна.*

Частным случаем рассматриваемых потоков являются надстройки над 3-диффеоморфизмами Морса–Смейла с единственной седловой орбитой. Согласно работе [44], несущим многообразием любого такого диффеоморфизма является сфера $\mathbb{S}^3$, а из работ [6], [8] следует, что полным инвариантом их топологической сопряженности также является вложение узла в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Непосредственным следствием теорем 4, 5, а также определений надстройки и параметров η_R, L, σ_1, σ_2 является приводимая ниже характеристика потоков рассматриваемого класса, являющихся надстройками над диффеоморфизмами.

Следствие 4. *Неособый поток $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой, которая нескручена, и инвариантом $\mathcal{S}_{f^t} = (\Sigma_R, \eta_R, L, \sigma_1, \sigma_2)$ эквивалентен надстройке над 3-диффеоморфизмом Морса–Смейла тогда и только тогда, когда*

$$\eta_R([L]) > 0, \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 2.$$

В частности, поток f^t с инвариантами $\eta_R([L]) = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$ эквивалентен надстройке над так называемыми *диффеоморфизмами Пикстона* [48]. В этом случае узел L является узлом Хопфа. Из результатов работ [1], [3] следует, что существует счетное число попарно не эквивалентных (объемлюще не гомеоморфных) хопфовских узлов (см. рис. 30). Согласно [6] любой узел Хопфа может быть реализован диффеоморфизмом Пикстона. В работе [49] установлено, что надстройка над диффеоморфизмом Пикстона, реализованным по нетривиальному узлу, является потоком с дико вложенными инвариантными многообразиями седловой орбиты. Несмотря на возможность дикого вложения инвариантных многообразий седловой орбиты, несущее многообразие любого потока f^t, являющегося надстройкой над 3-диффеоморфизмом, гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. Однако в общем случае 4-поток с одной седловой орбитой не эквивалентен надстройке. Тем не менее имеет место следующий результат.

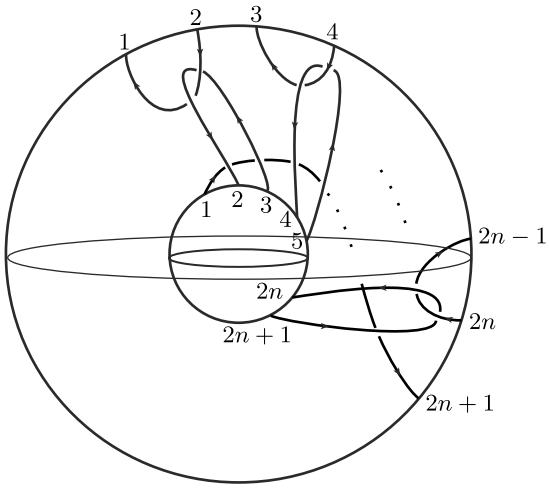

Рис. 30. Попарно не эквивалентные узлы Хопфа L_n, $n \geqslant 0$.

Теорема 6. *Несущее многообразие любого неособого потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой, которая нескручена, гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.*

4.3.1. *Число отталкивающих орбит потока.* Настоящий пункт посвящен доказательству леммы 8: для неособого потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой S, которая нескручена, реализуются в точности две возможности:

1) множество $\Omega^3_{f^t}$ состоит из двух орбит R^-, R^+ и хотя бы один из узлов $L^- \subset \Sigma_{R^-}$, $L^+ \subset \Sigma_{R^+}$ является тривиальным (см. рис. 28 (a)–(d));
2) множество $\Omega^3_{f^t}$ состоит из одной орбиты R, один из узлов L^-, L^+ лежит в 3-шаре $B \subset \Sigma_R$ таком, что 2-сфера $\Lambda = \partial B$ не делит многообразие Σ_A, другой является тривиальным и лежит в дополнении к этому шару (см. рис. 28 (e), (f)).

Доказательство леммы 8. В силу леммы 5 характеристическая секущая $\Sigma_{f^t} = \Sigma_A$ потока f^t обладает следующим свойством:

$$\Sigma_A \setminus \operatorname{int} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) = \Sigma_{\Omega^3_{f^t}} \setminus \operatorname{int}(V^+ \sqcup V^-). \tag{30}$$

Положим $Y = \Sigma_A \setminus \operatorname{int} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$. Поскольку $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$ – трубчатая окрестность двумерного тора $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$, то ∂Y состоит из двух двумерных торов T^+, T^-. При этом в силу формулы (30)

$$V^+ \cup_{g_+} Y \cup_{g_-} V^- = \Sigma_{\Omega^3_{f^t}}, \tag{31}$$

где $g_\pm\colon \partial V^\pm \to T^\pm$ – некоторый гомеоморфизм. Для множества Y в силу утверждения 20 и леммы 2 возможны следующие варианты:

1) Y состоит из двух компонент связности, хотя бы одна из которых является заполненным тором;

2) Y связно и содержит 2-сферу Λ такую, что множество $Y \setminus \Lambda$ состоит из двух компонент связности, замыкание одной из которых, $\dot{Y}^+$, гомеоморфно заполненному тору без 3-шара, а замыкание другой, $\dot{Y}^-$, гомеоморфно 3-шару без заполненного тора;

3) Y состоит из двух компонент связности, одна из которых гомеоморфна дополнению 3-сферы $\mathbb{S}^3$ до трубчатой окрестности нетривиального узла.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

1) Обозначим через Y^+, Y^- компоненты связности множества Y, ограниченные торами T^+, T^- соответственно. Тогда из формулы (31) вытекает, что множество $\Sigma_{\Omega^3_{ft}}$ также состоит из двух компонент связности. Следовательно, множество Ω^3_{ft} состоит в точности из двух орбит R^-, R^+ таких, что $\Sigma_{R^\pm} = V^\pm \cup_{g_\pm} Y^\pm$. Поскольку хотя бы одно из множеств Y^+, Y^- (скажем, Y^+ для определенности) гомеоморфно заполненному тору, то многообразие Σ_{R^+} получается склейкой двух заполненных торов $V^+ \cup_{g_+} Y^+$ (см. рис. 31). Поскольку многообразие Σ_{R^+} гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то в силу утверждений 13, 17 узел L^+ является тривиальным в Σ_{R^+}. Таким образом, случай 1) возможен и мы доказали утверждение леммы в этом случае.

2) Поскольку множество Y связно, то из формулы (31) следует, что множество $\Sigma_{\Omega^3_{ft}}$ также связно. Следовательно, множество Ω^3_{ft} состоит в точности из

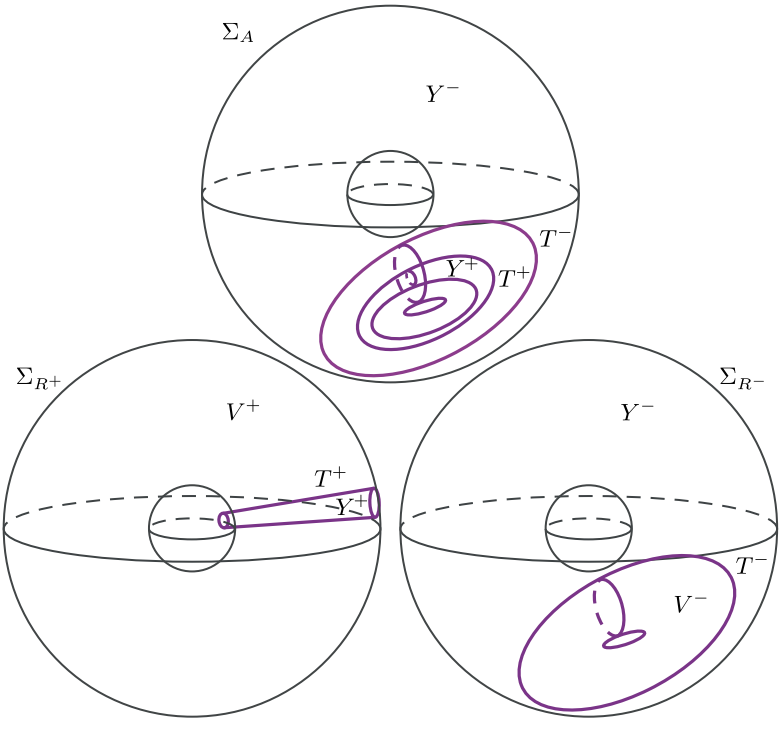

Рис. 31. Иллюстрация к доказательству леммы 8, случай 1).

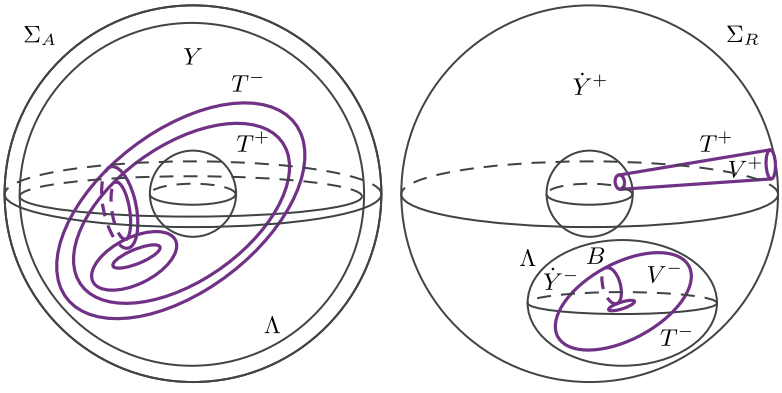

Рис. 32. Иллюстрация к доказательству леммы 8, случай 2).

одной орбиты R такой, что

$$\Sigma_R = V^+ \cup_{g_+} Y \cup_{g_-} V^-.$$

Кроме того, 2-сфера Λ разделяет в Σ_R заполненные торы V^+, V^-, а значит, и узлы L^+, L^-. С другой стороны, 2-сфера Λ в силу утверждения 16 ограничивает 3-шар $B \subset \Sigma_R$, в котором лежит один из этих заполненных торов, для определенности предположим, что это тор V^- (см. рис. 32). Тогда

$$B \setminus \operatorname{int} V^- = \dot{Y}^- \quad \text{и} \quad \Sigma_R \setminus \operatorname{int}(B \cup V^+) = \dot{Y}^+.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\Sigma_R \setminus \operatorname{int} V^+ = \dot{Y}^+ \cup B.$$

Поскольку $\dot{Y}^+ \cup B$ – заполненный тор, то в силу утверждения 13 узел L^+ является тривиальным в Σ_R.

3) Поскольку Y состоит из двух компонент связности, одна из которых гомеоморфна дополнению 3-сферы $\mathbb{S}^3$ до трубчатой окрестности нетривиального узла, то одна из компонент связности множества $\Sigma_{\Omega^3_{f^t}}$ получается из нее приклеиванием заполненного тора к ее границе. В силу утверждения 15 полученное множество не может быть гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Что говорит о нереализуемости случая 3). Лемма 8 доказана.

4.3.2. *Необходимые и достаточные условия эквивалентности потоков.* В настоящем пункте мы докажем теорему 4: неособые потоки $f^t\colon M^4 \to M^4$, $f'^t\colon M'^4 \to M'^4$ с единственной седловой орбитой, которая нескручена, топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их схемы $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ эквивалентны.

Доказательство теоремы 4. ($\Rightarrow$) Пусть неособые потоки $f^t\colon M^4 \to M^4$, $f'^t\colon M'^4 \to M'^4$ топологически эквивалентны посредством гомеоморфизма $h\colon M^4 \to M'^4$. Поскольку h переводит периодические орбиты потока f^t в периодические орбиты потока f'^t с сохранением направления движения по орбите и ее инвариантных многообразий, то

$$\Omega_{f'^t} = \{\mathcal{O}' = h(\mathcal{O}),\, \mathcal{O} \in \Omega_{f^t}\}.$$

Тогда, не уменьшая общности, можно считать, что

$$V_{\mathcal{O}'} = h(V_{\mathcal{O}}) \quad \text{и} \quad \Sigma_{f'^t} = h(\Sigma_{f^t}).$$

Следовательно, $\varphi = h\big|_{\Sigma_R} \colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$ – искомый гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность схем $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ в силу утверждения 23.

($\Leftarrow$) Пусть $\varphi \colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$ – гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность схем $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ потоков f^t, f'^t.

Построим по шагам гомеоморфизм $h \colon M^4 \to M'^4$, осуществляющий эквивалентность этих потоков.

Модификация гомеоморфизма φ в окрестности узла L^-. Из свойств локальной динамики потока f^t в окрестности седловой орбиты (см. п. 3.1) следует, что многообразие $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{T}^2 \times [-1,1]$ и его граница состоит из торов $T^- = \mathbb{T}^2 \times \{-1\}$, $T^+ = \mathbb{T}^2 \times \{1\}$, являющихся границами трубчатых окрестностей V^-, V^+ узлов L^-, L^+. При этом фундаментальная группа тора $T^\pm$ допускает образующие $\lambda^\pm$, $\mu^\pm$ такие, что

$$\eta_S([\lambda^\pm]) = 1, \quad \eta_S([\mu^\pm]) = 0.$$

Аналогичные образующие $\lambda'^\pm$, $\mu'^\pm$ допускает фундаментальная группа тора $T'^\pm = \partial V^\pm$.

Из определения эквивалентности схем $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ следует, что гомеоморфизм $\varphi \colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$ переводит узел L^- в узел L'^- с сохранением ориентации. Не уменьшая общности, будем считать, что $\varphi(V^-) = V'^-$. Тогда изоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом $\varphi\big|_{T^-} \colon T^- \to T'^-$, в образующих λ^-, μ^-, λ'^-, μ'^- задается матрицей

$$J_- = \begin{pmatrix} 1 & k_- \\ 0 & \delta_- \end{pmatrix}, \qquad k_- \in \mathbb{Z}, \quad \delta_- \in \{-1, 1\}.$$

Из утверждения 22 следует, что гомеоморфизм

$$\varphi_S = H_{S'} H_S^{-1} \colon V_S \to V_{S'}$$

осуществляет эквивалентность потоков $f^t\big|_{V_S}$ и $f'^t\big|_{V_{S'}}$. Следовательно,

$$\varphi_S(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) = \widehat{W}^{\mathrm{u}}_{S'}, \qquad \varphi_S(N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)) = N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{S'})$$

и гомеоморфизм φ_S переводит пару узлов L^-, L^+ в пару узлов L'^-, L'^+ с сохранением их ориентации. Тогда изоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом $\varphi_S\big|_{\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S}$, в образующих λ_S, μ_S, $\lambda_{S'}$, $\mu_{S'}$ задается матрицей

$$J_S = \begin{pmatrix} 1 & k_S \\ 0 & \delta_S \end{pmatrix}, \qquad k_S \in \mathbb{Z}, \quad \delta_S \in \{-1, 1\},$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если } \varphi_S(L^+) = L^+, \\ -1, & \text{если } \varphi_S(L^+) = L^-. \end{cases}$$

Определим диффеоморфизм $\overline{J}_\varepsilon\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ формулой

$$\overline{J}_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,r)=(\widetilde{J}(x_1,x_2),\varepsilon x_3,r),$$

где $\widetilde{J}\colon Ox_1x_2\to Ox_1x_2$ – линейный диффеоморфизм, заданный матрицей $J=J_-J_S^{-1}$.

Непосредственно проверяется, что $\overline{J}_\varepsilon g_{a_{+2}}=g_{a_{+2}}\overline{J}_\varepsilon$, $\overline{J}_\varepsilon(\overline{V}_{+2})=\overline{V}_{+2}$ и диффеоморфизм $\overline{J}_\varepsilon$ осуществляет эквивалентность потока ξ^t с самим собой. Тогда (см., например, [30; теорема 5.5]) существует единственный диффеоморфизм $\widehat{J}_\varepsilon\colon V_{+2}\to V_{+2}$, удовлетворяющий соотношению

$$\widehat{J}_\varepsilon v_{a_{+2}}=v_{a_{+2}}\overline{J}_\varepsilon,$$

который осуществляет эквивалентность потока $[a_{+2}]^t$ с самим собой. Положим

$$h_S=H_{S'}\widehat{J}_\varepsilon H_S^{-1}\colon V_S\to V_{S'}.$$

По построению $\varphi^{-1}h_S(V^-)=V^-$ и гомеоморфизм $\tau_S=\varphi^{-1}h_S$ индуцирует тождественное отображение в фундаментальной группе тора T^-. Тогда (см., например, [56]) гомеоморфизм τ_S может быть продолжен до гомеоморфизма $\tau_S\colon\Sigma_R\to\Sigma_R$, тождественного вне сколь угодно малой окрестности множества V^-. Положим

$$h_-=\varphi\tau_S\colon\Sigma_R\to\Sigma_{R'}.$$

Заметим, что гомеоморфизм h_- осуществляет эквивалентность схем $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ и совпадает с гомеоморфизмом h_S на заполненном торе V^-.

Построение гомеоморфизма h в случае двух отталкивающих орбит. В случае, когда поток f^t имеет две отталкивающие орбиты $R^-=R$ и R^+, трубчатая окрестность $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$ тора $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$ делит многообразие Σ_A на две компоненты связности Y^-, Y^+, ограниченные торами T^-, T^+ соответственно. В силу леммы 8 узел L^+ является тривиальным в многообразии Σ_{R^+}, а следовательно, по утверждению 17 множество Y^+ гомеоморфно заполненному тору. При этом $\Sigma_{R^+}=V^+\cup Y^+$. Аналогичные объекты для потока f'^t снабдим штрихом.

На множестве V^+ определен гомеоморфизм $h_+=h_S\big|_{V^+}\colon V^+\to V'^+$. Поскольку изоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом $h_+\big|_{T^+}\colon T^+\to T'^+$, в образующих λ^+, μ^+, λ'^+, μ'^+ задается матрицей J, то $h_+\big|_{T^+}$ переводит меридиан заполненного тора Y^+ в меридиан заполненного тора Y'^+. В этом случае согласно утверждению 13 гомеоморфизм h_+ продолжается на заполненный тор Y^+ гомеоморфизмом $h_+\colon\Sigma_{R^+}\to\Sigma_{R'^+}$.

На множестве Σ_A определен гомеоморфизм $h_A\colon\Sigma_A\to\Sigma_{A'}$, совпадающий с гомеоморфизмом h_S на $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$, с гомеоморфизмом h_- на Y^- и с гомеоморфизмом h_{R^+} на Y^+.

Поскольку $\sigma_i=\sigma'_i$, $i=1,2$, то в силу утверждения 23 гомеоморфизм $h_{\mathcal{O}}\colon\Sigma_{\mathcal{O}}\to\Sigma_{\mathcal{O}'}$, $\mathcal{O}\in\{R^-,A,R^+\}$, продолжается до гомеоморфизма $h_{\mathcal{O}}\colon V_{\mathcal{O}}\to V_{\mathcal{O}'}$, осуществляющего эквивалентность потоков $f^t\big|_{V_{\mathcal{O}}}$ и $f'^t\big|_{V_{\mathcal{O}'}}$. Таким образом, искомый гомеоморфизм $h\colon M^4\to M'^4$ совпадает с гомеоморфизмом $h_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}\in\{S,A,R^-,R^+\}$, на $V_{\mathcal{O}}$.

Построение гомеоморфизма h в случае одной отталкивающей орбиты. В силу леммы 8 узел L^+ (L'^+) является тривиальным на многообразии Σ_R ($\Sigma_{R'}$), а заполненный тор V^- (V'^-) лежит в 3-шаре $B \subset (\Sigma_R \setminus V^+)$ ($B' \subset (\Sigma_{R'} \setminus V'^+)$). Поскольку гомеоморфизм $h_-\colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$ переводит заполненный тор V^- в заполненный тор V'^-, то, не уменьшая общности, можно считать, что

$$B' = h_-(B) \subset (\Sigma_{R'} \setminus V'^+).$$

Поскольку узел L^+ является тривиальным в многообразии Σ_R, то существует 2-сфера $\Sigma^+ \subset \Sigma_R$, пересекающая заполненный тор V^+ по одному 2-диску d. Кроме того, эту сферу выберем не пересекающейся с 3-шаром B. Тогда множество

$$K = \Sigma_R \setminus (V^+ \cup \Sigma^+ \cup B)$$

является 3-кольцом (см. рис. 33). Аналогичную 2-сферу $\Sigma'^+ \subset \Sigma_{R'}$, не пересекающуюся с 3-шаром B', выберем так, что $\Sigma' \cap V'^+ = h_S(d)$, и получим кольцо

$$K' = \Sigma_{R'} \setminus (V'^+ \cup \Sigma'^+ \cup B').$$

Продолжим гомеоморфизм h_S на диск $\Sigma^+ \setminus d$ так, что

$$h_S(\Sigma^+ \setminus d) = \Sigma'^+ \setminus h_S(d).$$

Тогда на одной компоненте связности ∂B кольца K задан гомеоморфизм h_-, на другой – h_S. В силу следствия 2 эти гомеоморфизмы продолжаются с границ кольца K на само кольцо. Тем самым мы построили гомеоморфизм $h_R\colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$, совпадающий с h_S на V^+ и с h_- на шаре B.

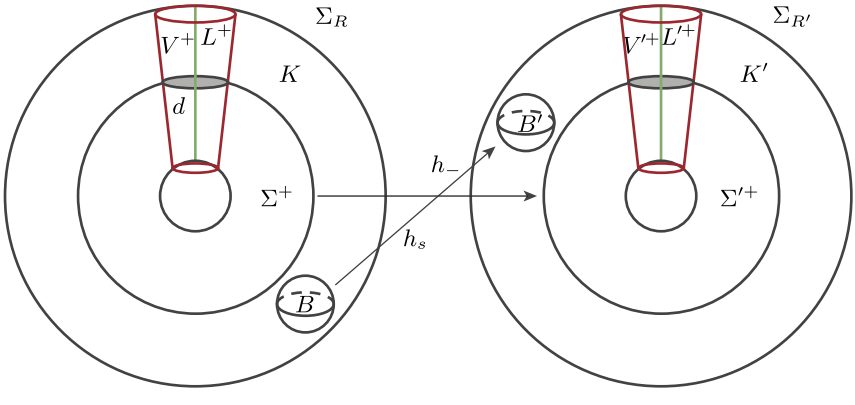

Рис. 33. Иллюстрация к доказательству теоремы 4.

Тогда на множестве Σ_A определен гомеоморфизм $h_A\colon \Sigma_A \to \Sigma_{A'}$, совпадающий с гомеоморфизмом h_S на $N(\widehat{W}_S^{\mathrm{u}})$ и с гомеоморфизмом h_R на $\Sigma_R \setminus \operatorname{int}(V^- \cup V^+)$. Поскольку $\sigma_i = \sigma'_i$, $i = 1, 2$, то в силу утверждения 23 гомеоморфизм $h_{\mathcal{O}}\colon \Sigma_{\mathcal{O}} \to \Sigma_{\mathcal{O}'}$, $\mathcal{O} \in \{R, A\}$, продолжается до гомеоморфизма $h_{\mathcal{O}}\colon V_{\mathcal{O}} \to V_{\mathcal{O}'}$, осуществляющего эквивалентность потоков $f^t\big|_{V_{\mathcal{O}}}$ и $f'^t\big|_{V_{\mathcal{O}'}}$. Таким образом, искомый гомеоморфизм $h\colon M^4 \to M'^4$ совпадает с гомеоморфизмом $h_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O} \in \{S, A, R\}$, на $V_{\mathcal{O}}$. Теорема 4 доказана.

4.3.3. *Реализация потоков по абстрактной схеме.* Напомним, что абстрактной схемой мы назвали набор

$$\mathcal{S} = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta, L, \sigma_1, \sigma_2)$$

со следующими свойствами:

- $\eta\colon \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}$ – изоморфизм;
- $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – локально плоский узел;
- $\sigma_1 \in \{-1, 1\}$;
- $\sigma_2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, и $|\sigma_2| = 2$, если узел L не гомотопен нулю в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

В настоящем пункте мы докажем теорему 5: схема любого неособого потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой, которая нескручена, эквивалентна некоторой абстрактной схеме. Для любой абстрактной схемы $\mathcal{S}$ существует поток рассматриваемого класса, схема которого ей эквивалентна.

Доказательство теоремы 5. То, что схема S_{f^t} любого неособого потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой, которая нескручена, является абстрактной схемой, непосредственно следует из ее построения. Покажем, как по любой абстрактной схеме $\mathcal{S} = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta, L, \sigma_1, \sigma_2)$ построить поток f^t, схема которого ей эквивалентна. Пусть $\mathcal{S} = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta, L, \sigma_1, \sigma_2)$ – некоторая абстрактная схема. Опишем реализацию отдельно для двух случаев:

1) $\eta([L]) \neq 0$,
2) $\eta([L]) = 0$.

В случае 1) сначала реализуем надстройкой любую схему вида

$$\mathcal{S} = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta, L, 1, 2), \qquad \eta([L]) > 0.$$

Для этого опишем построение диффеоморфизма $f_L\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ по узлу L. Искомый поток будет надстройкой над построенным диффеоморфизмом. Затем покажем, как модифицировать надстройку, чтобы получить поток, реализующий произвольную схему вида 1).

Построение диффеоморфизма $f_L\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$. Из формулы (20) следует, что

$$\Phi_{3+}^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

– линейное сжатие. Воспользовавшись формулами (12), (29), определим отображение $P\colon \mathbb{R}^3 \setminus O \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ формулой

$$P = p\zeta.$$

Пусть $\eta([L]) = m$, $m \in \mathbb{N}$, для узла $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда множество $\overline{L} = P^{-1}(L)$ состоит из Φ_{3+}-инвариантного объединения m дуг:

$$\overline{L} = \overline{L}_0 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_{3+}^{1-m}(\overline{L}_0).$$

Пусть $U(L) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – трубчатая окрестность узла L. Тогда $U(\overline{L}) = P^{-1}(U(L))$ есть Φ_{3+}-инвариантная окрестность дуг $\overline{L}$, состоящая из m компонент связности $U(\overline{L}_0) \sqcup \cdots \sqcup \Phi_{3+}^{1-m}(U(\overline{L}_0))$, каждая из которых диффеоморфна $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$.

Пусть

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\},$$

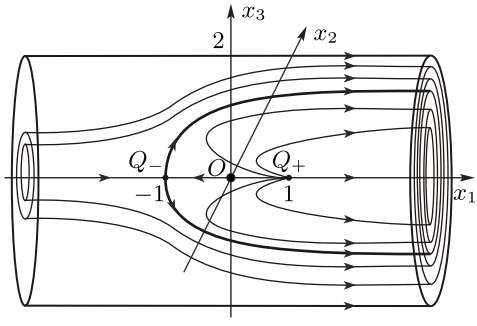

Рис. 34. Траектории потока ϕ^t.

и пусть диффеоморфизм $g\colon C \to C$ определен формулой

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2, x_3).$$

Определим диффеоморфизм $g_m\colon C \times \mathbb{Z}_m \to C \times \mathbb{Z}_m$ формулой

$$g_m(\mathbf{x}, j) = \big(g(\mathbf{x}), j + 1 \,(\mathrm{mod}\, m)\big), \qquad \mathbf{x} \in C, \quad j \in \mathbb{Z}_m.$$

Тогда существует диффеоморфизм $\xi\colon U(\overline{L}) \to C \times \mathbb{Z}_m$, который сопрягает диффеоморфизмы $\Phi_{3+}^{-1}\big|_{U(\overline{L})}$ и g_m. Обозначим через $\phi^t\colon C \to C$ поток (см. рис. 34), порожденный следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{cases} -\cos\dfrac{\pi\|\mathbf{x}\|}{2}, & \|\mathbf{x}\| \leqslant 2, \\ 1, & \|\mathbf{x}\| > 2; \end{cases} \\ \dot{x}_2 = \begin{cases} x_2, & \|\mathbf{x}\| < 1, \\ x_2\left(1 + \cos\dfrac{3\pi\|\mathbf{x}\|}{2}\right), & 1 \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant 2, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| > 2; \end{cases} \\ \dot{x}_3 = \begin{cases} x_3, & \|\mathbf{x}\| < 1, \\ x_3\left(1 + \cos\dfrac{3\pi\|\mathbf{x}\|}{2}\right), & 1 \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant 2, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| > 2. \end{cases} \end{cases}$$

По построению диффеоморфизм $\phi = \phi^1$ имеет две неподвижные точки: седло $Q_-(-1, 0, 0)$ и источник $Q_+(1, 0, 0)$, обе гиперболические. Одна устойчивая сепаратриса седла Q_- совпадает с открытым интервалом

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| < 1,\ x_2 = x_3 = 0\},$$

принадлежащим бассейну источника Q_+, а другая – с лучом

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 < -1,\ x_2 = x_3 = 0\}.$$

Кроме того, ϕ совпадает с диффеоморфизмом g вне шара

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\}.$$

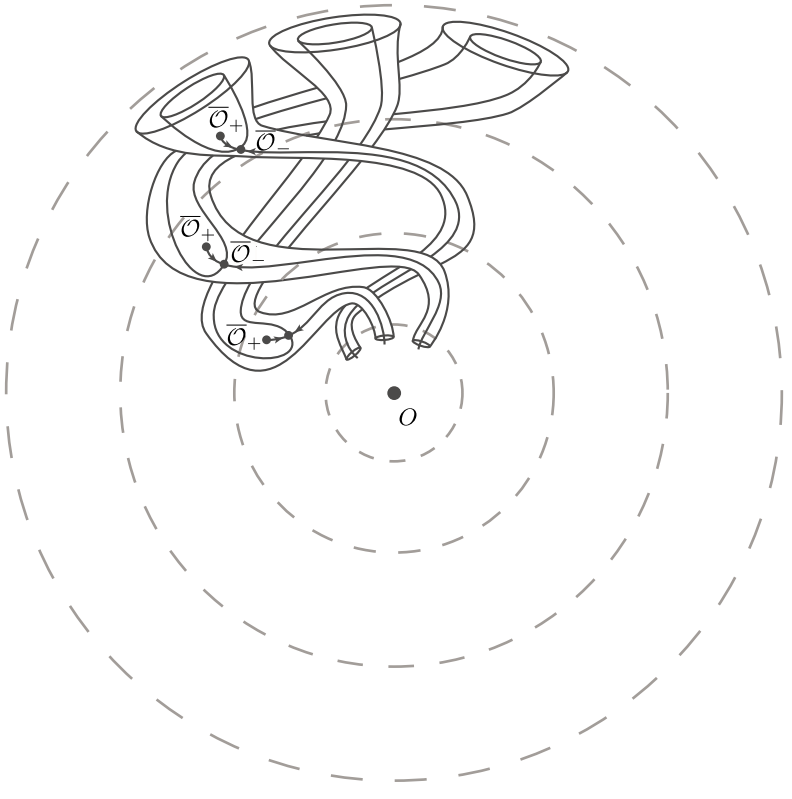

Рис. 35. Фазовый портрет диффеоморфизма $\overline{f}_L$.

Определим диффеоморфизм $\phi_m\colon C\times\mathbb{Z}_m\to C\times\mathbb{Z}_m$ формулой

$$\phi_m(\mathbf{x},j)=\big(\phi(\mathbf{x}),j+1\,(\mathrm{mod}\,m)\big),\qquad \mathbf{x}\in C,\quad j\in\mathbb{Z}_m.$$

Определим диффеоморфизм $\overline{f}_L\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ таким образом, чтобы $\overline{f}_L$ совпадал с Φ_{3+}^{-1} вне $U(\overline{L})$ и с диффеоморфизмом $\xi^{-1}\phi_m\xi$ на $U(\overline{L})$. Тогда $\overline{f}_L$ имеет в $U(\overline{L})$ две периодические орбиты периода m: источниковую $\overline{\mathcal{O}}_+=\xi^{-1}(Q_+\times\mathbb{Z}_m)$ и седловую $\overline{\mathcal{O}}_-=\xi^{-1}(Q_-\times\mathbb{Z}_m)$, обе гиперболические (см. рис. 35).

Теперь спроектируем диффеоморфизм $\overline{f}_L$ на 3-сферу посредством стереографической проекции (19), определив искомый диффеоморфизм формулой

$$f_L(s)=\begin{cases}\vartheta_3^{-1}\overline{f}_L\vartheta_3(s), & s\neq(0,0,0,+1);\\ (0,0,0,+1), & s=(0,0,0,+1).\end{cases}$$

Неблуждающее множество диффеоморфизма f_L состоит из четырех орбит: неподвижного стока $N(0,0,0,+1)$, неподвижного источника $\vartheta_3^{-1}(O)$, источниковой орбиты $\mathcal{O}_+=\vartheta_3^{-1}(\overline{\mathcal{O}}_+)$ периода m и седловой орбиты $\mathcal{O}_-=\vartheta^{-1}(\overline{\mathcal{O}}_-)$ периода m.

По построению поток $f^t=[f_L]^t$ имеет четыре периодические орбиты: притягивающую $A=[N]^t$, седловую $S=[\mathcal{O}_-]^t$ и отталкивающие $R_-=[\mathcal{O}_+]^t$,

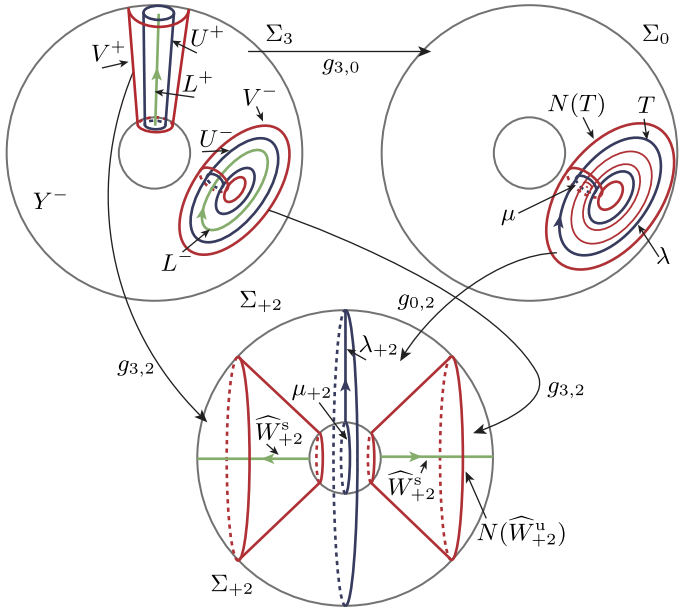

Рис. 36. Иллюстрация к доказательству теоремы 5, случай 2i).

$R_+ = [\vartheta_3^{-1}(O)]^t$. При этом схема потока f^t эквивалентна схеме

$$\mathcal{S} = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta, L, 1, 2), \qquad \eta([L]) = m.$$

Все остальные потоки случая 1) со схемами

$$\mathcal{S} = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta, L, \sigma_1, \sigma_2), \qquad \eta([L]) \neq 0,$$

получаются из потока f^t с помощью инволюции (22), примененной к соответствующим каноническим окрестностям в следующих ситуациях:

- к V_{R_-}, если $\eta([L]) < 0$;
- к V_{R_+}, если $\sigma_1 < 0$;
- к V_A, если $\sigma_2 < 0$.

В случае 2) поток будем реализовывать склеиванием канонических окрестностей.

Пусть $\mathcal{S} = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta, L, \sigma_1, \sigma_2)$ – схема, в которой узел $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ таков, что $\eta([L]) = 0$.

Дальнейшие построения проведем отдельно в двух различных подслучаях:

2i) $|\sigma_2| = 1$,

2ii) $|\sigma_2| = 2$

(обозначения см. в п. 3.1).

В случае 2i) (см. рис. 36) без потери общности будем считать, что

$$\Sigma_3 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \quad \eta_3 = \eta \quad \text{и} \quad L^- = L.$$

Поскольку $\eta([L]) = 0$, то существует 3-шар $B \subset \Sigma_3$, содержащий узел L^- в своей внутренности. Выберем тривиальный узел $L^+ \subset (\Sigma_3 \setminus B)$ так, что $\eta_3([L^+]) = \sigma_1$. Выберем попарно не пересекающиеся трубчатые окрестности $U^-, U^+ \subset \Sigma_3$ узлов L^-, L^+ соответственно. На торе $\partial U^\pm$ выберем образующие $\lambda^\pm$, $\mu^\pm$ так, что $\lambda^\pm$ гомотопна в $U^\pm$ узлу $L^\pm$ и $\mu^\pm$ – меридиан заполненного тора $U^\pm$. Положим

$$Y^+ = \mathrm{cl}\big(\Sigma_3 \setminus (U^+ \cup B)\big), \qquad Y^- = \mathrm{cl}(B \setminus U^-).$$

Как в доказательстве леммы 2, представим $\mathbb{S}^3$ как компактификацию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ северным и южным полюсами. Поскольку $\Sigma_0 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то определим проекцию $p_0 \colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \Sigma_0$ формулой

$$p_0(s, r) = \big(s, r \,(\mathrm{mod}\, 1)\big),$$

предполагая, что направление на прямой $\mathbb{R}$ выбрано так, что отрезок $\widetilde{\ell} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, направленный из точки $(s, 0)$ в точку $(s, 1)$, проектируется в узел $\ell = p(\widetilde{\ell})$ такой, что $\eta_0([\ell]) = \sigma_2$. Положим

$$\widetilde{\Lambda}_0 = \mathbb{S}^2 \times \{0\}, \qquad \widetilde{\Lambda}_1 = \mathbb{S}^2 \times \{1\}.$$

Через $B_0, B_1 \subset \mathbb{S}^3$ обозначим 3-шары, ограниченные 2-сферами $\widetilde{\Lambda}_0$, $\widetilde{\Lambda}_1$ и содержащие лучи $\{s\} \times [0, +\infty)$, $\{s\} \times [1, +\infty)$ соответственно. Положим $\widetilde{Q} = \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$.

Пусть $\widetilde{g}_- \colon B \to B_0$ – гомеоморфизм такой, что $\widetilde{g}_-(Y^-) \subset \widetilde{Q}$. Положим

$$\widetilde{T} = \widetilde{g}_-(\partial U^-), \quad \widetilde{\lambda} = \widetilde{g}_-(\lambda^-), \quad \widetilde{\mu} = \widetilde{g}_-(\mu^-).$$

Пусть $\widetilde{g}_+ \colon (\Sigma_3 \setminus \operatorname{int} Y^+) \to \widetilde{g}_-(U^-)$ – гомеоморфизм такой, что

$$\widetilde{\lambda} = \widetilde{g}_+(\lambda^+), \quad \widetilde{\mu} = \widetilde{g}_+(\mu^+), \quad \widetilde{g}_+(B) = B_1$$

и

$$\widetilde{g}_+(\widetilde{g}_-^{-1}(s, 0)) = (s, 1).$$

Выберем трубчатую окрестность $N(\widetilde{T}) \subset \operatorname{int} \widetilde{Q}$ тора $\widetilde{T}$. Обозначим через $V^-, V^+ \subset \Sigma_3$ такие трубчатые окрестности узлов L^-, L^+, что

$$\widetilde{g}_-(\partial V^-) \sqcup \widetilde{g}_+(\partial V^+) = \partial N(\widetilde{T}).$$

Положим

$$Y = \Sigma_3 \setminus \operatorname{int}(V^- \cup V^+), \qquad T = p_0(\widetilde{T}), \qquad N(T) = p_0(N(\widetilde{T}))$$

и

$$\lambda = p_0(\widetilde{\lambda}), \qquad \mu = p_0(\widetilde{\mu}).$$

Определим следующие вложения (см. рис. 36):

- $g_{3,0} \colon Y \to \Sigma_0$ действует так, что

$$g_{3,0}(y) = \begin{cases} p_0(\widetilde{g}_-(y)), & y \in Y \cap Y^-, \\ p_0(\widetilde{g}_+(y)), & y \in Y \cap Y^+; \end{cases}$$

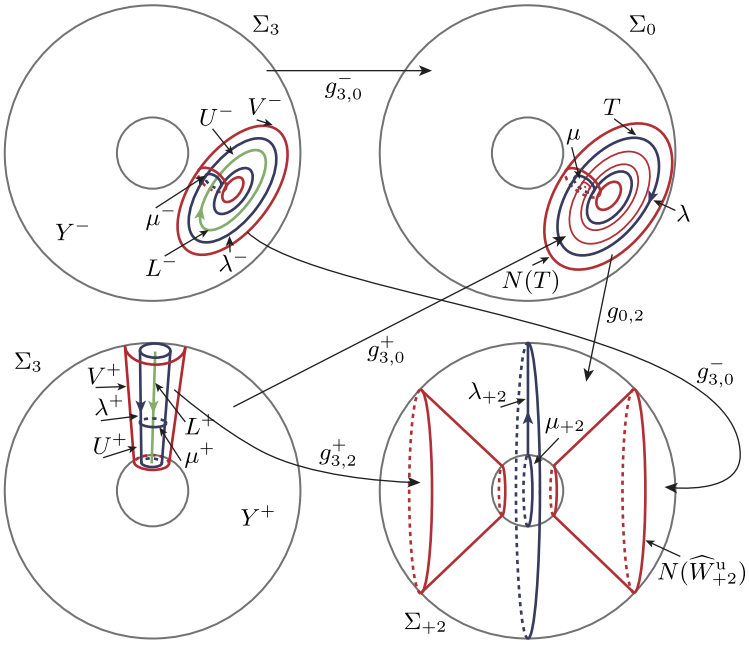

Рис. 37. Иллюстрация к доказательству теоремы 5, случай 2ii).

- $g_{0,2}\colon N(T) \to \Sigma_{+2}$ действует так, что

$$g_{0,2}(T) = \widehat{W}^{\mathrm{u}}_{+2}, \quad g_{0,2}(N(T)) = N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{+2}) \quad \text{и}$$
$$g_{0,2}(\lambda) = \lambda_{+2}, \quad g_{0,2}(\mu) = \mu_{+2};$$

- $g_{3,2}\colon V^- \cup V^+ \to \Sigma_{+2}$ действует так, что

$$g_{3,2}(L^- \cup L^+) = \widehat{W}^{\mathrm{s}}_{+2} \quad \text{и} \quad g_{3,2}\big|_{\partial Y} = g_{0,2}g_{3,0}\big|_{\partial Y}.$$

Положим $\widetilde{M}^4 = V_0 \sqcup V_{+2} \sqcup V_3$, обозначим через M^4 многообразие, полученное склеиванием многообразий V_0, V_{+2}, V_3 в силу гомеоморфизмов на образ $g_{3,0}$, $g_{0,2}$, $g_{3,2}$, и через $q\colon \widetilde{M}^4 \to M^4$ естественную проекцию. Определим поток $f^t\colon M^4 \to M^4$ формулой

$$f^t(x) = \begin{cases} q[a_0]^t \big(q\big|_{V_0}\big)^{-1}(x), & x \in q(V_0); \\ q[a_{+2}]^t \big(q\big|_{V_{+2}}\big)^{-1}(x), & x \in q(V_{+2}); \\ q[a_3]^t \big(q\big|_{V_3}\big)^{-1}(x), & x \in q(V_3). \end{cases}$$

По построению поток f^t имеет единственную седловую орбиту, которая нескручена, и схему, эквивалентную схеме $\mathcal{S}$.

В случае 2ii) (см. рис. 37) положим $\Sigma_3 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\eta_3 = \eta$ и $L^- = L$. Еще в одной копии Σ_3 выберем тривиальный узел L^+ так, что $\eta([L^+]) = \sigma_1$. Выберем трубчатую окрестность $U^\pm \subset \Sigma_3$ узла $L^\pm$. На торе $\partial U^\pm$ выберем образующие $\lambda^\pm$, $\mu^\pm$ так, что $\lambda^\pm$ гомотопна в $U^\pm$ узлу $L^\pm$ и $\mu^\pm$ – меридиан заполненного

тора $U^{\pm}$. Положим $Y^{\pm} = \Sigma_3 \setminus \operatorname{int} U^{\pm}$. Пусть $g_-\colon \Sigma_3 \to \Sigma_0$ гомеоморфизм такой, что $\eta_0([g_-(\ell)]) = \sigma_2/2$ для узла $\ell \subset \Sigma_3$ такого, что $\eta_3([\ell]) = 1$. Положим

$$T = g_-(\partial U^-), \qquad \lambda = g_-(\lambda^-), \qquad \mu = g_-(\mu^-).$$

Пусть $g_+\colon Y^+ \to g_-(U^-)$ – гомеоморфизм такой, что

$$g_+(\lambda^+) = \lambda, \qquad g_+(\mu^+) = \mu.$$

Выберем трубчатую окрестность $N(T) \subset \Sigma_0$ тора T.

Определим следующие вложения (см. рис. 37):

- $g^-_{3,0}\colon Y^- \to \Sigma_0$ действует так, что $g^-_{3,0}\big|_{Y^-} = g_-\big|_{Y^-}$;
- $g^+_{3,0}\colon Y^+ \to \Sigma_0$ действует так, что $g^+_{3,0}\big|_{Y^+} = g_+\big|_{Y^+}$;
- $g_{0,2}\colon N(T) \to \Sigma_{+2}$ действует так, что $g_{0,2}(N(T)) = N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{+2})$ и $g_{0,2}(\mu) = \mu_{+2}$;
- $g^-_{3,2}\colon V^- \to \Sigma_{+2}$ действует так, что $g^-_{3,2}\big|_{\partial V^-} = g_{0,2}g^-_{3,0}\big|_{\partial V^-}$;
- $g^+_{3,2}\colon V^+ \to \Sigma_{+2}$ действует так, что $g^+_{3,2}\big|_{\partial V^+} = g_{0,2}g^+_{3,0}\big|_{\partial V^+}$.

Дальнейшее построение многообразия M^4 и потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ аналогично случаю 2i). Теорема 5 доказана.

4.3.4. *Топология несущего многообразия потоков.* Настоящий пункт посвящен доказательству теоремы 6: несущее многообразие любого неособого потока $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой, которая нескручена, гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Доказательство теоремы 6. В силу теоремы 4 полным инвариантом топологической эквивалентности рассматриваемого потока f^t является класс эквивалентности его схемы $\mathcal{S}_{f^t} = (\Sigma_R, \eta_R, L, \sigma_1, \sigma_2)$. Если $\eta([L]) \neq 0$, то из доказательства теоремы 5 следует, что несущее многообразие реализованного по такой схеме потока гомеоморфно $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ и, таким образом, для этого случая теорема 6 доказана. Если $\eta_R([L]) = 0$, то доказательство проведем отдельно для двух подслучаев:

i) $|\sigma_2| = 1$;

ii) $|\sigma_2| = 2$.

В случае i) положим $W_R = V_S \cup V_R$. Тогда $M^4 \setminus \operatorname{int} W_R = V_A$ и, значит, $M^4 = V_A \cup W_R$, где $V_A \cong \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$. Покажем, что

$$W_R \cong \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1.$$

Отсюда в силу утверждения 14 будет следовать, что

$$M^4 = W_A \cup W_R \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1.$$

Из леммы 8 следует, что узел L^+ является тривиальным в Σ_R и для узла L^- существует 3-шар $B \subset \Sigma_R$ такой, что $V^- \subset \operatorname{int} B$ и $B \cap V^+ = \varnothing$. Выберем 4-шар $\widetilde{B} \subset V_R$ так, что $\widetilde{B} \cap \Sigma_R = \partial\widetilde{B} \cap \Sigma_R = B$. Тогда $B_0 = \operatorname{cl}(\partial\widetilde{B} \setminus B) \cong \mathbb{B}^3$. Положим $\widetilde{W}_R = \operatorname{cl}(W_R \setminus B_0)$ (см. рис. 38). По построению $\widetilde{W}_R$ – связное 4-многообразие с краем, из которого многообразие W_R получается отождествлением (с помощью меняющего ориентацию гомеоморфизма) двух непересекающихся копий

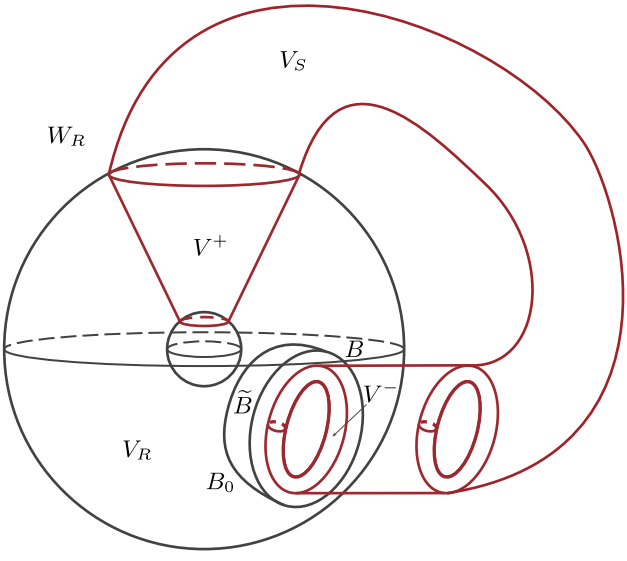

Рис. 38. Иллюстрация к доказательству теоремы 6, случай (i).

3-шара B_0 на его границе. Тогда доказательство теоремы сводится к доказательству того, что

$$\widetilde{W}_R \cong \mathbb{B}^4.$$

Для доказательства этого факта представим $\widetilde{W}_R$ в следующем виде:

$$\widetilde{W}_R = \widetilde{V}_R \cup \widetilde{V}_S, \quad \text{где} \ \ \widetilde{V}_R = \operatorname{cl}(V_R \setminus \widetilde{B}), \ \ \widetilde{V}_S = V_S \cup \widetilde{B}.$$

В силу леммы 6 имеем $\widetilde{V}_R \cong V_R$. По построению $\widetilde{V}_R \cap \widetilde{V}_S = V^+$. Поскольку узел L^+ является тривиальным в $\partial\widetilde{V}_R$, то по лемме 6

$$\widetilde{V}_{R^+} \cong V^+ \times [1,2], \quad \text{где} \ \ V^+ \cong V^+ \times \{1\}.$$

Аналогичным образом,

$$V_S \cong V^+ \times [-1,1], \quad \text{где} \ \ V^+ \cong V^+ \times \{1\}, \ \ V^- \cong V^+ \times \{-1\}.$$

Положим $\overline{W}_R = \widetilde{V}_{R^+} \cup V_S$. Тогда

$$\overline{W}_R \cong V^+ \times [-1,2] \cong \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1, \quad \text{где} \ \ V^- \cong V^+ \times \{-1\}.$$

С другой стороны, $\widetilde{B} \cap \overline{W}_R = V^-$. Согласно лемме 6

$$\widetilde{W}_R = \widetilde{B} \cup \overline{W}_R \cong \widetilde{B} \cong \mathbb{B}^4.$$

В случае (ii) положим $W_R = V_{R^-} \cup V_S \cup V_{R^+}$ (см. рис. 39). Тогда $M^4 = V_A \cup W_R$. Поскольку $V_A \cong \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$, то для доказательства леммы достаточно показать, что $W_R \cong \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$. Тогда в силу утверждения 14

$$M^4 = V_A \cup W_R \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1.$$

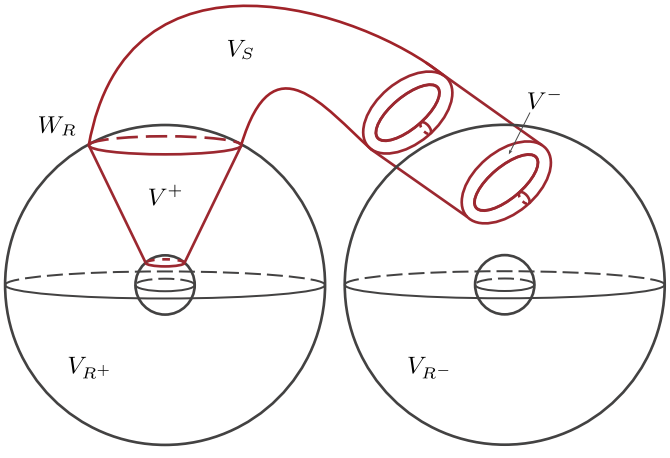

Рис. 39. Иллюстрация к доказательству теоремы 6, случай (ii).

Поскольку узел L^+ является тривиальным в Σ_{R^+}, то

$$V_{R^+} \cong V^+ \times [1,2], \quad \text{где} \quad V^+ \cong V^+ \times \{1\}.$$

Положим $W_{R^+} = V_S \cup V_{R^+}$. Тогда в силу леммы 6

$$W_{R^+} \cong V^+ \times [-1,2], \quad \text{где} \quad V^- \cong V^+ \times \{-1\}.$$

С другой стороны, $V_{R^-} \cap W_{R^+} = V^-$. Согласно лемме 6

$$\widetilde{W}_R = V_{R^-} \cup W_{R^+} \cong V_{R^-} \cong \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1.$$

Теорема 6 доказана.

5. Классификация неособых 4-потоков без гетероклинических пересечений

В настоящем разделе рассмотрен класс неособых потоков f^t без гетероклинических пересечений, заданных на замкнутых ориентируемых 4-многообразиях M^4. Установлено, что полным инвариантом для них является схема, состоящая из двумерных торов и бутылок Клейна, вложенных в замкнутое ориентируемое 3-многообразие. Выделен класс абстрактных схем, по каждой из которых построен стандартный представитель в классе рассматриваемых потоков. Данный раздел является адаптированным изложением результатов работы [16].

Перейдем к точной формулировке результатов.

В силу теоремы 1 и леммы 5 существуют канонические окрестности V_S седловых орбит S потока f^t и характеристическая секущая Σ_{f^t} такие, что

$$\Sigma_{f^t} \cap V_S = N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S), \qquad S \in \Omega^1_{f^t},$$
$$\Sigma_{f^t} \cap V_S = N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S), \qquad S \in \Omega^2_{f^t}.$$

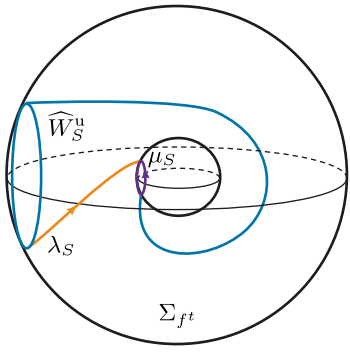

Рис. 40. Секущая $\Sigma_{f^t} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ с бутылкой Клейна $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$.

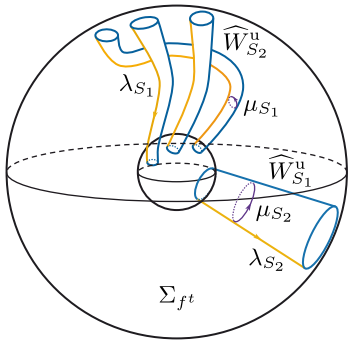

Рис. 41. Секущая $\Sigma_{f^t} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ с торами $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{S_1}$, $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{S_2}$.

С каждой поверхностью $\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S$ ($\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$) ассоциированы образующие:

параллель λ_S и меридиан μ_S

(см. рис. 40 и 41). Положим

$$L^{\mathrm{s}}_{f^t} = \bigsqcup_{S \in \Omega^1_{f^t}} \widehat{W}^{\mathrm{s}}_S, \qquad L^{\mathrm{u}}_{f^t} = \bigsqcup_{S \in \Omega^2_{f^t}} \widehat{W}^{\mathrm{u}}_S.$$

Согласно лемме 6

$$\Sigma^{\mathrm{s}}_{f^t} = \Big(\Sigma_{f^t} \setminus \bigsqcup_{S \in \Omega^1_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)\Big) \cup \bigsqcup_{S \in \Omega^1_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) = \bigsqcup_{A \in \Omega^0_{f^t}} \Sigma_A,$$

$$\Sigma^{\mathrm{u}}_{f^t} = \Big(\Sigma_{f^t} \setminus \bigsqcup_{S \in \Omega^2_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)\Big) \cup \bigsqcup_{S \in \Omega^2_{f^t}} N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S) = \bigsqcup_{R \in \Omega^3_{f^t}} \Sigma_R.$$

Геометрический смысл приведенных соотношений состоит в том, что вырезание трубчатых окрестностей $N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)$ ($N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$) поверхностей $\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S$ ($\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$) из характеристической секущей Σ_{f^t} и приклеивание к каждому граничному тору

заполненного тора так, что его меридиан отождествляется с узлом, гомотопным образующей μ_S, порождают многообразие, каждая компонента связности которого совпадает с секущей Σ_A (Σ_R). Таким образом, в силу утверждения 12 гомеоморфизм $\varphi\colon \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{f'^t}$ такой, что $L^{\mathrm{s}}_{f'^t} = \varphi(L^{\mathrm{s}}_{f^t})$ ($L^{\mathrm{u}}_{f'^t} = \varphi(L^{\mathrm{u}}_{f^t})$) продолжается до гомеоморфизма

$$\varphi^{\mathrm{s}}\colon \Sigma^{\mathrm{s}}_{f^t} \to \Sigma^{\mathrm{s}}_{f'^t} \qquad (\text{соответственно } \ \varphi^{\mathrm{u}}\colon \Sigma^{\mathrm{u}}_{f^t} \to \Sigma^{\mathrm{u}}_{f'^t})$$

тогда и только тогда, когда он переводит меридианы в меридианы. Обозначим через

$$\eta^{\mathrm{s}}_{f^t} \quad (\eta^{\mathrm{u}}_{f^t})$$

отображение, составленное из изоморфизмов η_A, $A \in \Omega^0_{f^t}$ (η_R, $R \in \Omega^3_{f^t}$).

Набор

$$\mathcal{S}_{f^t} = (\Sigma_{f^t}, L^{\mathrm{s}}_{f^t}, L^{\mathrm{u}}_{f^t}, \eta^{\mathrm{s}}_{f^t}, \eta^{\mathrm{u}}_{f^t})$$

назовем *схемой* потока f^t (см. рис. 42, 43).

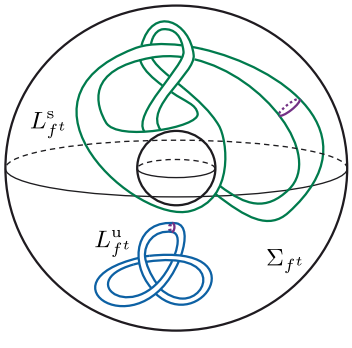

Рис. 42. Схема потока f^t с секущей $\Sigma_{f^t} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

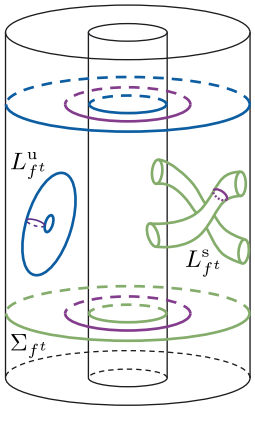

Рис. 43. Схема потока f^t с секущей $\Sigma_{f^t} \cong \mathbb{T}^3$.

Схемы

$$\mathcal{S}_{f^t} = (\Sigma_{f^t}, L^{\mathrm{s}}_{f^t}, L^{\mathrm{u}}_{f^t}, \eta^{\mathrm{s}}_{f^t}, \eta^{\mathrm{u}}_{f^t}), \qquad \mathcal{S}_{f'^t} = (\Sigma_{f'^t}, L^{\mathrm{s}}_{f'^t}, L^{\mathrm{u}}_{f'^t}, \eta^{\mathrm{s}}_{f'^t}, \eta^{\mathrm{u}}_{f'^t})$$

потоков f^t, f'^t назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{f'^t}$ такой, что

1) $L^{\mathrm{s}}_{f'^t} = \varphi(L^{\mathrm{s}}_{f^t})$, $L^{\mathrm{u}}_{f'^t} = \varphi(L^{\mathrm{u}}_{f^t})$;
2) изоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом $\varphi\big|_{W^{\mathrm{s}}_S}\colon W^{\mathrm{s}}_S \to W^{\mathrm{s}}_{S'}$ (или $\varphi\big|_{W^{\mathrm{u}}_S}\colon W^{\mathrm{u}}_S \to W^{\mathrm{u}}_{S'}$), действует в ассоциированных образующих следующим образом:

$$\varphi_*([\mu_S]) = [\delta_S \mu_{S'}], \quad \varphi_*([\lambda_S]) = [\lambda_{S'} * \mu^{k_S}_{S'}], \qquad \delta_S \in \{-1, +1\}, \quad k_S \in \mathbb{Z}; \tag{32}$$

3) $\eta^{\mathrm{s}}_{f'^t}\varphi^{\mathrm{s}}_* = \eta^{\mathrm{s}}_{f^t}$, $\eta^{\mathrm{u}}_{f'^t}\varphi^{\mathrm{u}}_* = \eta^{\mathrm{u}}_{f^t}$.

Теорема 7. *Неособые потоки f^t, f'^t без гетероклинических пересечений, заданные на замкнутых ориентируемых 4-многообразиях M^4, M'^4, топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их схемы $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ эквивалентны.*

Для решения проблемы реализации потоков рассматриваемого класса опишем абстрактную схему, введя следующие объекты:

- Σ – замкнутое ориентируемое 3-многообразие;
- L – семейство попарно не пересекающихся вложенных торов и бутылок Клейна $\widehat{W}_j$, $j = 1, \ldots, k$, с образующими λ_j и μ_j – параллелью и меридианом;
- $\widetilde{\mu}_j \subset N(\widehat{W}_j)$ – образующая на компоненте связности границы трубчатой окрестности $N(\widehat{W}_j)$, гомотопная μ_j.

Положим

$$\check{\Sigma} = \Sigma \setminus \bigsqcup_{j=1}^{k} N(\widehat{W}_j).$$

Определим $\widehat{\Sigma}$ как многообразие, полученное из $\check{\Sigma}$ приклеиванием заполненных торов к каждой граничной компоненте так, что меридиан заполненного тора отождествляется с узлом $\widetilde{\mu}_j$. Будем говорить, что многообразие Σ *приводимо системой поверхностей* L, если каждая компонента связности многообразия $\widehat{\Sigma}$ гомеоморфна многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

На каждой компоненте связности $\widehat{\Sigma}_m$ многообразия $\widehat{\Sigma}$ выберем изоморфизм $\eta_m\colon \pi_1(\widehat{\Sigma}_m) \to \mathbb{Z}$. Обозначим через η отображение, составленное из этих изоморфизмов, и будем называть его *числовым инвариантом* семейства L.

Набор

$$\mathcal{S} = (\Sigma, L^{\mathrm{s}}, L^{\mathrm{u}}, \eta^{\mathrm{s}}, \eta^{\mathrm{u}})$$

назовем *абстрактной схемой*, если Σ – многообразие, приводимое парой непересекающихся семейств L^{s}, L^{u} с числовыми инвариантами η^{s}, η^{u} соответственно.

Теорема 8. *Схема S_{f^t} любого неособого потока f^t без гетероклинических пересечений, заданного на замкнутом ориентируемом 4-многообразии M^4, является абстрактной схемой, и для любой абстрактной схемы $\mathcal{S}$ существует поток из рассматриваемого класса, схема которого ей эквивалентна.*

В силу следствия 1 топологическое многообразие M^4, допускающее неособый поток f^t без гетероклинических пересечений, является сглаживаемым. Тогда методами доказательства следствия 1 и теоремы 8 можно установить следующий факт.

Следствие 5. *Любой неособый поток f^t без гетероклинических пересечений, заданный на замкнутом ориентируемом 4-многообразии M^4, топологически эквивалентен некоторому потоку Морса–Смейла без неподвижных точек.*

5.1. Необходимые и достаточные условия эквивалентности потоков. В настоящем пункте мы докажем теорему 7: неособые потоки f^t, f'^t без гетероклинических пересечений, заданные на замкнутых ориентируемых 4-многообразиях M^4, M'^4, топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их схемы $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ эквивалентны.

Доказательство теоремы 7. ($\Rightarrow$) Пусть потоки f^t, f'^t топологически эквивалентны посредством некоторого гомеоморфизма $h\colon M^4 \to M^4$. Поскольку h переводит периодические орбиты потока f^t и их инвариантные многообразия с сохранением устойчивости в аналогичные объекты потока f'^t, то $h(V_{f^t}) = V_{f'^t}$ и $h(\Sigma_{f^t})$ – характеристическая секущая для траекторий потока f'^t на $V_{f'^t}$. Кроме того, гомеоморфизм $\varphi = h\big|_{\Sigma_{f^t}} \colon \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{f'^t}$ обладает следующими свойствами:

$$L^{\mathrm{s}}_{f'^t} = \varphi(L^{\mathrm{s}}_{f^t}), \qquad L^{\mathrm{u}}_{f'^t} = \varphi(L^{\mathrm{u}}_{f^t}).$$

Свойства 2) и 3) из определения эквивалентности схем непосредственно следуют из утверждения 23. Таким образом, гомеоморфизм φ осуществляет эквивалентность схем $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$.

($\Leftarrow$) Пусть схемы потоков f^t, f'^t эквивалентны посредством гомеоморфизма $\varphi\colon \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{f'^t}$. Построим по шагам гомеоморфизм $h\colon M^4 \to M'^4$, осуществляющий эквивалентность этих потоков.

1. *Модификация гомеоморфизма секущей.* Пусть $S \in \Omega^2_{f^t}$. Обозначим через $S' \in \Omega^2_{f'^t}$ седловую орбиту потока f'^t такую, что $\varphi(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) = \widehat{W}^{\mathrm{u}}_{S'}$. Не уменьшая общности, будем считать, что

$$\varphi(N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)) = N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{S'}).$$

Поскольку гомеоморфность многообразий $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$ и $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{S'}$ влечет равенство $i_S = i_{S'}$, то из утверждения 22 вытекает, что гомеоморфизм

$$\varphi_S = H_{S'} H_S^{-1} \colon V_S \to V_{S'}$$

осуществляет эквивалентность потоков $f^t\big|_{V_S}$ и $f'^t\big|_{V_{S'}}$. Следовательно,

$$\varphi_S(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) = \widehat{W}^{\mathrm{u}}_{S'}, \qquad \varphi_S(N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_S)) = N(\widehat{W}^{\mathrm{s}}_{S'}).$$

Тогда изоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом $\varphi_S\big|_{\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S}$, действует на образующих λ_S, μ_S, $\lambda_{S'}$, $\mu_{S'}$ следующим образом:

$$\varphi_{S*}([\mu_S]) = [\widetilde{\delta}_S \mu_{S'}], \quad \varphi_{S*}([\lambda_S]) = [\lambda_{S'} * \mu_{S'}^{\widetilde{k}_S}], \qquad \widetilde{\delta}_S \in \{-1, +1\}, \quad \widetilde{k}_S \in \mathbb{Z}.$$

Положим $\varepsilon = +1\,(-1)$, если гомеоморфизм $\varphi^{-1}\varphi_S\big|_{\partial\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S}$ не меняет (меняет) местами компоненты связности множества $\partial\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S$. Определим диффеоморфизм $\overline{J}_\varepsilon\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ формулой

$$\overline{J}_\varepsilon(x_1, x_2, x_3, r) = (\widetilde{J}(x_1, x_2), \varepsilon x_3, r),$$

где $\widetilde{J}\colon Ox_1x_2 \to Ox_1x_2$ – линейный диффеоморфизм, заданный матрицей

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{\delta}_S(k_S - \widetilde{k}_S) \\ 0 & \delta_S\widetilde{\delta}_S \end{pmatrix},$$

и k_S, δ_S определяются формулой (32).

Непосредственно проверяется, что

$$\overline{J}_\varepsilon g_{a_{\pm 2}} = g_{a_{\pm 2}}\overline{J}_\varepsilon, \qquad \overline{J}_\varepsilon(\overline{V}_{\pm 2}) = \overline{V}_{\pm 2}$$

и диффеоморфизм $\overline{J}_\varepsilon$ осуществляет эквивалентность потока ξ^t с самим собой. Тогда (см., например, [30; теорема 5.5]) существует единственный диффеоморфизм $\widehat{J}_\varepsilon\colon V_{\pm 2} \to V_{\pm 2}$, удовлетворяющий соотношению

$$\widehat{J}_\varepsilon v_{a_{\pm 2}} = v_{a_{\pm 2}}\overline{J}_\varepsilon,$$

который осуществляет эквивалентность потока $[a_{\pm 2}]^t$ с самим собой. Положим

$$h_S = H_{S'}\widehat{J}_\varepsilon H_S^{-1}\colon V_S \to V_{S'}.$$

По построению гомеоморфизм $\tau_S = \varphi^{-1}h_S\colon N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S) \to N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$ индуцирует тождественное отображение в ассоциированных образующих. Тогда (см., например, [34]) гомеоморфизм τ_S может быть продолжен до гомеоморфизма $\tau_S\colon \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{f^t}$, тождественного вне сколь угодно малой окрестности множества $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$.

Аналогичным образом гомеоморфизм τ_S строится для всех седловых орбит потока f^t. Определим гомеоморфизм $\tau\colon \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{f^t}$ как композицию всех этих гомеоморфизмов и положим

$$h = \varphi\tau\colon \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{f^t}.$$

2. *Продолжение гомеоморфизма h на окрестности периодических орбит.* По построению гомеоморфизм h совпадает с гомеоморфизмом h_S на $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_S)$ для любой седловой орбиты $S \in \Omega^2_{f^t}$ и, следовательно, он продолжается на каноническую окрестность V_S гомеоморфизмом h_S. Таким образом, гомеоморфизм h определен на каждой компоненте связности Σ_R многообразия $\Sigma^{\mathrm{u}}_{f^t}$. Обозначим через R' отталкивающую орбиту потока f'^t такую, что $h(\Sigma_R) = \Sigma_{R'}$. Тогда из условия $\eta^{\mathrm{u}}_{f'^t}\varphi^{\mathrm{u}}_* = \eta^{\mathrm{u}}_{f^t}$ и утверждения 23 следует, что гомеоморфизм h продолжается до гомеоморфизма $h_R\colon V_R \to V_{R'}$, осуществляющего эквивалентность потоков $f^t\big|_{V_R}$ и $f'^t\big|_{V_{R'}}$.

Аналогичным образом гомеоморфизм h продолжается на канонические окрестности притягивающих орбит. Теорема 7 доказана.

5.2. Реализация потоков по абстрактной схеме. В этом пункте мы докажем теорему 8: схема S_{f^t} любого неособого потока f^t без гетероклинических пересечений, заданного на замкнутом ориентируемом 4-многообразии M^4, является абстрактной схемой и для любой абстрактной схемы $\mathcal{S}$ существует поток из рассматриваемого класса, схема которого ей эквивалентна.

Доказательство теоремы 8. То, что схема S_{f^t} любого потока $f^t \in G_1(M^4_+)$ является абстрактной схемой, непосредственно следует из ее построения. Покажем, как по любой абстрактной схеме

$$\mathcal{S} = (\Sigma, L^{\mathrm{s}}, L^{\mathrm{u}}, \eta^{\mathrm{s}}, \eta^{\mathrm{u}})$$

построить поток f^t из рассматриваемого класса, схема которого ей эквивалентна.

Напомним, что Σ – замкнутое ориентируемое 3-многообразие, приводимое наборами $L^{\mathrm{u}}, L^{\mathrm{s}} \subset \Sigma$ торов и бутылок Клейна. Положим

$$M_0 = \Sigma \times [-1, +1], \qquad \Sigma_- = \Sigma \times \{-1\}, \qquad \Sigma_+ = \Sigma \times \{+1\}.$$

Определим на многообразии $\Sigma \times \mathbb{R}$ поток B^t_0 формулой

$$B^t_0(s, r) = (s, r + t).$$

По определению абстрактной схемы $\widehat{L}^{\mathrm{u}} = L^{\mathrm{u}} \times \{-1\}$ – семейство попарно не пересекающихся вложенных в Σ_- торов и бутылок Клейна $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_j$, $j = 1, \ldots, k^{\mathrm{u}}$, с образующими λ^{u}_j, μ^{u}_j. Положим $M^{\mathrm{u}}_j = V_{+2}$ ($M^{\mathrm{u}}_j = V_{-2}$), если $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_j$ – тор (бутылка Клейна), где V_{+2} (V_{-2}) – каноническая окрестность нескрученной (скрученной) периодической орбиты с индексом Морса 2. Положим

$$M^{\mathrm{u}} = \bigsqcup_{j=1}^{k^{\mathrm{u}}} M^{\mathrm{u}}_j$$

и обозначим через B^t_{u} совокупность $[a_{\pm 2}]^t$ на M^{u}.

Пусть $g^{\mathrm{u}}_j \colon N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{\pm 2}) \to \Sigma_-$ – вложение трубчатой окрестности $N(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{\pm 2}) \subset M^{\mathrm{u}}_j$ поверхности $\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{\pm 2}$ такое, что

$$g^{\mathrm{u}}_j(\widehat{W}^{\mathrm{u}}_{\pm 2}) = \widehat{W}^{\mathrm{u}}_j, \qquad g^{\mathrm{u}}_j(\lambda_{\pm 2}) = \lambda^{\mathrm{u}}_j, \qquad g^{\mathrm{u}}_j(\mu_{\pm 2}) = \mu^{\mathrm{u}}_j.$$

Обозначим через $g^{\mathrm{u}} \colon M^{\mathrm{u}} \to \Sigma_-$ отображение, составленное из вложений g^{u}_j. Поскольку многообразие Σ_- приводимо семейством поверхностей $\widehat{L}^{\mathrm{u}}$, то каждая компонента связности $\widehat{\Sigma}^{\mathrm{u}}_m$, $m \in \{1, \ldots, n^{\mathrm{u}}\}$, границы многообразия $M^0 \cup_{g^{\mathrm{u}}} M^{\mathrm{u}}$, отличная от Σ_+, гомеоморфна многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и оснащена изоморфизмом $\eta^{\mathrm{u}}_m \colon \pi_1(\widehat{\Sigma}^{\mathrm{u}}_m) \to \mathbb{Z}$. Пусть $\widetilde{g}^{\mathrm{u}}_m \colon \Sigma_3 \to \widehat{\Sigma}^{\mathrm{u}}_m$ – гомеоморфизм такой, что

$$\eta^{\mathrm{u}}_m([\widetilde{g}^{\mathrm{u}}_m(c)]) = 1$$

для кривой $c \subset \Sigma_3$, гомологичной периодической орбите на V_3. Положим $V^{\mathrm{u}} = V_0 \times \mathbb{Z}_{n^{\mathrm{u}}}$ и обозначим через $\widetilde{g}^{\mathrm{u}}$ отображение, составленное из гомеоморфизмов $\widetilde{g}^{\mathrm{u}}_m$, а через A^t_{u} совокупность потоков $[a_3]^t$ на V^{u}.

Аналогичным образом по семейству $\widehat{L}^{\mathrm{s}} = L^{\mathrm{s}} \times \{+1\}$ построим многообразия M^{s}, V^{s}, отображения g^{s}, $\widetilde{g}^{\mathrm{s}}$ и потоки B^t_{s}, A^t_{s}. Положим

$$\widetilde{M}^4 = V^{\mathrm{s}} \sqcup M^{\mathrm{s}} \sqcup M_0 \sqcup M^{\mathrm{u}} \sqcup V^{\mathrm{u}},$$

обозначим через M^4 многообразие, полученное склеиванием многообразий V^{s}, M^{s}, M_0, M^{u}, V^{u} в силу гомеоморфизмов на образ g^{s}, g^{u}, $\widetilde{g}^{\mathrm{s}}$, $\widetilde{g}^{\mathrm{u}}$, и через $q\colon \widetilde{M}^4 \to M^4$ естественную проекцию. Определим поток $f^t\colon M^4 \to M^4$ формулой

$$f^t(x) = \begin{cases} q\big(B^t_0\big(\big(q\big|_{M_0}\big)^{-1}(x)\big)\big), & x \in q(M_0); \\ q\big(B^t_{\mathrm{s}}\big(\big(q\big|_{M^{\mathrm{s}}}\big)^{-1}(x)\big)\big), & x \in q(M^{\mathrm{s}}); \\ q\big(A^t_{\mathrm{s}}\big(\big(q\big|_{V^{\mathrm{s}}}\big)^{-1}(x)\big)\big), & x \in q(N^{\mathrm{s}}); \\ q\big(B^t_{\mathrm{u}}\big(\big(q\big|_{M^{\mathrm{u}}}\big)^{-1}(x)\big)\big), & x \in q(M^{\mathrm{u}}); \\ q\big(A^t_{\mathrm{u}}\big(\big(q\big|_{V^{\mathrm{u}}}\big)^{-1}(x)\big)\big), & x \in q(N^{\mathrm{u}}). \end{cases}$$

Теорема 8 доказана.

6. Топология 4-многообразия, допускающего неособые потоки с седлами одинакового индекса Морса

В настоящем разделе мы установим топологию многообразия M^4, допускающего неособый поток с седловыми орбитами одинакового индекса Морса. Данный раздел является адаптированным изложением результатов работы [17].

Теорема 9. *Пусть $f^t\colon M^4 \to M^4$ – неособый поток, все седловые орбиты которого имеют одинаковый индекс Морса. Тогда $M^4 \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.*

6.1. Динамически упорядоченная фильтрация потока f^t. В этом пункте мы устанавливаем структуру периодических орбит неособого потока $f^t\colon M^4 \to M^4$, все седловые орбиты которого имеют индекс Морса 1. Поскольку M^4 – ориентируемое многообразие, то все притягивающие и отталкивающие орбиты потока являются нескрученными. Не уменьшая общности, мы можем считать, что все седловые орбиты потока f^t являются нескрученными, так как в противном случае этого можно достичь, применив бифуркацию удвоения периода к каждой седловой орбите, имеющей неориентируемое неустойчивое многообразие (см. рис. 44). Тогда k_i, $i \in \{0,1,3\}$, – число орбит потока f^t с индексом Морса i. Учитывая, что $\beta_0 = 1$ в силу связности многообразия M^4 и по условию $k_2 = 0$, из утверждения 3 мы получаем следующую структуру периодических орбит потока f^t:

$$k_0 \geqslant 1, \tag{33}$$

$$k_1 \geqslant k_0 - 1, \tag{34}$$

$$k_3 = 1. \tag{35}$$

Из соотношений (33), (34), (35) следует, что общее число периодических орбит потока f^t равно $k = k_0 + k_1 + 1$. Перенумеруем периодические орбиты в порядке возрастания индекса Морса и так, чтобы введенный порядок, называемый *динамическим*, удовлетворял отношению Смейла:

$$\mathcal{O}_1 \prec \cdots \prec \mathcal{O}_{k_0} \prec \mathcal{O}_{k_0+1} \prec \cdots \prec \mathcal{O}_{k-1} \prec \mathcal{O}_k, \tag{36}$$

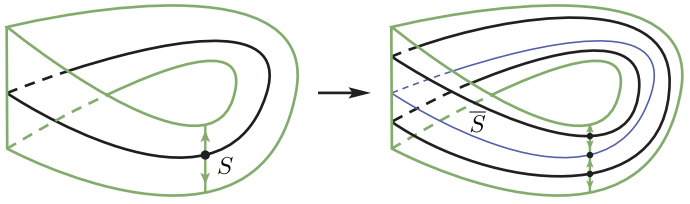

Рис. 44. Бифуркация удвоения периода седловой орбиты S.

где $\mathcal{O}_j$, $j \in \{1, \dots, k_0\}$, – притягивающие орбиты, $\mathcal{O}_j$, $j \in \{k_0+1, \dots, k-1\}$, – седловые орбиты, $\mathcal{O}_k$ – отталкивающая орбита. Пусть

$$\varnothing = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{k-1} \subset M_k = M^4 \tag{37}$$

– разложение на круговые ручки, соответствующее порядку (36) и такое, что

$$M_j \cong M_{j-1} \cup_{\psi_j} V_{\mathcal{O}_j}, \tag{38}$$

где $\psi_j \colon \Sigma^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}_j} \to \partial M_{j-1}$ – некоторое вложение.

Для исследования топологии множеств фильтрации (37) мы введем некоторые обозначения и докажем вспомогательные факты.

6.2. Перестройка 3-многообразия вдоль 2-тора. Обозначим через $L_{p,q}$ линзовое пространство. Положим

$$E = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 = L_{0,1}, \qquad P^{n+1} = \mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Через $(M)_{p,q}$ будем обозначать 3-многообразие, полученное из замкнутого ориентируемого 3-многообразия M (p,q)-хирургией Дэна вдоль некоторого оснащенного узла в M.

Пусть A – замкнутое связное ориентируемое 3-многообразие, в которое вложен толстый тор $e \colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{B}^1 \to A$ так, что $N(T) = e(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{B}^1)$ – трубчатая окрестность двумерного тора $T = e(\mathbb{T}^2 \times \{0\})$ с краями $T_- = e(\mathbb{T}^2 \times \{-1\})$ и $T_+ = e(\mathbb{T}^2 \times \{1\})$. Пусть $\overline{A} = (P^3 \times \mathbb{S}^0) \sqcup (A \setminus \operatorname{int} N(T))$ и $\psi \colon \partial P^3 \times \mathbb{S}^0 \to \partial N(T)$ – такой гомеоморфизм, что для меридиана $c \subset \partial P^3$ узлы $\psi(c \times \{-1\}) \subset T_-$ и $\psi(c \times \{1\}) \subset T_+$ гомотопны в $N(T)$. Многообразие

$$A^T = \overline{A}/_{\psi}, \tag{39}$$

где $\overline{A}/_{\psi}$ – факторпространство, полученное из $\overline{A}$ по минимальному отношению эквивалентности $\sim$, для которого $x \sim \psi(x)$, будем называть *перестроенным из A вдоль тора T*. Обозначим через $p \colon \overline{A} \to A^T$ естественную проекцию. Заполненные торы

$$P^1_T = p(P^3 \times \{-1\}), \qquad P^2_T = p(P^3 \times \{1\})$$

в многообразии A^T будем называть *ассоциированными с T полноториями*.

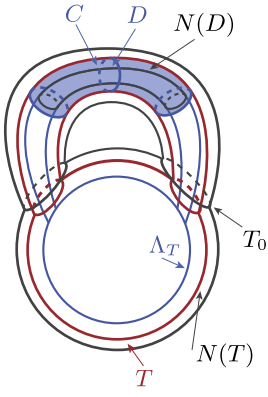

Рис. 45. Сфера Λ_T.

В случае, когда тор T сжимаем на многообразии A, с ним связана *ассоциированная 2-сфера* $\Lambda_T \subset A$, построенная следующим образом. Согласно лемме 6.1 из [27] существуют нестягиваемый узел $c \subset T$ и 2-диск $D \subset A$ с трубчатой окрестностью $N(D)$ такие, что $D \cap T = \partial D = c$. По построению граница множества $N(T) \cup N(D)$ состоит из 2-сферы Λ_T и 2-тора T_0 (см. рис. 45), при этом $\Lambda_T \cap T = \varnothing$.

Обозначим через $N(\Lambda_T)$ трубчатую окрестность сферы Λ_T. Существуют две возможности:

1) Λ_T делит A;

2) Λ_T не делит A.

В случае 1) многообразие $A \setminus \operatorname{int} N(\Lambda_T)$ состоит из двух компонент связности A_1, A_2, в точности одна из которых (положим для определенности A_2) содержит диск D. Обозначим через $\widetilde{A}_i$, $i = 1, 2$, многообразие, полученное из многообразия A_i приклеиванием 3-шара B_i к его границе. В случае 2) обозначим через $\widetilde{A}$ многообразие, полученное из многообразия $A \setminus \operatorname{int} N(\Lambda_T)$ приклеиванием двух 3-шаров B_1, B_2 к его границе.

Лемма 9. *Многообразия A, A^T имеют следующий вид*:

1) $A \cong \widetilde{A}_1 \# \widetilde{A}_2$, $A^T \cong L_{p,q} \# \widetilde{A}_1 \sqcup (\widetilde{A}_2)_{p,q}$ *в случае* 1);

2) $A \cong E \# \widetilde{A}$, $A^T \cong L_{p,q} \# (\widetilde{A})_{p,q}$ *в случае* 2).

Кроме того, один из ассоциированных полноториев (*положим P^2_T для определенности*) *является подмножеством $L_{p,q}$ таким, что $L_{p,q} \setminus \operatorname{int} P^2_T \cong P^3$.*

Доказательство. Представление многообразия A в виде $A \cong \widetilde{A}_1 \# \widetilde{A}_2$ в случае 1) (или в виде $A \cong E \# \widetilde{A}$ в случае 2)) при условии, что сфера Λ_T делит (соответственно не делит) его, следует из утверждения 9. В случае 1) $B_2 \cup N(D)$ – заполненный тор в $\widetilde{A}_2$ и, следовательно, торы T_-, T_+ ограничивают заполненные торы P_-, P_+ в $\widetilde{A}_2$. Для определенности предположим, что $B_2 \subset P_- \subset P_+$. Тогда $P_- \cup_\psi (P^3 \times \{-1\})$ – линзовое пространство $L_{p,q}$ и

$$(\widetilde{A}_2 \setminus P_+) \cup_\psi (P^3 \times \{-1\}) = (\widetilde{A}_2)_{p,q}.$$

Таким образом,

$$A^T \cong L_{p,q} \# \widetilde{A}_1 \sqcup (\widetilde{A}_2)_{p,q} \quad \text{и} \quad L_{p,q} \setminus \operatorname{int} P^2_T \cong P^3.$$

В случае 2) доказательство аналогично. Лемма доказана.

Многообразие A назовем *E-неприводимым*, если оно не имеет слагаемого E в разложении в связную сумму и $\beta_1(A) \leqslant 1$.

Лемма 10. *Если A есть E-неприводимое многообразие, то любой двумерный тор T сжимаем в нем и многообразие A^T состоит из двух компонент связности, хотя бы одна из которых является E-неприводимой.*

Доказательство. Поскольку $\beta_1(A) \leqslant 1$, то тор T сжимаем в A. Тогда в силу леммы 9 $A \cong \widetilde{A}_1 \# \widetilde{A}_2$ и A^T гомеоморфно одному из многообразий следующего вида:

- $A^T \cong L_{p,q} \# \widetilde{A}_1 \sqcup (\widetilde{A}_2)_{p,q}$, $p \neq 0$;
- $A^T \cong E \# \widetilde{A}_1 \sqcup \widetilde{A}_2$, $p = 0$.

Таким образом, многообразие A^T содержит E-неприводимую компоненту связности – либо $L_{p,q} \# \widetilde{A}_1$, либо $\widetilde{A}_2$. Лемма доказана.

6.3. Топология многообразий фильтрации. Для многообразия M_j из фильтрации (37) положим $Q_j = \partial M_j$.

Лемма 11. *В фильтрации (37) каждая компонента связности многообразия Q_j, $j \in \{1, \dots, k-1\}$, гомеоморфна E.*

Доказательство. Из разложения (37) следует, что Q_j состоит из j копий многообразия E, где $j \in \{1, \dots, k_0\}$, и $Q_{k-1} \cong E$. Из формулы (38) следует, что $Q_{j-1} \cong Q_j^{T_j}$ для некоторого тора $T_j \subset Q_j$ при $j \in \{k_0+1, \dots, k-1\}$.

Дальнейшее доказательство разобьем на шаги.

Шаг I. *Покажем, что многообразие Q_j, $j \in \{k_0+1, \dots, k-2\}$, не содержит E-неприводимых компонент связности.*

Предположив противное, мы получим, что многообразие Q_j для некоторого $j \in \{k_0+1, \dots, k-2\}$ содержит E-неприводимую компоненту связности A и $T_j \subset A$. Поскольку $Q_{j-1} \cong Q_j^{T_j}$, то в силу леммы 9 многообразие Q_{j-1} содержит E-неприводимую компоненту связности. Продолжая процесс, мы придем к тому, что E-неприводимую компоненту связности имеет многообразие Q_{k_0}. Получили противоречие.

Шаг II. *Индукцией по $i \in \{1, \dots, k_1\}$ покажем, что каждая компонента связности многообразия Q_{k-i} гомеоморфна E.*

Поскольку $Q_{k-1} \cong E$, то база индукции доказана. Предположим, что каждая компонента связности многообразия Q_{k-i} гомеоморфна E. Тогда компоненты связности многообразия Q_{k-i-1} либо гомеоморфны E, либо (в силу леммы 9) имеют один из следующих видов:

- $L_{p,q} \sqcup (E)_{p,q}$;
- $L_{p,q} \# E \sqcup (\mathbb{S}^3)_{p,q}$;
- $L_{p,q} \# (\mathbb{S}^3)_{p,q}$.

Согласно теореме 3.1 из [25]

$$H_1((\mathbb{S}^3)_{p,q}) \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z},$$

и, следовательно, многообразие $(\mathbb{S}^3)_{p,q}$ является E-неприводимым при $q \neq 0$. Из утверждения 15 следует, что многообразие $(\mathbb{S}^3)_{1,0}$ либо гомеоморфно E, либо E-неприводимо. Поскольку многообразия $L_{p,q}$, $p \neq 0$ и $L_{p,q} \# (\mathbb{S}^3)_{p,q}$, $pq \neq 0$ также являются E-неприводимыми, то в силу шага 1 каждая компонента связности многообразия Q_{j-1} гомеоморфна E.

Лемма доказана.

6.4. Топология несущего многообразия. В этом пункте мы докажем теорему 9. Для этого заметим, что в фильтрации (37)

$$M^4 \setminus \operatorname{int} M_{k-1} \cong P^4.$$

Тогда в силу утверждения 14 достаточно показать, что $M_{k-1} \cong P^4$. Этот факт будет следовать из приводимой ниже леммы.

Лемма 12. *В фильтрации* (37) *каждая компонента связности многообразия* M_j, $j \in \{1, \dots, k-1\}$, *гомеоморфна* P^4.

Доказательство. Из разложения (37) следует, что M_j состоит из j копий многообразия P^4 для $j \in \{1, \dots, k_0\}$. Из формулы (38) следует, что для $j \in \{k_0+1, \dots, k-1\}$ многообразие M_j получается из многообразия M_{j-1} следующим образом. Пусть $\overline{M}_{j-1} = M_{j-1} \sqcup (P^3 \times \mathbb{B}^1)$ и $\varphi_j : P^3 \times \mathbb{S}^0 \to Q_{j-1}$ – такое вложение, что $\varphi_j(P^3 \times \{-1\}) = P_1^{T_j}$, $\varphi_j(P^3 \times \{1\}) = P_2^{T_j}$ – ассоциированные с T_j полнотории. Тогда

$$M_j \cong \overline{M}_{j-1}/_{\varphi_j}. \tag{40}$$

Индукцией по $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ покажем, что каждая компонента связности многообразия M_{k_0+i} гомеоморфна P^4.

Поскольку M_{k_0} состоит из k_0 копий многообразия P^4, то база индукции доказана. Предположим, что каждая компонента связности многообразия $M_{k_0+i} = M_{j-1}$ гомеоморфна P^4. Тогда либо компоненты связности многообразия M_j гомеоморфны P^4, либо компонента U получается из компонент связности M_{j-1} по формуле (40). Пусть U_l, $l \in \{1, 2\}$, – компонента связности многообразия M_{j-1}, содержащая полноторий $P_l^{T_j}$, и $A_l = \partial U_l$. Согласно лемме 11 имеем $A_l \cong E$. В силу леммы 9 дополнение до одного из полториев (положим для определенности $P_2^{T_j}$) гомеоморфно заполненному тору, т. е. $(A_2 \setminus \operatorname{int} P_2^{T_j}) \cong P^3$. Далее рассмотрим два возможных случая: 1) $U_1 \neq U_2$; 2) $U_1 = U_2$.

В случае 1)

$$U \cong U_1 \cup (P^3 \times [-1, 1]) \cup U_2,$$

где по предположению индукции $U_1 \cong U_2 \cong P^4$ и $P^3 \times \{-1\} = P_1^{T_j}$, $P^3 \times \{1\} = P_2^{T_j}$ (см. рис. 46).

Поскольку $(A_2 \setminus \operatorname{int} P_2^{T_j}) \cong P^3$, то $U_2 \cong P^3 \times [1, 2]$. Тогда

$$(P^3 \times [-1, 1]) \cup U_2 \cong P^3 \times [-1, 2]$$

и, следовательно, $U \cong U_1$.

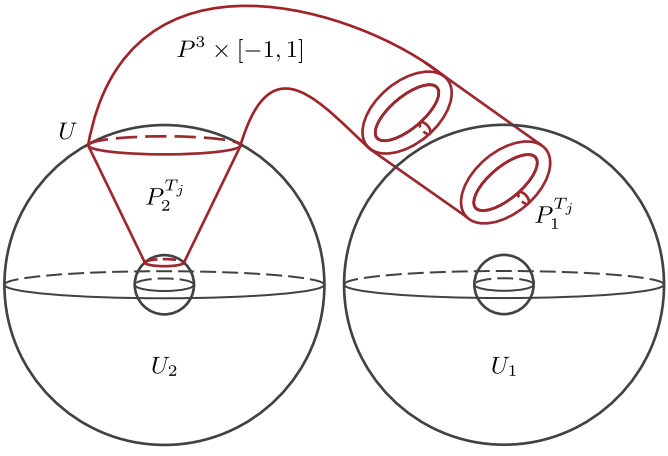

Рис. 46. Иллюстрация к доказательству леммы 12, случай 1).

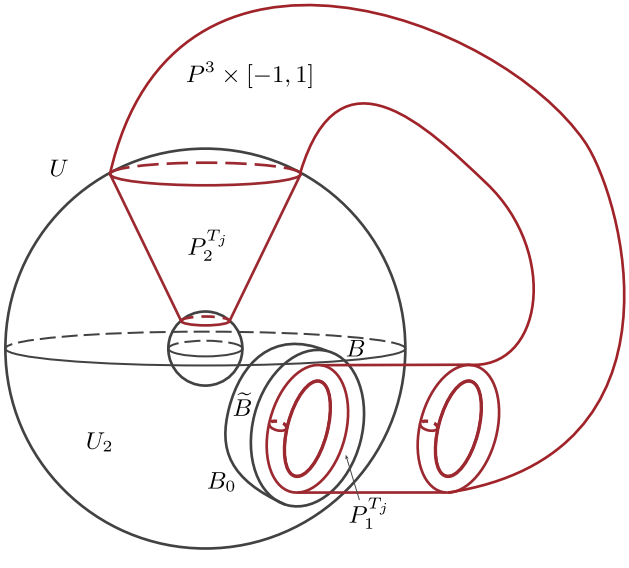

Рис. 47. Иллюстрация к доказательству леммы 12, случай 2).

В случае 2)

$$U \cong (P^3 \times [-1,1]) \cup U_2,$$

где по предположению индукции $U_2 \cong P^4$ и $P^3 \times \{-1\} = P_1^{T_j}, P^3 \times \{1\} = P_2^{T_j}$ (см. рис. 47). Поскольку $(A_2 \setminus \operatorname{int} P_2^{T_j}) \cong P^3$, то $U_2 \cong P^3 \times [1,2]$. Поскольку полнотории $P_1^{T_j}$, $P_2^{T_j}$ не пересекаются с ассоциированной сферой Λ_{T_j}, то она ограничивает в U_2 трехмерный шар B такой, что $P_1^{T_j} \subset \operatorname{int} B$ и $B \cap P_2^{T_j} = \varnothing$. Выберем в U_2 четырехмерный шар $\widetilde{B}$ так, что $\widetilde{B} \cap A_2 = \partial\widetilde{B} \cap A_2 = B$. Тогда

$B_0 = \operatorname{cl}(\partial\widetilde{B} \setminus B) \cong \mathbb{B}^3$. Положим $\widetilde{U}_2 = \operatorname{cl}(U_2 \setminus \widetilde{B})$ и $\widetilde{U} = \operatorname{cl}(U \setminus B_0)$. По построению $\widetilde{U}$ – связное четырехмерное многообразие с краем, из которого многообразие U получается отождествлением двух непересекающихся копий трехмерного шара B_0 на его границе. Теперь доказательство теоремы сводится к доказательству того, что $\widetilde{U} \cong \mathbb{B}^4$.

Для доказательства этого факта, представим $\widetilde{U}$ в следующем виде:

$$\widetilde{U} = \widetilde{U}_2 \cup (P^3 \times [-1,1]) \cup \widetilde{B}.$$

Поскольку $\widetilde{U}_2 \cong U_2$, то

$$\widetilde{U}_2 \cup (P^3 \times [-1,1]) \cong P^3 \times [-1,2]$$

и, следовательно, $\widetilde{U} \cong \widetilde{B}$. Лемма 12, а с ней и теорема 9 доказаны.

Список литературы

[1] P. M. Akhmet'ev, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, "On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms", *Qual. Theory Dyn. Syst.*, **20**:3 (2021), 76, 15 pp.

[2] D. Asimov, "Round handles and non-singular Morse–Smale flows", *Ann. of Math.* (2), **102**:1 (1975), 41–54.

[3] V. G. Bardakov, T. A. Kozlovskaya, O. V. Pochinka, "Links and dynamics", *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, **21**:1 (2025), 69–83.

[4] R. H. Bing, "Locally tame sets are tame", *Ann. of Math.* (2), **59**:1 (1954), 145–158.

[5] F. Bonahon, J.-P. Otal, "Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **16**:3 (1983), 451–466.

[6] C. Bonatti, V. Z. Grines, "Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3", *J. Dyn. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.

[7] C. Bonatti, V. Grines, E. Pécou, "Two-dimensional links and diffeomorphisms on 3-manifolds", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **22**:3 (2002), 687–710.

[8] C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, "Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds", *Duke Math. J.*, **168**:13 (2019), 2507–2558.

[9] R. Bott, "Nondegenerate critical manifolds", *Ann. of Math.* (2), **60**:2 (1954), 248–261.

[10] М. Броун, "Доказательство обобщенной теоремы Шёнфлиса", *Математика*, **5**:5 (1961), 13–16; пер. с англ.: M. Brown, "A proof of the generalized Schoenflies theorem", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66**:2 (1960), 74–76.

[11] M. Brown, "Locally flat imbeddings of topological manifolds", *Ann. of Math.* (2), **75**:2 (1962), 331–341.

[12] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978, iii+89 pp.

[13] G. M. Fisher, "On the group of all homeomorphisms of a manifold", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 193–212.

[14] J. Franks, "The periodic structure of non-singular Morse–Smale flows", *Comment. Math. Helv.*, **53**:2 (1978), 279–294.

[15] D. Gabai, "Foliations and the topology of 3-manifolds. III", *J. Differential Geom.*, **26**:3 (1987), 479–536.

[16] В. Д. Галкин, О. В. Починка, "Классификация неособых 4-потоков без гетероклинических пересечений", *Матем. заметки*, **117**:6 (2025), 861–878; англ. пер.: V. D. Galkin, O. V. Pochinka, "Classification of nonsingular 4-flows without heteroclinic intersections", *Math. Notes*, **117**:6 (2025), 950–966.

[17] В. Д. Галкин, О. В. Починка, “Топология 4-многообразий, допускающих неособые потоки Морса–Смейла с седловыми орбитами одинакового индекса Морса”, *УМН*, **80**:6 (2025), 177–178; англ. пер.: V. D. Galkin, O. V. Pochinka, “Topology of 4-manifolds admitting non-singular Morse–Smale flows with saddle orbits of the same Morse index”, *Russian Math. Surveys*, **80**:6 (2025), 1109–1111.

[18] В. Д. Галкин, О. В. Починка, Д. Д. Шубин, “Классификация неособых четырехмерных потоков с нескрученной седловой орбитой”, *Матем. сб.*, **215**:11 (2024), 65–91; англ. пер.: V. D. Galkin, O. V. Pochinka, D. D. Shubin, “Classification of nonsingular four-dimensional flows with a untwisted saddle orbit”, *Sb. Math.*, **215**:11 (2024), 1499–1522.

[19] V. Galkin, O. Pochinka, D. Shubin, “Classification of NMS-flows with unique twisted saddle orbit on orientable 4-manifolds”, *Arnold Math. J.*, **11**:1 (2025), 127–147.

[20] C. McA. Gordon, J. Luecke, “Knots are determined by their complements”, *J. Amer. Math. Soc.*, **2**:2 (1989), 371–415.

[21] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Аналог теоремы Смейла для гомеоморфизмов с регулярной динамикой”, *Матем. заметки*, **102**:4 (2017), 613–618; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “An analog of Smale’s theorem for homeomorphisms with regular dynamics”, *Math. Notes*, **102**:4 (2017), 569–574.

[22] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка, “Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий”, *УМН*, **74**:1(445) (2019), 41–116; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale systems and topological structure of the underlying manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **74**:1 (2019), 37–110.

[23] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical systems on* 2- *and* 3-*manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016, xxvi+295 pp.

[24] M. Guest, *Morse theory in the* 1990*’s*, 2001, 73 c., arXiv: math/0104155v1.

[25] C. R. Guilbault, “Homology lens spaces and Dehn surgery on homology spheres”, *Fund. Math.*, **144**:3 (1994), 287–292.

[26] A. Hatcher, *Notes on basic* 3-*manifold topology*, Cornell University, Ithaca, NY, 2007, 159 pp.

[27] J. Hempel, 3-*manifolds*, Ann. of Math. Stud., **86**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1976, xii+195 pp.

[28] В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, ИЛ, М., 1948, 232 с.; пер. с англ.: W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Math. Ser., **4**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941, 165 pp.

[29] M. C. Irwin, “A classification of elementary cycles”, *Topology*, **9** (1970), 35–47.

[30] Ч. Косневски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Современная математика. Вводные курсы, Мир, М., 1983, 304 с.; пер. с англ.: C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980, viii+269 pp.

[31] Р. Кроуэл, Р. Фукс, *Введение в теорию узлов*, Мир, М., 1967, 348 с.; пер. с англ.: R. H. Crowell, R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, Ginn and Co., Boston, MA, 1963, x+182 pp.

[32] V. Kruglov, D. Malyshev, O. Pochinka, “Topological classification of Ω-stable flows on surfaces by means of effectively distinguishable multigraphs”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **38**:9 (2018), 4305–4327.

[33] R. Lashof, M. Rothenberg, “Microbundles and smoothing”, *Topology*, **3**:4 (1965), 357–388.

[34] W. B. R. Lickorish, “A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **60**:4 (1964), 769–778.

[35] N. L. Max, "Homeomorphisms of $S^n \times S^1$", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 939–942.

[36] B. Mazur, "A note on some contractible 4-manifolds", *Ann. of Math.* (2), **73**:1 (1961), 221–228.

[37] В. С. Медведев, Я. Л. Уманский, "О разложении n-мерных многообразий на простые многообразия", *Изв. вузов. Матем.*, 1979, № 1, 46–50; англ. пер.: V. S. Medvedev, Ya. L. Umanskii, "Decomposition of n-dimensional manifolds into simple manifolds", *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **23**:1 (1979), 36–39.

[38] V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma, "Morse–Smale systems with few non-wandering points", *Topology Appl.*, **160**:3 (2013), 498–507.

[39] E. E. Moise, "Affine structures in 3-manifolds. VIII. Invariance of the knot-types; local tame imbedding", *Ann. of Math.* (2), **59**:1 (1954), 159–170.

[40] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions* 2 *and* 3, Reprint of the 1977 original, Grad. Texts in Math., **47**, Springer, New York, 2013, x+262 pp.

[41] J. W. Morgan, "Non-singular Morse–Smale flows on 3-dimensional manifolds", *Topology*, **18**:1 (1979), 41–53.

[42] J. Munkres, "Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms", *Ann. of Math.* (2), **72**:3 (1960), 521–554.

[43] W. D. Neumann, "Notes on geometry and 3-manifolds", With appendices by P. Norbury, *Low dimensional topology* (Eger, 1996/Budapest, 1998), Bolyai Soc. Math. Stud., **8**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999, 191–267; preprint, Topology Atlas, 1996.

[44] E. M. Osenkov, O. V. Pochinka, "Morse–Smale 3-diffeomorphisms with saddles of the same unstable manifold dimension", *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, **20**:1 (2024), 167–178.

[45] Е. М. Осенков, О. В. Починка, "Топология несущих многообразий регулярных гомеоморфизмов с седлами коразмерности 1", *Труды МИАН*, **327**, Математические аспекты механики (2024), 254–264; англ. пер.: E. M. Osenkov, O. V. Pochinka, "Topology of ambient manifolds of regular homeomorphisms with codimension 1 saddles", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **327** (2024), 241–250.

[46] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, "О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях", *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, "Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds", *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1205–1250.

[47] M. M. Peixoto, "On the classification of flows on 2-manifolds", *Dynamical systems* (Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, Inc., New York–London, 1973, 389–419.

[48] D. Pixton, "Wild unstable manifolds", *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

[49] O. V. Pochinka, D. D. Shubin, "On 4-dimensional flows with wildly embedded invariant manifolds of a periodic orbit", *Appl. Math. Nonlinear Sci.*, **5**:2 (2020), 261–266.

[50] O. V. Pochinka, D. D. Shubin, "Non-singular Morse–Smale flows on n-manifolds with attractor-repeller dynamics", *Nonlinearity*, **35**:3 (2022), 1485–1499.

[51] O. V. Pochinka, D. D. Shubin, "Topology of ambient 3-manifolds of non-singular flows with twisted saddle orbit", *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, **19**:3 (2023), 371–381.

[52] O. V. Pochinka, D. D. Shubin, "Nonsingular flows with a twisted saddle orbit on orientable 3-manifolds", *Regul. Chaotic Dyn.*, **30**:4 (2025), 711–731.

[53] O. Pochinka, S. Zinina, "Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain-recurrent set on n-dimensional manifolds", *Динамические системы*, **9(37)**:3 (2019), 289–296.

[54] O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina, "Construction of the Morse–Bott energy function for regular topological flows", *Regul. Chaotic Dyn.*, **26**:4 (2021), 350–369.

[55] C. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd corr. ed., Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999, xiv+506 pp.

[56] D. Rolfsen, *Knots and links*, Corr. reprint of the 1976 original, Math. Lecture Ser., **7**, Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990, xiv+439 pp.

[57] M. Shub, D. Sullivan, "Homology theory and dynamical systems", *Topology*, **14**:2 (1975), 109–132.

[58] S. Smale, "Morse inequalities for a dynamical system", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66**:1 (1960), 43–49.

[59] E. Szpilrajn, "Sur l'extension de l'ordre partiel", *Fund. Math.*, **1**:16 (1930), 386–389.

[60] Я. Л. Уманский, "Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий", *Матем. сб.*, **181**:2 (1990), 212–239; англ. пер.: Ya. L. Umanskiĭ, "Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional Morse–Smale dynamical systems with a finite number of singular trajectories", *Math. USSR-Sb.*, **69**:1 (1991), 227–253.

[61] Bin Yu, "Behavior 0 nonsingular Morse Smale flows on S^3", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **36**:1 (2016), 509–540.

Владислав Дмитриевич Галкин
(Vladislav D. Galkin)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: vgalkin@hse.ru

Ольга Витальевна Починка
(Olga V. Pochinka)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru, opochinka@hse.ru

Поступила в редакцию
10.11.2025