О. В. Починка, Е. Е. Чилина

Классификация трехмерных отображений с поверхностной псевдоаносовской динамикой

Работа посвящена исследованию сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов трехмерных многообразий с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа двумерных аттракторов и репеллеров, каждый из которых является дизъюнктным объединением цилиндрически вложенных замкнутых поверхностей, ограничение некоторой степени на каждую из которых топологически сопряжено сохраняющему ориентацию псевдоаносовскому гомеоморфизму. Получена топологическая классификация модельных гомеоморфизмов, реализованных на каждом многообразии, допускающем гомеоморфизмы исследуемого класса. Доказано, что гомеоморфизм рассматриваемого класса топологически сопряжен модельному отображению тогда и только тогда, когда у него существует одномерное инвариантное слоение. Показано, что если допустить сопряженность с обобщенными псевдоаносовскими гомеоморфизмами на неблуждающем множестве исследуемых отображений, то появляются примеры гомеоморфизмов, ограничения которых на компоненты связности неблуждающего множества не являются топологически сопряженными отображениями, что не характерно для гомеоморфизмов исходного рассматриваемого класса.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: обобщенный псевдоаносовский гомеоморфизм, псевдоаносовский гомеоморфизм, трехмерные многообразия, двумерный аттрактор, топологическая классификация.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm10316

§ 1. Введение

1.1. История вопроса. В работах В. З. Гринеса, Ю. А. Левченко, В. С. Медведева и О. В. Починки [1]–[3] изучена динамика A-диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерным поверхностным неблуждающим множеством. Для таких отображений исследована топология несущего многообразия, построены модельные отображения, доказана объемлющая Ω-сопряженность произвольного диффеоморфизма рассматриваемого класса с модельным отображением и топологическая сопряженность структурно устойчивого диффеоморфизма рассматриваемого класса с модельным отображением. Согласно работе В. З. Гринеса, В. С. Медведева, Е. В. Жужомы [4] число компонент

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-30008, https://rscf.ru/project/23-71-30008/.

связности неблуждающего множества отображений изученного класса конечно и каждая из них является цилиндрически вложенным двумерным тором (см. [4; теорема 1]) таким, что ограничение некоторой степени отображения на него топологически сопряжено с аносовским диффеоморфизмом (см. [4; теорема 2]). Из работы Р. В. Плыкина [5] следует, что при такой структуре неблуждающего множества каждая его компонента связности является либо аттрактором, либо репеллером (см. [5; теорема 3]).

Настоящая работа является обобщением результатов работ [1]–[3] на класс отображений $\mathcal{G}$, который введем далее.

1.2. Определение рассматриваемого класса отображений. Обозначим через S_g замкнутую ориентируемую поверхность рода g.

Напомним, что гомеоморфизм $P\colon S_g \to S_g$ называется *обобщенным псевдоаносовским гомеоморфизмом* с *дилатацией* $\lambda > 1$, если на поверхности S_g существует пара P-инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}_P^{\mathrm{s}}$, $\mathcal{F}_P^{\mathrm{u}}$ с конечным множеством седловых особенностей S и трансверсальными мерами μ_{s}, μ_{u} такая, что $\mu_{\mathrm{s}}(P(\alpha)) = \lambda\mu_{\mathrm{s}}(\alpha)$ $(\mu_{\mathrm{u}}(P(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu_{\mathrm{u}}(\alpha))$ для любой дуги α, трансверсальной $\mathcal{F}_P^{\mathrm{s}}$ $(\mathcal{F}_P^{\mathrm{u}})$. Если слоения $\mathcal{F}_P^{\mathrm{s}}$, $\mathcal{F}_P^{\mathrm{u}}$ не имеют седловых особенностей с одной сепаратрисой, то гомеоморфизм $P\colon S_g \to S_g$ называется *псевдоаносовским.* Из формулы Эйлера–Пуанкаре (см. предложения 6 и 7) следует, что псевдоаносовские гомеоморфизмы существуют только на поверхностях рода больше единицы.

Обозначим через $\mathcal{G}$ множество сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов f замкнутого ориентируемого топологического 3-многообразия M^3, неблуждающее множество $NW(f)$ которых состоит из конечного числа компонент связности $B_0,\dots,B_{m-1}$, удовлетворяющих для любого $i\in\{0,\dots,m-1\}$ следующим условиям:

1) B_i является цилиндрическим[1] вложением замкнутой ориентируемой поверхности рода больше единицы;
2) существует натуральное число k_i такое, что $f^{k_i}(B_i) = B_i$, $f^k(B_i) \neq B_i$ для любого $k \leqslant k_i$ и ограничение отображения $f^{k_i}|_{\mathcal{B}_i}$ топологически сопряжено сохраняющему ориентацию псевдоаносовскому гомеоморфизму;
3) B_i является либо аттрактором[2], либо репеллером гомеоморфизма f^{k_i}.

Авторами настоящей работы совместно с В. З. Гринесом получен ряд результатов (предложения 1–5), связанных с динамикой отображений класса $\mathcal{G}$.

1.3. Формулировка результатов. Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1 и 2. Для начала введем необходимые обозначения.

[1]Подпространство X топологического пространства Y называется *цилиндрическим вложением в Y топологического пространства $\overline{X}$*, если существует гомеоморфизм на образ $h\colon \overline{X}\times[-1,1]\to Y$ такой, что $X = h(\overline{X}\times\{0\})$.

[2]Инвариантное множество B гомеоморфизма f называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества B такая, что $f(U)\subset \operatorname{int} U$, $\bigcap_{j\geqslant 0} f^j(U) = B$. Аттрактор для гомеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* гомеоморфизма f.

Пусть $J\colon S_g \to S_g$ – гомеоморфизм. Определим гомеоморфизм $\gamma\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ формулой $\gamma(z,r) = (J(z), r-1)$. Обозначим через M_J факторпространство многообразия $S_g \times \mathbb{R}$ по действию группы $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$ с естественной проекцией $p_J\colon S_g \times \mathbb{R} \to M_J$.

Предложение 1 (см. [6; теорема 1.1]). *Топологическое многообразие допускает гомеоморфизм из класса $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно M_J, где $J\colon S_g \to S_g$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм*[3], *коммутирующий с псевдоаносовским отображением.*

Предложение 2 (см. [7; теорема 1]). *Гомеоморфизм, коммутирующий с псевдоаносовским отображением, является либо псевдоаносовским, либо периодическим*[4] *гомеоморфизмом.*

Простейшими представителями класса $\mathcal{G}$ являются гомеоморфизмы множества Φ, которые строятся следующим образом.

Представим окружность как подмножество комплексной плоскости $\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi\theta} \mid 0 \leqslant \theta < 1\}$. Зададим накрытие

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$$

формулой $p(r) = s$, где $s = e^{i2\pi r}$.

Набор чисел (n,k,l) назовем *правильным*, если выполняются следующие условия:

1) $n, k \in \mathbb{N}$;
2) если $k = 1$, то $l = 0$;
3) если $k > 1$, то l принадлежит $\{1, \dots, k-1\}$ и является взаимно простым с k.

Для каждого правильного набора (n,k,l) определим диффеоморфизм $\overline{\varphi}_{n,k,l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой

$$\overline{\varphi}_{n,k,l}(r) = r + \frac{1}{4\pi nk}\sin(2\pi nkr) + \frac{l}{k}.$$

Так как $\overline{\varphi}_{n,k,l}(r) + 1 = \overline{\varphi}_{n,k,l}(r+1)$, то диффеоморфизм $\overline{\varphi}_{n,k,l}$ является поднятием диффеоморфизма окружности $\varphi_{n,k,l}(s) = p(\overline{\varphi}_{n,k,l}(p^{-1}(s)))$, где $p^{-1}(s)$ – полный прообраз точки $s \in \mathbb{S}^1$ (см. [8; утверждение 10.2.26]).

Рассмотрим псевдоаносовский гомеоморфизм $P\colon S_g \to S_g$, коммутирующий с ним сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $J\colon S_g \to S_g$ и правильный набор чисел n, k, l такие, что гомеоморфизм J^lP^k является сохраняющим ориентацию псевдоаносовским гомеоморфизмом.

Определим отображение $\overline{\varphi}_{P,J,n,k,l}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ формулой

$$\overline{\varphi}_{P,J,n,k,l}(z,r) = (P(z), \overline{\varphi}_{n,k,l}(r)).$$

[3] В формулировке теоремы 1.1 работы [6] упущен тот факт, что J сохраняет ориентацию S_g, но он необходим, так как гомеоморфизмы класса $\mathcal{G}$ определены на ориентируемых многообразиях.

[4] Гомеоморфизм $f\colon X \to X$ называется *периодическим*, если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $f^m = \mathrm{id}_X$.

Непосредственно проверяется, что $\overline{\varphi}_{P,J,n,k,l}\gamma = \gamma\overline{\varphi}_{P,J,n,k,l}$. Тогда согласно [8; утверждение 10.2.26] корректно определен сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\varphi_{P,J,n,k,l}\colon M_J \to M_J$, заданный формулой

$$\varphi_{P,J,n,k,l}(w) = p_J(\overline{\varphi}_{P,J,n,k,l}(p_J^{-1}(w))),$$

где $w \in M_J$ и $p_J^{-1}(w)$ – полный прообраз точки $w \in M_J$. Гомеоморфизмы вида $\varphi_{P,J,n,k,l}$ назовем *модельными*.

Обозначим через Φ множество всех модельных гомеоморфизмов, принадлежащих классу $\mathcal{G}$.

Предложение 3 (см. [7; теорема 2]). *Множество Φ является подмножеством множества $\mathcal{G}$.*

Для $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ и $i \in \{0, 1, \dots, 2nk-1\}$ положим

$$\mathcal{B}_i = p_J\biggl(S_g \times \biggl\{\frac{i}{2nk}\biggr\}\biggr).$$

Из доказательства теоремы 2 из [7] следует, что верно следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть $\varphi = \varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$. Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Неблуждающее множество $NW(\varphi)$ гомеоморфизма φ состоит из $2nk$ компонент связности $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{2nk-1}$ периода k (т.е. $\varphi^k(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_i$ и $\varphi^{k'}(\mathcal{B}_i) \neq \mathcal{B}_i$ для любого $i \in \{0, \dots, 2nk-1\}$ и натурального $k' < k$).*
2. *Для любого $i \in \{0, 1, \dots, 2nk-1\}$ ограничение отображения $\varphi|_{\mathcal{B}_i}$ на компоненту связности $\mathcal{B}_i$ топологически сопряжено сохраняющему ориентацию псевдоаносовскому гомеоморфизму J^lP^k.*

Теорема 1. *Гомеоморфизмы $\varphi_{P,J,n,k,l}$ и $\varphi_{P',J',n',k',l'}$ топологически сопряжены*[5] *тогда и только тогда, когда $n = n'$, $k = k'$ и существует гомеоморфизм $H\colon S_g \to S_g$ такой, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $l = l' \geqslant 0$, $HP = P'H$ *и* $HJ = J'H$;
2) $l = l' = 0$, $HP = P'H$ *и* $HJ = J'^{-1}H$;
3) $l + l' = k$, $HP = J'P'H$ *и* $HJ = J'^{-1}H$.

В работе [6] при классификации модельных отображений в п. 3 была допущена неточность. Теорема 1 является ее исправленной версией.

Предложение 5. *Пусть $f\colon M^3 \to M^3$ – гомеоморфизм из класса $\mathcal{G}$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) [6; лемма 2.1] *граница каждой компоненты связности множества $M^3 \setminus (NW(f))$ состоит в точности из одной компоненты связности аттрактора f и одной компоненты связности репеллера f;*
2) [7; теорема 3] *f объемлюще Ω-сопряжен*[6] *гомеоморфизму из класса Φ.*

[5]Гомеоморфизмы $f\colon X \to X$ и $f'\colon X' \to X'$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h\colon X \to X'$ такой, что $hf = f'h$.

[6]Гомеоморфизмы $f\colon X \to X$ и $f'\colon X' \to X'$ называются *объемлюще Ω-сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h\colon X \to X'$ такой, что $h(NW(f)) = NW(f')$ и $hf|_{NW(f)} = f'h|_{NW(f)}$.

Из предложений 4 и 5 следует, что неблуждающее множество $NW(f)$ гомеоморфизма $f \in \mathcal{G}$ состоит из $2nk$ компонент связности периода k $(n, k \in \mathbb{N})$ и граница каждой компоненты связности множества $M^3 \setminus NW(f)$ состоит в точности из двух компонент связности. Обозначим через $\mathcal{G}_* \subset \mathcal{G}$ подмножество гомеоморфизмов f таких, что в каждой компоненте связности V множества $M^3 \setminus NW(f)$ существует одномерное f^k-инвариантное слоение, каждый слой которого является открытой дугой, имеющей в точности две граничные точки, лежащие на двух разных компонентах связности множества ∂V. Объединение замыканий всех таких дуг на всех компонентах связности множества $M^3 \setminus NW(f)$ образует f-инвариантное одномерное слоение на M^3, которое обозначим через $\mathcal{L}_f$.

Заметим, что по построению $\Phi \subset \mathcal{G}_*$.

Теорема 2. *Гомеоморфизм $f \in \mathcal{G}$ топологически сопряжен гомеоморфизму из класса Φ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{G}_*$.*

Таким образом, результаты, известные для псевдоаносовских гомеоморфизмов, позволили доказать, что динамика отображений класса $\mathcal{G}$ на неблуждающем множестве с точностью до топологической сопряженности устроена так же, как и динамика модельных отображений множества Φ, а при существовании инвариантного одномерного слоения совпадает с динамикой модельных отображений на всем многообразии. В том числе из предложений 4 и 5 следует, что ограничения отображения из класса $\mathcal{G}$ на разные компоненты связности его неблуждающего множества являются топологически сопряженными гомеоморфизмами (для одной и той же степени, равной периоду компонент связности неблуждающего множества гомеоморфизма).

Если допустить сопряженность с обобщенными псевдоаносовскими гомеоморфизмами на компонентах связности неблуждающего множества гомеоморфизмов рассматриваемого класса, то можно получить попарно топологически не сопряженные отображения на каждой компоненте связности. Так, в § 5 построен пример сохраняющего ориентацию гомеоморфизма f на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, неблуждающее множество которого состоит из двух цилиндрически вложенных двумерных сфер $\mathbb{S}^2_R$ и $\mathbb{S}^2_A$ таких, что сфера $\mathbb{S}^2_R$ является репеллером для f, сфера $\mathbb{S}^2_A$ является аттрактором для f и отображения $f|_{\mathbb{S}^2_R} : \mathbb{S}^2_R \to \mathbb{S}^2_R$, $f|_{\mathbb{S}^2_A} : \mathbb{S}^2_A \to \mathbb{S}^2_A$ являются топологически несопряженными обобщенными псевдоаносовскими отображениями.

§ 2. Вспомогательные утверждения

2.1. Обобщенные псевдоаносовские гомеоморфизмы. Настоящий пункт содержит утверждения, связанные с обобщенными псевдоаносовскими гомеоморфизмами, необходимые для доказательства основных теорем (более подробно об обобщенных псевдоаносовских гомеоморфизмах см. [9] и [10]).

Пусть $P\colon S_g \to S_g$ – обобщенный псевдоаносовский гомеоморфизм. Для $q \in \mathbb{N}$ обозначим через d_q число седловых особенностей инвариантных слоений псевдоаносовского гомеоморфизма P, имеющих в точности q сепаратрис.

Последовательность $\mathcal{D}_P = \{d_q \colon q \in \mathbb{N}\}$ называется *сингулярным типом* P. Так как последовательность $\mathcal{D}_P$ содержит лишь конечное число ненулевых элементов, то для краткости далее мы будем указывать только ненулевые элементы этой последовательности.

Предложение 6 (формула Эйлера–Пуанкаре; см. [9; теорема 5.4]). *Пусть* $\mathcal{D}_P = \{d_q \colon q \in \mathbb{N}\}$ *есть сингулярный тип обобщенного псевдоаносовского гомеоморфизма* $P \colon S_g \to S_g$. *Тогда*

$$d_1 - \sum_{q \geqslant 3} (q-2) d_q = 2(2-2g).$$

Предложение 7 (см. [11]). *Для ориентируемой поверхности существует обобщенный псевдоаносовский гомеоморфизм любого сингулярного типа, допускаемого формулой Эйлера–Пуанкаре, за исключением сингулярных типов* $\{d_1 = d_3 = 1\}$ *и* $\{d_3 = d_5 = 1\}$ *в случае поверхностей рода* 1 *и* 2 *соответственно.*

Предложение 8 (см. [10; теорема 12.5]). *Два гомотопных псевдоаносовских гомеоморфизма топологически сопряжены посредством гомеоморфизма, изотопного тождественному.*

Предложение 9 (см. [12; следствие]). *Пусть* $P_1, P_2 \colon S_g \to S_g$ *– псевдоаносовские гомеоморфизмы и существуют гомеоморфизмы* $H_1, H_2 \colon S_g \to S_g$ *такие, что* $H_1 P_1 = P_2 H_1$, $H_2 P_1 = P_2 H_2$. *Тогда если гомеоморфизм* H_1 *гомотопен гомеоморфизму* H_2, *то* $H_1 = H_2$.

2.2. Действие группы на топологическом пространстве. Напомним некоторые факты, связанные с действием группы на топологическом пространстве (более подробно см. [8]).

Путем $c \subset X$ называется непрерывный образ отрезка $[0,1]$ в X. Обозначим через $c(t)$ образ $t \in [0,1]$ в X. Путь c называется *петлей*, если $c(0) = c(1)$. Обозначим через $[c] \in \pi_1(X,x)$ класс петель с началом и концом в точке $x \in X$, гомотопных петле $c \subset X$.

Для непрерывного отображения $f \colon X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y положим $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid h(x) \in V\}$ (полный прообраз множества $V \subset Y$) и обозначим через f_* гомоморфизм фундаментальных групп $f_* \colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, f(x))$, индуцированный отображением f в точке $x \in X$.

Пусть группа Γ действует свободно и разрывно на хаусдорфовом пространстве X так, что пространство орбит X/Γ связно. Из определения проекции $p_{X/\Gamma} \colon X \to X/\Gamma$ следует, что $p_{X/\Gamma}^{-1}(x)$ – орбита некоторой точки $\overline{x} \in p_{X/\Gamma}^{-1}(x)$. Пусть c – некоторая петля в X/Γ такая, что $c(0) = c(1) = x$. Согласно теореме о монодромии существует единственный путь $\overline{c}$ в X с началом в точке $\overline{x}$ $(\overline{c}(0) = \overline{x})$, являющийся поднятием пути c. Поэтому существует элемент $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ такой, что $\overline{c}(1) = \widetilde{\gamma}(\overline{x})$, и корректно определено отображение $\eta_{X/\Gamma,\overline{x}} \colon \pi_1(X/\Gamma, x) \to \Gamma$ по формуле $\eta_{X/\Gamma,\overline{x}}([c]) = \widetilde{\gamma}$.

Отображение $\eta_{X/\Gamma,\overline{x}}\colon \pi_1(X/\Gamma, x) \to \Gamma$ является нетривиальным гомоморфизмом (см. [8; утверждение 10.2.23]), называемым *гомоморфизмом, индуцированным накрытием* $p_{X/\Gamma}\colon X \to X/\Gamma$.

Пусть Γ – абелева группа и $\overline{c}'$ – поднятие пути $c \in \pi_1(X/\Gamma, x)$ с началом в точке $\overline{x}' = \overline{c}'(0)$, отличной от точки $\overline{x}$, и $\widetilde{\gamma}'(\overline{x}') = \overline{c}'(1)$. Поскольку существует единственный элемент $\widetilde{\gamma}'' \in \Gamma$ такой, что $\widetilde{\gamma}''(\overline{x}) = \overline{x}'$, то по теореме о монодромии $\widetilde{\gamma}''(\overline{c}) = \overline{c}'$. Тогда $\widetilde{\gamma}''\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}'\widetilde{\gamma}''$ и, следовательно, $\widetilde{\gamma}' = \widetilde{\gamma}$. Таким образом, $\eta_{X/\Gamma,\overline{x}} = \eta_{X/\Gamma,\overline{x}'}$. Поэтому далее будем опускать индекс $\overline{x}$ в обозначении эпиморфизма $\eta_{X/\Gamma,\overline{x}}$ в случае абелевой группы Γ и писать просто $\eta_{X/\Gamma}$.

Предложение 10 (см. [8; утверждение 10.2.26]). *Пусть Γ и Γ' – циклические группы, действующие свободно и разрывно на Γ, Γ'-пространстве X, γ – образующий элемент группы Γ и существует изоморфизм $\tau\colon \Gamma \to \Gamma'$. Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Если $\overline{h}\colon X \to X$ – гомеоморфизм такой, что $\overline{h}(\gamma(\overline{x})) = \tau(\gamma(\overline{h}(\overline{x})))$ для любого $\overline{x} \in X$, то отображение $h\colon X/\Gamma \to X/\Gamma'$, заданное формулой $h = p_{X/\Gamma'}(\overline{h}(p^{-1}_{X/\Gamma}(x)))$, является гомеоморфизмом и $\tau\eta_{X/\Gamma} = \eta_{X/\Gamma'}h_*$.*
2. *Если $h\colon X/\Gamma \to X/\Gamma'$ – гомеоморфизм такой, что $\tau\eta_{X/\Gamma} = \eta_{X/\Gamma'}h_*$, то существует единственный гомеоморфизм $\overline{h}\colon X \to X$, являющийся поднятием h, такой, что $\overline{h}(\gamma(\overline{x})) = \tau(\gamma(\overline{h}(\overline{x})))$, $\overline{h}(\overline{x}) = \overline{x}'$ для $\overline{x} \in X$ и $\overline{x}' \in p^{-1}_{X/\Gamma'}(x')$, где $x' = h(p_{X/\Gamma}(\overline{x}))$.*

Группа G называется *полупрямым произведением подгрупп $H \subset G$ и $N \subset G$*, если N– нормальная подгруппа и любой элемент $g \in G$ единственным образом представляется в виде $g = hn$, где $h \in H$, $n \in N$. При этом пишут $G = H \ltimes N$.

Пусть $J\colon S_g \to S_g$ – гомеоморфизм. Напомним, что $\mathcal{B}_0 = p_J(S_g \times \{0\})$ и многообразие $M_J = S_g \times \mathbb{R}/\Gamma$ является факторпространством многообразия $S_g \times \mathbb{R}$ по действию циклической группы гомеоморфизмов Γ с образующим элементом $\gamma\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$, заданным формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$.

Эпиморфизм, индуцированный накрытием $p_J\colon S_g \times \mathbb{R} \to M_J$, будем далее обозначать через

$$\eta_J\colon M_J \to \Gamma.$$

Обозначим через ι_J отображение включения

$$\iota_J\colon \mathcal{B}_0 \to M_J.$$

Предложение 11. *Пусть $J\colon S_g \to S_g$ – гомеоморфизм. Тогда верны следующие утверждения*:

1) [13; теорема 17.7] *существует элемент $[a] \in \pi_1(M_J)$ бесконечного порядка такой, что $\pi_1(M_J) = \langle[a]\rangle \ltimes \iota_{J*}(\pi_1(\mathcal{B}_0))$;*
2) *если $[c] = [a]^k[b] \in \pi_1(M_J)$, где $k \in \mathbb{Z}$, $[b] \in \iota_{J*}(\pi_1(\mathcal{B}_0))$, то*

$$\eta_J([c]) = \gamma^{\pm k}.$$

2.3. Слоения и расслоения. Напомним определения, связанные со слоениями и расслоениями (более подробно см., например, [14]).

Семейство $\mathcal{F} = \{L_i; i \in \Upsilon\}$ линейно связных подмножеств топологического многообразия X размерности n называется *k-мерным слоением*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

- $L_i \cap L_j = \varnothing$ для любых $i, j \in \Upsilon$ таких, что $i \neq j$;
- $\bigcup_{i\in\Upsilon} L_i = X$;
- для любой точки $x \in X$ можно выбрать локальную карту (U_x, φ_x), $x \in U_x$, так, что если $U_x \cap L_i \neq \varnothing$, $i \in \Upsilon$, то компоненты линейной связности множества $\varphi_x(U_x \cap L_i)$ имеют вид $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \varphi_x(U_x);\ x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, \dots, x_n = c_n\}$, где $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ – константы.

Элементы слоения $\mathcal{F}$ называются его *слоями*.

Слоение $\mathcal{F}$ называется *инвариантным относительно гомеоморфизма* $f\colon X \to X$, если f отображает слой слоения $\mathcal{F}$ в слой слоения $\mathcal{F}$.

Пусть X – топологическое многообразие размерности n. Тогда k-мерное слоение $\mathcal{F}_1$ называется *трансверсальным* к $(n-k)$-мерному слоению $\mathcal{F}_2$, если для любой точки $x \in X$ существует локальная карта (U_x, φ_x) такая, что $\varphi_x(L^1_x \cap U_x) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \varphi_x(U_x);\ x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}$ и $\varphi_x(L^2_x \cap U_x) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \varphi_x(U_x);\ x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0\}$, где L^1_x (L^2_x) – слой слоения $\mathcal{F}_1$ $(\mathcal{F}_2)$, содержащий точку x.

Расслоением топологического многообразия X над пространством B с проекцией ξ называется тройка вида (X, ξ, B), где $\xi\colon X \to B$ – непрерывное отображение. Прообраз $\xi^{-1}(b)$ называется *слоем расслоения* (X, ξ, B) *над точкой* $b \in B$.

Изоморфизмом расслоений (X, ξ, B) и (X', ξ', B') называется пара гомеоморфизмов $h\colon X \to X'$, $H\colon B \to B'$ такая, что $\xi' h = H\xi$. Гомеоморфизм h отображает слой расслоения (X, ξ, B) в слой расслоения (X', ξ', B').

Тройка вида $(B \times F, p_B, B)$, где $p_B\colon B \times F \to B$ – каноническая проекция, называется *стандартным тривиальным расслоением*.

§ 3. Классификация модельных отображений

Напомним, что гомеоморфизм $\varphi = \varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ задан формулой

$$\varphi(w) = p_J(\overline{\varphi}(p_J^{-1}(w))),$$

где

$$\overline{\varphi}(z, r) = (P(z), \overline{\varphi}_{n,k,l}(r)), \tag{3.1}$$

и определен на многообразии $M_J = S_g \times \mathbb{R}/\Gamma$ с естественной проекцией

$$p_J\colon S_g \times \mathbb{R} \to M_J,$$

где

$$\Gamma = \{\gamma^i \mid i \in \mathbb{Z}\},$$
$$\gamma(z, r) = (J(z), r - 1). \tag{3.2}$$

Накрытие p_J индуцирует гомоморфизм $\eta_J\colon \pi_1(M_J) \to \Gamma$.

Для $i \in \{0, \ldots, 2nk-1\}$ мы полагаем, что $\mathcal{B}_i = p_J(S_g \times \{\frac{i}{2nk}\})$ и $\iota_J \colon \mathcal{B}_0 \to M_J$ – отображение включения.

Везде далее предполагается, что для гомеоморфизма $\varphi' = \varphi_{P',J',n',k',l'} \in \Phi$ все связанные с ним объекты имеют аналогичные обозначения со штрихом.

Лемма 1. *Пусть гомеоморфизмы φ и φ' топологически сопряжены. Тогда верны следующие утверждения*:

1) $g = g'$, $n = n'$, $k = k'$;
2) *существуют гомеоморфизм $h\colon M_J \to M_{J'}$ и его поднятие $\overline{h}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ такие, что $h\varphi = \varphi' h$, $\overline{h}(S_g \times \{0\}) = S_g \times \{0\}$ и $\overline{h}\gamma = \gamma'^{\pm 1}\overline{h}$.*

Доказательство. Пусть гомеоморфизмы φ и φ' топологически сопряжены посредством гомеоморфизма $h'\colon M_J \to M_{J'}$, т.е.

$$h'\varphi = \varphi' h'. \tag{3.3}$$

Неблуждающее множество $NW(\varphi)$ $(NW(\varphi'))$ гомеоморфизма φ (φ') состоит из $2nk$ $(2n'k')$ компонент связности периода k (k'), гомеоморфных S_g $(S_{g'})$ (см. предложение 4). Так как сопрягающий гомеоморфизм переводит орбиты в орбиты и неблуждающее множество в неблуждающее множество, то $g = g'$, $n = n'$ и $k = k'$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Напомним, что $NW(\varphi) = \mathcal{B}_0 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_{2nk-1}$ и $NW(\varphi') = \mathcal{B}'_0 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}'_{2nk-1}$ (см. предложение 4).

Гомеоморфизм h' отображает компоненты связности неблуждающего множества $NW(\varphi)$ гомеоморфизма φ в компоненты связности неблуждающего множества $NW(\varphi')$ гомеоморфизма φ'. Положим $h'(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}'_m$.

Определим гомеоморфизм $\overline{\alpha}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ формулой

$$\overline{\alpha}(z, r) = \left(z, r - \frac{m}{2nk}\right). \tag{3.4}$$

Непосредственно проверяется, что $\overline{\alpha}\gamma' = \gamma'\overline{\alpha}$, $\overline{\alpha\varphi}' = \overline{\varphi}'\overline{\alpha}$. Следовательно, отображение $\overline{\alpha}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ проецируется в гомеоморфизм $\alpha\colon M_{J'} \to M_{J'}$, коммутирующий с φ', по формуле $\alpha(w) = p_{J'}(\overline{\alpha}(p_{J'}^{-1}(w)))$ (см. предложение 10). Таким образом,

$$\overline{\alpha}\left(S_g \times \left\{\frac{m}{2nk}\right\}\right) \overset{(3.4)}{=} S_g \times \{0\}$$

и $\alpha(\mathcal{B}'_m) = \mathcal{B}'_0$. Положим

$$h = \alpha h' \tag{3.5}$$

и получим, что $h(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}'_0$, $h\varphi h^{-1} = \varphi'$.

Рассмотрим точку $w \in \mathcal{B}_0$. Из предложения 11 следует, что существует элемент $[a] \in \pi_1(M_J, w)$ такой, что любой элемент $[c] \in \pi_1(M_J, w)$ единственным образом представляется в виде

$$[c] = [a]^k[b],$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $[b] \in \iota_{J*}(\pi_1(\mathcal{B}_0, w))$, и

$$\eta_J([c]) = \gamma^k. \tag{3.6}$$

Положим $w' = h(w)$, $\overline{w} = p_J^{-1}(w) \cap (S_g \times \{0\})$, $\overline{w}' = p_{J'}^{-1}(w') \cap (S_g \times \{0\})$. Гомеоморфизмы $h\colon M_J \to M_{J'}$, $h|_{\mathcal{B}_0}\colon \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0'$ индуцируют изоморфизмы $h_*\colon \pi_1(M_J, w) \to \pi_1(M_{J'}, w')$, $h_*|_{\iota_{J*}(\pi_1(\mathcal{B}_0,w))}\colon \iota_{J*}(\pi_1(\mathcal{B}_0, w)) \to \iota_{J'*}(\pi_1(\mathcal{B}_0', w'))$. Тогда непосредственно проверяется, что любой элемент $[c'] \in \pi_1(M_{J'})$ единственным образом представляется в виде $[c'] = [a']^k[b']$, где $[a']^k \in h_*(\langle[a]\rangle)$, $[b'] \in h_*(\iota_{J'*}(\pi_1(\mathcal{B}_0', w')))$. Следовательно, $\pi_1(M_{J'}) = \langle[a']\rangle \ltimes \iota_{J'*}(\pi_1(\mathcal{B}_0'))$. Согласно предложению 11

$$\eta_J([c']) = \gamma'^{\pm k}. \tag{3.7}$$

Обозначим через τ изоморфизм $\tau\colon \Gamma \to \Gamma'$ такой, что

$$\tau(\gamma) = \gamma'^{\pm 1}. \tag{3.8}$$

Тогда

$$\tau(\eta_J([c])) \overset{(3.6)}{=} \tau(\gamma^k) \overset{(3.8)}{=} \gamma'^{\pm k}, \qquad \eta_{J'}(h_*([c])) = \eta_{J'}([c']) \overset{(3.7)}{=} \gamma'^{\pm k}.$$

Следовательно, $\tau\eta_J = \eta_{J'}h_*$ и согласно предложению 10 существует единственный гомеоморфизм $\overline{h}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$, являющийся поднятием h, такой, что $\overline{h}(\overline{w}) = \overline{w}'$ и $\overline{h}\gamma = \gamma'^{\pm 1}\overline{h}$. Так как $h(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}_0'$ и $\overline{w}, \overline{w}' \in S_g \times \{0\}$, то $\overline{h}(S_g \times \{0\}) = S_g \times \{0\}$.

Лемма 1 доказана.

Везде далее, если гомеоморфизмы φ и φ' по условию топологически сопряжены, то будем считать, что гомеоморфизмы J и J' определены на одной и той же поверхности S_g.

Положим

$$\mathcal{I} = \left\{ \frac{i}{2nk} \;\middle|\; i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Лемма 2. *Пусть гомеоморфизмы φ и φ' топологически сопряжены. Тогда либо $l = l'$, либо $k = l + l'$. При этом если $h\colon M_J \to M_{J'}$ – гомеоморфизм такой, что $h\varphi = \varphi' h$ и у него существует поднятие $\overline{h}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$, которое обладает свойством $\overline{h}(S_g \times \{0\}) = S_g \times \{0\}$, то верно одно из следующих утверждений:*

1) $l = l' \geqslant 0$, $\overline{h}\gamma = \gamma'\overline{h}$, $\overline{\varphi}' = \overline{h}\overline{\varphi}\overline{h}^{-1}$ *и* $\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{r\}$ *для* $\forall\, r \in \mathcal{I}$;
2) $l = l' = 0$, $\overline{h}\gamma = \gamma'^{-1}\overline{h}$, $\overline{\varphi}' = \overline{h}\overline{\varphi}\overline{h}^{-1}$ *и* $\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{-r\}$ *для* $\forall\, r \in \mathcal{I}$;
3) $l + l' = k$, $\overline{h}\gamma = \gamma'^{-1}\overline{h}$, $\gamma'\overline{\varphi}' = \overline{h}\overline{\varphi}\overline{h}^{-1}$ *и* $\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{-r\}$ *для* $\forall\, r \in \mathcal{I}$.

Доказательство. Пусть гомеоморфизмы φ и φ' топологически сопряжены. Тогда согласно п. 2) леммы 1 существуют гомеоморфизм $h\colon M_J \to M_{J'}$ и его поднятие $\overline{h}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ такие, что $h\varphi = \varphi' h$ и $\overline{h}(S_g \times \{0\}) = S_g \times \{0\}$.

Рассмотрим поднятие $\overline{\varphi}$ гомеоморфизма φ. Тогда отображение

$$\overline{\varphi}_0' = \overline{h}\overline{\varphi}\overline{h}^{-1} \tag{3.9}$$

является поднятием φ'. Так как $\overline{\varphi}'_0$ – поднятие гомеоморфизма φ' на $S_g \times \mathbb{R}$ относительно накрытия $p_{J'}$, то

$$\overline{\varphi}'_0 = \gamma'^j \overline{\varphi}', \tag{3.10}$$

где $j \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\overline{\varphi}'_0(S_g \times \{0\}) = \gamma'^j(\overline{\varphi}'(S_g \times \{0\})) \overset{(3.1),(3.2)}{=} S_g \times \left\{\frac{l'}{k} - j\right\}. \tag{3.11}$$

Так как сопрягающий гомеоморфизм h отображает компоненты связности неблуждающего множества $NW(\varphi)$ в компоненты связности неблуждающего множества $NW(\varphi')$ гомеоморфизма φ' и блуждающее множество переводит в блуждающее множество, то для любого $r \in \mathcal{I}$ возможен один из двух случаев: a) $\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{r\}$; b) $\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{-r\}$.

Рассмотрим случай a):

$$\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{r\}. \tag{3.12}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}'_0(S_g \times \{0\}) &\overset{(3.9)}{=} \overline{h}(\overline{\varphi}(\overline{h}^{-1}(S_g \times \{0\}))) \overset{(3.12)}{=} \overline{h}(\overline{\varphi}(S_g \times \{0\})) \\ &\overset{(3.1)}{=} \overline{h}\left(S_g \times \left\{\frac{l}{k}\right\}\right) \overset{(3.12)}{=} S_g \times \left\{\frac{l}{k}\right\}.\end{aligned}$$

С учетом формулы (3.11) получаем, что $S_g \times \{\frac{l}{k}\} = S_g \times \{\frac{l'}{k} - j\}$. Так как $\frac{l}{k}, \frac{l'}{k} \in [0, 1)$, то равенство $\frac{l'}{k} - j = \frac{l}{k}$ выполняется только при $j = 0$, т.е. при

$$\overline{\varphi}'_0 = \overline{\varphi}'. \tag{3.13}$$

Следовательно, $l = l'$.

Так как

$$\begin{aligned}\overline{h}(\gamma(\overline{h}^{-1}(S_g \times \{0\}))) &\overset{(3.12)}{=} \overline{h}(\gamma(S_g \times \{0\})) \overset{(3.2)}{=} \overline{h}(S_g \times \{-1\}) \\ &\overset{(3.12)}{=} S_g \times \{-1\} \overset{(3.2)}{=} \gamma'(S_g \times \{0\})\end{aligned}$$

и согласно лемме 1 либо $\overline{h}\gamma\overline{h}^{-1} = \gamma'$, либо $\overline{h}\gamma\overline{h}^{-1} = \gamma'^{-1}$, то в рассматриваемом случае

$$\overline{h}\gamma\overline{h}^{-1} = \gamma'.$$

Рассмотрим случай b):

$$\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{-r\}. \tag{3.14}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}'_0(S_g \times \{0\}) &\overset{(3.9)}{=} \overline{h}(\overline{\varphi}(\overline{h}^{-1}(S_g \times \{0\}))) \overset{(3.14)}{=} \overline{h}(\overline{\varphi}(S_g \times \{0\})) \\ &\overset{(3.1)}{=} \overline{h}\left(S_g \times \left\{\frac{l}{k}\right\}\right) \overset{(3.14)}{=} S_g \times \left\{-\frac{l}{k}\right\}.\end{aligned}$$

С учетом формулы (3.11) получаем, что $S_g \times \{-\frac{l}{k}\} = S_g \times \{\frac{l'}{k} - j\}$. Так как $-\frac{l}{k} \in (-0,1]$ и $\frac{l'}{k} \in [0,1)$, то равенство $\frac{l'}{k} - j = -\frac{l}{k}$ при $l > 0$ выполняется в случае $j = 1$, т.е.

$$\overline{\varphi}'_0 = \gamma' \overline{\varphi}'. \tag{3.15}$$

Если $l = l' = 0$, то получим, что $j = 0$, т.е.

$$\overline{\varphi}'_0 = \overline{\varphi}'. \tag{3.16}$$

Следовательно, либо $l + l' = k$, либо $l = l' = 0$.

Так как

$$\overline{h}(\gamma(\overline{h}^{-1}(S_g \times \{0\}))) \overset{(3.14)}{=} \overline{h}(\gamma(S_g \times \{0\})) \overset{(3.2)}{=} \overline{h}(S_g \times \{-1\}) \\ \overset{(3.14)}{=} S_g \times \{1\} \overset{(3.2)}{=} \gamma'^{-1}(S_g \times \{0\})$$

и согласно лемме 1 либо $\overline{h}\gamma\overline{h}^{-1} = \gamma'$, либо $\overline{h}\gamma\overline{h}^{-1} = \gamma'^{-1}$, то в рассматриваемом случае

$$\overline{h}\gamma\overline{h}^{-1} = \gamma'^{-1}.$$

Лемма 2 доказана.

Обозначим через

$$p_{S_g} \colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g$$

каноническую проекцию, определенную формулой $p_{S_g}(z, r) = z$.

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть гомеоморфизмы φ и φ' топологически сопряжены. Тогда согласно лемме 1 существуют гомеоморфизм $h \colon M_J \to M_{J'}$ и его поднятие $\overline{h} \colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ такие, что $h\varphi = \varphi' h$ и $\overline{h}(S_g \times \{0\}) = S_g \times \{0\}$. Согласно п. 1) леммы 1 $k = k'$, $n = n'$. Следовательно, $p_J^{-1}(NW(\varphi)) = p_{J'}^{-1}(NW(\varphi')) = S_g \times \mathcal{I}$. Так как гомеоморфизм h отображает компоненты связности неблуждающего множества $NW(\varphi)$ в компоненты связности неблуждающего множества $NW(\varphi')$, то для любого $r \in \mathcal{I}$ существует $r' \in \mathcal{I}$ такое, что $\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{r'\}$. Тогда для любого $r \in \mathcal{I}$ корректно определен гомеоморфизм

$$H_r = p_{S_g}|_{\overline{h}(S_g \times \{r'\})} \overline{h} p_{S_g}^{-1}|_{S_g \times \{r\}} \colon S_g \to S_g,$$

т.е. $\overline{h}(z, r) = (H_r, r')$, где $r, r' \in \mathcal{I}$.

Докажем, что гомеоморфизм H_r изотопен H_0 для любого $r \in \mathcal{I}$.

Определим семейство непрерывных отображений $F_{r,t} \colon S_g \to S_g$ формулой $F_{r,t}(z) = p_{S_g}(\overline{h}(z, rt))$, где $t \in [0,1]$, $r \in \mathcal{I}$. Тогда $F_{r,t}$ определяет гомотопию, соединяющую отображения $F_{r,0} = H_0$ и $F_{r,1} = H_r$. Таким образом, гомеоморфизмы H_0 и H_r гомотопны и, следовательно, изотопны [15; п. 5.15] для любых $r \in \mathcal{I}$.

Согласно лемме 2 возможны три случая. Рассмотрим отдельно каждый из них.

Рассмотрим п. 1) леммы 2: $l = l' \geqslant 0$,

$$\overline{h}\gamma = \gamma'\overline{h}, \tag{3.17}$$

$$\overline{\varphi}' = \overline{h}\overline{\varphi}\overline{h}^{-1} \tag{3.18}$$

и $\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{r\}$ для любого $r \in \mathcal{I}$.

Так как

$$\gamma'^l(\overline{\varphi}'^k(S_g \times \{r\})) \overset{(3.13),(3.1)}{=} \gamma'^l(S_g \times \{r+l\}) \overset{(3.2)}{=} S_g \times \{r\}$$

для любого $r \in \mathcal{I}$ и

$$\gamma'^l\overline{\varphi}'^k \overset{(3.18)}{=} \gamma'^l\overline{h}\overline{\varphi}^k\overline{h}^{-1} \overset{(3.17)}{=} \overline{h}\gamma^l\overline{\varphi}^k\overline{h}^{-1},$$

то $H_r J^l P^k H_r^{-1} = J'^l P'^k$ для любого $r \in \mathcal{I}$. Так как гомеоморфизмы $J^l P^k$, $J'^l P'^k$ являются псевдоаносовскими, H_r изотопен H_0 для любого $r \in \mathcal{I}$, то из предложения 9 следует, что $H_r = H_0$ для любого $r \in \mathcal{I}$. Положим $H = H_0$.

Так как $\overline{h}(\overline{\varphi}(z,0)) = (H(P(z)), \frac{l}{k})$, $\overline{\varphi}'(\overline{h}(z,0)) = (P'(H(z)), \frac{l}{k})$ и $\overline{h}\overline{\varphi} = \overline{\varphi}'\overline{h}$, то $HP = P'H$.

Так как $\overline{h}(\gamma(z,0)) = (H(J(z)), -1)$, $\gamma'(\overline{h}(z,0)) = (J'(H(z)), -1)$ и $\overline{h}\gamma = \gamma'\overline{h}$, то $HJ = J'H$.

Таким образом, доказано, что условие 1) теоремы 1 необходимо при $l = l' \geqslant 0$ и $\overline{h}\gamma = \gamma'\overline{h}$.

Рассмотрим п. 2) леммы 2: $l = l' = 0$,

$$\overline{h}\gamma = \gamma'^{-1}\overline{h},$$

$$\overline{\varphi}' = \overline{h}\overline{\varphi}\overline{h}^{-1}$$

и $\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{-r\}$ для любого $r \in \mathcal{I}$.

Так как $\overline{h}(\overline{\varphi}(z,r)) = (H_r(P(z)), -r)$, $\overline{\varphi}'(\overline{h}(z,0)) = (P'(H_r(z)), -r)$ для любого $r \in \mathcal{I}$ и $\overline{h}\overline{\varphi} = \overline{\varphi}'\overline{h}$, то $H_r P = P' H_r$ для любого $r \in \mathcal{I}$. Так как гомеоморфизмы P, P' являются псевдоаносовскими, H_r изотопен H_0 для любого $r \in \mathcal{I}$, то из предложения 9 следует, что $H_r = H_0$ для любого $r \in \mathcal{I}$. Положим $H = H_0$.

Так как $\overline{h}(\overline{\varphi}(z,0)) = (H(P(z)), \frac{l}{k})$, $\overline{\varphi}'(\overline{h}(z,0)) = (P'(H(z)), \frac{l}{k})$ и $\overline{h}\overline{\varphi} = \overline{\varphi}'\overline{h}$, то $HP = P'H$.

Так как $\overline{h}(\gamma(z,0)) = (H(J(z)), 1)$, $\gamma'^{-1}(\overline{h}(z,0)) = (J'^{-1}(H(z)), 1)$ и $\overline{h}\gamma = \gamma'^{-1}\overline{h}$, то $HJ = J'^{-1}H$.

Таким образом, доказано, что условие 2) теоремы 1 необходимо при $l = l' = 0$ и $\overline{h}\gamma = \gamma'^{-1}\overline{h}$.

Рассмотрим п. 3) леммы 2: $l + l' = k$,

$$\overline{h}\gamma = \gamma'^{-1}\overline{h}, \tag{3.19}$$

$$\gamma'\overline{\varphi}' = \overline{h}\overline{\varphi}\overline{h}^{-1} \tag{3.20}$$

и $\overline{h}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{-r\}$ для любого $r \in \mathcal{I}$.

Так как

$$\gamma'^{k-l}(\overline{\varphi}'^k(S_g \times \{r\})) \overset{(3.1)}{=} \gamma'^{k-l}(S_g \times \{r+k-l\}) \overset{(3.2)}{=} S_g \times \{r\}$$

для любого $r \in \mathcal{I}$ и

$$\gamma'^{k-l}\overline{\varphi}'^{k} \overset{(3.20)}{=} \gamma'^{-l}\overline{h}\overline{\varphi}^{k}\overline{h}^{-1} \overset{(3.19)}{=} \overline{h}\gamma^{l}\overline{\varphi}^{k}\overline{h}^{-1},$$

то $H_r J^l P^k H_r^{-1} = J'^{k-l} P'^k$ для любого $r \in \mathcal{I}$. Так как гомеоморфизмы $J^l P^k$, $J'^{k-l}P'^k$ являются псевдоаносовскими, H_r изотопен H_0 для любого $r, \in \mathcal{I}$, то из предложения 9 следует, что $H_r = H_0$ для любого $r \in \mathcal{I}$. Положим $H = H_0$.

Так как $\overline{h}(\overline{\varphi}(z,0)) = (H(P(z)), \frac{l}{k})$, $\gamma'(\overline{\varphi}'(\overline{h}(z,0))) = (J'(P'(H(z))), \frac{l}{k})$ и $\overline{h}\overline{\varphi} = \gamma'\overline{\varphi}'\overline{h}$, то $HP = J'P'H$.

Так как $\overline{h}(\gamma(z,0)) = (H(J(z)), -1)$, $\gamma'^{-1}(\overline{h}(z,0)) = (J'(H(z)), -1)$ и $\overline{h}\gamma = \gamma'^{-1}\overline{h}$, то $HJ = J'^{-1}H$.

Таким образом, доказано, что условие 3) теоремы 1 необходимо при $l + l' = k$.

Достаточность. Пусть $n = n'$, $k = k'$ и существует гомеоморфизм $H\colon S_g \to S_g$ такой, что $l = l' \geqslant 0$, $HP = P'H$ и $HJ = J'H$. Определим гомеоморфизм $\overline{h}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ формулой $\overline{h}(z,r) = (H(z), r)$. Тогда непосредственно проверяется, что $\overline{h}\overline{\varphi} = \overline{h}\overline{\varphi}'$ и $\overline{h}\gamma = \gamma'\overline{h}$. Таким образом, согласно предложению 10 гомеоморфизм $\overline{h}$ проецируется в гомеоморфизм $h\colon M_J \to M_{J'}$, при этом $h\varphi = \varphi' h$. Достаточность условия 1) теоремы 1 доказана.

Докажем достаточность условий 2) и 3) теоремы 1. Определим гомеоморфизм $\overline{h}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ формулой $\overline{h}(z,r) = (H(z), -r)$. Аналогично условию 1) при условии 2) (при условии 3)) выполняются равенства $\overline{h}\overline{\varphi} = \overline{h}\overline{\varphi}'$, $\overline{h}\gamma = \gamma'^{-1}\overline{h}$ (равенства $\overline{h}\overline{\varphi} = \overline{h}\gamma'\overline{\varphi}'$, $\overline{h}\gamma = \gamma'^{-1}\overline{h}$) и гомеоморфизм $\overline{h}$ проецируется в гомеоморфизм $h\colon M_J \to M_{J'}$ такой, что $h\varphi = \varphi' h$.

Теорема 1 доказана.

§ 4. Взаимосвязь гомеоморфизмов класса $\mathcal{G}_*$ и класса Φ

Настоящий параграф содержит доказательство теоремы 2 и вспомогательной леммы.

Пусть $f \in \mathcal{G}_*$. Заметим, что из объемлющей Ω-сопряженности гомеоморфизма f с гомеоморфизмом класса Φ (см. предложение 5) следует, что компоненты связности неблуждающего множества $NW(f)$ гомеоморфизма f гомеоморфны поверхности S_g одного и того же рода g и имеют одинаковый период k. Положим

$$f_0 = f^k.$$

Напомним, что $\mathcal{G}_* \subset \mathcal{G}$ – подмножество гомеоморфизмов, удовлетворяющих следующему условию. Если $f \in \mathcal{G}_*$ – гомеоморфизм на M^3, то в каждой компоненте связности V множества $M^3 \setminus NW(f)$ существует одномерное f_0-инвариантное слоение, каждый слой которого является открытой дугой, имеющей в точности две граничные точки, лежащие на двух разных компонентах связности множества ∂V. Объединение замыканий всех таких дуг на всех компонентах связности множества $M^3 \setminus NW(f)$ образует f-инвариантное одномерное слоение на M^3, которое обозначим через $\mathcal{L}_f$.

Лемма 3. *Пусть* $f \in \mathcal{G}_*$ *и* V *– компонента связности множества* $M^3 \setminus (NW(f))$. *Тогда на множестве* $\operatorname{cl} V$ *существует двумерное* f_0*-инвариантное слоение* $\mathcal{P}_V$, *каждый слой которого гомеоморфен поверхности* S_g *и пересекает любой слой слоения* $\mathcal{L}_f$ *в точности в одной точке.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{G}_*$ – гомеоморфизм, компоненты связности неблуждающего множества $NW(f)$ которого гомеоморфны поверхности S_g, и V – компонента связности множества $M^3 \setminus NW(f)$. Обозначим через $\mathcal{L}_V$ одномерное слоение на V, каждый слой которого является компонентой связности пересечения слоя слоения $\mathcal{L}_f$ с компонентой связности V.

Согласно предложению 5 граница множества V состоит из аттрактора A и репеллера R гомеоморфизма f_0. Для точки $z \in A$ обозначим через l_z слой слоения $\mathcal{L}_V$, содержащий точку z в своем замыкании. Пусть $w \in V \cap l_z$. Так как граница любого слоя слоения $\mathcal{L}_V$ состоит в точности из двух точек, одна из которых лежит на аттракторе A, а другая на репеллере R, то определено непрерывное отображение $\xi\colon V \to A$, заданное формулой $\xi(w) = z$.

Таким образом, тройка (V, ξ, A) определяет ориентируемое расслоение тотального пространства V с проекцией ξ над компактным пространством A и слоем, гомеоморфным интервалу $(0,1)$. Известно (см. [16; гл. 4, теорема 4.3]), что ориентируемое расслоение над компактной поверхностью A со слоем, гомеоморфным $\mathbb{R}$ в каждой точке пространства A, изоморфно стандартному тривиальному расслоению $(S_g \times \mathbb{R}, p_{S_g}, S_g)$, где

$$p_{S_g}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g$$

– каноническая проекция. Очевидно, что стандартные тривиальные расслоения $(S_g \times \mathbb{R}, p_{S_g}, S_g)$ и $(S_g \times (0,1), p_{S_g}, S_g)$ изоморфны. Следовательно, расслоение (V, ξ, A) изоморфно стандартному тривиальному расслоению $(S_g \times (0,1), p_{S_g}, S_g)$ и существуют гомеоморфизмы $h\colon V \to S_g \times (0,1)$ и $H\colon A \to S_g$ такие, что $p_{S_g} h = H\xi$. Определим слоение $\widetilde{\mathcal{L}}$ как $\{p_{S_g}^{-1}(z) \cap S_g \times [0,1] \mid z \in S_g\}$. Так как граница каждого слоя слоения $\mathcal{L}_V$ состоит из двух точек, лежащих на разных компонентах связности границы множества V, то гомеоморфизм h продолжается до гомеоморфизма $h\colon \operatorname{cl} V \to S_g \times [0,1]$ так, что h переводит замыкание каждого слоя $l_z \in \mathcal{L}_V$ в слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Пусть $\widetilde{f} = h f_0 h^{-1}\colon S_g \times [0,1] \to S_g \times [0,1]$.

Построим на пространстве $S_g \times [0,1]$ $\widetilde{f}$-инвариантное слоение $\widetilde{\mathcal{P}}$ такое, что каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{P}}$ гомеоморфен S_g и пересекает любой слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в единственной точке.

Без ограничения общности можно считать, что $h(A) = S_g \times \{0\}$. Тогда множество $\widetilde{A} = h(A)$ является аттрактором гомеоморфизма $\widetilde{f}$, $h(R) = S_g \times \{1\}$ и множество $\widetilde{R} = h(R)$ является репеллером гомеоморфизма $\widetilde{f}$. Так как слоение $\mathcal{L}_V$ инвариантно относительно f_0 и h отображает замыкание каждого слоя слоения $\mathcal{L}_V$ в слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$, то слоение $\widetilde{\mathcal{L}}$ является инвариантным относительно $\widetilde{f}$.

Докажем, что существует поверхность $\widetilde{\Sigma} \subset S_g \times (0,1)$ рода g, которая пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в единственной точке и удовлетворяет условию $\widetilde{f}(\widetilde{\Sigma}) \cap \widetilde{\Sigma} = \varnothing$.

Положим $\Sigma = S_g \times \{\frac{1}{2}\}$. Если $\widetilde{f}(\Sigma) \cap \Sigma = \varnothing$, то $\widetilde{\Sigma} = \Sigma$. Если $\widetilde{f}(\Sigma) \cap \Sigma \neq \varnothing$, то построим поверхность $\widetilde{\Sigma}$ следующим образом.

Обозначим через U замкнутое подмножество в $S_g \times [0,1]$, которое ограничено поверхностями Σ и $\widetilde{A}$. Так как $\widetilde{A}$ – аттрактор гомеоморфизма $\widetilde{f}$, то существует число $r \in \mathbb{N}$ такое, что $\widetilde{f}^{2^r}(U) \subset \operatorname{int} U$. Существование поверхности $\widetilde{\Sigma}$ докажем индукцией по $r \in \mathbb{N}$.

1) Пусть $r = 1$. Тогда

$$\widetilde{f}^2(\Sigma) \cap \Sigma = \varnothing, \qquad \widetilde{f}^2(\Sigma) \subset \operatorname{int} U. \tag{4.1}$$

Положим $U' = U \cup \widetilde{f}(U)$, $\overline{\Sigma} = \partial(U')$ (на рис. 1 поверхность $\overline{\Sigma}$ изображена сплошной линией), $\Sigma' = \widetilde{f}(\Sigma)$, $\Lambda = \Sigma \cap \overline{\Sigma}$ и $\Lambda' = \Sigma' \cap \overline{\Sigma}$ (см. рис. 1). Тогда $\overline{\Sigma} = \Lambda \cup \Lambda'$.

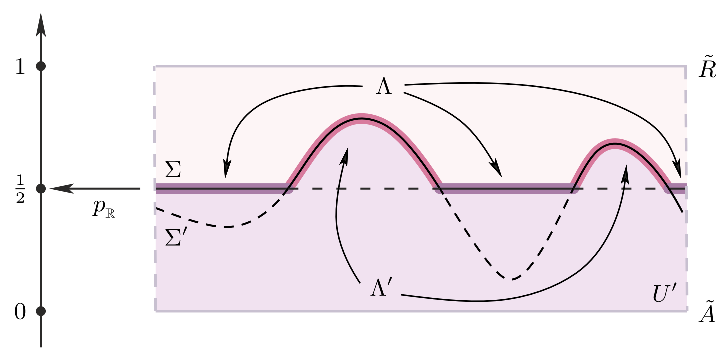

Рис. 1. Поверхности Σ и Σ'.

Докажем, что поверхность $\overline{\Sigma}$ пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в единственной точке. Предположим противное. Пусть существует слой $\widetilde{l}$ слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$, пересекающий поверхность $\overline{\Sigma}$ более чем в одной точке. Так как слоение $\widetilde{\mathcal{L}}$ инвариантно относительно $\widetilde{f}$ и поверхность Σ пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ трансверсально и в единственной точке, то поверхность Σ' также пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ трансверсально и в единственной точке. Следовательно, пересечение $\widetilde{l} \cap \overline{\Sigma}$ состоит из двух точек, $\widetilde{w} = \widetilde{l} \cap \Lambda$ и $\widetilde{w}' = \widetilde{l} \cap \Lambda'$. Тогда слой $\widetilde{l}$ разбивается на три кривые. Первая кривая имеет граничные точки $\widetilde{l} \cap \widetilde{A}$, $\widetilde{w}$ и содержится в области U'. Вторая кривая имеет граничные точки $\widetilde{w}$, $\widetilde{w}'$ и лежит вне области U'. Так как слой $\widetilde{l}$ пересекает поверхность $\overline{\Sigma}$ трансверсально и по предположению в точности в двух различных точках, то третья кривая с граничными точками $\widetilde{w}'$ и $\widetilde{l} \cap \widetilde{R}$ полностью содержится в области U'. Получили противоречие с тем, что $U' \cap \widetilde{R} = \varnothing$.

Покажем, что поверхность $\overline{\Sigma}$ непрерывным шевелением вдоль слоев преобразуется в поверхность $\widetilde{\Sigma}$ рода g такую, что $\widetilde{f}(\widetilde{\Sigma}) \cap \widetilde{\Sigma} = \varnothing$.

Положим $U'' = \widetilde{f}(U) \cup \widetilde{f}^2(U)$, $\overline{\Sigma}' = \partial U''$ (на рис. 2 поверхность $\overline{\Sigma}'$ изображена сплошной линией). Как и для поверхности $\overline{\Sigma}$, доказывается, что поверхность $\overline{\Sigma}'$ пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в единственной точке.

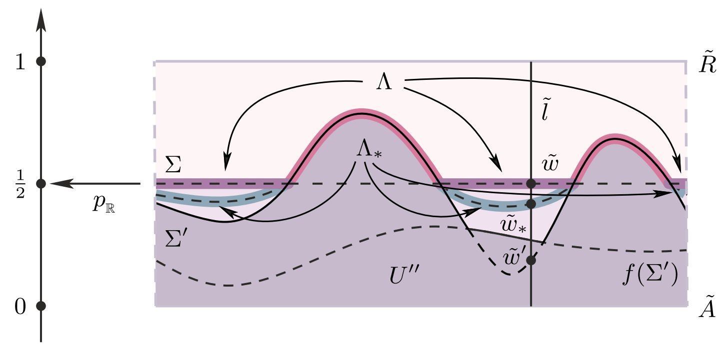

Рис. 2. Множество Λ_*.

Обозначим через

$$p_{\mathbb{R}}\colon S_g \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

каноническую проекцию. Для каждого слоя $\widetilde{l}$, пересекающего множества Λ и поверхность $\overline{\Sigma}'$ в точках $\widetilde{w}$ и $\widetilde{w}'$ соответственно, обозначим через $\widetilde{w}_*$ точку на слое $\widetilde{l}$ такую, что $p_{\mathbb{R}}(\widetilde{w}_*) = \frac{1}{2}(p_{\mathbb{R}}(\widetilde{w}) + p_{\mathbb{R}}(\widetilde{w}'))$. Точка $\widetilde{w}_*$ является серединой отрезка, лежащего на слое $\widetilde{l}$, с концами $\widetilde{w}$ и $\widetilde{w}'$. Обозначим через Λ_* множество всех таких точек, являющихся серединами отрезков, лежащих на слоях слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$, с концами на поверхностях Λ и $\overline{\Sigma}'$ (см. рис. 2).

Положим $\widetilde{\Sigma} = \Lambda_* \cup \Lambda'$. По построению поверхность $\widetilde{\Sigma}$ гомеоморфна поверхности Σ' рода g и пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в единственной точке.

Обозначим через $\widetilde{U}$ подпространство в $S_g \times [0,1]$, ограниченное поверхностями $\widetilde{A}$ и $\widetilde{\Sigma}$. Если $\widetilde{w} \in \Lambda'$, то $\widetilde{f}(\widetilde{w}) \in \Sigma'' \subset \operatorname{int} \widetilde{U}$. Если $\widetilde{w} \in \Lambda_*$, то $\widetilde{w} \in \operatorname{int} U$ и $\widetilde{f}(\widetilde{w}) \in \operatorname{int} \widetilde{f}(U) \subset \operatorname{int} \widetilde{U}$. Таким образом, $\widetilde{f}(\widetilde{\Sigma}) \subset \operatorname{int} \widetilde{U}$ и $\widetilde{f}(\widetilde{\Sigma}) \cap \widetilde{\Sigma} = \varnothing$. База индукции доказана.

2) Предположим, что для $r = k$ существует поверхность $\widetilde{\Sigma}$ рода g, которая пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в единственной точке, и $\widetilde{f}(\widetilde{\Sigma}) \cap \widetilde{\Sigma} = \varnothing$.

3) Пусть $r = k+1$. Положим $\widetilde{g} = \widetilde{f}^{2^k}$. Тогда $\widetilde{g}^2(\Sigma) \cap \Sigma = \varnothing$ и согласно базе индукции ($r = 1$) существует поверхность $\widetilde{\Sigma}' \subset S_g \times (0,1)$ рода g такая, что $\widetilde{\Sigma}'$ пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в единственной точке и $\widetilde{g}(\widetilde{\Sigma}') \cap \widetilde{\Sigma}' = \varnothing$. Следовательно, $\widetilde{f}^{2^k}(\widetilde{\Sigma}') \cap \widetilde{\Sigma}' = \varnothing$. Из предположения индукции следует, что существует поверхность $\widetilde{\Sigma} \subset S_g \times (0,1)$ рода g такая, что $\widetilde{\Sigma}$ пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в единственной точке и $\widetilde{f}(\widetilde{\Sigma}) \cap \widetilde{\Sigma} = \varnothing$. Утверждение индукции доказано.

Построим слоение $\widetilde{\mathcal{P}}$. Пусть $\widetilde{\Sigma} \subset S_g \times (0,1)$ – поверхность рода g, которая пересекает каждый слой слоения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в единственной точке и удовлетворяет условию $\widetilde{f}(\widetilde{\Sigma}) \cap \widetilde{\Sigma} = \varnothing$, $\widetilde{U}$ – замкнутое подмножество в $S_g \times [0,1]$, ограниченное поверхностями $\widetilde{A}$ и $\widetilde{\Sigma}$. Тогда $\widetilde{f}(\widetilde{\Sigma}) \subset \operatorname{int} \widetilde{U}$ и множество $K = \widetilde{U} \setminus \widetilde{f}(\widetilde{U})$ является фундаментальной областью действия $\widetilde{f}$ на $S_g \times (0,1)$, т.е. $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{f}^i(K) = S_g \times (0,1)$

и $\widetilde{f}^i(K) \cap \widetilde{f}^j(K) = \varnothing$ для $i \neq j$. Для слоя $\widetilde{l} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ положим $\widetilde{l}_K = \widetilde{l} \cap \operatorname{cl} K$, $\widetilde{w}_0 = \widetilde{l} \cap \widetilde{f}(\widetilde{\Sigma})$ и $\widetilde{w}_1 = \widetilde{l} \cap \widetilde{\Sigma}$. Параметризуем кривую $\widetilde{l}_K$, сопоставляя точке $\widetilde{w} \in \widetilde{l}_K$ параметр

$$t = \frac{p_{\mathbb{R}}(\widetilde{w}) - p_{\mathbb{R}}(\widetilde{w}_0)}{p_{\mathbb{R}}(\widetilde{w}_1) - p_{\mathbb{R}}(\widetilde{w}_0)},$$

равный отношению длины отрезка, заключенного между точками $\widetilde{w}_0$ и $\widetilde{w}$, к длине отрезка $\widetilde{l}_K$. Обозначим параметризацию через $\rho\colon \operatorname{cl} K \to [0,1]$. Тогда $\{\widetilde{A}, \widetilde{R}, \widetilde{f}^i(\rho^{-1}(t)) \mid i \in \mathbb{Z},\, t \in [0,1]\}$ – искомое слоение $\widetilde{\mathcal{P}}$.

Так как гомеоморфизмы $f_0|_{\operatorname{cl} V}$ и $\widetilde{f}$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма h, то $\mathcal{P}_V = h^{-1}(\widetilde{\mathcal{P}})$ – двумерное f_0-инвариантное слоение, каждый слой которого гомеоморфен поверхности S_g и пересекает слои слоения $\mathcal{L}_f$ в точности в одной точке.

Лемма 3 доказана.

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Так как гомеоморфизм $\varphi \in \Phi$ обладает одномерным инвариантным слоением $\mathcal{L}_\varphi = \{p_J(z \times \mathbb{R}) \mid z \in S_g\}$, то $\Phi \subset \mathcal{G}_*$.

Докажем, что гомеоморфизм $f \in \mathcal{G}_*$ является топологически сопряженным некоторому гомеоморфизму из класса Φ.

Пусть f – гомеоморфизм из класса $\mathcal{G}_*$. Согласно предложению 5 без ограничения общности можно считать, что f задан на многообразии M_J с естественной проекцией p_J и совпадает с некоторым гомеоморфизмом $\varphi = \varphi_{P,J,n,k,l}\colon M_J \to M_J$ из класса Φ на их общем неблуждающем множестве. При этом его поднятие $\overline{f}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ совпадает с гомеоморфизмом $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_{P,J,n,k,l}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ на множестве $p_J^{-1}(NW(f)) = S_g \times \mathcal{I}$, где $\mathcal{I} = \{\frac{i}{2nk}, i \in \mathbb{Z}\}$.

Построим гомеоморфизм $\overline{h}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ такой, что $\overline{h}\gamma = \gamma\overline{h}$ и $\overline{hf} = \overline{\varphi}_{P,J,n,k,l}\overline{h}$.

Рассмотрим случай $k = 1$, т.е. гомеоморфизм $\varphi_{P,n,1,0}$.

Из леммы 3 следует, что гомеоморфизм f имеет f-инвариантное двумерное слоение $\mathcal{P}_f$, каждый слой которого гомеоморфен S_g и пересекает компоненты связности слоения $\mathcal{L}_f \cap (M_J \setminus NW(f))$ в единственной точке. Тогда поднятия $\mathcal{P}_{\overline{f}}$ и $\mathcal{L}_{\overline{f}}$ слоений $\mathcal{P}_f$ и $\mathcal{L}_f$ на $S_g \times \mathbb{R}$ являются инвариантными относительно гомеоморфизма $\overline{f}$ и слои этих слоений пересекаются по единственной точке. Заметим, что компоненты связности множества $S_g \times \mathcal{I}$ являются слоями слоения $\mathcal{P}_{\overline{f}}$.

Для $i \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ положим $\overline{V}_i = S_g \times (\frac{i}{2n}, \frac{i+1}{2n})$ и $\overline{\mathcal{B}_i} = S_g \times \{\frac{i}{2n}\}$. Построим гомеоморфизм $H_i\colon \operatorname{cl} \overline{V}_i \to \operatorname{cl} \overline{V}_i$, $i \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$, сопрягающий отображения $\overline{f}|_{\operatorname{cl} \overline{V}_i}$ и $\overline{\varphi}|_{\operatorname{cl} \overline{V}_i}$. Обозначим через $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{P}_i$ ограничения слоений $\mathcal{L}_{\overline{f}}$, $\mathcal{P}_{\overline{f}}$ на $\operatorname{cl} \overline{V}_i$. Положим $\widetilde{\mathcal{L}_i} = \{z \times [\frac{i}{2n}, \frac{i+1}{2n}]\}_{z \in S_g}$, $\widetilde{\mathcal{P}_i} = \{S_g \times \{r\}\}_{r \in [\frac{i}{2n}, \frac{i+1}{2n}]}$. Слоения $\widetilde{\mathcal{L}_i}$ и $\widetilde{\mathcal{P}_i}$ являются инвариантными для гомеоморфизма $\overline{\varphi}$.

Для точки $z \in \overline{\mathcal{B}}_i$ обозначим через l_z слой слоения $\mathcal{L}_i$ такой, что $z \in \operatorname{cl} l_z$. Зафиксируем точку $z \in \overline{\mathcal{B}}_i$ и обозначим через Σ_x слой слоения $\mathcal{P}_i$, проходящий через точку $x \in \operatorname{cl} l_z$. Зафиксируем точку $x \in l_z$. Положим $y = l_z \cap \overline{f}(\Sigma_x)$.

Обозначим через $\sigma \subset l_z$ замкнутую дугу, ограниченную точками x и y. Введем аналогичные обозначения “с волной” для гомеоморфизма $\overline{\varphi}$, выбрав $\widetilde{z} = z$. Пусть $\mu_\sigma\colon \sigma \to \widetilde{\sigma}$ – гомеоморфизм такой, что $\mu_\sigma(x) = \widetilde{x}$ (рис. 3).

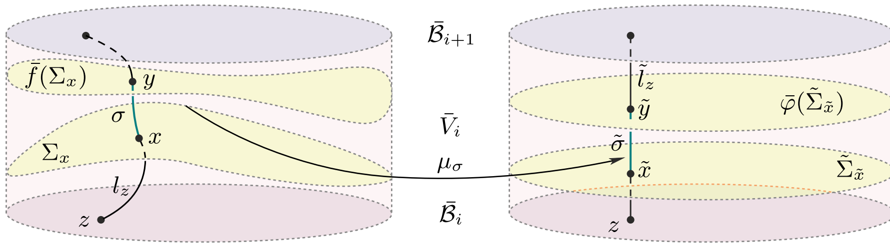

Рис. 3. Действие гомеоморфизма μ_σ.

Так как топологическое пространство, ограниченное слоями Σ_x, $\overline{f}(\Sigma_x) = \Sigma_y$ и содержащее дугу σ, является фундаментальной областью действия f на $\overline{V}_i$, то для любой точки $w \in l_z$ существует единственное целое число m такое, что $(\overline{f})^m(\Sigma_w) \cap (\sigma \setminus \{y\}) \neq \varnothing$. Определим гомеоморфизм $\mu\colon l_z \to \widetilde{l}_z$ формулой

$$\mu(w) = \overline{\varphi}^{-m}(\widetilde{\Sigma}_{\mu_\sigma(\overline{f}^m(\Sigma_w)\cap\sigma)}) \cap \widetilde{l}_z$$

и по непрерывности продолжим построенное отображение до гомеоморфизма $\mu\colon \operatorname{cl} l_z \to \operatorname{cl} \widetilde{l}_z$ (рис. 4).

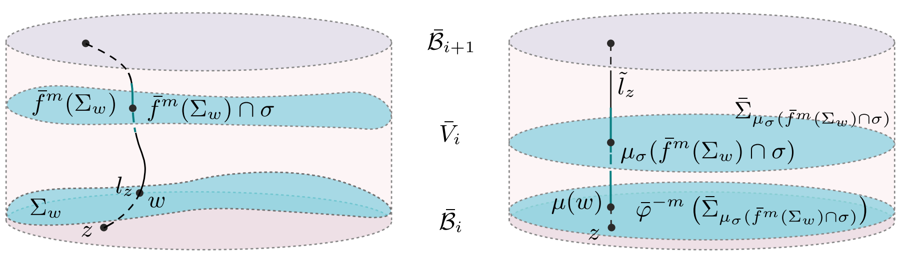

Рис. 4. Действие гомеоморфизма μ.

Заметим, что для любой точки $a \in \operatorname{cl} \overline{V}_i$ существует единственная пара точек $z_a \in \overline{\mathcal{B}}_i$, $w_a \in \operatorname{cl} l_z$ такая, что $a = l_{z_a} \cap \Sigma_{w_a}$. Определим гомеоморфизм $\overline{h}_i\colon \operatorname{cl} \overline{V}_i \to \operatorname{cl} \overline{V}_i$ формулой

$$\overline{h}_i(a) = \widetilde{l}_{z_a} \cap \widetilde{\Sigma}_{\mu(w_a)}$$

(рис. 5). Непосредственно проверяется, что $\overline{h}_i \overline{f}|_{\operatorname{cl} \overline{V}_i} = \overline{\varphi}|_{\operatorname{cl} \overline{V}_i} \overline{h}_i$.

Определим гомеоморфизмы $H_i, H_{i+1}\colon S_g \to S_g$ формулами

$$H_i = p_{S_g}|_{\overline{h}(S_g \times \{\frac{i}{2n}\})} \overline{h}_i p_{S_g}^{-1}|_{S_g \times \{\frac{i}{2n}\}},$$
$$H_{i+1} = p_{S_g}|_{\overline{h}(S_g \times \{\frac{i+1}{2n}\})} \overline{h}_i p_{S_g}^{-1}|_{S_g \times \{\frac{i+1}{2n}\}},$$

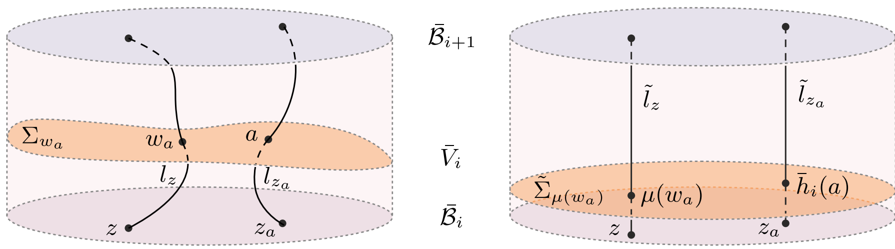

Рис. 5. Действие гомеоморфизма $\overline{h}_i$.

где $p_{S_g}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g$ – естественная проекция, т.е. $\overline{h}_i(z, \frac{i}{2n}) = (H_i(z), \frac{i}{2n})$ и $\overline{h}_i(z, \frac{i+1}{2n}) = (H_{i+1}(z), \frac{i+1}{2n})$.

По построению $H_i = \mathrm{id}_{S_g}$. Покажем, что $H_{i+1} = \mathrm{id}_{S_g}$.

Сначала докажем, что гомеоморфизм H_i гомотопен H_{i+1}. Определим семейство непрерывных отображений $F_t\colon S_g \to S_g$ $(t \in [0,1])$ формулой

$$F_t(z) = p_{S_g}\biggl(\overline{h}_i\biggl(z, \frac{1}{2nk}(i+t)\biggr)\biggr).$$

Тогда семейство F_t определяет гомотопию, соединяющую отображения $F_0 = H_i$ и $F_1 = H_{i+1}$. Таким образом, гомеоморфизмы H_i и H_{i+1} гомотопны.

Так как

$$\overline{h}_i\biggl(\overline{\varphi}\biggl(z, \frac{i+1}{2n}\biggr)\biggr) = \overline{h}_i\biggl(P(z), \frac{i+1}{2n}\biggr) = \biggl(H_{i+1}(P(z)), \frac{i+1}{2n}\biggr),$$
$$\overline{f}\biggl(\overline{h}_i\biggl(z, \frac{i+1}{2n}\biggr)\biggr) = \overline{f}\biggl(H_{i+1}(z), \frac{i+1}{2n}\biggr) = \biggl(P(H_{i+1}(z)), \frac{i+1}{2n}\biggr)$$

и по построению $\overline{h}_i\overline{\varphi}|_{\mathrm{cl}\,\overline{V}_i} = \overline{f}|_{\mathrm{cl}\,\overline{V}_i}\overline{h}_i$, то $H_{i+1}P = PH_{i+1}$. Так как гомеоморфизм H_{i+1} гомотопен тождественному отображению id_{S_g} и гомеоморфизм P является псевдоаносовским отображением, то согласно предложению 9 $H_{i+1} = \mathrm{id}_{S_g}$.

Обозначим через $\overline{H}\colon S_g \times [0,1] \to S_g \times [0,1]$ гомеоморфизм, совпадающий с $\overline{h}_i$ на $\mathrm{cl}\,\overline{V}_i$ для любого $i \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$, а через $[r]$ – целую часть числа $r \in \mathbb{R}$. Определим искомый гомеоморфизм $\overline{h}$ формулой

$$\overline{h}(z, r) = \gamma^{-[r]}\overline{H}\gamma^{[r]}(z, r).$$

Так как $\overline{h}\gamma = \gamma\overline{h}$, то гомеоморфизм $\overline{h}\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ проецируется в гомеоморфизм $h\colon M_J \to M_J$ (см. предложение 10). По построению гомеоморфизм $\overline{H}$ сопрягает гомеоморфизмы $\overline{f}$ и $\overline{\varphi}$ на $S_g \times [0,1]$. Непосредственно проверяется, что $\overline{hf} = \overline{\varphi}\overline{h}$. Следовательно, $hf = \varphi h$.

Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi = \varphi_{P,J,n,k,l}$ при $k > 1$. Гомеоморфизмы

$$\gamma^l\overline{f}^k, \gamma^l\overline{\varphi}^k\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$$

являются поднятиями гомеоморфизмов

$$f^k, \varphi^k \colon M_J \to M_J$$

такими, что $\gamma^l(\overline{f}^k(z,r)) = \gamma^l(\overline{\varphi}^k(z,r)) = (J^l(P^k(z)), r)$ для любого $r \in \mathcal{I}$, где $J^l P^k \colon S_g \to S_g$ – псевдоаносовский гомеоморфизм. В силу случая $k = 1$ существует гомеоморфизм $\widetilde{h} \colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ такой, что $\widetilde{h}\gamma = \gamma\widetilde{h}$ и $\widetilde{h}\gamma^l\overline{f}^k = \gamma^l\overline{\varphi}^k\widetilde{h}$. Отсюда непосредственно следует, что $\widetilde{h}\overline{f}^k = \overline{\varphi}^k\widetilde{h}$.

Для $j = 0, \dots, k-1$ определим множества $\overline{W}_j = S_g \times [\frac{jl}{k}, \frac{jl}{k} + \frac{1}{k}]$ и гомеоморфизм $\overline{h}_j \colon \overline{W}_j \to \overline{W}_j$ формулой $\overline{h}_j = \overline{\varphi}^j\widetilde{h}(\overline{f})^{-j}$. Положим $\overline{W} = \overline{W}_0 \cup \dots \cup \overline{W}_{k-1}$ и обозначим через $\overline{H} \colon \overline{W} \to \overline{W}$ гомеоморфизм, совпадающий с $\overline{h}_j$ на $\overline{W}_j$ для $j = 0, \dots, k-1$.

Для $r \in \mathbb{R}$ обозначим через $m(r)$ целое число такое, что $(z, r - m(r)) \in \overline{W}$. Определим гомеоморфизм $\overline{h} \colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ формулой

$$\overline{h}(z,r) = \gamma^{-m(r)}\overline{H}\gamma^{m(r)}(z,r).$$

Непосредственно проверяется, что $\overline{hf} = \overline{\varphi}\overline{h}$. Так как $\overline{h}\gamma = \gamma\overline{h}$, то гомеоморфизм $\overline{h} \colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R}$ проецируется в гомеоморфизм $h \colon M_J \to M_J$ (см. предложение 10). Следовательно, $hf = \varphi h$.

Теорема 2 доказана.

§ 5. Обобщенные псевдоаносовские гомеоморфизмы в неблуждающем множестве гомеоморфизмов трехмерных многообразий

Обозначим через $P_0 \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ сохраняющий ориентацию обобщенный псевдоаносовский гомеоморфизм двумерной сферы с дилатацией λ (существование такого гомеоморфизма следует из предложения 7). Тогда гомеоморфизм $P_1 = P_0^2$ является сохраняющим ориентацию обобщенным псевдоаносовским гомеоморфизмом двумерной сферы с дилатацией λ^2.

Так как дилатация обобщенных псевдоаносовских гомеоморфизмов является топологическим инвариантом и на сфере $\mathbb{S}^2$ существует в точности два изотопических класса гомеоморфизмов (один из которых состоит из всех сохраняющих ориентацию отображений, а другой – из меняющих ориентацию отображений), то $P_0, P_1 \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ – топологически несопряженные, но изотопные обобщенные псевдоаносовские гомеоморфизмы. Следовательно, существует изотопия $F_t \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ $(t \in [0,1])$ такая, что $F_0 = P_0$ и $F_1 = P_1$.

Поставим в соответствие каждой точке $s \in \mathbb{S}^1$ параметр $r \in [0,1)$ таким образом, что $r \in p^{-1}(s(r))$, где $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ – накрытие и $s(r) \in \mathbb{S}^1$ – точка, соответствующая параметру r. Определим гомеоморфизм $f \colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ формулой

$$f(z, s(r)) = \begin{cases} (F_{2r}(z), \varphi_{1,1,0}(s(r))), & \text{если } \; r \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), \\ (F_{-2r+2}(z), \varphi_{1,1,0}(s(r))), & \text{если } \; r \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Так как диффеоморфизм $\varphi_{1,1,0}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ является отображением типа источник-сток с источником в точке $p(0)$ и стоком в точке $p(\frac{1}{2})$, то непосредственно проверяется, что неблуждающее множество построенного отображения f состоит из двух цилиндрически вложенных сфер, $\mathbb{S}^2_R = \mathbb{S}^2 \times \{p(0)\}$ и $\mathbb{S}^2_A = \mathbb{S}^2 \times \{p(\frac{1}{2})\}$, таких, что сфера $\mathbb{S}^2_R$ является репеллером для f, сфера $\mathbb{S}^2_A$ является аттрактором для f. Отображение $f|_{\mathbb{S}^2_R}\colon \mathbb{S}^2_R \to \mathbb{S}^2_R$ топологически сопряжено P_0, а отображение $f|_{\mathbb{S}^2_A}\colon \mathbb{S}^2_A \to \mathbb{S}^2_A$ топологически сопряжено P_1. Следовательно, гомеоморфизмы $f|_{\mathbb{S}^2_R}$ и $f|_{\mathbb{S}^2_A}$ не являются топологически сопряженными.

Построенный пример показывает, что гомеоморфизмы трехмерных многообразий с обобщенными псевдоаносовскими отображениями в неблуждающем множестве имеют более сложную динамику, отличную от динамики отображений класса $\mathcal{G}$ с псевдоаносовскими гомеоморфизмами в неблуждающем множестве.

Список литературы

[1] V. Z. Grines, Yu. A. Levchenko, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “On the dynamical coherence of structurally stable 3-diffeomorphisms”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **19**:4 (2014), 506–512.

[2] В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, О. В. Починка, “О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Нелинейная динам.*, **10**:1 (2014), 17–33.

[3] V. Grines, Yu. Levchenko, V. Medvedev, O. Pochinka, “The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets”, *Nonlinearity*, **28**:11 (2015), 4081–4102.

[4] В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. В. Жужома, “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях”, *Матем. заметки*, **78**:6 (2005), 813–826; англ. пер.: V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma, “On surface attractors and repellers in 3-manifolds”, *Math. Notes*, **78**:6 (2005), 757–767.

[5] Р. В. Плыкин, “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84(126)**:2 (1971), 301–312; англ. пер.: R. V. Plykin, “The topology of basis sets for Smale diffeomorphisms”, *Math. USSR-Sb.*, **13**:2 (1971), 297–307.

[6] V. Z. Grines, O. V. Pochinka, E. E. Chilina, “Dynamics of 3-homeomorphisms with two-dimensional attractors and repellers”, *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), **270**:5 (2023), 683–692.

[7] V. Z. Grines, O. V. Pochinka, E. E. Chilina, “On homeomorphisms of three-dimensional manifolds with pseudo-Anosov attractors and repellers”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **29**:1 (2024), 156–173.

[8] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2011, 424 с.

[9] А. Ю. Жиров, *Топологическая сопряженность псевдоаносовских гомеоморфизмов*, МЦНМО, М., 2013, 368 с.

[10] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru, *Thurston’s work on surfaces*, Transl. from the French, Math. Notes, **48**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2021, xvi+254 pp.

[11] H. Masur, J. Smillie, “Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms”, *Comment. Math. Helv.*, **68**:2 (1993), 289–307.

[12] E. E. Chilina, “On the centralizer and conjugacy of pseudo-Anosov homeomorphisms”, *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, **21**:1 (2025), 103–116.

[13] Н. Стинрод, *Топология косых произведений*, ИЛ, М., 1953, 274 с.; пер. с англ.: N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton Math. Ser., **14**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1951, viii+224 pp.

[14] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, Наука, М., 1977, 487 с.; англ. пер.: D. B. Fuks, V. A. Rokhlin, *Beginner's course in topology. Geometric chapters*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1984, xi+519 pp.

[15] Х. Цишанг, Э. Фогт, Х. Колдевай, *Поверхности и разрывные группы*, Наука, М., 1988, 686 с.; пер. с англ.: H. Zieschang, E. Vogt, H.-D. Coldewey, *Surfaces and planar discontinuous groups*, Transl. from the German, Lecture Notes in Math., **835**, Springer, Berlin, 1980, x+334 pp.; H. Zieschang, *Finite groups of mapping classes of surfaces*, Lecture Notes in Math., **875**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, viii+340 pp.

[16] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979, 279 с.; пер. с англ.: M. W. Hirsch, *Differential topology*, Reprint of the 1976 original, Grad. Texts in Math., **33**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 2012, x+221 pp.

Поступила в редакцию
29.03.2025

Ольга Витальевна Починка
(Olga V. Pochinka)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Екатерина Евгеньевна Чилина
(Ekaterina E. Chilina)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: k.chilina@yandex.ru